

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

## ТЕОРИЯ ФЕРМИ-ЖИДКОСТИ

(свойства жидкого  $\text{He}^3$  при низких температурах)

А. А. Абрикосов и И. М. Халатников

## ВВЕДЕНИЕ

Исследование сверхтекучести гелия II поставило вопрос о свойствах квантовой жидкости, т. е. системы взаимодействующих частиц, в поведении которых существенна роль квантовых эффектов. Теория сверхтекучести Л. Д. Ландау была в то же время первой теорией квантовой жидкости. Она описывала свойства так называемых бозе-жидкостей, т. е. квантовых систем взаимодействующих частиц, возбуждения которых подчиняются статистике Бозе.

Однако, кроме таких жидкостей, существуют и другие, составляющие гораздо более обширную группу, так называемые ферми-жидкости, возбуждения которых обладают спином  $1/2$  и подчиняются статистике Ферми. Сюда относятся жидкий гелий-3, электроны в металлах и, возможно, тяжелые ядра, хотя, конечно, последний случай является совершенно специфическим. Вплоть до недавнего времени не существовало никакой теории ферми-жидкостей. Обычно теоретические расчеты ограничивались подходом, аналогичным тому, который применялся к бозе-жидкостям: предполагался какой-то энергетический спектр, который затем подставлялся в формулу фермиевского распределения.

Ввиду того, что в металлах дело очень осложнялось анизотропией спектров, трудно было проверить адекватность такого подхода. Что касается жидкого гелия-3 при низких температурах, то в этом случае из экспериментальных данных было довольно ясно, что такой подход не всегда удачен.

Последовательная теория ферми-жидкостей была создана Л. Д. Ландау в 1956 г.<sup>1</sup> Им было показано, что, в противоположность бозе-жидкостям, в ферми-жидкостях весьма существенную роль играет взаимодействие возбуждений, так что возбуждения в ферми-жидкости не во всех случаях могут рассматриваться как идеальный газ.

В настоящей статье мы изложим теорию ферми-жидкости в применении к изотропной модели и покажем, как теория Ландау позволяет объяснить различные свойства жидкого гелия-3. В дополнение к этому мы изложим недавно законченную работу Л. Д. Ландау, в которой показано, как основные предположения теории ферми-жидкости следуют из микроскопического рассмотрения взаимодействия, а также изложим теорию разреженного ферми-газа. В этом случае удастся получить основные величины теории ферми-жидкости путем конкретного расчета.

Прежде чем перейти к изложению теории, мы для удобства дальнейших применений напомним основные свойства жидкого гелия-3. Гелий с атомным весом 3 сжижается при температуре  $3,2^\circ \text{K}$  (н-точка  $T_c = 3,3^\circ$ ,  $p_c = 845 \text{ мм рт. ст.}$ ) и вплоть до самых низких

при которых он исследовался ( $\sim 0,2^\circ \text{ K}$ ), и при давлениях, меньших 30 атмосфер, остается жидким. Это объясняется теми же причинами, что и в случае гелия-4: слабость взаимодействия между атомами и малостью их массы. Последнее обстоятельство приводит к тому, что длина волны де-Бройля, соответствующая движению атомов гелия-3 при низких температурах, может быть больше их взаимного расстояния, т. е. жидкость становится квантовой.

Вплоть до самых низких обследованных температур жидкий гелий-3 не становится сверхтекучим. Ввиду того, что согласно теории Л. Д. Ландау всякая бозе-жидкость должна обладать сверхтекучестью, в то время как ферми-жидкость не обладает этим свойством, гелий-3 следует считать ферми-жидкостью. Надо сказать, что это обстоятельство не является тривиальным и не следует автоматически из того факта, что атомы гелия-3 обладают спином  $1/2$ . Система таких атомов могла бы обладать исключительно бозевскими возбуждениями. Более того, как мы увидим в дальнейшем, такие возбуждения действительно существуют, хотя и не играют существенной роли в определении свойств гелия-3. Только отсутствие сверхтекучести позволяет с уверенностью считать гелий-3 настоящей ферми-жидкостью.

### § 1. ЭНЕРГИЯ ВОЗБУЖДЕНИЙ

Возможность описания возбужденного состояния жидкого гелия-3 при помощи газа квазичастиц с соответствующей функцией распределения по энергиям основывается на том факте, что взаимодействие частиц ферми-газа быстро уменьшается с понижением температуры. Действительно, из общих соображений ясно, что время между соударениями пропорционально квадрату размытия ферми-распределения, т. е. в среднем квадрату температуры. В то же время сама средняя энергия (отсчитанная от граничной энергии) ферми-частиц, находящихся в зоне размытия, которые определяют макроскопические свойства системы, пропорциональна первой степени температуры. Благодаря этому «неопределенность энергии», происходящая благодаря столкновениям, при достаточно низких температурах будет мала по сравнению с самой средней энергией. Можно также сказать, что затухание возбуждений, описываемое мнимой добавкой к их энергии, при достаточно низких температурах будет мало по сравнению с их энергией.

В основе теории Л. Д. Ландау лежат два фундаментальных предположения. Первое из них заключается в том, что классификация уровней ферми-жидкости соответствует классификации уровней невзаимодействующих атомов. Это означает, что при постепенном включении взаимодействия атомы постепенно переходят в «квази-частицы», каждая из которых обладает определенной энергией. Таким образом, число квазичастиц равно числу атомов.

Второе предположение заключается в том, что взаимодействие квазичастиц может быть учтено с помощью самосогласованного поля окружающих частиц, которое проявляется в том, что энергия системы не равна сумме энергий квазичастиц, а является функционалом от их функции распределения. Энергия квазичастиц должна определяться как вариационная производная плотности энергии в импульсном пространстве, т. е.

$$\delta E = \int \varepsilon \delta n \, d\tau, \quad (1,1)$$

где  $d\tau = 2dp_x dp_y dp_z / (2\pi\hbar)^3$ . Множитель 2 в  $d\tau$  учитывает наличие спина  $1/2$  у квазичастиц.

В некоторых случаях необходимо учитывать зависимость энергии частиц от их спина. Благодаря тому, что спин является квантовомеханической величиной, функцию распределения необходимо считать в этом случае статистическим оператором и вместо формулы (1.1) пользоваться определением  $\varepsilon$  в виде

$$\delta E = \frac{1}{2} \text{Sp}_\sigma \int \varepsilon \delta n d\tau. \quad (1,2)$$

Определение энергии частиц по формуле (1,2) приводит к тому, что их равновесная функция распределения действительно является функцией Ферми. Для доказательства этого наиболее удобно воспользоваться выражением энтропии\*)

$$S = -\frac{1}{2} \text{Sp}_\sigma \int \{n \ln n + (1-n) \ln (1-n)\} d\tau, \quad (1,3)$$

так как эта формула имеет чисто комбинаторное происхождение. Из условия максимальности энтропии при соблюдении постоянства числа частиц и энергии

$$N = \frac{1}{2} \text{Sp}_\sigma \int n d\tau = \text{const}, \quad E = \text{const}$$

можно, путем варьирования по  $\delta n$  найти функцию распределения

$$n(\varepsilon) = n_F(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon - \mu}{T}} + 1}. \quad (1,4)$$

Энергия  $\varepsilon$ , будучи функционалом от  $n$ , зависит от температуры. Эту зависимость можно представить в следующей форме. Если обозначить через  $\varepsilon_0(\mathbf{p}, \sigma)$  равновесную энергию квазичастиц при  $T=0$ , то при малом отклонении от равновесия или при небольших  $T$  она будет выражаться формулой

$$\varepsilon = \varepsilon_0(\mathbf{p}, \sigma) + \delta\varepsilon(\mathbf{p}, \sigma) = \varepsilon_0(\mathbf{p}, \sigma) + \frac{1}{2} \text{Sp}_{\sigma'} \int f(\mathbf{p}, \sigma; \mathbf{p}', \sigma') \delta n(\mathbf{p}', \sigma') d\tau'. \quad (1,5)$$

Здесь  $\delta n = n - n_F(T=0)$ , а  $f$  — оператор, зависящий от импульсов и операторов спина двух частиц. Ввиду своего определения, как второй вариационной производной от  $E$  по  $\delta n$ , функция  $f$  должна быть симметрична относительно перестановки  $\mathbf{p}, \sigma$  с  $\mathbf{p}', \sigma'$ . Функция  $f$  является очень важной характеристикой ферми-жидкости. Как было показано Л. Д. Ландау, она связана с амплитудой рассеяния вперед двух квазичастиц (см. приложение 2).

## § 2. ЭФФЕКТИВНАЯ МАССА

Ввиду того, что речь идет о низких температурах, при отсутствии внешнего поля энергия  $\varepsilon_0$  может быть записана в виде

$$\varepsilon_0 - \mu(0) = v(p - p_0), \quad (2,1)$$

где  $p_0$  — граничный импульс Ферми, а  $v$  — скорость на ферми-границе. Эту скорость можно записать в виде

$$v = \frac{p_0}{m^*}, \quad (2,2)$$

\*) Здесь и в дальнейшем мы употребляем энергетические единицы для температуры, т. е.  $k=1$ .

где  $m^*$  — эффективная масса. Как было показано Л. Д. Ландау, между  $m^*$  и  $f$  существует определенная связь, являющаяся следствием принципа относительности Галилея.

Согласно принципу Галилея импульс единицы объема должен быть равен потоку массы жидкости. Ввиду того, что скорость квазичастиц может быть определена как производная  $\frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}}$ , а их число равно числу атомов, получаем:

$$\frac{1}{2} \text{Sp}_\sigma \int \mathbf{p} n \, d\tau = \frac{1}{2} \text{Sp}_\sigma \int m \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}} n \, d\tau, \quad (2,3)$$

где  $m$  — масса атома.

Возьмем вариацию по  $n$  от этого соотношения

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \text{Sp}_\sigma \int \mathbf{p} \delta n \, d\tau &= \frac{1}{2} \text{Sp}_\sigma \int m \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}} \delta n \, d\tau + \\ &+ \frac{1}{2} \text{Sp}_\sigma \text{Sp}_{\sigma'} \int \int m n \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} f(\mathbf{p}, \sigma, \mathbf{p}', \sigma') \delta n' \, d\tau \, d\tau'. \end{aligned}$$

Переобозначая в последнем члене  $\mathbf{p}$ ,  $\sigma$  и  $\mathbf{p}'\sigma'$  и пользуясь произвольностью  $\delta n$ , находим:

$$\frac{\mathbf{p}}{m} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}} + \frac{1}{2} \text{Sp}_{\sigma'} \int \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}'} n' \, d\tau' = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}} - \frac{1}{2} \text{Sp}_{\sigma'} \int f \frac{\partial n'}{\partial \mathbf{p}'} \, d\tau'. \quad (2,4)$$

Если система не находится во внешнем магнитном поле, то и соотношение (2,4) не теряет общности при взятии  $\frac{1}{2} \text{Sp}_\sigma$ . В случае равновесия при  $T=0$  в формуле (2,4)  $\varepsilon$  может быть взято в форме (2,1), а  $\frac{\partial n}{\partial \mathbf{p}}$  заменено на  $-\delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0)$ . При этом находим:

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{m^*} + \frac{1}{2} \frac{p_0}{(2\pi\hbar)^3} \text{Sp}_\sigma \text{Sp}_{\sigma'} \int f(\chi) \cos \chi \, d\Omega, \quad (2,5)$$

где  $f(\chi)$  — значение функции  $f$ , когда  $|\mathbf{p}| = |\mathbf{p}'| = p_0$ . Естественно, что с точностью до малой поправки это соотношение сохранится при температурах вблизи  $T=0$  и при малых отклонениях от равновесия.

### § 3. ТЕПЛОЕМКОСТЬ И ЭНТРОПИЯ

Здесь мы не будем предполагать внешнего магнитного поля, так что величины не будут зависеть от спина. Знание энергетического спектра дает возможность определить теплоемкость ферми-жидкости<sup>2</sup>. Ее можно найти, как обычно, с помощью дифференцирования энергии по температуре при заданном числе частиц.

При этом существенным является то обстоятельство, что изменение плотности энергии выражается формулой (1,1), благодаря чему мы можем написать

$$C = \left( \frac{\partial E}{\partial T} \right)_N = \int \varepsilon \left( \frac{\partial n}{\partial T} \right)_N \, d\tau \cong \int \varepsilon_0 \left( \frac{\partial n}{\partial T} \right)_N \, d\tau. \quad (3,1)$$

Замена  $\varepsilon$  на  $\varepsilon_0$  в данном случае оправдана тем обстоятельством, что, в то время как основной член в теплоемкости оказывается линейным по  $T$ , поправка в (1,5) дает лишь кубичные члены.

Действительно,  $\delta n$  в формуле (1,5) можно представить в виде

$$\delta n = n(T) - n(0) = \int_0^T \frac{\partial n}{\partial T} \, dT = \int_0^T \frac{\partial n}{\partial \varepsilon} \left( -\frac{\varepsilon - \mu}{T} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial T} - \frac{\partial \mu}{\partial T} \right) dT.$$

Как известно, при низких температурах производная фермиевской функции имеет вид

$$\frac{\partial n}{\partial \varepsilon} \approx -\delta(\varepsilon - \mu) - \frac{\pi^2}{6} T^2 \frac{\partial^2 \delta(\varepsilon - \mu)}{\partial \varepsilon^2}.$$

Ввиду этого

$$\delta \varepsilon = \int f \delta n' d\tau' = \frac{\pi^2}{6} T^2 \left[ -\frac{\partial^2}{\partial \varepsilon'^2} \left( f \frac{d\tau'}{d\varepsilon'} \right) \right]_{\varepsilon'=\mu} - \int_0^T \left[ f \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial T} - \frac{\partial \mu}{\partial T} \right) \frac{d\tau'}{d\varepsilon'} \right]_{\varepsilon'=\mu} dT. \quad (3.2)$$

Производная  $\frac{\partial \mu}{\partial T}$  равна энтропии, которая, как мы увидим, линейна по  $T$ . Что же касается члена с  $\frac{\partial \varepsilon'}{\partial T}$ , то его порядок можно установить с помощью формулы (3,2). Дифференцируя эту формулу по  $T$ , без труда находим, что  $\frac{\partial \varepsilon}{\partial T}$  — первого порядка по  $T$ , а следовательно,  $\delta \varepsilon$  — второго порядка.

Ввиду замены  $\varepsilon$  на  $\varepsilon_0$  энергия может быть вычислена просто как интеграл

$$E = \int \varepsilon_0 n d\tau \quad \text{при} \quad N = \int n d\tau = \text{const},$$

причем опять с точностью до кубических членов по  $T$  в функциях  $n$ , входящих в интегралы для  $E$  и  $N$ , можно заменить  $\varepsilon$  на  $\varepsilon_0$ . После этого вычисление интегралов не отличается от обычного случая ферми-газа.

Таким образом, находим:

$$c = \frac{C}{N} = \gamma T; \quad \gamma = \frac{\pi^2}{3N} \left( \frac{d\tau}{d\varepsilon} \right)_\mu = \left( \frac{\pi}{3N} \right)^{\frac{2}{3}} \frac{m^*}{\hbar^2}. \quad (3.3)$$

Ввиду линейной зависимости от температуры энтропия равна теплоемкости.

Сравнивая формулу (3,3) с экспериментальными данными по энтропии жидкого  $\text{He}^3$  при низких температурах, мы можем найти параметр  $\gamma$ , а следовательно, определить и эффективную массу. К сожалению, в настоящее время экспериментальная кривая доведена лишь до начала линейного участка<sup>3</sup>. На основании этих данных можно получить лишь приближенное значение  $\gamma$ , которое оказывается равным примерно  $3 \text{ кал/моль} \cdot \text{град}^2$ . Ввиду равенства числа квазичастиц числу атомов мы можем по плотности жидкого  $\text{He}^3$  ( $\rho = 0,078 \text{ г/см}^3$ ) определить и граничный импульс Ферми. Таким образом, находим:

$$m^* = 1,43 m_{\text{He}^3}, \quad \frac{p_0}{\hbar} = 0,76 \cdot 10^8 \text{ см}^{-1}. \quad (3.4)$$

#### § 4. МАГНИТНАЯ ВОСПРИИМЧИВОСТЬ

Ввиду того, что частицы, обладающие спином, обязательно имеют магнитный момент, ферми-жидкость должна быть магнетиком. В изотропном случае имеются лишь две возможности. Жидкость может быть парамагнетиком или ферромагнетиком. Антиферромагнетизм в изотропной ферми-жидкости невозможен. Мы изложим здесь лишь случай парамагнитной ферми-жидкости, что соответствует жидкому  $\text{He}^3$ . Расчет восприимчивости такой жидкости был дан Л. Д. Ландау в работе<sup>1</sup> (см. также<sup>2</sup>).

Когда система находится в магнитном поле  $\mathbf{H}$ , то частицы, естественно, приобретают дополнительную энергию, зависящую от их спинов. Если бы они были свободными, то изменение энергии равнялось бы  $-\beta(\sigma\mathbf{H})$ . Однако в ферми-жидкости необходимо учесть и то обстоятельство, что функция распределения меняется. Таким образом, получаем:

$$\delta z = -\beta(\sigma\mathbf{H}) + \frac{1}{2} \text{Sp}_{\sigma'} \int f \delta n' d\tau'. \quad (4,1)$$

В данном случае существенна зависимость функции  $f$  от спинов. Эта зависимость может быть в общем случае записана как

$$f(\mathbf{p}, \sigma; \mathbf{p}', \sigma') = f(\mathbf{p}, \mathbf{p}') + \zeta_{ik}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \sigma_i \sigma'_k. \quad (4,2)$$

Естественно, однако, предположить, что в основном взаимодействие спинов имеет чисто обменное происхождение. В этом случае  $f$  приобретает вид

$$f(\mathbf{p}, \sigma; \mathbf{p}', \sigma') = f(\mathbf{p}, \mathbf{p}') + \zeta(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \sigma \sigma'. \quad (4,3)$$

Изменение функции распределения  $\delta n$  в формуле (4,1) связано лишь с изменением энергии  $z$ , так как химический потенциал меняется лишь во втором порядке по  $H$ . Ввиду этого в формулу (4,1) можно подставить  $\delta n = \frac{\partial n}{\partial z} \delta z$ . Это дает

$$\delta z = -\beta(\sigma\mathbf{H}) + \frac{1}{2} \text{Sp}_{\sigma'} \int f \frac{\partial n'}{\partial z'} \delta z' d\tau'. \quad (4,4)$$

Формула (4,4) является уравнением для  $\delta z$ . Эту величину можно предположить имеющей вид

$$\delta z = -\xi(\sigma\mathbf{H}). \quad (4,5)$$

Подставляя в (4,4), получаем уравнение

$$\xi = \beta + \frac{1}{4} \int \zeta \frac{\partial n'}{\partial z'} \xi' d\tau'. \quad (4,6)$$

Ввиду того, что  $\frac{\partial n'}{\partial z'} \cong -\delta(z' - \mu)$ , интегрирование происходит по поверхности ферми-сферы. Ниже мы увидим, что для магнитной восприимчивости существенно лишь значение  $\xi$ , взятое на поверхности ферми-сферы. В этом случае оба аргумента  $\zeta(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$  по модулю равны  $p_0$ , и  $\zeta$  зависит лишь от угла между ними. Обозначая  $\int \zeta(\theta) \frac{d\Omega}{4\pi}$  через  $\bar{\zeta}$ , получаем из уравнения (4,6):

$$\xi = \frac{\beta}{1 + \frac{1}{4} \bar{\zeta} \left( \frac{d\tau}{dz} \right)_{\mu}}. \quad (4,7)$$

Восприимчивость определяется из формулы

$$\chi = \frac{\partial}{\partial \mathbf{H}} \frac{1}{2} \text{Sp} \int n^3 \sigma d\tau.$$

В этом выражении, естественно, участвует лишь добавка к  $n$ , зависящая от спина. Таким образом, находим:

$$\chi = \frac{1}{4} \beta \xi \left( \frac{d\tau}{dz} \right)_{\mu} = \frac{\frac{1}{4} \beta^2 \left( \frac{d\tau}{dz} \right)_{\mu}}{1 + \frac{1}{4} \bar{\zeta} \left( \frac{d\tau}{dz} \right)_{\mu}}. \quad (4,8)$$

Величину  $\left( \frac{d\tau}{dz} \right)_{\mu}$  можно выразить через коэффициент  $\gamma$  в линейном

законе теплоемкости; это дает

$$\frac{1}{\chi} = \beta^{-2} \left( \bar{\zeta} + \frac{4\pi^2}{3\gamma N} \right). \quad (4,9)$$

Формулу (4,10) можно сравнить с экспериментальными данными по магнитной восприимчивости  $\text{He}^3$  4; при этом выясняется, что  $\bar{\zeta}$  отрицательно и составляет примерно 0,85 от второго члена. Таким образом, обменное взаимодействие существенно сказывается на величине магнитной восприимчивости жидкого  $\text{He}^3$ . Знак эффекта таков, что обменное взаимодействие способствует параллельной ориентации спинов. Однако оно не приводит к ферромагнетизму, так как фермиевская тенденция к антипараллельному расположению спинов превалирует. Возможно, что при увеличении давления параметры изменятся таким образом, что ферромагнетизм окажется возможным. Однако пока нет никаких опытных данных в пользу такого заключения.

## § 5. КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ

Кинетическое уравнение для функции распределения при отсутствии магнитного поля имеет обычный вид

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial n}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial n}{\partial \mathbf{p}} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{r}} = I(n), \quad (5,1)$$

где  $I(n)$  — интеграл столкновений. Однако здесь необходимо учитывать, что энергия  $\varepsilon$  является функционалом функции распределения и, таким образом, тоже зависит от координат. С помощью этого кинетического уравнения Л. Д. Ландау<sup>1</sup> получил выражения для потоков энергии и импульса.

Для нахождения потока импульса уравнения (5,1) надо помножить на  $p_i$  и проинтегрировать по фазовому объему. При этом, вследствие сохранения импульса при столкновениях, интеграл  $\int p_i I(n) d\tau$  обратится в нуль, и у нас остается уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} \int p_i n d\tau + \int p_i \left( \frac{\partial n}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial p_k} - \frac{\partial n}{\partial p_k} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k} \right) d\tau = 0.$$

Выражение в скобках во втором интеграле может быть записано как

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left( n \frac{\partial \varepsilon}{\partial p_k} \right) - \frac{\partial}{\partial p_k} \left( n \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k} \right).$$

Подставляя это в интеграл и интегрируя второй член по частям, получаем:

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \int p_i \frac{\partial \varepsilon}{\partial p_k} n d\tau + \int n \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} d\tau.$$

Последний член может быть представлен в виде

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \int n \varepsilon d\tau - \int \varepsilon \frac{\partial n}{\partial x_i} d\tau.$$

Но ввиду того, что  $\delta E = \int \varepsilon \delta n d\tau$ , последний член равен  $\frac{\partial E}{\partial x_i}$ . Таким образом, получаем уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} \int p_i n d\tau + \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} = 0. \quad (5,2)$$

Это уравнение выражает закон сохранения импульса. Тензор  $\Pi_{ik}$  пред-

ставляет собой поток импульса. Он равен

$$\Pi_{ik} = \int p_i \frac{\partial \varepsilon}{\partial p_k} n d\tau + \delta_{ik} \left[ \text{Sp} \int n \varepsilon d\tau - E \right]. \quad (5,3)$$

Аналогичным образом получается и закон сохранения энергии. Для этого умножим кинетическое уравнение на  $\varepsilon$  и проинтегрируем по  $d\tau$ . Ввиду сохранения энергии при столкновениях интеграл  $\int \varepsilon I(n) d\tau$  обратится в нуль, и мы получаем:

$$\int \varepsilon \frac{\partial n}{\partial t} d\tau + \int \varepsilon \left( \frac{\partial n}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial n}{\partial \mathbf{p}} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{r}} \right) d\tau = 0.$$

Записав член с  $\frac{\partial n}{\partial \mathbf{r}}$  в виде

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \int n \varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}} d\tau - \int n \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}} d\tau - \int n \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \mathbf{r} \partial \mathbf{p}} \varepsilon d\tau$$

и произведя в члене с  $\frac{\partial n}{\partial \mathbf{p}}$  интегрирование по частям по  $\mathbf{p}$ , получаем закон сохранения энергии

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \int \varepsilon \frac{\partial n}{\partial t} d\tau = -\text{div } \mathbf{Q}, \quad (5,4)$$

где поток энергии равен

$$\mathbf{Q} = \int n \varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}} d\tau. \quad (5,5)$$

## § 6. ВЯЗКОСТЬ

С помощью уравнения (5,1) и выражений для потоков импульса (5,2) и энергии (5,5) можно определить коэффициенты вязкости и теплопроводности ферми-жидкости<sup>5</sup>.

Начнем с нахождения вязкости. Для этого представим себе, что в жидкости происходит движение с некоторой, слегка неоднородной по координатам скоростью  $\mathbf{u}$ . Функция распределения в этом случае будет мало отличаться от равновесного значения

$$n = n_0 + \delta n, \quad (6,1)$$

где

$$n_0 = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_0 - \mathbf{p}\mathbf{u} - \mu}{T}} + 1}; \quad |\delta n| \ll n_0. \quad (6,2)$$

Величина  $\delta n$  находится из кинетического уравнения (5,1). Как обычно, в левую часть кинетического уравнения надо подставить функцию  $n_0$ . При этом мы будем считать, что в рассматриваемой точке жидкости  $\mathbf{u} = 0$ . Подставляя (6,2) в уравнение (5,1), находим:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial n_0}{\partial t} - \frac{1}{3} \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} \mathbf{p} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}} \text{div } \mathbf{u} - \\ & - \frac{1}{2} \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} \left( p_i \frac{\partial \varepsilon}{\partial p_k} - \frac{1}{3} p_l \frac{\partial \varepsilon}{\partial p_l} \delta_{ik} \right) \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \right) = I(n). \end{aligned} \quad (6,3)$$

Теперь преобразуем  $\frac{\partial n_0}{\partial t}$  и покажем, что это выражение тоже не зависит от члена с  $f$  в формуле (1,5). Согласно формуле (6,2) мы можем написать

$$\delta n_0 = \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon_0} \left( \delta \varepsilon_0 - \delta \mu - \frac{\varepsilon_0 - \mu}{T} \delta T - \mathbf{p} \delta \mathbf{u} \right). \quad (6,4)$$



Так как производная  $\frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon_0}$  в (6,4) отлична от нуля в малой окрестности точки  $\varepsilon_0 = \mu$ , причем является быстро меняющейся функцией в этой области, то мы можем считать величины в скобке относящимися к этой точке (поправки будут иметь относительный порядок  $\left(\frac{T}{\mu}\right)^3$ ). При этом вариации  $\delta \varepsilon_0$  и  $\delta \mu$  являются произвольными и отнюдь не равны друг другу. С другой стороны, функция распределения нормирована при помощи соотношения

$$\int n_0 d\tau = N,$$

где  $N$  — число атомов в единице объема. Варьируя это соотношение, находим:

$$\delta N = \int \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon_0} \left( \delta \varepsilon_0 - \delta \mu - \frac{\varepsilon_0 - \mu}{T} \delta T - p \delta u \right) d\tau \approx \approx - \left[ (\delta \varepsilon_0 - \delta \mu - p \delta u) \frac{d\tau}{d\varepsilon_0} \right]_{\varepsilon_0=\mu}, \quad (6,5)$$

так как  $\int \left( \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon_0} \right) d\varepsilon_0 = -1$ . Сравнивая формулы (6,5) и (6,4), получаем:

$$\frac{\partial n_0}{\partial t} = - \frac{\partial N}{\partial t} \cdot \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} \cdot \left( \frac{d\varepsilon_0}{d\tau} \right)_{\varepsilon_0=\mu}.$$

Число атомов  $N$  удовлетворяет уравнению непрерывности:

$$\frac{\partial N}{\partial t} + N \operatorname{div} \mathbf{u} = 0. \quad (6,6)$$

Таким образом, член с  $\frac{\partial n_0}{\partial t}$  дает добавку к члену  $\operatorname{div} \mathbf{u}$ , и в результате последний принимает вид

$$- \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} \left( \frac{1}{3} p \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial p} - N \left( \frac{d\varepsilon_0}{d\tau} \right)_{\varepsilon_0=\mu} \right) \operatorname{div} \mathbf{u}. \quad (6,7)$$

Подставляя формулу (2,1) и воспользовавшись равенством числа возбуждений числу частиц, вследствие чего  $\frac{p_0}{h} = (3\pi^2 N)^{1/3}$ , обнаруживаем, что это выражение обращается в нуль. Таким образом, с точностью до малых поправок  $\sim \left(\frac{T}{\mu}\right)^3$  в левой части кинетического уравнения отсутствуют члены с  $\operatorname{div} \mathbf{u}$ .

В правой части уравнения (5,1) стоит интеграл столкновений:

$$I(n) = - \int \omega [n_1 n_2 (1 - n'_1) (1 - n'_2) - (1 - n_1) (1 - n_2) n'_1 n'_2] \times \\ \times \delta(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}'_1 - \mathbf{p}'_2) \delta(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon'_1 - \varepsilon'_2) d\tau_2 d\tau'_1 d\mathbf{p}'_2. \quad (6,8)$$

Здесь надо иметь в виду, что в  $\delta$ -функции от энергий подразумеваются истинные энергии, т. е. энергии, описываемые формулой (1,5). Благодаря этому при подстановке в интеграл столкновений функции  $n_0(\varepsilon_0)$ , он не обратится в нуль. Интеграл обращается в нуль лишь при подстановке в него истинной равновесной функции, т. е.  $n_0(\varepsilon)$ . Полная функция распределения может быть написана как

$$n = n_0(\varepsilon) - \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} \int f \delta n d\tau + \delta n. \quad (6,9)$$

Введем обозначение

$$\delta n = - \frac{n_0(1 - n_0)}{T} v = \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon_0} v. \quad (6,10)$$

Подставляя в формулу (6,9), находим, что добавка к равновесной функции распределения тоже имеет форму (6,10). Однако вместо  $\psi$  в ней стоит величина

$$\phi = \psi + \left( \frac{d\tau}{d\varepsilon_0} \right)_\mu \int f(\chi) \psi \frac{d\Omega}{4\pi}. \quad (6,11)$$

Подстановка формулы (6,9) в интеграл столкновений, в пренебрежении членами квадратичными по  $\phi$ , дает:

$$I(n) = \frac{1}{T} \int \omega n_{01} n_{02} (1 - n'_{01}) (1 - n'_{02}) (\psi_1 + \psi_2 - \psi'_1 - \psi'_2) \times \\ \times \delta(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}'_1 - \mathbf{p}'_2) \delta(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon'_1 - \varepsilon'_2) d\tau_2 d\tau'_1 d\mathbf{p}'_2. \quad (6,12)$$

Вероятность столкновения  $\omega$  зависит, вообще говоря, от всех четырех импульсов. Однако для нас существенны импульсы, по абсолютной величине близкие к граничному значению на поверхности Ферми. Поэтому можно считать, что  $\omega$  зависит лишь от  $\theta$  — угла между  $\mathbf{p}_1$  и  $\mathbf{p}_2$  и  $\varphi$  — угла, образованного плоскостями  $(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$  и  $(\mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2)$ .

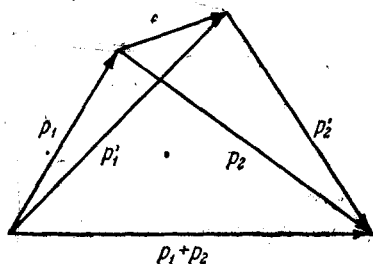


Рис. 1.

Воспользуемся тем, что импульсы частиц в основной области интегрирования по абсолютной величине мало отличаются от граничного импульса  $p_0$ . Если повернуть плоскость векторов  $(\mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2)$  относительно оси, направленной по  $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$ , на угол  $\varphi$  так, чтобы эта плоскость совместилась с плоскостью  $(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$ , то мы получим диаграмму, изображенную на рис. 1. Ясно, что вектор  $\mathbf{f}$  будет малым по абсолютной величине и углы между всеми импульсами и осью  $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$  будут примерно равны  $\theta/2$  или  $-\theta/2$ . Таким образом, получаем:

$$p'_1 \approx p_1 + f_z \cos \frac{\theta}{2} + f_r \sin \frac{\theta}{2}, \quad p'_2 \approx p_2 - f_z \cos \frac{\theta}{2} + f_r \sin \frac{\theta}{2}. \quad (6,13)$$

где  $f_z$  — компонента  $\mathbf{f}$  по оси  $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$ , а  $f_r$  — перпендикулярная компонента. Интегрируя по  $d\mathbf{p}'_2$ , мы ликвидируем  $\psi$ -функцию от импульсов, а интеграл по  $d\tau'_1$  заменим интегралом по  $df_r df_z d\varphi$ , введя цилиндрическую систему координат с осью по  $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$ :

$$d\tau'_1 = 2p_0 \sin \frac{\theta}{2} df_r df_z d\varphi \frac{1}{(2\pi\hbar)^3}. \quad (6,14)$$

Теперь введем следующие обозначения:

$$x = \frac{\varepsilon'_1 - \mu}{T}, \quad t = \frac{\varepsilon_1 - \mu}{T}, \quad \kappa = \frac{\mu}{T}, \quad y = \frac{\varepsilon'_2 - \mu}{T}; \quad (6,15)$$

с учетом значений  $\varepsilon_i$  из (2.1). Переход от переменных  $f_r, f_z$  к  $x$  и  $y$  осуществляется очень легко при помощи формулы (6,13). При этом получаем:

$$d\tau'_1 \int d\tau_2 \delta(\varepsilon) = \frac{m^{*3} T^2 dx dy \left( \frac{d\Omega}{2\pi} \right) \left( \frac{d\varphi_2}{2\pi} \right)}{8\pi^4 \hbar^6 \cos \left( \frac{\theta}{2} \right)}, \quad (6,16)$$

где через  $d\Omega$  мы обозначили дифференциал углов  $\sin \theta d\theta d\varphi$ , от которых зависит  $\omega(\theta, \varphi)$ . Отметим, что ввиду неразличимости частиц угол  $\varphi$  меняется лишь в пределах от нуля до  $\pi$ .

Из соображений симметрии ясно, что  $\psi$  должно иметь вид

$$\psi = \frac{1}{2} q(t) \left( p_i \frac{\partial \varepsilon}{\partial p_k} - \frac{1}{3} p_i \frac{\partial \varepsilon}{\partial p_i} \delta_{ik} \right) \cdot \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial u_m}{\partial x_m} \right). \quad (6,17)$$

При подстановке этого выражения в интеграл столкновений второй множитель может быть преобразован по теореме сложения сферических функций. После интегрирования по углу  $d\varphi_2$  остаются только первые члены, т. е.

$$P_2(\theta_1 + \theta_2) \rightarrow P_2(\theta_1) P_2(\theta_2), \quad \text{где} \quad P_2(\theta) = \frac{3}{2} \cos^2 \theta - 1.$$

В результате из уравнения (6,3) находим следующее уравнение для  $q$ :

$$\begin{aligned} n_0(t) [1 - n_0(t)] = & \frac{m^{*3} T^2}{8\pi^4 \hbar^6 \cos \frac{\theta}{2}} \int \frac{d\Omega}{2\pi} \int_{-\frac{x}{x+y>t-x}}^{\infty} dx \int_{-\frac{x}{x+y>t-x}}^{\infty} dy w(\theta, \varphi) \times \\ & \times n_0(t) n_0(x+y-t) [1 - n_0(x)] [1 - n_0(y)] \cdot [q(t) + \\ & + q(x+y-t) P_2(\theta) - q(x) P_2(\theta') - q(y) P_2(\theta_2')]. \end{aligned} \quad (6,18)$$

Ввиду того, что в рассматриваемой нами области температур существенны лишь значения  $x$ ,  $y$  и  $t$ , много меньшие  $x$ , мы можем считать нижний предел интегрирования в формуле (6,12) равным  $-\infty$ . В этих условиях, предполагая, что  $q$  — симметричная функция (это подтверждается результатом), легко убеждаемся, что все члены с различными  $q$  могут быть приведены к одинаковому виду в смысле зависимости от  $x$  и  $y$ . Таким образом, скобка запишется просто в виде

$$q(t) + q(x) [P_2(\theta) - P_2(\theta_1') - P_2(\theta_2')].$$

Переход от углов  $\theta_1'$  и  $\theta_2'$  к углам  $\theta$  и  $\varphi$  легко получается при помощи рис. 1. Интегрируя по переменной  $y$ , от которой  $q$  теперь не зависит, после некоторых преобразований находим следующее уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{8\pi^4 \hbar^6}{m^{*3} T^2} = & \frac{\bar{w}(\varphi, \varphi)}{\cos \frac{\theta}{2}} \cdot \left[ \frac{3}{4} (1 - \cos \theta)^2 \sin^2 \varphi - 1 \right] \times \\ & \times \left\{ \int_0^\infty \frac{dx x [q(x+t) + q(x-t)]}{e^x - 1} + 2 \int_0^\infty \frac{dx x q(x)}{e^x + 1} + \int_0^t dx \cdot x q(x-t) \right\} + \\ & + \frac{\bar{w}(\theta, \varphi)}{\cos \frac{\theta}{2}} q(t) \cdot \frac{\pi^2 + t^2}{2}, \end{aligned} \quad (6,19)$$

где черта означает усреднение по телесному углу.

Полученное уравнение сложно, однако анализ показывает, что при любых предположениях в виде  $\bar{w}(\theta, \varphi)$  ошибка в коэффициенте вязкости будет меньше 10%, если просто считать, что нужные нам значения  $t^2 \ll \pi^2$ . При этом  $q$  оказывается константой, равной

$$q = \frac{64\pi^2 \hbar^6}{3m^{*3} T^2} \left[ \frac{\bar{w}(\theta, \varphi)}{\cos \left( \frac{\theta}{2} \right)} (1 - \cos \theta)^2 \sin^2 \varphi \right]^{-1}. \quad (6,20)$$

Поток импульса выражается формулой (5,3). Подставляя в нее  $n = n_0 + \delta n$  и формулу (6,10), и учитывая, что энергия также является

функционалом от функции распределения, получаем:

$$\begin{aligned} \Pi_{ik} &= \int p_i \frac{\partial \varepsilon(p)}{\partial p_k} \left[ \delta n - \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon_0} \int f(p, p') \delta n' \delta \tau' \right] d\tau = \\ &= \int p_i \frac{\partial \varepsilon(p)}{\partial p_k} \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon_0} \left[ v + \int v \left( \frac{d\tau'}{d\varepsilon_0'} \right)_{\varepsilon_0'=\mu} \frac{d\Omega'}{4\pi} \right] d\tau = \int p_i \frac{\partial \varepsilon(p)}{\partial p_k} \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon_0} \psi d\tau. \end{aligned} \quad (6,21)$$

Таким образом, видно, что в выражение для потока импульса вошла та же функция  $\psi$ , что и в кинетическое уравнение. Следовательно, функция  $f$  не вошла в выражение для потока импульса, и оно имеет такой же вид, как и у ферми-газа из частиц с массой  $m^*$  и законом рассеяния, описываемым функцией  $\omega(\theta, \varphi)^*$ .

Подставляя в (6,21) формулы (6,17) и (6,20) и определяя коэффициент вязкости как коэффициент пропорциональности между  $\Pi_{ik}$  и  $-\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \delta_{ik}\right)$ , находим:

$$\eta = \frac{64}{45} T^{-2} \frac{\hbar^3 p_0^3}{m^{*4}} \left[ \frac{\omega(\theta, p)}{\cos \frac{\theta}{2}} (1 - \cos \theta)^2 \sin^2 \psi \right]^{-1}. \quad (6,22)$$

Вязкость оказывается пропорциональной  $T^{-2}$ . Эта зависимость была ранее предсказана Померанчуком<sup>6</sup> на основании качественных соображений. Что касается численных значений вязкости, то они зависят от определенным образом усредненной функции  $\omega(\theta, \varphi)$  и потому не могут быть точно установлены. Но формула (6,22) дает возможность определить порядок величины  $\eta$ . Для этого воспользуемся тем, что, как будет показано в приложении 2, функция  $f$  имеет порядок амплитуды рассеяния квазичастиц. Следовательно,  $\omega \sim \frac{2\pi}{\hbar} f^2$ , а величина  $f$  может быть определена из экспериментальных данных о скорости звука (см. § 8). Для  $\text{He}^3$  с учетом численных значений  $m^*$  и  $p_0$  (3,4) получаем:

$$\eta = \frac{\alpha}{T^2} (\alpha \sim 10^{-6} \div 10^{-5} \text{ пуаз; } T \text{ в } ^\circ \text{K}). \quad (6,23)$$

Такая величина соответствует экспериментальным результатам, найденным К. Н. Зиновьевой<sup>7</sup>. Правда, ввиду того, что ее измерения доведены лишь до  $0,35^\circ \text{K}$ , нельзя произвести сравнение температурной зависимости. Но, во всяком случае, из эксперимента следует увеличение вязкости с понижением температуры.

Как уже было отмечено в начале этого параграфа, в левой части кинетического уравнения с точностью до членов порядка  $\left(\frac{T}{\mu}\right)^2$  отсутствует часть, пропорциональная  $\text{div } u$ . Это означает, что коэффициент второй вязкости в  $\left(\frac{T}{\mu}\right)^2$  раз меньше  $\eta$  и не играет роли в физических эффектах (например, в поглощении звука).

## § 7. ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ

Теперь перейдем к вычислению теплопроводности<sup>5</sup>. Предполагая небольшой градиент температуры, получаем в левой части кинетического

\*) В работе<sup>6</sup> не был учтен второй член в формуле (6,9), благодаря чему были получены неправильные формулы для коэффициентов вязкости и теплопроводности. Правильные значения можно получить, если считать  $f=0$  в выражениях (26) и (30) работы<sup>6</sup>.

уравнения:

$$-\frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon_0} \left( \frac{\varepsilon_0 - \mu}{T} - s \right) \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial \mathbf{p}} \nabla T. \quad (7,1)$$

Преобразования интеграла столкновений вначале не отличаются от сделанных в предыдущем параграфе (формулы (6, 8) — (6,16)). Функцию  $\psi$  в этом случае рационально искать в виде

$$\psi = q(t) \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial \mathbf{p}} \nabla T. \quad (7,2)$$

Вместо уравнения (6,18) при этом получается такое же уравнение, но с  $\cos \theta$  вместо  $P_2(\theta)$  в интеграле столкновений и множителем  $(\varepsilon_0 - \mu)/T - s$  в левой части. Наличие такого множителя показывает, что искомая функция должна содержать как симметричную, так и антисимметричную по  $t$  части, а именно:

$$q(t) = q_s(t) + q_a(t). \quad (7,3)$$

Подстановка в интеграл столкновений дает два уравнения

$$\frac{8\pi^4 \hbar^6}{m^* 3 T^2} s = \frac{\overline{w(\theta, \varphi)}}{\cos \frac{\theta}{2}} \left[ q_s(t) \frac{\pi^2 + t^2}{2} - \int_0^\infty dx \frac{x [q_s(x+t) + q_s(x-t)]}{e^x - 1} - 2 \int_0^\infty \frac{dx x q_s(x)}{e^x + 1} - \int dx x q_s(x-t) \right], \quad (7,4)$$

$$\frac{8\pi^4 \hbar^6}{m^* 3 T^2} = \frac{\overline{w(\theta, \varphi)} (1 + 2 \cos \theta)}{\cos \frac{\theta}{2}} \left[ \int_0^\infty dx \frac{x [q_a(x-t) - q_a(x+t)]}{e^x - 1} + 2t \int_0^\infty \frac{dx q_a(x)}{e^x + 1} + \int_0^t dx x q_a(x-t) \right] + \frac{\overline{w(\theta, \varphi)}}{\cos \frac{\theta}{2}} q_a(t) \frac{\pi^2 + t^2}{2}. \quad (7,5)$$

Однако в данном случае кинетическое уравнение не определяет полностью решения задачи. К нему должно быть добавлено дополнительное условие, выражающее сохранение потока вещества. Это означает

$$\begin{aligned} \delta \int n \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}} d\tau &= \int \delta n \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial \mathbf{p}} d\tau + \int n_0 \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \left[ \int f \delta n' d\tau' \right] d\tau = \\ &= \int \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial \mathbf{p}} \left[ \delta n - \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon_0} \int f \delta n' d\tau' \right] d\tau = 0. \end{aligned} \quad (7,6)$$

Здесь мы произвели интегрирование по частям и в интегралах, уже содержащих  $\delta n$ , заменили  $\varepsilon$  на  $\varepsilon_0$ . Подставляя в (7,6) выражения (6,10), (6,11) и (7,2), получаем:

$$\int \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon_0} \left( \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial \mathbf{p}} \right)^2 q(t) d\tau = 0. \quad (7,7)$$

Для нахождения  $q_a(t)$  нам достаточно решить уравнение (7,5), наподобие того; как делалось при рассмотрении вязкости. Что же касается четной части  $q_s(t)$ , то тут дело обстоит иначе. Во-первых, мы можем заметить, что  $q_s = \text{const}$  обращает тождественно в нуль правую часть уравнения (7,4). Поэтому постоянный член  $q_s(0)$  надо определить не из этого уравнения, а из условия (7,7). При этом легко показать, что дальнейшие члены в  $q_s(t)$ , а именно  $a_2 t^2 + a_4 t^4 + \dots$  вообще не внесут вклада в теплопроводность. Действительно, появив-

ние такого члена, например  $a_m t^{2m}$ , должно изменить постоянный член в  $q_s(t)$  на величину  $a_m^0$ , такую, что

$$\int \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon_0} \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial p} \right)^2 [a_m t^{2m} + a_m^0] d\tau = 0.$$

Из этого условия получается:

$$a_m^0 = -a_m (2m)! R_m; \quad R_m = \int_0^\infty \frac{z^{2m-1}}{e^z + 1} dz.$$

Для нахождения потока энергии нам придется вычислять интегралы типа

$$\begin{aligned} \int \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon_0} F(\varepsilon_0) (a_m t^{2m} + a_m^0) d\tau = \\ = \left( F \frac{d\tau}{d\varepsilon_0} \right)_{\varepsilon_0=\mu} [a_m (2m)! R_m + a_m^0] = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, мы приходим к выводу, что для нахождения коэффициента теплопроводности нужно решить лишь уравнение (7,5) и затем так подобрать постоянный член, чтобы удовлетворить условию (7,7). Практически, как и в случае вязкости, достаточно найти решение в предположении  $t^2 \ll \pi^2$ . При этом мы получаем:

$$q = \frac{24\pi^2 \hbar^6}{m^{*3} T^2} \left( t - \frac{\pi^2 T_m^*}{p_0^2} \right) \left[ \frac{\omega(\theta, \varphi) (1 - \cos \theta)}{\cos \frac{\theta}{2}} \right]^{-1}. \quad (7,8)$$

Поток энергии выражается формулой (5,5). Подставляя (6,4) в эту формулу, имеем:

$$Q = \int \varepsilon_0(p) \frac{\partial \varepsilon_0(p)}{\partial p} \delta n d\tau - \int \varepsilon_0(p) \frac{\partial \varepsilon_0(p)}{\partial p} \cdot \frac{\partial n}{\partial \varepsilon_0} \int f \delta n' d\tau' d\tau. \quad (7,9)$$

Подставляя (6,10), (6,14), (7,2) и (7,8), определяем значение коэффициента теплопроводности

$$\kappa = \frac{8}{3} \frac{\pi^2 \hbar^3 p_0^3}{m^{*4} T} \cdot \left[ \frac{\omega(\theta, \varphi) (1 - \cos \theta)}{\cos \frac{\theta}{2}} \right]^{-1}. \quad (7,10)$$

Как и в случае вязкости в коэффициент  $\kappa$  не вошла функция  $f$ .

Температурная зависимость коэффициента теплопроводности выражается законом  $T^{-1}$ , что также совпадает с качественным предсказанием Померанчука.

Оценивая численное значение  $\kappa$  для  $\text{He}^3$  аналогично тому, как это мы делали для вязкости, приходим к соотношению

$$\kappa = \frac{\beta}{T} (\beta \sim 10^2 \div 10^3 \text{ эрг/см} \cdot \text{сек} \cdot \text{град}; T \text{ в } ^\circ\text{K}). \quad (7,11)$$

Полученные выражения для коэффициентов вязкости и теплопроводности во всяком случае перестают быть справедливыми в области температур  $T \sim \mu$ . Однако, помимо этого, существует ограничение, которое отодвигает область применимости теории в сторону значительно более низких температур. Оно заключается в том, что интересующий нас интервал энергий возбуждений порядка  $T$  должен быть значительно больше квантовой неопределенности в энергии, происходящей благодаря столкновениям, т. е.

$$\tau \gg \frac{\hbar}{T}, \quad (7,12)$$

где  $\tau$  — время между столкновениями. Отметим, что выполнение условия (7,12) требуется не только для вычисления кинетических коэффициентов так, как это делалось выше, но и для справедливости всей теории ферми-жидкости. Для  $\text{He}^3$  величина  $\tau$  может быть определена из экспериментальных значений вязкости<sup>7</sup> (см. формулу (9,12)). Если воспользоваться самой низкотемпературной точкой, т. е.  $\eta = 4,8 \cdot 10^{-5}$  пуаз при  $T = 0,35^\circ \text{K}$ , то из формулы (7,12) получается

$$T \ll 0,35^\circ \text{K}. \quad (7,13)$$

Однако, по-видимому, это значение является завышенным, так как при  $T = 0,35^\circ \text{K}$  вязкость еще не пропорциональна  $T^{-2}$ , а меняется по более слабому закону.

## § 8. ЗВУК

Распространение звука в ферми-жидкости имеет ряд совершенно специфических особенностей. Если рассмотреть звук заданной частоты, то при не слишком низких температурах его распространение происходит по законам обычной гидродинамики. Затухание звука будет при этом пропорционально  $\tau$ . При понижении температуры время столкновений будет увеличиваться пропорционально  $T^{-2}$  и, наконец, при таких температурах, когда  $\omega\tau \sim 1$  звук вообще перестанет распространяться. Однако оказывается, что при дальнейшем понижении температуры опять появляется возможность распространения звука. При этом скорость его будет иной, и он уже не будет представлять собой просто волну сжатия и разрежения. Это явление также предсказано Л. Д. Ландау<sup>8</sup> и было названо им «нулевым звуком». Ввиду того, что в определении природы звука существенно лишь соотношение между  $\omega$  и  $\tau$ , эти два звука могут быть описаны как низкочастотный звук ( $\omega\tau \ll 1$ ) и высокочастотный звук ( $\omega\tau \gg 1$ ).

Скорость звука при малых частотах или не слишком низких температурах, когда соблюдается условие  $\omega\tau \ll 1$ , определяется обычным образом через сжимаемость. Л. Д. Ландау<sup>1</sup> было показано, что она существенным образом зависит от функции  $f$ .

Сжимаемость удобно выразить через производную  $\frac{\partial \mu}{\partial N}$ . Здесь  $N$  — полное количество частиц. Пользуясь тем, что химический потенциал  $\mu$  зависит лишь от  $N/V$ , находим:

$$\frac{\partial \mu}{\partial N} = - \frac{V \frac{\partial \mu}{\partial V}}{N} = - \frac{V^2}{N^2} \frac{\partial p}{\partial V}. \quad (8,1)$$

Скорость звука, как известно, определяется соотношением

$$c^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho} = \frac{\partial p}{\partial \left( \frac{mN}{V} \right)} = \frac{1}{m} \left( N \frac{\partial \mu}{\partial N} \right). \quad (8,2)$$

Производная  $\frac{\partial \mu}{\partial N}$  вычисляется следующим образом. Ввиду того, что  $\mu = \varepsilon(p_0)$ , изменение  $\mu$  происходит как вследствие изменения  $p_0$ , так и вследствие изменения вида функции  $\varepsilon(p)$ :

$$\delta \mu = \int f \delta n' d\tau' + \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial p_0} \delta p_0. \quad (8,3)$$

Изменения  $\delta N$  и  $\delta p$  связаны соотношением

$$\delta N = 8\pi p_0^2 \delta p_0 \frac{V}{(2\pi\hbar)^3}. \quad (8,4)$$

Так как в интеграле формулы (8,3) существенны лишь изменения  $\delta n$  вблизи ферми-границы, то интегрирование по абсолютной величине импульса можно произвести. Это дает

$$\int f \delta n' d\tau' = \frac{\delta N}{4\pi V} \int f d\Omega. \quad (8,5)$$

Подстановка в (8, 3) дает (см. также (2,4) и (2,2)):

$$\frac{\partial \mu}{\partial N} = \frac{1}{4\pi V} \int f d\Omega + \frac{(2\pi\hbar)^3}{8\pi p_0 m^* V}. \quad (8,6)$$

Формула (2,5) позволяет выразить здесь эффективную массу  $m^*$  через истинную массу атомов  $m$ . Подставляя полученное выражение в формулу (8,2) и пользуясь тем, что

$$N = \frac{8\pi p_0^3 V}{3(2\pi\hbar)^3},$$

находим:

$$c^2 = \frac{p_0^2}{3m^2} + \frac{2}{3m} \left( \frac{p_0}{2\pi\hbar} \right)^3 \int f(\chi) (1 - \cos \chi) d\Omega. \quad (8,7)$$

Формулы (2,5) и (8,7) дают возможность получить некоторые сведения о функции  $f(\chi)$ . Если ввести обозначение

$$F(\chi) = f(\chi) \left( \frac{d\tau}{d\varepsilon} \right)_{\varepsilon=\varepsilon_k} = f(\chi) \frac{p_0 m^*}{\pi^2 \hbar^3} = \sum_k F_k P_k(\cos \chi), \quad (8,8)$$

то первые коэффициенты разложения по полиномам Лежандра могут быть определены из формул (2,5) и (8,7). Действительно, нетрудно получить соотношения

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{m^*} (1 + \overline{F \cos \chi}), \quad c^2 = \left( \frac{p_0^2}{3m^2} \right) \frac{1 + \overline{F}}{1 + \overline{F \cos \chi}}. \quad (8,9)$$

Подставляя значения параметров для  $\text{He}^3$  из формулы (3,4) и величину скорости звука<sup>9</sup>  $c_{T=0} = 183 \text{ м/сек}$ , находим:

$$F_0 = \overline{F} = 4,65, \quad F_1 = 3\overline{F \cos \chi} = 1,3. \quad (8,10)$$

Ввиду того, что следующие коэффициенты не могут быть определены таким простым способом, мы в дальнейшем будем в конкретных случаях ограничиваться первыми двумя гармониками функции  $F$ :

$$F = F_0 + F_1 \cos \chi. \quad (8,11)$$

Перейдем теперь к исследованию «нулевого звука», т. е. случая, когда  $\omega\tau \gg 1$ . Кинетическое уравнение имеет вид (5,4). Подставим в него функцию распределения в виде

$$n = n_0 + \delta n, \quad (8,12)$$

где малое отклонение  $\delta n$  является периодической функцией координат и времени:  $\delta n \sim e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}$ . При этом, конечно, надо учесть, что согласно (1,5) энергия возбуждений тоже претерпевает изменение. Вследствие того, что интеграл столкновений  $I(n) \sim \frac{\delta n}{\tau}$ , а  $\omega\tau \gg 1$ , мы можем пренебречь  $I(n)$ .

Таким образом, находим:

$$(\mathbf{k}\mathbf{v} - \omega) \delta n - \mathbf{k}\mathbf{v} \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} \int f \delta n' d\tau' = 0.$$



Из вида этого уравнения следует, что  $\delta n$  пропорционально  $\frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon}$ . Обозначая  $\delta n = \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} \chi$ , получаем:

$$(\mathbf{k}\mathbf{v} - \omega)\chi + \mathbf{k}\mathbf{v} \int F\chi' \frac{d\Omega'}{4\pi} = 0. \quad (8,13)$$

Если выбрать  $\mathbf{k}$  в качестве полярной оси и ввести обозначения:  $u = \frac{\omega}{k}$  — скорость распространения волны,  $s = \frac{u}{v}$ , то уравнение (8,13) приобретает вид:

$$(s - \cos \theta)\chi(\theta, \varphi) = \cos \theta \int F(\chi)\chi(\theta', \varphi') \frac{d\Omega}{4\pi}. \quad (8,14)$$

Отсюда можно определить  $\chi(\theta, \varphi)$  и собственное значение  $s$ . Ввиду того, что изменение функции распределения  $\delta n$  пропорционально  $\frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon}$ , то ясно, что дело сводится к искажению ферми-поверхности. Вид этого искажения определяется функцией  $\chi$ . Уравнение (8,14) существенно зависит от функции  $F$ .

Рассмотрим сначала для примера наиболее простой случай, а именно  $F = F_0 = \text{const}$ . При этом из уравнения (8,14) получаем (без экспоненциального периодического множителя)

$$\chi = \frac{\text{const } t \cdot \cos \theta}{s - \cos \theta}. \quad (8,15)$$

Смещению ферми-поверхности как целого (это соответствует обычному звуку) соответствовало бы  $\chi \sim \cos \theta$ . Таким образом, в данном случае мы имеем дело с анизотропным искажением поверхности Ферми. Как мы увидим ниже,  $s$  должно быть больше единицы. Таким образом, поверхность Ферми оказывается вытянутой в направлении движения.

Подставляя (8,15) в (8,14) с  $F = F_0$ , находим уравнение для  $s$ . Произведя элементарное интегрирование, находим:

$$\frac{s}{2} \ln \frac{s+1}{s-1} - 1 = \frac{1}{F_0}. \quad (8,16)$$

Отсюда видно, что если  $s$  действительно (это соответствует незатухающим волнам), то оно должно быть больше 1, т. е.

$$u > v. \quad (8,17)$$

Из уравнения (8,14) видно, что это условие остается справедливым для любой функции  $F$ . Далее, ввиду того, что левая часть уравнения (8,16) всегда положительна, ясно, что условием существования нулевого звука является  $F_0 > 0$ .

Если функция  $F_0$  велика, то  $s$  тоже велико. Из уравнения (8,16) получаем  $s \rightarrow \sqrt{\frac{F_0}{3}}$  при  $F_0 \rightarrow \infty$ . Наоборот, при  $F_0 \rightarrow 0$ ,  $s \rightarrow 1$ , т. е.  $u \rightarrow v$ . Это случай почти свободного ферми-газа.

Нетрудно видеть, что заключение относительно  $s \rightarrow 1$  при  $F \rightarrow 0$  не зависит от вида  $F$ . Действительно, из (8,14) следует, что при  $F \rightarrow 0$   $s \rightarrow 1$ , а  $\chi$  отлично от нуля лишь вблизи малых  $\theta$ . Согласно (8,7) в слабо неидеальном ферми-газе  $c^2 \approx \frac{p_0^2}{3m}$ , т. е.  $c \cong \frac{v}{\sqrt{3}} \cong \frac{u}{\sqrt{3}}$ . Таким образом, скорость нулевого звука будет превышать обычную скорость звука в  $\sqrt{3}$  раз.

Рассмотрим теперь общий случай  $F(\gamma)^{10}$ . Представим эту функцию в виде суммы сферических гармоник согласно формуле (8,8). Подставим (8,8) в уравнение (8,14) и воспользуемся теоремой сложения полиномов Лежандра

$$P_n(\chi) = \sum_{m=-n}^n P_n^m(\theta) P_n^m(\theta') e^{im(\varphi-\varphi')} \frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!},$$

где  $P_n^m = P_n^{-m}$  — присоединенные полиномы Лежандра. После указанной выше подстановки получаем:

$$(\cos \theta - s) \gamma + \cos \theta \sum \frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!} P_n^m(\theta) F_n e^{im\varphi} \times \\ \times \int P_n^m(\theta') \gamma(\theta', \varphi') e^{-im\varphi'} \frac{d\Omega'}{4\pi} = 0. \quad (8,18)$$

Вводим обозначения

$$F_n \frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!} \int P_n^m(\theta') \gamma(\theta', \varphi') e^{-im\varphi'} \frac{d\Omega'}{4\pi} = \Phi_{nm} \quad (8,19)$$

и решаем уравнение (8,19) относительно  $\gamma$

$$\gamma = - \frac{\cos \theta}{\cos \theta - s} \sum \Phi_{nm} P_n^m(\theta) e^{im\varphi}. \quad (8,20)$$

Подставив это выражение в соотношение (8,19) и произведя интегрирование по  $\varphi$ , получим:

$$F_n \frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!} \int \sum_k P_n^m(\theta') \frac{\cos \theta'}{\cos \theta' - s} P_k^m(\theta') \frac{d\Omega'}{4\pi} \Phi_{km} = \sum_k \Phi_{km} \delta_{kn}. \quad (8,21)$$

Таким образом, мы получили систему однородных уравнений, определяющих величины  $\Phi_{km}$ . Эта система разделяется на независимые подсистемы, соответствующие различным  $m$ . Из формулы (8,21) следует, что в ферми-жидкости при абсолютном нуле могут распространяться колебания нескольких различных типов, характеризуемых различной зависимостью амплитуды от углов  $\theta, \varphi$ . Значению  $m=0$  соответствуют колебания, при которых  $\gamma$  изотропно в плоскости, перпендикулярной  $\mathbf{k}$ . При  $m \neq 0$  колебания поляризованы определенным образом в этой плоскости. Число типов колебаний определяется числом возможных значений  $m$  ( $|m| \leq n$ ). Скорости распространения колебаний определяются из условий равенства нулю детерминантов соответствующих систем:

$$\|\delta_{kn} + F_n \Omega_{kn}^m(s)\| = 0 \quad (N \geq n, k \geq |m|) \\ \Omega_{kn}^m(s) = \frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!} \int P_k^m(\theta') \frac{\cos(\theta')}{\cos \theta' - s} P_n^m(\theta') \frac{d\Omega'}{4\pi}. \quad (8,22)$$

Ввиду того, что  $P_n^{-m} = P_n^m$ , коэффициенты  $\Omega_{kn}^m$  не зависят от знака  $m$ , так что колебания, отличающиеся знаком  $m$ , распространяются с одинаковой скоростью.

Из формулы (8,22) видно, что уравнения для скоростей являются трансцендентными. В общем случае они не всегда имеют вещественные корни. Однако возможны и такие случаи, когда вещественных корней имеется несколько. Это соответствует нескольким типам колебаний с одинаковой поляризацией в плоскости, перпендикулярной  $\mathbf{k}$ .

Для примера рассмотрим случай, когда функция  $F(\chi)$  содержит лишь нулевую и первую гармоники (функция (8,11)). При этом коэффициенты  $\Omega_{kn}^m$  равны

$$\Omega_{00}^0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{x dx}{x-s} = 1 - \frac{s}{2} \ln \frac{s+1}{s-1} = -\omega,$$

$$\Omega_{10}^0 = \Omega_{01}^0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{x^2 dx}{x-s} = -s\omega,$$

$$\Omega_{11}^0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{x^3 dx}{x-s} = \frac{1}{3} - s^2\omega,$$

$$\Omega_{11}^1 = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \frac{(1-x^2)}{x-s} dx = \frac{1}{2} \left[ (s^2-1)\omega - \frac{1}{3} \right].$$

Для скорости распространения колебаний типа  $m=0$  получим после подстановки в определитель (8,22) уравнение

$$\omega = \frac{1 + F_1/3}{F_0 + F_0 F_1/3 + F_1 s^2}. \quad (8,23)$$

Для случая  $m=1$  получаем уравнение

$$\omega = \frac{F_1 - 6}{3F_1(s^2 - 1)}. \quad (8,24)$$

Это уравнение имеет один вещественный корень при  $F_1 > 6$ .

Остановимся теперь на применении полученных формул к случаю жидкого  $\text{He}^3$ . Из формулы (8,10) следует, что колебаниям типа  $m=0$  соответствует одна скорость (корень уравнения (8,23))

$$s = \frac{u}{v} = 1,72, \quad u = 192 \text{ м/сек.}$$

Колебания типа  $m=1$  (так же, как и все с  $m > 1$ ) отсутствуют. Конечно, возможно, что такой вывод является следствием грубости принятого нами приближения для  $F(\chi)$ , однако мы не видим оснований для такого заключения.

Наряду с рассмотренными колебаниями в ферми-жидкости при абсолютном нуле могут распространяться волны, существенно иного типа, которые можно назвать спиновыми<sup>8</sup>. Для рассмотрения таких колебаний необходимо учесть спиновую часть функции  $f$ , которая определяется формулой (4,3). Введем новое обозначение

$$\Phi(\chi) = f(\chi) \left( \frac{d\tau}{ds} \right)_{s=\mu} = F(\chi) + Z(\chi) \sigma \sigma'. \quad (8,25)$$

Уравнение нулевого звука теперь принимает вид

$$(s - \cos \theta) \nu = \cos \theta \cdot \frac{1}{2} \text{Sp}_\sigma \cdot \frac{1}{4\pi} \int \Phi \nu' d\Omega'. \quad (8,26)$$

Если считать  $\nu$  не зависящим от спина, то оно переходит в (8,14). Однако можно предполагать также другой вид функции  $\nu$ , а именно считать

$$\nu = \nu \sigma. \quad (8,27)$$

Для этой функции получаем уравнение

$$(s - \cos \theta) \mathbf{v} = \cos \theta \int z \mathbf{v}' \frac{d\Omega'}{16\pi}. \quad (8,28)$$

Таким образом, для компонент вектора  $\mathbf{v}$  получается уравнение, отличающееся от (8,14) лишь заменой  $F$  на  $Z/4$ . Поэтому все дальнейшие выкладки должны совпадать с тем, что было сделано выше.

Согласно тому, что было получено в § 4, в случае  $\text{He}^3 Z_0$  оказывается равным примерно  $-3,4$ , т. е. отрицательно. Хотя, конечно, отсюда нельзя сделать никаких строгих заключений, однако вероятнее всего, что в  $\text{He}^3$  не могут распространяться спиновые волны.

Возможность распространения звуковых волн при  $T=0$  означает, что ферми-жидкость обладает бозевской ветвью энергетического спектра в виде фононов с энергией  $\varepsilon = \hbar \nu$ . Однако поправки в термодинамических величинах от этой ветви содержат более высокие степени  $T$  (теплоемкость  $\sim T^3$ ), не учитываемые в рассматриваемом приближении теории.

### § 9. ДИСПЕРСИЯ И ПОГЛОЩЕНИЕ ЗВУКА

В предыдущем параграфе были рассмотрены два предельных случая  $\omega \tau \ll 1$  и  $\omega \tau \gg 1$ . Рассмотрим теперь, как будет происходить переход от обычного звука к нулевому, т. е. дисперсию звука<sup>10</sup>. Ввиду того, что область дисперсии  $\omega \tau \sim 1$  является в то же время областью сильного поглощения, наше рассмотрение дает возможность, одновременно решить вопрос и о поглощении звука.

В данном случае нам необходимо найти решение кинетического уравнения, включающего интеграл столкновений. Однако ввиду того, что закон взаимодействия возбуждений все равно неизвестен, мы упростим вид интеграла столкновений.

Для этой цели можно было бы ввести некоторое эффективное время  $\tau$  и заменить интеграл столкновений  $I$  в (5,1) выражением  $-\frac{\delta n}{\tau}$ . Однако при такой замене из кинетического уравнения не будут следовать законы сохранения для числа возбуждений, импульса и энергии, что делает невозможным переход к гидродинамике. Так как и вторая вязкость, а также влияние теплопроводности (см. ниже) в нашем случае ничтожно малы, то в интеграле столкновений отсутствуют члены, содержащие нулевую и первую шаровые гармоники. Мы поэтому заменим интегралы столкновений следующим выражением\*):

$$I(n) \rightarrow -\tau^{-1} (\delta n - \bar{\delta n} - 3\bar{\delta n} \cos \theta \cos \theta). \quad (9,1)$$

Легко видеть, что при интегрировании по  $d\tau_p$  это выражение обращается в нуль. Оно также обращается в нуль после умножения на  $\varepsilon$  или на  $p \cos \theta$  и интегрирования по  $d\tau_p$  \*\*). Таким образом, уравнения сохранения числа частиц, импульса и энергии автоматически будут выполняться. Итак, согласно (8,14), (9,1), исходное кинетическое уравнение имеет следующий вид:

$$(kv \cos \theta - \omega) \mathbf{v} + kv \cos \theta \int F \mathbf{v}' \frac{d\Omega'}{4\pi} = -\frac{1}{i\tau} (\mathbf{v} - \bar{\mathbf{v}} - 3\bar{\mathbf{v}} \cos \theta \cdot \cos \theta). \quad (9,2)$$

\*) Здесь и ниже чертой обозначается усреднение по углам.

\*\*) При этом интегрировании существенна лишь область значений импульсов, близких к  $p_0$ , поскольку функция  $\delta n$  содержит  $\delta$ -функцию при  $\varepsilon = \mu$ .

Имея в виду применение полученных результатов к  $\text{He}^3$ , мы, чтобы не усложнять задачу, запишем функцию  $F$  в виде двучленной формулы (8,11).

Вводим обозначения

$$\bar{v} = v_0; \quad 3v \cos \theta = v_1; \quad \sigma = -i\tau kv; \quad \xi = \frac{i\omega\tau - 1}{i\tau kv}, \quad (9,3)$$

после чего из (9,2) без труда получаем:

$$(\cos \theta - \xi) v + \cos \theta \left( F_0 v_0 + \frac{1}{3} F_1 v_1 \cos \theta \right) = \frac{1}{\sigma} (v_0 + v_1 \cos \theta). \quad (9,4)$$

Далее решаем полученное уравнение относительно  $v$  и вычисляем  $\bar{v} = v_0$  и  $v \cos \theta = v_1/3$ . Таким путем находим два уравнения для двух величин  $v_0$  и  $v_1$ :

$$v_0 = F_0 v_0 \omega + \frac{1}{3} \omega F_1 v_1 - \frac{1}{\sigma} \frac{\omega + 1}{\xi} v_0 - \frac{v_1}{\sigma} \omega, \quad (9,5)$$

$$\frac{1}{3} v_1 = F_0 v_0 \xi \omega - \frac{1}{3} \left( \frac{1}{3} - \xi^2 \omega \right) F_1 v_1 - \frac{\omega}{\sigma} v_0 - \frac{\xi \omega}{\sigma} v_1, \quad (9,6)$$

где  $\omega = \frac{1}{2} \ln \frac{\xi + 1}{\xi - 1} - 1$ .

Из условия совместности уравнений (9,5) и (9,6) получаем уравнение для определения комплексной скорости звука

$$\left( 1 + \frac{1}{\xi\sigma} \right) \left( 1 + \frac{F_1}{3} \right) - \omega \left\{ \left( 1 + \frac{F_1}{3} \right) \left( F_0 - \frac{1}{\xi\sigma} \right) + \xi^2 \left( F_1 - \frac{3}{\xi\sigma} \right) \cdot \left( 1 + \frac{1}{\xi\sigma} \right) \right\} = 0. \quad (9,7)$$

Это и есть искомое уравнение, определяющее зависимость скорости звука от частоты, или, другими словами, описывающее дисперсию звука в ферми-жидкости. Рассмотрим сначала два предельных случая.

а) Малые частоты  $\omega\tau \ll 1$ . Следовательно,  $\sigma \rightarrow 0$ ,  $\xi\sigma \rightarrow -1$ ,  $\xi \rightarrow \infty$ . Разложение функции  $\omega$  по степеням  $1/\xi$  дает

$$\omega = \frac{1}{3\xi^2} + \frac{1}{5\xi^4}$$

и уравнение (17) после несложных упрощений приобретает вид

$$\left( 1 + \frac{1}{\xi\sigma} \right)^2 = \frac{1}{3\xi^2} \cdot \left( 1 + \frac{F_1}{3} \right) \cdot \left( F_0 - \frac{1}{\xi\sigma} \right) + \frac{1}{5\xi^2} \left( 1 + \frac{1}{\xi\sigma} \right) \cdot \left( F_1 - \frac{3}{\xi\sigma} \right). \quad (9,8)$$

Учитывая соотношения (9,3), имеем:

$$\left( \frac{1 + \xi\sigma}{\sigma} \right)^2 = \left( \frac{\omega}{kv} \right)^2.$$

Из (9,8) и (9,3) находим в первом порядке по  $i\omega\tau$

$$\left( \frac{\omega}{kv} \right)^2 = \frac{1}{3} (1 + F_0) \left( 1 + \frac{F_1}{3} \right) - \frac{4}{15} i\omega\tau \left( 1 + \frac{F_1}{3} \right). \quad (9,9)$$

Первое слагаемое соответствует скорости обычного звука в ферми-жидкости. Поглощение же звука в области  $\omega\tau \ll 1$  находится элементарно из (9,9) как мнимая часть волнового вектора:

$$\gamma = \text{Im } k = \frac{2\omega^2\tau v^2}{15c^3} \left( 1 + \frac{F_1}{3} \right). \quad (9,10)$$

Ввиду того, что рассматриваемый случай соответствует обычному звуку, мы можем вместо (9,10) воспользоваться более точной обычной формулой

$$\gamma = \frac{\omega^2}{2\rho c^3} \left\{ \left( \frac{4}{3} \eta + \zeta \right) + \frac{\kappa}{c_p} \left( \frac{c_p}{c_v} - 1 \right) \right\}.$$

Принимая во внимание, что  $\zeta \ll \eta$ , и то, что  $\frac{\kappa}{c_p}$ , будучи величиной порядка  $\eta$ , умножается на малый множитель  $\frac{c_p}{c_v} - 1$  (нетрудно убедиться, что он имеет порядок  $\left( \frac{T}{\mu} \right)^2$ ), находим:

$$\gamma = \frac{2\omega^2}{3\rho c^3} \eta. \quad (9,11)$$

Сравнивая это выражение с (9,10), мы можем найти соотношение, позволяющее по экспериментальным значениям вязкости найти время  $\tau$ :

$$\eta = \frac{1}{5} \rho \tau v^2 \left( 1 + \frac{1}{3} F_1 \right). \quad (9,12)$$

Из данных К. Н. Зиновьевой о вязкости<sup>7</sup>.

$$\tau \cong 2,3 \cdot 10^{-12} \cdot T^{-2} \text{ сек } (T \text{ в } ^\circ\text{K}). \quad (9,13)$$

Для коэффициента поглощения при этом получаем:

$$\gamma \sim 1 \cdot 10^{-17} \left( \frac{\omega}{T} \right)^2 \text{ см}^{-1}. \quad (9,14)$$

б) Рассмотрим теперь второй предельный случай больших частот и низких температур  $\omega\tau \gg 1$ . В этом случае

$$\sigma \rightarrow \infty; \xi\sigma \rightarrow \infty; \xi = s + i\xi', \quad |\xi'| \ll s.$$

Уравнение (9,7) принимает вид

$$\left( 1 + \frac{F_1}{3} \right) - \omega(s) \left\{ \left( 1 + \frac{F_1}{3} \right) F_0 + s^2 F_1 \right\} = 0. \quad (9,15)$$

Это уравнение в точности совпадает с уравнением (8,23), определяющим скорость нулевого звука.

Что касается поглощения нулевого звука, то для вычисления его необходимо найти мнимую добавку к скорости звука  $\xi'$ . Из (9,9) получаем уравнение

$$\xi' \left\{ \frac{1}{\omega(s)} \left( 1 + \frac{F_1}{3} \right) \left( \frac{s}{s^2 - 1} - \frac{\omega(s) + 1}{s} \right) - 2s\omega(s) F_1 \right\} - \frac{1}{\omega\tau} \left\{ \left( 1 + \frac{F_1}{3} \right) (1 + \omega(s)) + \omega(s) s^2 (3 - F_1) \right\} = 0. \quad (9,16)$$

При помощи формулы (9,3) находим коэффициент поглощения

$$\gamma = \text{Im } k = \frac{1}{s\tau v} - \frac{\omega\xi'}{s^2 v}. \quad (9,17)$$

Если мы подставим сюда значения параметров, соответствующие  $\text{He}^3$  ( $s = 1,84$ ,  $v = 1,13 \cdot 10^4 \text{ см/сек}$ ), то получим:

$$\xi' = \frac{1,5}{\omega\tau}, \quad \gamma \sim 3 \cdot 10^6 \cdot T^2 \text{ см}^{-1}. \quad (9,18)$$

Таким образом, поглощение нулевого звука не зависит от частоты и возрастает при увеличении температуры как  $1/\tau$ , т. е. пропорционально  $T^2$ .

В проведенном вычислении звук рассматривался классическим образом. Применимость этого рассмотрения ограничена неравенством  $\hbar\omega \ll T$ . В случае  $\hbar\omega \gg T$  необходимо произвести квантовое рассмотрение. Убывание числа звуковых квантов в единицу времени благодаря столкновениям ферми-частиц равно

$$\int \omega \{n_1 n_2 (1 - n'_1) (1 - n'_2) - n'_1 n'_2 (1 - n_1) (1 - n_2)\} \times \\ \times \delta(\mathbf{p}' + \mathbf{p}'_2 - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 - \hbar \mathbf{k}) \cdot \delta(\varepsilon'_1 + \varepsilon'_2 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \hbar\omega) d\tau_1 d\tau_2 d\tau'_1 d\mathbf{p}'_2. \quad (9,19)$$

Функция четырех импульсов  $\omega$  неизвестна. Однако можно произвести вычисления таким образом, что коэффициент поглощения будет выражен через его классическое значение (9,17); это было сделано в работе Л. Д. Ландау<sup>8</sup>.

Пользуясь тем, что в существенной для задачи области размытия распределения Ферми сильно меняющимися функциями являются лишь числа заполнения  $n(\varepsilon)$ , мы можем считать, что угловые интегралы дают некоторую константу, которая не меняется при переходе от классической области  $\hbar\omega \ll T$  к квантовой  $\hbar\omega \gg T$ . В результате остается лишь интеграл по энергиям

$$I = \int \{n_1 n_2 (1 - n'_1) (1 - n'_2) - n'_1 n'_2 (1 - n_1) (1 - n_2) \times \\ \times \delta(\varepsilon'_1 + \varepsilon'_2 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \hbar\omega) d\varepsilon_1 d\varepsilon_2 d\varepsilon'_1 d\varepsilon'_2\}. \quad (9,20)$$

Подставив в качестве  $n$  функцию Ферми и распространяя интегрирование от  $-\infty$  до  $\infty$  (это допустимо ввиду быстрой сходимости интегралов), мы после довольно длинных выкладок получаем:

$$I = T^3 \frac{2\pi^2}{3} \hbar\omega \left[ 1 + \left( \frac{\hbar\omega}{2\pi T} \right)^2 \right]. \quad (9,21)$$

Коэффициент поглощения пропорционален интегралу  $I$ . Из предельного классического случая можно определить коэффициент пропорциональности. Так как при  $\hbar\omega \ll T$  должно получиться классическое значение  $\gamma$ , то в общем случае имеем:

$$\gamma = \gamma_{\text{кл}} \left[ 1 + \left( \frac{\hbar\omega}{2\pi T} \right)^2 \right], \quad (9,22)$$

где  $\gamma_{\text{кл}}$  дается формулой (9,17). Ввиду того, что  $\gamma_{\text{кл}}$  пропорционально  $T^2$ , в предельном квантовом случае  $\hbar\omega \gg T$ ,  $\gamma$  должно быть пропорционально  $\omega^2$ .

#### § 10. РАССЕЯНИЕ СВЕТА (ФЛУКТУАЦИИ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ)

Согласно предыдущему условию возможности распространения «нулевого звука» является, в частности, неравенство

$$\omega_{\text{зв}} \tau \gg 1, \quad (10,1)$$

где  $\tau$  — время столкновений. Для  $\text{He}^3$  оно имеет порядок  $10^{-12} \cdot T^{-2}$  сек. Если даже взять температуру  $\sim 0,01^\circ \text{K}$ , то для непосредственного наблюдения нулевого звука необходима частота выше  $10^8$  гц, что очень затрудняет проведение такого эксперимента.

Кроме этого способа, может быть предложен косвенный метод, который заключается в наблюдении рэлеевского рассеяния света в жидком  $\text{He}^3$ \*). Как известно, при рэлеевском рассеянии в дополнение

\*) Мысль об использовании рэлеевского рассеяния была впервые высказана С. П. Капицей.

к основной линии возникают сателлиты, отличающиеся по частоте на

$$\Delta\omega = \pm 2 \frac{u}{c} \omega \sin \frac{\theta}{2},$$

где  $u$  — скорость звука,  $\theta$  — угол рассеяния. Скорость нулевого звука в  $\text{He}^3$  порядка  $2 \cdot 10^4 \text{ см/сек}$ , т. е.  $\Delta\omega \sim 10^{-6} \omega$ . Таким образом, наблюдение частотного распределения рассеянного света принципиально дает возможность измерить скорость нулевого звука. Условие (10,1) может быть удовлетворено благодаря большой частоте, соответствующей видимому свету.

Кроме этой стороны дела, рассеяние света в ферми-жидкости при достаточно низкой температуре имеет ряд специфических черт, в виду чего представляет интерес теоретическое исследование этого явления, в особенности распределения интенсивности по частотам\*).

Как известно, частотное и угловое распределения для рэлеевского рассеяния неполяризованного света даются формулой<sup>12\*\*)</sup>

$$dh = \frac{\omega^4}{6\pi c^4} \cdot \frac{1}{2\pi V} \left| \int \delta D_{\Delta\omega}(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}} dV \right|^2 \frac{3}{4} (1 + \cos^2 \theta) \frac{d\Omega}{4\pi} d\Delta\omega, \quad (10,2)$$

где  $\omega$  — частота падающего света,  $\theta$  — угол рассеяния,  $\mathbf{q}$  — изменение волнового вектора света, равное по абсолютной величине  $\frac{2\omega}{c} \sin(\theta/2)$ ,  $\delta D_{\Delta\omega}$  — компонента Фурье от флуктуации диэлектрической проницаемости  $\delta D(t)$ :

$$\delta D_{\Delta\omega} = \frac{1}{V t_0} \int_0^{t_0} \delta D(t) e^{i\Delta\omega t} d\tau, \quad (10,3)$$

где  $t_0$  — некоторая большая величина, которая в окончательной формуле будет устремлена к бесконечности.

Черта в формуле (10,2) означает усреднение по флуктуациям. В дальнейшем мы будем для простоты полагать объем систем равным единице.

Ввиду очень малой поляризуемости атомов гелия можно считать, что изменение диэлектрической проницаемости происходит в результате флуктуаций плотности, т. е.  $\delta D = \left( \frac{\partial D}{\partial N} \right) \delta N$ , где  $N$  — число частиц в единице объема. Но согласно общей теории ферми-жидкости число возбуждений равно числу атомов жидкости. Таким образом, можно написать

$$\int \delta D_{\Delta\omega}(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}} dV = \frac{\partial D}{\partial N} \int \delta n_{\mathbf{q}, \Delta\omega}(\mathbf{p}) d\tau_p, \quad (10,4)$$

где  $\delta n_{\mathbf{q}, \Delta\omega}(\mathbf{p})$  — компонента Фурье по  $\mathbf{r}$  и  $t$  (последнее в смысле формулы (10,3)) от флуктуации функции распределения возбуждений.

Прежде чем перейти к дальнейшим вычислениям, отметим одно важное обстоятельство. В формуле (10,2) происходит усреднение по всем возможным флуктуациям. В области температур и частот, где  $\hbar\Delta\omega \gg T$ , такое усреднение необходимо производить с учетом квантовых эффектов. Однако (см.<sup>12)</sup> для этого достаточно знать результат для чисто классического случая, т. е. при  $T \gg \hbar\Delta\omega$ , а затем ввести некото-

\*) Отметим, что в случае высоких температур, когда  $\omega_{\text{ЗВ}} \ll 1$ , рассеяние света будет описываться обычными формулами (см.<sup>12)</sup>).

\*\*) Здесь  $dh$  — так называемый дифференциальный коэффициент экстинкции. Интеграл от  $dh$  по  $d\Omega$  и  $d\Delta\omega$  дает полный коэффициент экстинкции  $h$ , представляющий собой декремент затухания плотности потока фотонов в среде.



рый поправочный множитель. Для рассеяния с увеличением частоты на  $\Delta\omega$  (антистоксовское рассеяние) надо ввести множитель  $\left(\frac{\hbar\Delta\omega}{T}\right) N(\Delta\omega)$ , а для рассеяния с уменьшением частоты на  $\Delta\omega$  (стоксовское рассеяние) — множитель  $\left(\frac{\hbar\Delta\omega}{T}\right) [N(\Delta\omega) + 1]$ , где  $N(\Delta\omega)$  — функция распределения Бозе.

Если для описания стоксовского рассеяния пользоваться отрицательными  $\Delta\omega$ , то благодаря соотношению  $N(-\Delta\omega) + 1 = -N(\Delta\omega)$  оказывается, что поправочный множитель для обоих случаев имеет вид

$$\frac{\hbar\Delta\omega}{T} \left[ e^{\frac{\hbar\Delta\omega}{T}} - 1 \right]^{-1}. \quad (10,5)$$

Итак, будем считать  $T \gg \hbar\Delta\omega$ . Для нахождения флуктуаций функций распределения воспользуемся методом, предложенным Рытовым<sup>13</sup> и Ландау и Лифшицем<sup>14</sup> для вычисления флуктуаций в электродинамике и гидродинамике\*). При помощи такого метода мы найдем флуктуацию «случайной силы», входящей в кинетическое уравнение, после чего, решая это уравнение, можно получить и флуктуации функции распределения.

Для случая ферми-жидкости будем исходить из кинетического уравнения, которое запишем в виде

$$\frac{\partial \delta n}{\partial t} + \frac{\partial \delta n}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial n_0}{\partial \mathbf{p}} \int f(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \frac{\partial \delta n(\mathbf{p}')}{\partial \mathbf{r}} d\tau_{p'} = I(\delta n) + y(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t). \quad (10,6)$$

За исключением «случайной силы»  $y(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t)$ , это уравнение представляет собой линейное по  $\delta n$  приближение кинетического уравнения (5.1).

В дальнейшем мы будем интересоваться только случаем частот и температур, удовлетворяющих соотношению (10,1), т. е. тем случаем, когда можно пренебречь столкновениями. При этом не существенна детальная форма интеграла столкновений, так как он играет роль вспомогательной величины при вычислениях и в окончательном результате может быть положен равным нулю. Ввиду этого мы положим

$$I(\delta n) = -\frac{\delta n}{\tau}, \quad (10,7)$$

где  $\tau$  — большая величина. Далее необходимо найти скорость изменения энтропии. Принимая во внимание, что число частиц и полная энергия заданы, и используя соотношение

$$\delta \varepsilon(\mathbf{p}) = \int f(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \delta n(\mathbf{p}') d\tau_{p'}, \quad (10,8)$$

находим:

$$\dot{S} = - \left\{ \int \frac{\delta n [I(\delta n) + y]}{n_0 (1 - n_0)} d\tau_p dV + \frac{1}{T} \int f(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta n I(\delta n') d\tau_p dV d\tau_{p'} dV' \right\}. \quad (10,9)$$

Принимая во внимание, что  $n_0(1 - n_0) \approx T\delta(\varepsilon - \mu)$ , где  $\mu$  — химический потенциал, нетрудно понять, что  $\delta n(\mathbf{p})$  должно иметь вид

$$\delta n(\mathbf{p}) = v(\theta, \varphi) \cdot \delta(\varepsilon - \mu), \quad (10,10)$$

\*) Авторы выражают благодарность Л. П. Горькову, И. Е. Дзялошинскому и Л. П. Питаевскому, обратившим их внимание на возможность применения этого метода к кинетическому уравнению.

где  $\theta$  и  $\varphi$  — полярные углы вектора  $\mathbf{p}$ . Эта формула означает, что флуктуации функции распределения происходят только в области ферми-границы.

Такой же вид естественно предположить для  $y$ , т. е.

$$y(\mathbf{p}) = y^e(\theta, \varphi) \delta(\varepsilon - \mu). \quad (10,11)$$

Введем теперь обозначение

$$F(\chi) = \left[ f(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \frac{d\tau}{d\varepsilon} \right]_{\varepsilon=\varepsilon'=\mu},$$

где  $\chi$  — угол между  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{p}'$ , и разложим  $\delta n$ ,  $y$  и  $F$  по сферическим функциям

$$\left. \begin{aligned} v(\theta, \varphi) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n A_n^m P_n^m(\cos \theta) e^{im\varphi}, \\ y^e(\theta, \varphi) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n y_n^m P_n^m(\cos \theta) e^{im\varphi}, \\ F(\chi) &= \sum_{n=0}^{\infty} F_n P_n(\cos \chi). \end{aligned} \right\} \quad (10,12)$$

Так как  $v$  и  $y^e$  — действительные величины, то

$$A_n^m = (A_n^{-m})^*, \quad y_n^m = (y_n^{-m})^*.$$

Используя выражение (10.7) для интеграла столкновений, получим следующую формулу для скорости изменения энтропии:

$$\begin{aligned} \dot{S} = \int dV \left( \frac{d\tau_p}{d\varepsilon} \right)_{\varepsilon=\mu} \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left( \frac{F_n}{2n+1} + 1 \right) \times \\ \times \frac{1}{2n+1} \left( \frac{(n+|m|)!}{(n-|m|)!} \right) \left( \frac{A_n^n}{\tau} - y_n^m \right) A_n^{-m}. \end{aligned} \quad (10,13)$$

Введем теперь обозначение

$$\dot{x}_n^m = -\frac{A_n^m}{\tau} + y_n^m. \quad (10,14)$$

Тогда для того чтобы уравнение (10.13) имело вид (см. <sup>14</sup>)

$$\dot{S} = - \sum_i X_i \cdot \dot{x}_i$$

мы должны взять в качестве обобщенной силы  $X_i$  выражение

$$X_n^m = \frac{1}{T} \left( \frac{d\tau_p}{d\varepsilon} \right)_{\varepsilon=\mu} \left( \frac{F_n}{2n+1} + 1 \right) \frac{1}{2n+1} \frac{(n+|m|)!}{(n-|m|)!} A_n^{-m}. \quad (10,15)$$

В выражении (10,14) величина  $y_n^m$  играет роль «случайной силы». Записывая это соотношение в виде

$$x_n^m = - \sum_{n', m'} \gamma_{n, n'}^{m, m'} X_{n'}^{m'} + y_n^m,$$

где коэффициенты  $\gamma$  без труда определяются из формулы (10,15), мы, согласно общей теории флуктуаций, имеем:

$$\begin{aligned} y_n^m(\mathbf{r}, t) y_{n'}^{m'}(\mathbf{r}', t') &= (\gamma_{n, n'}^{m, m'} + \gamma_{n', n}^{m', m}) \delta(t - t') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \\ &= \frac{2}{\tau} \delta_{n, n'} \delta_{m, -m'} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t') \times \\ &\times \left[ T \left( \frac{d\tau_p}{d\varepsilon} \right)_{\varepsilon=\mu} \cdot \left( \frac{F_n}{2n+1} + 1 \right) \frac{1}{2n+1} \frac{(n+|m|)!}{(n-|m|)!} \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (10,16)$$

Наконец, воспользовавшись формулой (10,12) и соотношением

$$\sum_n (2n+1) P_n(\cos \chi) = 2\delta(\cos \chi - 1),$$

после некоторых преобразований получаем общее соотношение

$$\begin{aligned} \overline{y(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) y(\mathbf{p}', \mathbf{r}', t')} = \frac{2T}{\tau} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t') \times \\ \times \left\{ \frac{(2\pi\hbar)^3}{2} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \delta(\varepsilon - \mu) + \delta(\varepsilon - \mu) \delta(\varepsilon' - \mu) \left( \frac{d\varepsilon}{d\tau_p} \right)_{\varepsilon=\mu} \times \right. \\ \left. \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n P_n(\cos \chi)}{1 + F_n/2n+1} \right\}. \quad (10,17) \end{aligned}$$

При помощи этой формулы и кинетического уравнения (10,16) можно вычислить интересующие нас флуктуации функции распределения. Поскольку в общем случае произвольной функции  $f$  это довольно сложно, то мы ограничимся случаем  $f = \text{const}$ .

Воспользуемся тем, что флуктуации происходят лишь на ферми-поверхности, и при помощи уравнения (10,6) выразим  $v_{\mathbf{q}, \Delta\omega}(\theta, \varphi)$  через соответствующую фурье-компоненту от  $y^{\varepsilon}(\theta, \varphi)$ . Это дает

$$\int v_{\mathbf{q}, \Delta\omega}(\theta, \varphi) \frac{d\Omega}{4\pi} = \int \frac{y_{\mathbf{q}, \Delta\omega}^{\varepsilon}(\theta, \varphi) \frac{d\Omega}{4\pi}}{-i\omega + \frac{1}{\tau} + i\mathbf{q} \cdot \mathbf{v}} \left( 1 + F_0 \int \frac{i(\mathbf{q}\mathbf{v}) \frac{d\Omega}{4\pi}}{-i\omega + \frac{1}{\tau} + i\mathbf{q} \cdot \mathbf{v}} \right), \quad (10,18)$$

где  $\mathbf{v} = \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}} \right)_{\varepsilon=\mu}$ . Усредняя квадрат модуля этого выражения при помощи формулы (10,17) (при этом надо помнить, что взятие фурье-компонент по  $t$  производится согласно формуле (10,3), находим:

$$\begin{aligned} \left| \int v_{\mathbf{q}, \Delta\omega}(\theta, \varphi) \frac{d\Omega}{4\pi} \right|^2 = 2 \left( \frac{d\varepsilon}{d\tau_p} \right)_{\varepsilon=\mu} \frac{T}{\tau} \left[ \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{dx}{|qv x - \omega + \frac{i}{\tau}|^2} - \right. \\ \left. - \frac{F_0}{1+F_0} \left| \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{dx}{qv x - \omega + \frac{i}{\tau}} \right|^2 \right] \left/ \left| 1 + \frac{F_0}{2} \int_{-1}^1 \frac{qv x dx}{qv x - \omega + \frac{i}{\tau}} \right|^2 \right|. \quad (10,19) \end{aligned}$$

Нас интересует предельное значение этого выражения при  $\tau \rightarrow \infty$ . В случае, когда  $qv > |\Delta\omega|$ , знаменатель не содержит полюсов, и существенным оказывается вычет в интеграле в числителе. При этом получаем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \overline{|v_{\mathbf{q}, -\omega}(\mathbf{p}) d\tau_p|^2} = T \left( \frac{d\tau_p}{d\varepsilon} \right) \frac{1}{qv} \left\{ \left[ 1 + F_0 \left( 1 - \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - \frac{\Delta\omega}{2qv} \ln \frac{qv + \Delta\omega}{qv - \Delta\omega} \right) \right]^2 + \left( \frac{F_0 \Delta\omega \pi}{2qv} \right)^2 \right\}^{-1}. \quad (10,20) \end{aligned}$$

В обратном случае, т. е. при  $qv \ll \Delta\omega$ , существенным является полюс в знаменателе выражения (10,19). Нетрудно видеть, что такой полюс возникает, если  $F_0 > 0$  и равен  $\Delta\omega = \pm sqv$ , где  $s$  удовлетворяет уравнению

$$1 + F_0 \left[ 1 - \frac{1}{2} \ln \left( \frac{s+1}{s-1} \right) \right] = 0. \quad (10,21)$$

Это уравнение совпадает с уравнением (8,16), определяющим скорость

нулевого звука. Пользуясь соотношением

$$\frac{1}{\pi} \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\tau}}{(\omega - \omega_0)^2 + \tau^{-2}} = \delta(\omega - \omega_0),$$

без труда получаем:

$$\frac{1}{2\pi} \left| \int \gamma_{\mathbf{q}, \Delta\omega}(\mathbf{p}) d\tau_p \right|^2 = T \left( \frac{d\tau_p}{d\varepsilon} \right)_{\varepsilon=\mu} \frac{2(s^2-1)}{F_0(1+F_0-s^2)} \times \\ \times [\delta(\Delta\omega - sqv) + \delta(\Delta\omega + sqv)]. \quad (10,22)$$

Таким образом, распределение рассеянного света по углам и частотам имеет вид (мы ввели также квантовый множитель (10,5)):

$$dh = \frac{\omega^4}{4\pi c^4} \left( \frac{\partial D}{\partial N} \right)^2 \left( \frac{d\tau_p}{d\varepsilon} \right)_{\varepsilon=\mu} (1 + \cos^2 \theta) \cdot \frac{\hbar \Delta\omega}{e^{\hbar \Delta\omega/T} - 1} \times \\ \times \left[ \frac{\theta(qv - |\Delta\omega|)}{2qv} / \left\{ \left[ 1 + F_0 \left( 1 - \frac{\Delta\omega}{2qv} \ln \frac{qv + \Delta\omega}{qv - \Delta\omega} \right) \right]^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + \left( \frac{F_0 \Delta\omega \pi}{2qv} \right)^2 \right\} + \frac{s^2-1}{F_0(1+F_0-s^2)} [\delta(\Delta\omega - sqv) + \right. \\ \left. + \delta(\Delta\omega + sqv)] \right] \frac{d\Omega}{4\pi} d\Delta\omega, \quad (10,23)$$

где

$$\theta(y) = \begin{cases} 1 & y > 0, \\ 0 & y < 0. \end{cases}$$

Полученный результат имеет простой физический смысл. Как легко видеть, частотный спектр состоит из средней части  $-qv < \Delta\omega < qv$  и двух резких линий, при  $\Delta\omega = \pm sqv$ . Средняя часть соответствует доплеровскому уширению основной линии. Сравнение уравнения (10,24) с формулой (8,16) показывает, что боковые линии являются спутниками в рэлеевском рассеянии, появляющимися в связи с возможностью распространения нулевого звука ( $sv = u$ ). Соотношение между интенсивностями центральной части и боковых спутников в общем случае зависит от угла рассеяния. Однако в предельных случаях высоких температур ( $T \gg \frac{\hbar \omega u}{c}$ ) и низких температур ( $T \ll \frac{\hbar \omega u}{c}$ ) это соотношение не зависит от угла. Можно произвести численные оценки для  $\text{He}^3$ , воспользовавшись для этого неизвестными параметрами. При этом оказывается, что для случая высоких температур на центральную часть приходится  $\sim 20\%$  всей интенсивности, а на боковые линии по  $40\%$ . В случае низких температур, благодаря квантовому множителю, распределение будет обрезано со стороны положительных  $\Delta\omega$ . В частности, из двух спутников останется только стоксовский с  $\Delta\omega = -uq$ , на который придется  $90\%$  интенсивности. На центральную часть в этом случае приходится только  $10\%$  всей интенсивности.

Полная интенсивность рассеяния получается интегрированием формулы (10,23) по  $d\Delta\omega$  и  $d\Omega$ . В случае высоких температур

$$(T \gg \hbar \Delta\omega \sim \hbar \omega \frac{u}{c})$$

она равна

$$h = \frac{\omega^4 T}{6\pi c^4} \left( \frac{\partial D}{\partial N} \right)^2 \left( \frac{d\tau_p}{d\varepsilon} \right)_{\varepsilon=\mu} J_1, \quad (10,24)$$

где  $J_1$  — численный интеграл, равный в случае  $\text{He}^3$  примерно 0,5.

В предельном квантовом случае ( $T \ll \frac{\hbar \omega u}{c}$ ) имеем:

$$h = \frac{\hbar \omega^5 v}{6\pi c^4} \left( \frac{\partial D}{\partial N} \right) \left( \frac{d\tau_p}{ds} \right)_{s=\mu} J_2. \quad (10,25)$$

Здесь  $J_2$  — численный интеграл, равный в случае  $\text{He}^3$  примерно 0,2. Для того чтобы произвести количественную оценку полученных выражений в случае  $\text{He}^3$ , необходимо знать величину  $\frac{\partial D}{\partial N_0}$ . Измерения этой величины отсутствуют, а поэтому мы положим  $D=1$  пропорциональным  $N$ , а коэффициент пропорциональности заимствуем из данных о жидком  $\text{He}^4$ . При длине волны  $\lambda = 5461 \text{ \AA}$  показатель преломления жидкого  $\text{He}^4$  равен 1,027. Это дает  $\frac{\partial D}{\partial N} = 2,5 \cdot 10^{-24}$ . Подстановка в формулы (24) и (25) дает ( $T$  в  $^\circ\text{K}$ ):

$$\begin{aligned} h(\text{He}^3) 10^{-69} \omega^4 T \text{ см}^{-1} & \quad \text{при} \quad \omega \ll 2 \cdot 10^{17} T \text{ сек}^{-1}, \\ h(\text{He}^3) 10^{-87} \omega^5 \text{ см}^{-1} & \quad \text{при} \quad \omega \gg 2 \cdot 10^{17} T \text{ сек}^{-1}. \end{aligned} \quad (10,26)$$

Надо иметь в виду, что частота должна удовлетворять соотношению (1), т. е.  $\Delta\omega \gg 1/\tau$  или

$$\omega \gg 10^{18} T^2 \text{ сек}^{-1}.$$

Если это условие не будет выполнено, то ширина линий будет слишком велика. Таким образом, в видимой области частот нам необходимы температуры ниже  $0,05^\circ\text{K}$ . Нетрудно видеть, что температурам порядка  $0,01^\circ$  в видимой области частот будет соответствовать  $h(\text{He}^3) \sim 10^{-9} \text{ см}^{-1}$ , что, конечно, слишком мало\*), чтобы этот эффект можно было измерить. Однако благодаря тому, что  $\omega$  входит в выражение для  $h$  в очень высокой степени, возможно, что рассеяние удастся измерить в ультрафиолетовой области.

## ПРИЛОЖЕНИЯ

### МИКРОСКОПИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ФЕРМИ-ЖИДКОСТИ

#### П 1. Разреженный ферми-газ

В этом параграфе мы рассмотрим свойства неидеального ферми-газа, размеры частиц которого малы по сравнению со средней длиной волны<sup>16</sup>. Эта модель, ряд свойств которой был рассмотрен недавно Янгом и Хуангом<sup>17</sup>, а также Янгом и Ли<sup>18</sup>, была названа ими моделью твердых шариков. В действительности она имеет более общий характер и соответствует системе ферми-частиц с произвольными короткодействующими силами, радиус действия которых мал по сравнению со средней длиной волны.

Такая модель позволяет получить выражения для различных величин, описывающих ферми-жидкость, например, энергии, эффективной массы и функции  $f$  в виде разложения по степеням  $(a/\lambda)$  ( $a$  — радиус,  $\lambda$  — длина волны). Мы произведем расчет с точностью до членов порядка  $(a/\lambda)^2$ . В принципе аналогичным образом можно было бы определить и члены нескольких следующих порядков, но это не представляет специального интереса. Начнем с вычисления энергии.

Воспользуемся теорией возмущений по отношению к энергии взаимодействия частиц, которую запишем в виде (считая для простоты объем газа за единицу)

$$V = 2U \sum_{\substack{n_1 n_2 m_1 m_2 \\ n_1 < n_2}} a_{m_1}^* a_{m_2}^* a_{n_2} a_{n_1}, \quad (\text{П1,1})$$

\*) Для жидкого  $\text{He}^4$  в видимой области  $h \sim 10^{-8} \text{ см}^{-1}$   $\psi^{15}$  (примерно то же самое должно получиться для  $\text{He}^3$  при  $\Delta\omega t \ll 1$ ). Хотя измерения  $h$  для  $\text{He}^4$  были проведены, но даже они находятся на пределе экспериментальных возможностей.

где  $a_i^+$  и  $a_i$  — операторы рождения и уничтожения частиц. Суммирование ведется с учетом сохранения полного импульса, причем проекция спина состояния  $m_1$  равна проекции спина состояния  $n_1$  и аналогично для  $m_2$  и  $n_2$ . Вынос  $U$  за знак суммы соответствует тому, что взаимодействие между любыми парами частиц одинаково, причем амплитуда рассеяния не зависит от угла. Величина  $U$  в первом приближении связана с этой амплитудой соотношением

$$U = \frac{4\pi a \hbar^2}{m} \quad (\text{П1,2})$$

( $a$  — амплитуда;  $s$  — рассеяния).

Добавка первого порядка к энергии равна диагональному матричному элементу от  $V$ :

$$E_n^{(1)} = 2U \sum_{n_1 < n_2} N_{n_1} N_{n_2} Q_{n_1 n_2}, \quad (\text{П1,3})$$

где  $N_i$  — числа заполнения.

Множитель  $Q_{ik}$  в формуле (П1,3) учитывает то обстоятельство, что ферми-частицы с амплитудой рассеяния, не зависящей от угла, не взаимодействуют в случае параллельных спинов. Таким образом, мы будем считать, что

$$Q_{ik} = \frac{1}{4} - \sigma_i \sigma_k \quad (\text{П1,4})$$

( $\sigma_i$  — оператор спина  $i$ -й частицы).

Подставив в (П1,3) формулы (П1,2) и (П1,4), получим:

$$E^{(1)} = (2\pi a \hbar^2 / m) N^2 / 2. \quad (\text{П1,5})$$

Для нахождения поправки второго порядка воспользуемся выражением теории возмущений

$$E_n^{(2)} = \sum_{m \neq n} |V_{nm}|^2 / (E_n - E_m). \quad (\text{П1,6})$$

Подставляя в эту формулу выражение (П1,4), получаем следующую сумму:

$$4U^2 \sum_{\substack{n_1 n_2 m_1 m_2 \\ n_1 < n_2}} \frac{N_{n_1} N_{n_2} (1 - N_{m_1}) (1 - N_{m_2}) Q_{n_1 n_2}}{E_{n_1} + E_{n_2} - E_{m_1} - E_{m_2}}, \quad (\text{П1,7'})$$

где  $N_i$  — равновесные числа заполнения,  $E_i$  — энергии частиц.

Ввиду того, что нашей целью является получение разложения энергии по степеням  $a$ , мы должны учесть, что соотношение (П1,2) между  $U$  и амплитудой рассеяния не является точным, а справедливо лишь с точностью до членов первого порядка. При учете членов второго порядка вместо соотношения (П1,2) получается следующее:

$$2U + 4U^2 \sum_{m_1 m_2} Q_{n_1 n_2} / (E_{n_1} + E_{n_2} - E_{m_1} - E_{m_2}) = \frac{8\pi a \hbar^2}{m}. \quad (\text{П1,2'})$$

Если отсюда выразить  $U$  через  $a$  и подставить результат в формулу (П1,3), то в выражении  $E^{(1)}$  возникнут члены, пропорциональные  $a^2$ , которые, естественно, следует отнести к поправке второго порядка. С учетом этого обстоятельства мы получаем следующее значение второго приближения к энергии:

$$E^{(2)} = 2U^2 \sum_{n_1 n_2 m_1 m_2} \left\{ \frac{N_{n_1} N_{n_2} (1 - N_{m_1}) (1 - N_{m_2}) \cdot Q_{n_1} Q_{n_2}}{E_{n_1} + E_{n_2} - E_{m_1} - E_{m_2}} - \frac{N_{n_1} N_{n_2} Q_{n_1 n_2}}{E_{n_1} + E_{n_2} - E_{m_1} - E_{m_2}} \right\}. \quad (\text{П1,7})$$

Ввиду того, что выражение в скобках симметрично по  $n_1$  и  $n_2$ , заменим ограничение  $n_1 > n_2$  множителем  $1/2$ .

Смысл произведенной операции заключается в том, что разложение по степеням  $U$  в действительности не имеет места. Наличие постоянного  $U$  просто привело бы к бесконечности в энергии, как это видно непосредственно из формулы (П1,7). В данном случае существенным обстоятельством является то, что амплитуда рассеяния  $a$  имеет конечную и притом малую величину, что делает возможным разложение по этой величине.

В первом слагаемом выражении (П1,7) член с произведением четырех  $N_i$  равен нулю ввиду того, что знаменатель антисимметричен относительно замены  $n_1 n_2 \rightarrow m_1 m_2$ ,

в то время как числитель симметричен, и все области суммирования одинаковы. Оставшиеся два члена с произведениями трех  $N_i$  одинаковы. Таким образом, окончательно получаем:

$$E^2 = -4U^2 \sum_{n_1 n_2 m_1 m_2} \frac{N_{n_1} N_{n_2} N_{m_1} Q_{n_1 n_2}}{E_{n_1} + E_{n_2} - E_{m_1} - E_{m_2}}. \quad (\text{П1,8})$$

Это и есть выражение для энергии, которое справедливо при выполнении основного предположения  $\frac{a}{\lambda} \ll 1$ .

Нашей целью является получение характеристик вырожденного ферми-газа. Из выражения (П1,8) находим энергию основного состояния

$$E^{(2)} = -\frac{4U^2}{(2\pi\hbar)^3} \int d\mathbf{p}_1 \int d\mathbf{p}_2 \int d\mathbf{p}_3 \int d\mathbf{p}_4 \frac{\delta(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_4)}{|\mathbf{p}_1| < p_0; |\mathbf{p}_2| < p_0; |\mathbf{p}_3| < p_0; (\mathbf{p}_1^2 + \mathbf{p}_2^2 - \mathbf{p}_3^2 - \mathbf{p}_4^2)/2m} \frac{1}{2m}, \quad (\text{П1,9})$$

где  $p_0$  — граничный импульс.

Энергия возбуждений, согласно § 1, определяется соотношением

$$\epsilon_i = \frac{\delta E}{\delta N_i}. \quad (\text{П1,10})$$

Вариация выражений (1,3) и (1,8) по  $N_i$  дает

$$\epsilon(\mathbf{p}) = \frac{p^2}{2m} + \frac{UN}{2} + \frac{2U^2}{(2\pi\hbar)^3} \int d\mathbf{p}_1 \int d\mathbf{p}_2 \int d\mathbf{p}_3 \times \\ \times \left[ \frac{\delta(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p} - \mathbf{p}_3)}{(\mathbf{p}^2 + \mathbf{p}_3^2 - \mathbf{p}_1^2 - \mathbf{p}_2^2)/2m} - 2 \frac{\delta(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p} - \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3)}{(\mathbf{p}^2 + \mathbf{p}_1^2 - \mathbf{p}_2^2 - \mathbf{p}_3^2)/2m} \right]. \quad (\text{П1,11})$$

Таким образом, задача о вычислении энергии основного состояния и эффективной массы возбуждений сводится к вычислению интегралов (П1,9) и (П1,11). Интегрирование является довольно громоздким ввиду высокой кратности интегралов и неудобства области интегрирования.

Вместо этого можно применить более простой способ, основанный на введении функции  $f$ . Если ввести эту функцию

$$f_{ik} = \delta^2 E / \delta N_i \delta N_k, \quad (\text{П1,12})$$

то согласно (2,5) (8,7) мы можем определить эффективную массу и скорость звука малой частоты. Из скорости звука после соответствующего интегрирования можно найти энергию основного состояния.

Таким образом, задача сводится к определению величины  $f$ . Варьируя выражения (П1,3) и (П1,8) по  $N_i$ , а затем по  $N_k$ , находим следующее выражение:

$$f = 2UQ_{\sigma, \sigma'} - \frac{8U^2}{(2\pi\hbar)^3} \int d\mathbf{p}_1 \int_{|\mathbf{p}_1| < p_0} d\mathbf{p}_2 \times \\ \times \left[ Q_{\sigma\sigma'} \frac{\delta(\mathbf{p} + \mathbf{p}' - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)}{(\mathbf{p}^2 + \mathbf{p}'^2 - \mathbf{p}_1^2 - \mathbf{p}_2^2)/2m} + \frac{1}{4} \frac{\delta(\mathbf{p} + \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}' - \mathbf{p}_2)}{(\mathbf{p}^2 + \mathbf{p}_1^2 - \mathbf{p}'^2 - \mathbf{p}_2^2)/2m} + \frac{1}{4} \frac{\delta(\mathbf{p}' + \mathbf{p}_1 - \mathbf{p} - \mathbf{p}_2)}{(\mathbf{p}'^2 + \mathbf{p}_1^2 - \mathbf{p}^2 - \mathbf{p}_2^2)/2m} \right]. \quad (\text{П1,13})$$

При вычислении мы будем сразу полагать  $|\mathbf{p}| = |\mathbf{p}'| = p_0$ . Интегрирование во втором слагаемом в  $f$  значительно проще интегралов (П1,9) и (П1,11). В результате находим:

$$f(\chi) = \frac{2\pi a \hbar^2}{m} \left[ 1 + 2 \left( \frac{3}{\pi} \right)^{\frac{1}{3}} a N^{\frac{1}{3}} \left( 2 + \frac{\cos \chi}{2 \sin \frac{\chi}{2}} \ln \frac{1 + \sin \frac{\chi}{2}}{1 - \sin \frac{\chi}{2}} \right) \right] - \\ - \frac{8\pi a \hbar^2}{m} (\sigma_1 \sigma_2) \left[ 1 + 2 \left( \frac{3}{\pi} \right)^{\frac{1}{3}} a N^{\frac{1}{3}} \left( 1 - \frac{\sin \frac{\chi}{2}}{2} \right) \ln \frac{1 + \sin \frac{\chi}{2}}{1 - \sin \frac{\chi}{2}} \right]. \quad (\text{П1,14})$$

Заслуживает внимания особенность полученного выражения. При углах  $\chi$ , близких к  $\pi$ , функция  $f$  имеет логарифмическую особенность

$$f(\chi) \sim \left( \frac{1}{4} - \sigma_1 \sigma_2 \right) \ln \frac{1}{\pi - \chi}. \quad (\text{П1,15})$$

Ясно, что в этом случае использованное нами приближение, строго говоря, неприменимо. Особенность функции  $f$  при  $\chi = \pi$  является отражением особенности в амплитуде рассеяния возбуждений, сталкивающихся под углом  $\pi$ . Соответствующее выражение, получающееся при помощи суммирования основных членов теории возмущений, пропорционально

$$\left[ 1 + 2 \left( \frac{3}{\pi} \right)^{\frac{1}{3}} a N^{\frac{1}{3}} \ln \frac{p_0^2}{\varepsilon} \right]^{-1}, \quad (\text{П1,16})$$

где  $\varepsilon = p^2 + p'^2 - 2p_0^2$ .

В случае, когда  $a$  положительно, это выражение обращается в нуль при  $p^2 = p'^2 = p_0^2$ .

Если же  $a < 0$  (это допустимо для ферми-систем), то амплитуда рассеяния имеет полюс вблизи ферми-границы. Это соответствует возможности образования связанных пар из возбуждений с противоположными импульсами, которая была отмечена Купером<sup>19</sup> и является основной причиной явления сверхпроводимости металлов<sup>20</sup>.

Таким образом, найденное для  $f$  выражение несправедливо при углах, близких к  $\pi$ . Однако ввиду того, что особенность является логарифмической, она сказывается лишь в непосредственной близости особой точки. А так как в интересующие нас выражения входят лишь интегралы от  $f$  с регулярными функциями, то логарифмическая особенность функции  $f$  не существенна.

Подставляя формулу (П1,4) в (2,5), находим значение эффективной массы

$$m/m^* = 1 - (8/15) (3/\pi)^{\frac{2}{3}} (7 \ln 2 - 1) a^2 N^{\frac{2}{3}}. \quad (\text{П1,17})$$

Отметим, что если подставить сюда значение  $m^* = 1,43m$ , соответствующее жидкому  $\text{He}^3$ , то получающееся значение  $a$  оказывается равным  $1,6 \cdot 10^{-8}$  см, т. е. имеет порядок газокинетического диаметра атома гелия. Конечно, такое сравнение не имеет строгого смысла. Рассмотренная модель не может описывать жидкий  $\text{He}^3$ . Это видно уже из того, что величина  $(m^* - m)/m^*$ , которая согласно теории должна быть величиной второго порядка малости по  $a$ , для случая  $\text{He}^3$  равна  $\frac{1}{3}$ .

Подставляя формулу для  $f$  в выражение для скорости звука, получаем:

$$c^2 = \frac{\pi^{\frac{4}{3}}}{\frac{1}{3}} N^{\frac{2}{3}} \frac{\hbar^2}{m^2} + 2 \frac{\pi a \hbar^2}{m^2} N \left[ 1 + \frac{4}{15} \left( \frac{3}{\pi} \right)^{\frac{1}{3}} a N^{\frac{1}{3}} (11 - 2 \ln 2) \right]. \quad (\text{П1,18})$$

Из найденной величины  $c^2$  нетрудно получить энергию основного состояния ферми-жидкости. Для этого воспользуемся соотношением (8,2)  $c^2 = \frac{N}{m} \left( \frac{\partial \mu}{\partial N} \right)$ . Это дает:

$$E = \int \mu dN = E^{(0)} + \frac{\pi a \hbar^2}{m} N^2 \left[ 1 + \frac{6}{35} \left( \frac{3}{\pi} \right)^{\frac{1}{3}} a N^{\frac{1}{3}} (11 - 2 \ln 2) \right]. \quad (\text{П1,19})$$

Формула (П1,2) совпадает с результатом Ли и Янга<sup>15</sup>.

Тот же результат можно получить и при помощи непосредственного интегрирования в формуле (П1,9). Для вычисления интеграла в формуле (П1,9) удобно ввести новые переменные

$$p = p_1 - p_2; \quad q = p_3 - p_4; \quad s = p_1 + p_2 = p_3 + p_4.$$

В этих переменных  $E^{(2)}$  принимает вид

$$E^{(2)} = - \frac{m U^2}{4 (2\pi \hbar)^2} \int ds \int dp \int dq \frac{1}{p^2 - q^2},$$

где область интегрирования для вектора  $s$  есть  $0 < |s| < 2p_0$ , а области значений векторов  $p$  и  $q$  изображены на рис. 2. Если ввести переменные  $x_q = \cos(q, s)$  и  $x_p = \cos(p, s)$ , то  $E^{(2)}$  станет равным

$$E^{(2)} = - \frac{8m U^2 \pi^3}{(2\pi \hbar)^9} \int_0^{2p_0} s^2 ds \int_0^1 dx_p \int_0^{z(x_p)} p^2 dp \int_{-1}^1 dx_q \int_0^{z(x_q)} q^2 dq \frac{1}{p^2 - q^2},$$



где  $z(x)$  удовлетворяет соотношению

$$z^2 + 2zxs + s^2 = 4p_0^2.$$

Путем ряда преобразований и интегрирования по частям по  $dx_p$  и  $dx_q$  находим отсюда:

$$E^2 = \frac{2mU^2 p_0^2}{\pi^6 \hbar^9} \int_0^1 s^2 ds \left[ \int_0^{1+s} p^2 dp \int_0^{1-s} q^2 dq + \right. \\ \left. + \frac{1}{4s^2} \int_{\sqrt{1-s^2}}^{1+s} p dp (1-p^2-s^2) \int_{\sqrt{1-s^2}}^{1-s} q dq (1-q^2-s^2) \right] \frac{1}{p^2-q^2}.$$

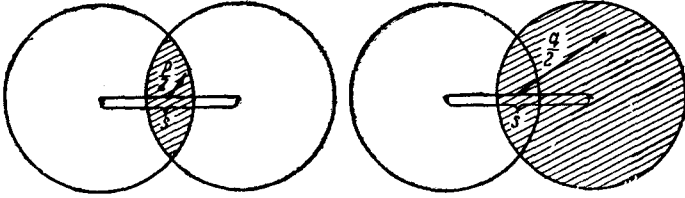


Рис. 2.

Интегрируя далее по частям по  $s$  и выполнив затем оставшееся интегрирование, получаем:

$$E^{(2)} = (6/35) (3/\pi)^{\frac{1}{3}} (11 - 2\ln 2) a N^{\frac{1}{3}} E^{(1)}.$$

Здесь мы выразили  $U$  согласно формуле (П1,2) и подставили  $p_0 = \hbar (3\pi^2 N)^{\frac{1}{3}}$ . Этот результат совпадает с членом второго порядка в формуле (П1,19).

## II. 2. Микроскопическая теория ферми-жидкости при $T=0$

Здесь мы изложим построенную недавно Л. Д. Ландау<sup>18</sup> общую микроскопическую теорию ферми-жидкости при  $T=0$ , справедливую для произвольных взаимодействий. Как мы увидим, в результате такого рассмотрения удастся обобщить феноменологическую теорию и понять физический смысл входящей в нее функции  $f$ .

В основе микроскопического рассмотрения лежат методы, заимствованные из квантовой теории поля. Как известно, квантовая теория поля оперирует средними по вакууму от хронологизированных (т. е. взятых в порядке последовательности времён) произведений операторов поля. Это так называемые гриновские функции. В нашем случае вместо средних по вакууму мы будем рассматривать средние по основному состоянию системы. Нетрудно убедиться, что такие средние обладают теми же свойствами, что и гриновские функции теории поля, в частности, могут быть принципиально вычислены с помощью техники диаграмм Фейнмана.

Для определенности мы будем впредь называть гриновской функцией величину

$$G_{1,2} = -i \langle T(\psi_1 \psi_2^*) \rangle, \quad (\text{П2,1})$$

где скобки  $\langle \rangle$  означают усреднение по основному состоянию,  $\psi$  и  $\psi^*$  — операторы поля ферми-частиц, индексы 1,2 обозначают совокупность пространственно-временных и спиновых координат,  $T$  — как обычно, обозначает хронологизированное произведение с изменением знака, когда  $\psi_1$  и  $\psi_2^*$  переставлены. Гриновская функция при отсутствии внешнего поля зависит лишь от разности координат и времён. Что же касается спиновых индексов, то если взаимодействие частиц не зависит от их спина,  $G_{\alpha\beta} \sim \delta_{\alpha\beta}$ .

Фурье-образ функции Грина по разности координат и времён мы обозначим через  $G(p) \delta_{\alpha\beta}$  (здесь  $p$  — четырехмерный вектор  $(p, \epsilon)$ ). Полюса  $G(p)$  определяют энергию квазичастиц. Если  $p$  по абсолютной величине близко к  $p_0$ , а  $\epsilon$  близко

к граничной энергии  $\mu$ , то  $G(p)$  имеет вид

$$G(p) = \frac{a}{\varepsilon - \mu - v(p - p_0) + i\delta} \quad (П2, 2)$$

Здесь  $a$  — положительная константа,  $\delta$  — малая величина, знак которой совпадает со знаком  $\varepsilon - \mu$  или вблизи полюса со знаком  $p - p_0$  (она вводится для определения правила обхода полюсов, соответствующего взятию  $T$ -произведения в  $x, t$ -представлении).

Введем теперь среднее от хронологизированного произведения четырех операторов

$$\Phi_{12, 34} = \langle T(\psi_1 \psi_2 \psi_3^\dagger \psi_4^\dagger) \rangle. \quad (П2, 3)$$

Назовем вершинной частью  $\Gamma_{12, 34}$  величину, определяемую следующим соотношением:

$$\Phi_{12, 34} = G_{1,3} G_{2,4} - G_{1,4} G_{2,3} + i \sum_{1', 2', 3', 4'} G_{1,1'} G_{2,2'} G_{3,3'} G_{4,4'} \Gamma_{1'2', 3'4'}. \quad (П2, 4)$$

Фурье-представление вершинной части имеет вид

$$(2\pi\hbar)^4 \Gamma_{\alpha\beta, \gamma\delta}(p_1 p_2, p_3 p_4) \delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4).$$

При перестановке  $\alpha p_1 \rightleftharpoons \beta p_2$  функция  $\Gamma_{\alpha\beta, \gamma\delta}(p_1 p_2, p_3 p_4)$ , очевидно, меняет знак. Аналогично квантовой теории поля, функция  $\Gamma$  с определенной связью между компонентами каждого из векторов  $P$

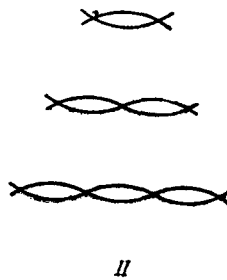
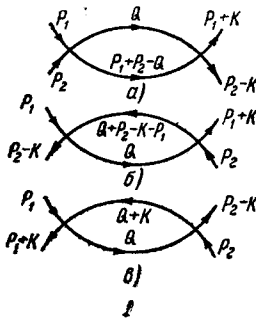


Рис. 3.

(например, вблизи ферми-границы  $\varepsilon - \mu = v(p - p_0)$ ), умноженная на  $a^2$  играет роль амплитуды рассеяния квази-частиц.

Рассмотрим  $\Gamma$  в случае, когда  $p_1$  близко к  $p_3$  и, следовательно,  $p_2$  близко к  $p_4$  и введем определение

$$\begin{aligned} \Gamma(p_1 p_2, p_1 + K p_2 - K) &\equiv \\ &\equiv \Gamma(p_1 p_2, K), \end{aligned}$$

где  $K = (\mathbf{k}, \omega)$  — малый 4-вектор.

Если бы такую вершинную часть можно было рассчитывать по теории возмущений, то в первом порядке надо было бы

взять диаграммы, изображенные на рис. 3, I. Соответствующие выражения содержат интегралы от произведения двух гриновских функций. В то время как для диаграмм а) и б) случай  $K=0$  ничем не выделен, в случае в) полюса обоих гриновских функций сближаются при  $K=0$ , что, как мы увидим ниже, приводит к появлению особенности в  $\Gamma$ .

Если обозначить через  $\Gamma^{(1)}$  совокупность всех возможных диаграмм для  $\Gamma$ , не имеющих «особенных элементов» (т. е. интеграла от  $G(p)G(p+K)$ ), то нетрудно видеть, что полная  $\Gamma$  получается с помощью суммирования «лестницы», изображенной на рис. 4, II. Это может быть произведено посредством решения интегрального уравнения

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha\beta, \gamma\delta}(p_1 p_2; K) &= \Gamma_{\alpha\beta, \gamma\delta}^{(1)}(p_1 p_2) - \\ &- \frac{i}{(2\pi\hbar)^4} \int \Gamma_{\alpha\beta, \gamma\delta}^{(1)}(p_1 Q) G(Q) G(Q+K) \Gamma_{\gamma\delta, \alpha\beta}(QP_2; K) d^4 Q. \end{aligned} \quad (П2, 5)$$

Здесь, ввиду того, что при  $K=0$   $\Gamma^{(1)}$  не имеет особенности, мы просто положим везде в  $\Gamma^{(1)}$   $K=0$ .

Рассмотрим теперь произведение в интеграле. Интеграл по  $Q$  будет состоять из главного значения и члена, происходящего от обхода полюсов. Ввиду близости аргументов обоих  $G$  можно считать, что все остальные члены в интеграле в этих полюсах имеют одинаковые значения. Вклад от обхода полюсов возникает, таким образом, лишь в том случае, если они находятся по разные стороны от действительной оси. Для этого должно быть  $q < p_0$ ,  $|\mathbf{q} + \mathbf{k}| > p_0$  или наоборот. Принимая во внимание малость, нетрудно видеть, что при этом  $q \approx p_0$  и  $\varepsilon_q \approx \mu$ . Таким образом, в той части интеграла по  $Q$ , которая связана с обходами полюсов, произведение  $G(Q)G(Q+K)$  может быть заменено на  $A\delta(\varepsilon - \mu)\delta(q - p_0)$ .

Коэффициент  $A$  может быть установлен с помощью интегрирования  $G(Q)G(Q+K)$  и оказывается равным  $\frac{2\pi i a^2 k \cos \theta}{\omega - vk \cos \theta}$ , где  $\theta$  — угол между  $\mathbf{q}$  и  $\mathbf{k}$ . Таким образом, произведение  $G(Q)G(Q+K)$  может быть записано в виде

$$G(Q)G(Q+K) = 2\pi i a^2 \frac{k \cos \theta}{\omega - vk \cos \theta} \delta(z - \mu) \delta(q - p_0) + \varphi(Q), \quad (П2,6)$$

где  $\varphi$  соответствует главному значению интеграла и не имеет особенностей (поэтому в нем положено  $K=0$ ).

Если рассматривать выражение (П2,6) в пределе  $K=0$ , то очень существенно, каким способом берется этот предел, т. е. каково при этом соотношение между  $\omega$  и  $k$ . То же самое справедливо и в отношении  $\Gamma$  в пределе  $\omega \rightarrow 0$ ,  $k \rightarrow 0$ .

Рассмотрим прежде всего  $\Gamma$  в пределе  $k \rightarrow 0$ ,  $\frac{k}{\omega} \rightarrow 0$ . Для этого предела, который мы обозначим как  $\Gamma^\omega$ , получаем из (П2,5) и (П2,6):

$$\Gamma_{\alpha\beta, \gamma\delta}^\omega(P_1 P_2) = \Gamma_{\alpha\beta, \gamma\delta}^{(1)}(P_1 P_2) - \frac{i}{(2\pi\hbar)^4} \int \Gamma_{\alpha\epsilon, \gamma\zeta}^{(1)}(P, Q) \varphi(Q) \Gamma_{\zeta\beta, \epsilon\delta}^{(\omega)}(Q P_2) d^4 Q. \quad (П2,7)$$

Из двух уравнений (П2,5) и (П2,7) нетрудно исключить  $\Gamma^{(1)}$ . Применяя (П2,6), после несложных преобразований находим:

$$\Gamma_{\alpha\beta, \gamma\delta}(P_1 P_2; K) = \Gamma_{\alpha\beta, \gamma\delta}^{(\omega)}(P_1 P_2) + \frac{a^2 p_0^3}{(2\pi\hbar)^3} \int \Gamma_{\alpha\epsilon, \gamma\zeta}^\omega(P, Q) \Gamma_{\zeta\beta, \epsilon\delta}(Q P_2, K) \frac{ik \cos \theta}{\omega - vk \cos \theta} d\Omega. \quad (П2,8)$$

Возьмем теперь другой предел, а именно  $K \rightarrow 0$ ,  $\frac{\omega}{k} \rightarrow 0$ . Такое предельное значение, умноженное на  $a^2$ , соответствует физической амплитуде рассеяния вперед для квазичастиц с энергией на границе Ферми. Эту величину обозначим через  $\Gamma^k$ . Из уравнения (П2,8) находим связь между  $a^2 \Gamma^k$  и  $a^2 \Gamma^\omega$

$$a^2 \Gamma_{\alpha\beta, \gamma\delta}^k(P_1 P_2) = a^2 \Gamma_{\alpha\beta, \gamma\delta}^\omega(P_1 P_2) - \frac{p_0^3}{v(2\pi\hbar)^3} \int a^2 \Gamma_{\alpha\epsilon, \gamma\zeta}^\omega(P, Q) a^2 \Gamma_{\zeta\beta, \epsilon\delta}^k(Q P_2) d\Omega. \quad (П2,9)$$

Исследуем теперь полюса функции  $\Gamma(P_1 P_2; K)$ . Наподобие того, как полюса функции  $G(P)$  дают связь между теорией и импульсом фермиевских возбуждений, полюса функции  $\Gamma$  характеризуют «двухчастичные», иначе говоря, бозевские возбуждения. Ввиду того, что в окрестности полюса  $\Gamma(P_1 P_2; K) \gg \Gamma^\omega(P_1 P_2)$ , то можно пренебречь членом  $\Gamma^\omega$  в правой части. Далее, должно заметить, что переменная  $P_2$ , а также индексы  $\beta$  и  $\delta$  играют в уравнении роль параметров. Функция  $\Gamma$  может быть представлена в виде произведения  $\chi_{\alpha\gamma}(P_1; K)$ ,  $\chi_{\beta\delta}(P_2)$  и  $\chi(P_2)$ , сокращается в обеих сторонах уравнения. Если еще ввести обозначение

$$\chi_{\alpha\gamma}(\mathbf{n}) = \frac{n\mathbf{k}}{\omega - v n\mathbf{k}} \chi_{\alpha\gamma}(P_1; K),$$

где  $\mathbf{n}$  — единичный вектор в направлении  $P_1$ , то для  $\chi_{\alpha\gamma}$  получаем уравнение

$$(\omega - v n\mathbf{k}) \chi_{\alpha\gamma}(\mathbf{n}) = n\mathbf{k} \frac{p_0^3 a^2}{(2\pi\hbar)^3} \int \Gamma_{\alpha\epsilon, \gamma\zeta}^\omega(\mathbf{n}, \mathbf{l}) \chi_{\zeta\epsilon}(\mathbf{l}) d\Omega. \quad (П2,10)$$

Сравнивая это уравнение с (8,14) и (10,4), нетрудно увидеть, что оно совпадает с уравнением для нулевого звука и спиновых волн, причем величина  $a^2 \Gamma^\omega$  играет роль функции  $f$ . Это подтверждает уравнения для нулевого звука, полученные из феноменологической теории, и тем самым сделанное в последней предположение о функциональной зависимости энергии возбуждений от функции распределения. С другой стороны, благодаря уравнению (П2,9) устанавливается связь между функцией  $f$  и амплитудой рассеяния квазичастиц под углом  $0^\circ$ .

Рассмотрим более подробно это соотношение. Обозначая амплитуду, умноженную на  $\left(\frac{d\tau}{ds}\right)_{s=\mu}$  через  $A(\mathbf{n}_1 \sigma_1, \mathbf{n}_2 \sigma_2)$ , получаем:

$$A(\mathbf{n}_1 \sigma_1, \mathbf{n}_2 \sigma_2) = \Phi(\mathbf{n}_1 \sigma_1, \mathbf{n}_2 \sigma_2) - \frac{1}{2} \text{Sp}_{\sigma'} \int \Phi(\mathbf{n}_1 \sigma_1, \mathbf{n}' \sigma') A(\mathbf{n}' \sigma', \mathbf{n}_2 \sigma_2) \frac{d\Omega}{4\pi}. \quad (П2,11)$$

В отношении спиновой зависимости как  $\Phi$ , так и  $A$  содержат два члена: не зависящий от спинов и пропорциональный  $\sigma_1 \sigma_2$ . Если обозначить

$$A(\mathbf{n}_1 \sigma_1, \mathbf{n}_2 \sigma_2) = B(\mathbf{n}_1 \mathbf{n}) + \sigma_1 \sigma_2 \cdot C(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2), \quad (П2,12)$$

$B$  и  $C$  удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} B(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2) &= F(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2) - \int F(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}') B(\mathbf{n}', \mathbf{n}_2) \frac{d\Omega}{4\pi}, \\ C(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2) &= Z(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2) - \frac{1}{4} \int Z(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}') C(\mathbf{n}', \mathbf{n}_2) \frac{d\Omega}{4\pi}. \end{aligned} \quad (\text{П2,13})$$

Будучи скалярными, величины  $B$  и  $C$ , также как  $F$  и  $Z$ , могут зависеть только от  $\cos \chi$ . Если ввести разложение по сферическим функциям,  $B(\chi) = \sum B_l P_l(\cos \chi)$  и т. п., то без труда можно получить соотношения между коэффициентами  $B_l$  и  $F_l$ ,  $C_l$  и  $Z_l$ :

$$B_l = \frac{F_l}{1 + \frac{F_l}{2l+1}}, \quad C_l = \frac{Z_l}{1 + \frac{Z_l}{4(2l+1)}}. \quad (\text{П2,14})$$

Найдем для примера амплитуду рассеяния возбуждений для разреженного ферми-газа. Из формул (П1,16) и (П2,13) получаем:

$$\begin{aligned} A(\chi, \sigma_1 \sigma_2) &= 8 \left( \frac{3}{\pi} \right)^{\frac{1}{3}} a N^{\frac{1}{3}} \left( \frac{1}{4} - \sigma_1 \sigma_2 \right) + \\ &+ 16 \left[ \left( \frac{3}{\pi} \right)^{\frac{1}{3}} a N^{\frac{1}{3}} \right]^2 \left[ \frac{1}{4} - \sigma_1 \sigma_2 + \frac{\cos \chi}{8 \sin \frac{\chi}{2}} \ln \frac{1 + \sin \left( \frac{\chi}{2} \right)}{1 - \sin \left( \frac{\chi}{2} \right)} - \right. \\ &\quad \left. - \sigma_1 \sigma_2 \left( 1 - \frac{\sin \left( \frac{\chi}{2} \right)}{2} \ln \frac{1 + \sin \left( \frac{\chi}{2} \right)}{1 - \sin \left( \frac{\chi}{2} \right)} \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{П2,15})$$

Отметим, что в случае параллельных спинов это выражение обращается в нуль для  $\chi = 0$ , как и должно быть согласно принципу Паули (для  $f$  это не имеет места).

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Д. Ландау, ЖЭТФ 30, 1058 (1956).\*
2. И. М. Халатников, А. А. Абрикосов, ЖЭТФ 32, 915 (1957).
3. В. Abraham, D. Osborne, B. Weinstock, Phys. Rev. 98, 551 (1955).
4. W. Fairbank, W. Ard, G. Walters, Phys. Rev. 95, 566 (1954).
5. А. А. Абрикосов, И. М. Халатников, ЖЭТФ 32, 1084 (1957).
6. И. Я. Померанчук, ЖЭТФ 20, 919 (1950).
7. К. Н. Зиновьева, ЖЭТФ 34, 609 (1958).
8. Л. Д. Ландау, ЖЭТФ 32, 59 (1957).
9. H. L. Langer, S. G. Sydorak, T. R. Roberts, Programm of the Fifth Int. Conf. on Low Temp. Phys. a. Chem. Univ Wisconsin, 1957, стр. 41.
10. И. М. Халатников, А. А. Абрикосов, ЖЭТФ 33, 110 (1957).
11. А. А. Абрикосов, И. М. Халатников, ЖЭТФ 34, 198 (1958).
12. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, Москва, Гостехиздат, 1957.
13. С. М. Рытов, Теория электрических флуктуаций и теплового излучения, Изд. АН СССР, 1953.
14. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, ЖЭТФ 32, 618 (1957).
15. В. Л. Гинзбург, ЖЭТФ 13, 243 (1943).
16. А. А. Абрикосов, И. М. Халатников, ЖЭТФ 33, 1154 (1957).
17. K. Huang, C. N. Yang, Phys. Rev. 105, 767 (1957).
18. T. D. Lee, C. N. Yang, Phys. Rev. 105, 1119 (1957).
19. L. Coorner, Phys. Rev. 104, 1189 (1956).
20. J. Bardeen, L. Coorner, J. Schrieffer, Phys. Rev. 106, 162 (1957).
21. Л. Д. Ландау, ЖЭТФ, в печати.