

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

**О ДВИЖЕНИИ ИСКУССТВЕННОГО СПУТНИКА
В НЕЦЕНТРАЛЬНОМ ПОЛЕ ТЯГОТЕНИЯ ЗЕМЛИ
ПРИ НАЛИЧИИ СОПРОТИВЛЕНИЯ АТМОСФЕРЫ**

Г. П. Таратынова

Движение искусственного спутника Земли является весьма сложным и аналитическое исследование движения такого типа с учетом сопротивления атмосферы и нецентральности поля тяготения Земли представляет существенные трудности. До последнего времени в большинстве работ ограничивались частными случаями, такими, как движение спутников по круговым орбитам, аналитические исследования возмущений орбит спутников, обусловленных только сопротивлением атмосферы без учета сжатия Земли, и т. д. Решение задачи в общем случае, без привлечения быстродействующих электронных машин, крайне затруднительно. Ввиду этого представлялось целесообразным создать методику для расчета на электронной машине орбиты искусственного спутника Земли с одновременным учетом основных возмущающих сил, действующих на него.

В настоящей статье дано изложение методики расчета на быстродействующей цифровой машине движения искусственного спутника Земли с одновременным учетом сопротивления атмосферы, при условии движения ее вместе с Землей, и отклонения поля тяготения от центрального. Ввиду того, что возмущающее действие Солнца и Луны на движение спутника относительно Земли оказывается весьма малым, этими возмущениями будем пренебречь.

**§ 1. УРАВНЕНИЕ ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ ИСКУССТВЕННОГО
СПУТНИКА ЗЕМЛИ. МЕТОД ИНТЕГРИРОВАНИЯ**

Рассмотрим движение искусственного спутника Земли в нецентральном поле земного тяготения при наличии сопротивления атмосферы. Для описания движения воспользуемся дифференциальными уравнениями в оскулирующих элементах¹:

$$\begin{aligned}
 \frac{dp}{dt} &= 2r\tilde{T}, \\
 \frac{de}{dt} &= \tilde{S} \sin \vartheta + \left(1 + \frac{r}{p}\right) \tilde{T} \cos \vartheta + e \frac{r}{p} \tilde{T}, \\
 \frac{d\omega}{dt} &= -\frac{1}{e} \tilde{S} \cos \vartheta + \frac{1}{e} \left(1 + \frac{r}{p}\right) \tilde{T} \sin \vartheta - \frac{r}{p} \operatorname{ctg} i \tilde{W} \sin u, \\
 \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{r}{p} \frac{\sin u}{\sin i} \tilde{W}, \\
 \frac{dt}{dt} &= \frac{r}{p} \tilde{W} \cos u,
 \end{aligned} \tag{1}$$

где (рис. 1)

$$u = \omega + \vartheta, \quad r = \frac{p}{1 + e \cos \vartheta}, \quad \tilde{S} = \frac{\sqrt{-p}}{\sqrt{fM}} S, \quad \tilde{T} = \frac{\sqrt{-p}}{\sqrt{fM}} T, \quad \tilde{W} = \frac{\sqrt{-p}}{\sqrt{fM}} W,$$

f — постоянная тяготения, M — масса Земли, ϑ — истинная аномалия, p — параметр орбиты, e — эксцентриситет, ω — угловое расстояние перигея от восходящего узла, Ω — долгота восходящего узла, i — наклонение орбиты, S , T и W — проекции возмущающего ускорения на радиус-

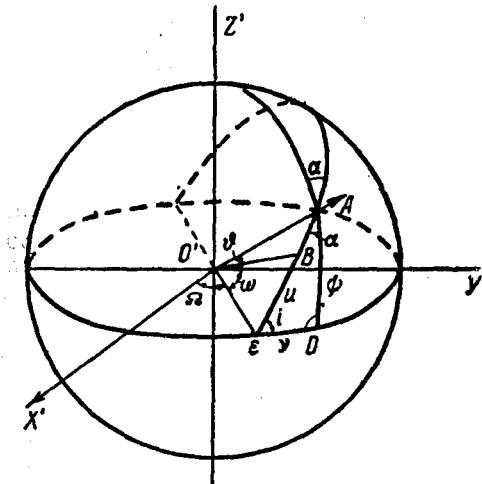


Рис. 1.

вектор, на перпендикуляр к нему в плоскости орбиты и на нормаль к плоскости орбиты соответственно.

Для того чтобы система уравнений (1), описывающая движение спутника, была замкнутой, введен дополнительное дифференциальное уравнение, определяющее зависимость истинной аномалии ϑ от времени:

$$r^2 \left(\frac{d\theta}{dt} + \frac{d\omega}{dt} + \cos i \frac{d\Omega}{dt} \right) = V \overline{p \cdot f M}, \quad (2)$$

где производные $\frac{d\omega}{dt}$ и $\frac{d\Omega}{dt}$ определяются соответствующими уравнениями системы (1)⁴.

Преобразуем систему дифференциальных уравнений (1) к независимому переменному ϑ — истинной аномалии.

На основании соотношения (2) имеем

$$\frac{dt}{d\vartheta} = \frac{1}{\sqrt{pJM} - \frac{d\omega}{dt} - \cos i \frac{d\Omega}{dt}}. \quad (3)$$

Окончательно получаем

$$\begin{aligned} \frac{dp}{d\vartheta} &= F \cdot 2r \tilde{T}, \\ \frac{de}{d\vartheta} &= F \left[\tilde{S} \sin \vartheta + \left(1 + \frac{r}{p} \right) \tilde{T} \cos \vartheta + e \frac{r}{p} \tilde{T} \right], \\ \frac{d\omega}{d\vartheta} &= F \left[-\frac{1}{e} \tilde{S} \cos \vartheta + \frac{1}{e} \left(1 + \frac{r}{p} \right) \tilde{T} \sin \vartheta - \frac{r}{p} \operatorname{ctg} i \tilde{W} \sin u \right], \\ \frac{d\Omega}{d\vartheta} &= F \cdot \frac{r}{p} \frac{\sin u}{\sin i} \tilde{W}, \\ \frac{di}{d\vartheta} &= F \cdot \frac{r}{p} \tilde{W} \cos u, \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$F = \frac{dt}{d\vartheta}$$

Система уравнений (3), (4) полностью определяет движение спутника.

Проекции возмущающего ускорения представим в виде

$$\left. \begin{array}{l} S = S_1 + S_2, \\ T = T_1 + T_2, \\ W = W_1 + W_2, \end{array} \right\} \quad (5)$$

где S_1, T_1, W_1 — проекции возмущающего ускорения за счет нецентральности земного тяготения; S_2, T_2, W_2 — проекции возмущающего ускорения, создаваемого силой сопротивления атмосферы (с учетом вращения атмосферы вместе с Землей).

С точностью до членов первого порядка малости относительно сжатия для потенциала земного тяготения имеем³

$$V = \frac{fM}{r} - \frac{\epsilon}{3r^3} (3 \sin^2 \psi - 1), \quad (6)$$

где

$$\epsilon = fMa^2 \left(\alpha - \frac{m}{2} \right), \quad m = \frac{\Omega^2 a}{g_a},$$

ψ — геоцентрическая широта спутника, a — экваториальный радиус Земли, α — сжатие, $\alpha = \frac{a-b}{a}$, Ω — угловая скорость вращения Земли, g_a — ускорение силы земного тяготения на экваторе.

Дифференцируя выражение (6) для потенциала вдоль радиуса и вдоль меридиана по направлению к северу, получим формулы для проекций ускорения силы тяготения Земли на радиус-вектор и касательную к меридиану соответственно

$$\left. \begin{array}{l} g_r = -\frac{fM}{r^3} + \frac{\epsilon}{r^4} (3 \sin^2 \psi - 1), \\ g_m = -\frac{\epsilon}{r^4} \sin 2\psi. \end{array} \right\} \quad (7)$$

Отсюда для проекций возмущающего ускорения S, T и W вследствие отклонения поля тяготения Земли от центрального с учетом членов первого порядка относительно α получаем

$$\left. \begin{array}{l} S_1 = \frac{\epsilon}{r^4} (3 \sin^2 i \sin^2 u - 1), \\ T_1 = -\frac{\epsilon}{r^4} \sin^2 i \sin 2u, \\ W_1 = -\frac{\epsilon}{r^4} \sin 2i \sin u. \end{array} \right\} \quad (8)$$

Выведем формулы для проекций S_2, T_2 и W_2 . Для ускорения, обусловленного силой сопротивления атмосферы R , примем

$$R = \frac{c_x s}{m} \cdot \frac{\rho v_{\text{отн}}^2}{2}, \quad (9)$$

где m — масса спутника, $v_{\text{отн}}$ — скорость спутника относительно воздуха, c_x — коэффициент аэродинамического сопротивления, s — площадь, к которой отнесен аэродинамический коэффициент, ρ — плотность атмосферы.

Для вектора относительной скорости $\mathbf{v}_{\text{отн}}$ имеем

$$\mathbf{v}_{\text{отн}} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_1, \quad (10)$$

где

$$v_1 = \Omega r \cos \psi,$$

причем \mathbf{v}_1 направлено с запада на восток (рис. 2); \mathbf{v} — скорость спутника относительно неподвижного пространства.

Проектируя $\mathbf{v}_{\text{отн}}$ на оси S , T и W , получаем

$$\left. \begin{aligned} v_{\text{отн}} S &= v_r, \\ v_{\text{отн}} T &= v_n - \Omega r \cos \psi \sin a, \\ v_{\text{отн}} W &= \Omega r \cos \psi \cos a, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

где a — азимут направления абсолютной скорости v , v_r и v_n — радиальная и трансверсальная составляющие абсолютной скорости:

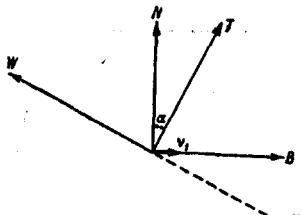


Рис. 2.

$$\left. \begin{aligned} v_r &= \sqrt{\frac{fM}{p}} e \sin \vartheta, \\ v_n &= \sqrt{\frac{fM}{p}} (1 + e \cos \vartheta). \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

На основании формул (9) и (11), используя соотношения (рис. 1)

$$\begin{aligned} \cos \psi \sin a &= \cos i, \\ \cos \psi \cos a &= \sin i \cos u \end{aligned}$$

для проекций возмущающего ускорения силы сопротивления получаем выражения:

$$\left. \begin{aligned} S_2 &= -\frac{c_r s}{2m} \rho v_{\text{отн}} v_r, \\ T_2 &= -\frac{c_r s}{2m} \rho v_{\text{отн}} (v_n - \Omega r \cos i), \\ W_2 &= \frac{c_r s}{2m} \rho v_{\text{отн}} \Omega r \sin i \cos u, \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

где

$$v_{\text{отн}} = \sqrt{v_r^2 + (v_n - \Omega r \cos i)^2 + \Omega^2 r^2 \sin^2 i \cos^2 u},$$

а v_r и v_n определяются формулами (12).

В качестве кривой распределения плотности атмосферы по высоте примем зависимость, полученную на основании данных, приведенных в ².

Апроксимируем эту зависимость формулами

$$\left. \begin{aligned} \rho &= \rho_0 \Delta, \\ \Delta &= \frac{x}{\left(1 + \frac{y - y_0}{\xi}\right)^k}; \quad y = \frac{p}{1 + e \cos \vartheta} - R, \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

где ρ — плотность воздуха для некоторой фиксированной высоты; постоянные x , ξ , y_0 , k принимают следующие значения:

$$\begin{aligned} \text{при } 100 \text{ км} \leq y \leq 150 \text{ км} \quad &x = 1, \quad \xi = 55, \quad y_0 = 100, \quad k = 8, \\ \text{при } 150 \text{ км} \leq y \leq 250 \text{ км} \quad &x = 0,005667, \quad \xi = 100, \quad y_0 = 150, \quad k = 7, \\ \text{при } 250 \text{ км} \leq y \quad &x = 0,00004428 \quad \xi = 215, \quad y_0 = 250, \quad k = 6. \end{aligned}$$

Система уравнений (3), (4) представляет собой систему нелинейных дифференциальных уравнений относительно оскулирующих элементов орбиты p , e , ω , Ω , i и времени t . Для этой системы не имеется аналитического решения.

При непосредственном интегрировании этой системы численными методами может накопиться большая погрешность в определении искомых параметров, так как за все время жизни искусственный спутник может совершить вокруг Земли тысячи оборотов, а шаг интегрирования по ϑ ограничен. Кроме того, время, требуемое в этом случае для решения системы (3), (4) на машине, оказывается неоправданно большим.

Для того чтобы избежать указанных недостатков, преобразуем систему уравнений (3), (4) следующим образом. Введем функции $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_6$:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \frac{dp}{d\vartheta} d\vartheta; \quad \alpha_2 = \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \frac{de}{d\vartheta} d\vartheta; \quad \alpha_3 = \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \frac{d\omega}{d\vartheta} d\vartheta; \\ \alpha_4 &= \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \frac{d\Omega}{d\vartheta} d\vartheta; \quad \alpha_5 = \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \frac{di}{d\vartheta} d\vartheta; \quad \alpha_6 = \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \frac{dt}{d\vartheta} d\vartheta, \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

где производные $\frac{dp}{d\vartheta}, \frac{de}{d\vartheta}, \dots$ определяются уравнениями (3), (4). Очевидно, что при $\vartheta = \vartheta_0 + 2\pi$ функции $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_5$ равны соответственно значениям возмущений оскулирующих элементов p, e, \dots, i за один оборот, а α_6 — соответствующему времени движения.

Заметим, что поскольку истинная аномалия отсчитывается от направления на перигей, а направление на перигей само изменяется, то в абсолютном пространстве при изменении ϑ от ϑ_0 до $\vartheta_0 + 2\pi$ спутник не совершит в точности целого оборота вокруг Земли. Поэтому приведенное выше выражение не является вполне строгим. Однако в дальнейшем для удобства будем пользоваться этим термином, который играет чисто вспомогательную роль. (Время движения искусственного спутника по орбите определяется совершенно точно с помощью соответствующего дифференциального уравнения.)

Возмущения оскулирующих элементов орбиты спутника за один оборот при движении на высотах, где влияние сопротивления атмосферы меньше или соизмеримо с влиянием нецентральности поля тяготения Земли, весьма невелики. Поэтому можно предположить, что на протяжении всего движения (кроме, быть может, последних нескольких десятков оборотов) указанные возмущения с большой точностью равны производным от элементов орбиты по числу оборотов N . Тогда на основании равенств (15) будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dp}{dN} &= \alpha_{1k}, \quad \frac{de}{dN} = \alpha_{2k}, \quad \frac{d\omega}{dN} = \alpha_{3k}, \\ \frac{d\Omega}{dN} &= \alpha_{4k}, \quad \frac{di}{dN} = \alpha_{5k}, \quad \frac{dt}{dN} = \alpha_{6k}, \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

где

$$\alpha_{ik} = [\alpha_i]_{\vartheta = \vartheta_0 + 2\pi} \quad (i = 1, 2, \dots, 6).$$

Полученная система дифференциальных уравнений (16), правые части которых выражены через значения совокупной системы интегралов (15), где $\vartheta = \vartheta_0 + 2\pi$, описывает изменение орбиты спутника с течением времени. Заметим, что решение системы уравнений (16) представляет собой дискретную последовательность значений оскулирующих элементов орбиты для целых значений N или для значений истинной аномалии $\vartheta = \vartheta_0 + 2\pi k$ ($k = 1, 2, \dots$).

Переход от решения системы дифференциальных уравнений (3), (4) к решению системы дифференциальных уравнений (16) показан геометрически на рис. 3. На рис. 3 сплошной линией изображена кривая, пока-

зывающая периодические измерения элемента p , описываемые первым уравнением системы (4) в продолжение первых четырех оборотов. Пунктирной линией изображена кривая изменения элемента p соответственно первому уравнению (16).

Значения интегралов в правых частях уравнений (16) следует вычислять, интегрируя дифференциальные уравнения (3), (4) по ϑ в интервале от ϑ_0 до $\vartheta_0 + 2\pi$.

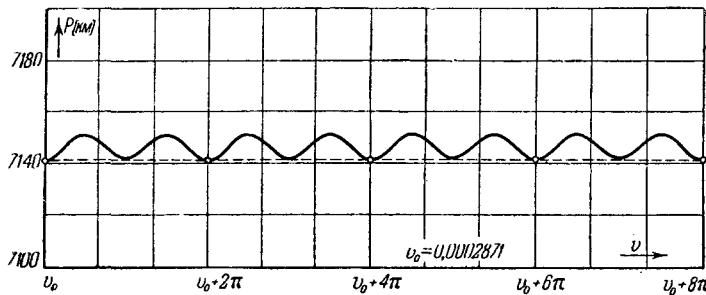


Рис. 3.

В таком случае решение системы дифференциальных уравнений (16) сводится к двойному интегрированию: внешнему по аргументу N и внутреннему по аргументу ϑ , причем последнее необходимо производить в каждой точке внешнего интегрирования при счете правых частей уравнений.

Для интегрирования системы уравнений (16) по числу оборотов N может быть использован любой метод численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений с переменным шагом интегрирования. На больших высотах этот шаг может быть значительным, порядка десятков и сотен оборотов (при интегрировании методом Рунге — Кутта), поскольку здесь возмущения элементов за один оборот будут весьма невелики и будут мало отличаться друг от друга при переходе от оборота к обороту. При переходе к малым высотам шаг должен уменьшаться.

Из того, что при интегрировании системы уравнений (16) методом Рунге — Кутта правые части необходимо вычислять в точках $N = N_0 + \frac{\Delta N}{2}$, где ΔN — шаг интегрирования, а N должно быть целым числом, следует, что шаг ΔN должен быть четным числом. Поэтому при решении системы уравнений (16) на электронной машине с автоматическим изменением шага в зависимости от методической погрешности искомых величин (уменьшением или увеличением в 2 раза) целесообразно начальный шаг ΔN выбирать равным 2^n .

Укажем, что в качестве исходных дифференциальных уравнений, описывающих движение искусственного спутника, можно было бы использовать уравнения для оскулирующих элементов орбиты по параметру u и интегрировать эту систему от u_0 до $u_0 + 2\pi$ в каждой точке соответствующей внешней системы. Так как параметр u отсчитывается от экваториальной плоскости, неподвижной в абсолютном пространстве, а наклонение орбиты изменяется весьма незначительно с течением времени, то при изменении параметра u на $2\pi k$, где k — целое число, спутник будет находиться примерно на одной и той же широте.

Поэтому аргумент широты u в качестве независимого переменного может оказаться более удобным, чем истинная аномалия ϑ .

§ 2. РАСЧЕТ ОРБИТЫ ИСКУССТВЕННОГО СПУТНИКА

По приведенной методике на быстродействующей электронной счетной машине АИ СССР был рассчитан пример орбиты искусственного спутника. Рассчитывалась орбита для сферического спутника весом в 10 кг диаметром, равным 0,5 м. Коэффициент аэродинамического сопротивления c_x был принят равным 2. Начальные значения элементов орбиты принимались равными:

$$h_a = 1285 \text{ км}, h_{\pi_0} = 320 \text{ км}, i_0 = 45^\circ, \omega_0 = 90^\circ, \Omega_0 = 129^\circ$$

(h_a и h_{π_0} — начальные значения высоты апогея и перигея соответственно).

Результаты расчетов приведены на рис. 4, где изображены кривые изменения параметра p (в км), эксцентриситета e , углового расстояния перигея от узла ω (в градусах) и долготы восходящего узла Ω (в градусах) за промежуток времени, равный 700 суткам.

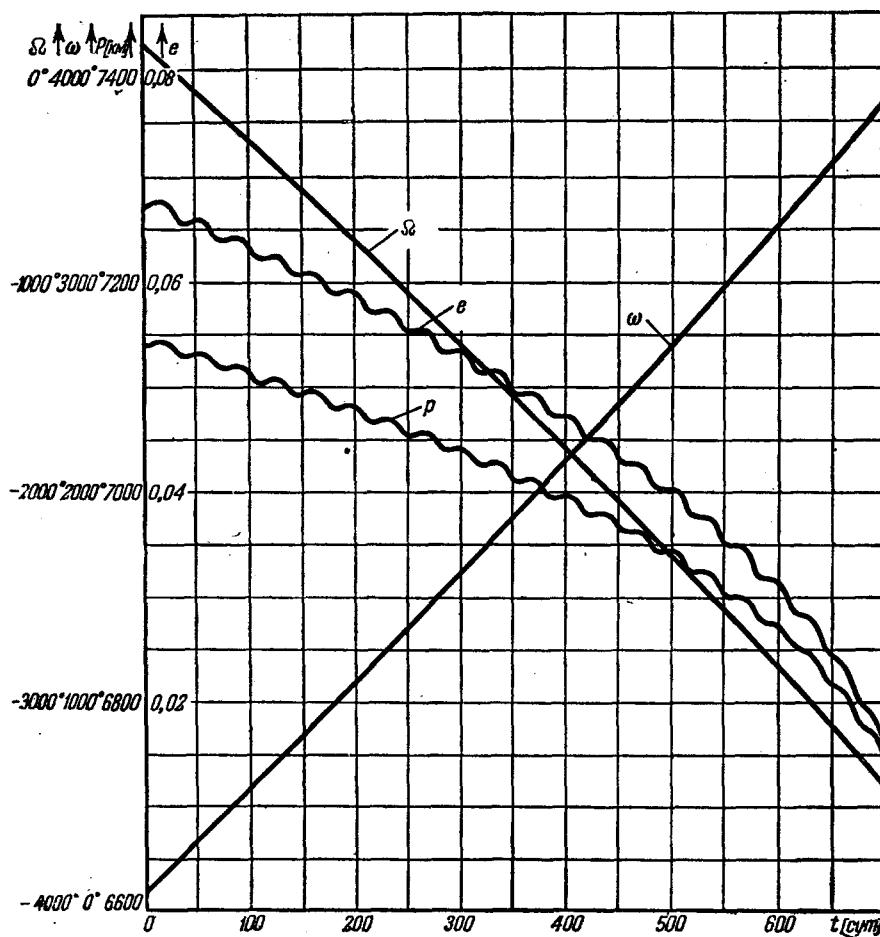


Рис. 4.

Характерной особенностью кривых для параметра p и эксцентриситета e является то, что они носят колебательный характер. Период колебаний составляет ~ 36 суток и совпадает с периодом, в течение кото-

рого оскулирующий элемент ω , определяющий положение перигея оскулирующего эллипса по отношению к восходящему узлу, изменяется на π . В отличие от короткопериодических колебаний оскулирующих элементов p и e , имеющих место при изменении истинной аномалии ϑ на интервале от $\vartheta_0 + 2\pi (k-1)$ до $\vartheta_0 + \pi k$, назовем указанные выше колебания долгопериодическими.

Наличие долгопериодических колебаний объясняется тем, что при изменении истинной аномалии ϑ на 2π изменяется как сам оскулирующий эллипс орбиты, так и его ориентации в абсолютном пространстве; при этом изменяется оскулирующий элемент ω , определяющий положение перигея оскулирующего эллипса по отношению к экваториальной плоскости. Поэтому при изменении ϑ на $2\pi k (k=1, 2\dots)$ спутник будет занимать различные положения относительно экваториальной плоскости и действие силы за счет отклонения поля тяготения Земли от центрального, зависящей от широты, будет различным.

При наличии только возмущающей силы за счет неподцентральности поля тяготения Земли соответствующие кривые изменения оскулирующих элементов p и e в точках $\vartheta = \vartheta_0 + 2\pi k$ должны иметь вид колебательных кривых с горизонтальной средней линией. Это следует из того, что сила за счет неподцентральности поля земного тяготения является консервативной. Возмущающее действие сопротивления атмосферы приводит к рассеянию энергии спутника и вызывает монотонное изменение оскулирующих элементов (в точках $\vartheta = \vartheta_0 + 2\pi k$). Совместное действие двух основных указанных возмущающих сил приводит к тому, что кривые изменения оскулирующих элементов орбиты искусственного спутника в точках, равноотстоящих от перигеев оскулирующих эллипсов, имеют вид, указанный на рис. 4.

Кривые, приведенные на рис. 4, дают возможность судить о том, каковы вековые возмущения оскулирующих элементов орбиты искусственного спутника за определенный промежуток времени. Действительно, нетрудно видеть, что за период времени, равный 700 суткам, вековые возмущения элементов орбиты составляют:

$$\Delta p = -414 \text{ км}, \Delta e = -0,0564, \Delta \omega = -3860^\circ, \Delta \Omega = -3529^\circ.$$

Необходимо отметить, что при движении искусственного спутника в неподцентральном поле земного тяготения для рассматриваемой орбиты перигей оскулирующего эллипса меняет свое положение по отношению к плоскости экватора с течением времени. За период времени, равный 700 суткам, перигей оскулирующих эллипсов совершил около 11 оборотов вокруг Земли.

Восходящий узел для рассматриваемой орбиты уходит в направлении, противоположном движению Земли, со скоростью $\sim 5^\circ$ за сутки.

В заключение отметим, что при расчете на машине указанной орбиты спутника по приведенной выше методике за время его движения в течение 700 суток, т. е. порядка двух лет, было затрачено около четырех часов машинного времени.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Г. И. Дубощин, Введение в небесную механику, М. — Л., ОНТИ, 1938.
2. С. К. Митра, Верхняя атмосфера, М., ИЛ, 1955.
3. Н. И. Идельсон, Теория потенциала с приложениями к теории фигуры Земли и геофизики, М., ОНТИ, 1936.
4. Д. Е. Оходимский, Т. М. Эннен, Г. П. Таратынова — в этом выпуске УФН.