

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВЕННОГО ОБРАЗОВАНИЯ ЧАСТИЦ *)

С. З. Беленький, В. М. Максименко,
А. И. Никишов, И. Л. Розенталь

1. ВВЕДЕНИЕ

В последнее время выяснилось, что при столкновении двух ядерно-активных частиц высокой энергии, как правило, образуется несколько мезонов. Последовательная интерпретация этого явления пока отсутствует и трудно ожидать существенного прогресса в этом направлении в ближайшем будущем, так как количественная сторона мезонной теории неудовлетворительна, несмотря на многочисленные попытки ее улучшения. Это обстоятельство связано с тем, что современный формализм описывает множественные процессы в виде ряда по степеням величин $g^2/\hbar c$. Для мезонов $g^2/\hbar c \sim 1$, и этот ряд либо сходится плохо, либо не сходится совсем. И, наконец, множественное образование есть проблема многих частиц. Однако даже в случае сравнительно простых и хорошо известных законов взаимодействий двух частиц, как, например, в случае электромагнитного взаимодействия, эта проблема может быть решена лишь приближенно.

В результате такого стечения обстоятельств все предложенные теории множественных процессов¹⁻⁵ базируются на более или менее произвольных предположениях, правильность которых проверяется путем сравнения с экспериментальными данными.

В настоящей статье мы подробно остановимся на предложенной Ферми³ статистической теории множественных процессов. Выбор этой теории обусловливается тем, что ее, в отличие от других^{1,2,4}, можно применять также и при сравнительно умеренных энергиях 1—5 *Бэв*, где имеются многочисленные экспериментальные данные (**).

В основу этой теории положено предположение, что в малом объеме устанавливается статистическое равновесие между различными степенями свободы системы. Ценность этой идеи заключается в ее общности. Действительно, поскольку множественное образование мезонов есть процесс, в котором участвует много частиц, то естественно думать, что некоторые аспекты явления носят статистический характер. В пользу этого свидетельствует также и то, что другие теории множественных процессов, несмотря на совершенно различные подходы, содержат в большей или меньшей степени элементы статистики^{5,6}.

*) Настоящая работа написана после смерти С. З. Беленького и является развитием доклада, сделанного авторами на конференции по физике частиц высоких энергий (Москва, 1956 г.).

**) Когда число вторичных частиц $n \gg 1$, чисто статистический подход становится не пригодным. В этом случае существенную роль начинает играть разлет частиц, для описания которого Л. Д. Ландау предложил использовать гидродинамику. Гидродинамическая теория качественно хорошо описывает экспериментальные данные о взаимодействии при очень больших энергиях.

Утверждению относительно общности статистического подхода можно придать простую математическую форму. Известно, что вероятность S_n перехода системы из состояния A в состояние B с образованием n частиц равна *)

$$S_n = 2\pi |H_{AB}|^2 \rho_{E_0, n}, \quad (1,1)$$

где H_{AB} — матричный элемент, соответствующий переходу из состояния A в состояние B , а $\rho_{E_0, n}$ — плотность уровней в конечном состоянии, если полная энергия системы равна E_0 . Функция $\rho_{E_0, n}$ от n обладает максимумом при некотором n_{\max} , причем острота его возрастает с увеличением n . Поэтому можно ожидать, что если H_{AB} является достаточно гладкой функцией, то влияние матричного элемента будет невелико, и основные контуры процессов будут определяться статистическим фактором.

Очевидно, однако, что подобный подход, пренебрегающий ролью матричного элемента, является приближенным. Одна из основных задач настоящей статьи и заключается в выяснении роли статистического фактора, т. е. степени приближенности всего подхода.

Сделаем несколько общих замечаний относительно формулы (1,1). Статистический множитель $\rho_{E_0, n}$ должен учитывать, вообще говоря, все законы сохранения: энергии, импульса, момента импульса, электрического заряда, разности чисел нуклонов и антинуклонов, странности, изотопического спина. Мы примем во внимание все перечисленные законы, кроме закона сохранения момента. Подобное пренебрежение можно трактовать следующим образом. Пусть наша система имеет классический характер; тогда оценки, сделанные Ферми³, показывают, что учет закона сохранения момента импульса очень мало изменяет статистический вес. С точки зрения квантовой механики пренебрежение этим законом означает, что конечное состояние классифицируется по импульсам; естественно, что при такой классификации мы должны учитывать вырождение по обычному спину и не учитывать орбитальный момент, который не коммутирует с импульсом.

Найдем теперь выражение для матричного элемента, соответствующего установлению статистического равновесия. Для этого запишем $\rho_{E_0, n}$ в форме

$$\rho_{E_0, n} = \frac{\Omega^{n-1}}{(2\pi^3)^{n-1}} f_{T, s, \dots} \frac{dQ_n(E_0)}{dE_0}, \quad (1,2)$$

где Ω есть нормировочный объем.

$Q_n(E_0)$ есть объем, занимаемый системой в импульсном пространстве с учетом сохранения энергии и импульса, а $f_{T, s, \dots}$ — множители, учитывающие обычные спины частиц, тождественность, сохранение изотопического спина и т. д. Показатель $n-1$ (а не n) есть следствие закона сохранения импульса, уменьшающего число степеней свободы на 3. Такая запись, естественно, возможна при пренебрежении сохранением орбитального момента.

Если вероятность осуществления состояния B определяется статистическим равновесием при условии, что система заключена в объеме V , то

$$S_n = \frac{V^{n-1}}{(2\pi^3)^{n-1}} f_{T, s, \dots} \frac{dQ_n(E_0)}{dE_0}. \quad (1,3)$$

*) Мы здесь и в дальнейшем используем систему единиц, в которой

$$\hbar = c = M = 1 \quad (M — масса нуклона).$$

Сравнивая (1,1), (1,2) и (1,3) получаем:

$$|H_{AB}|^2 = \left| \frac{V}{Q} \right|^{n-1}. \quad (1,4)$$

Это выражение имеет простой физический смысл: квадрат матричного элемента равен вероятности нахождения всех частиц системы в объеме V .

2. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ МЕЖДУ ЧАСТИЦАМИ. ВЫБОР ОБЪЕМА

Предположение об установлении статистического равновесия в течение короткого промежутка времени с первого взгляда внутренне противоречиво. Действительно, с одной стороны, для этого необходимо очень сильное взаимодействие между частицами; с другой — формула (1,3) описывает статистику невзаимодействующих частиц. Строгое разрешение этого противоречия заключено в вычислении матричного элемента H_{AB} . Однако, как уже упоминалось, провести это в настоящее время невозможно. Поэтому наша задача заключается в оценке эффективного матричного элемента в духе формулы (1,3). С этой целью проанализируем физический смысл двух входящих в (1,3) параметров — числа частиц n и объема V . Нашей исходной точкой зрения является допущение, что в некоторый момент времени, не обязательно совпадающий с началом столкновения в объеме V (который не равен начальному объему), находятся частицы, расстояние между которыми равно радиусу взаимодействия; в этом случае можно применять к описанию системы статистику идеального газа.

В своей основной работе Ферми³ предположил, что объем V есть лоренцовски сжатый объем с линейными размерами, равными радиусу действия ядерных сил $R \sim \frac{1}{\mu}$ (μ — масса π -мезона), т. е.

$$V = V_0 \frac{2}{E_0}, \quad (2,1)$$

где $V_0 = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{1}{\mu} \right)^3$ есть эффективный объем без учета лоренцовского сжатия. Очевидно, что такое определение возможно, если число образованных частиц близко к единице либо если сечение их взаимодействия пренебрежимо мало сравнительно с $\left(\frac{1}{\mu} \right)^2$. В настоящее время нет достаточно обоснованных данных о сечении $\sigma_{\pi-\pi}$ для $\pi-\pi$ -взаимодействий. Скорее, сопоставление выводов статистическо-гидродинамической концепции с экспериментальными данными позволяет сделать некоторое заключение о величине этого сечения^{5,7}.

Мы примем вместе с Ферми, что объем V определяется соотношением (2,1). Необходимо, однако, подчеркнуть неоднозначность подобного выбора*).

Перейдем теперь к вопросу о числе частиц. Число n соответствует моменту окончания взаимодействия, однако вовсе не обязательно, чтобы это число равнялось наблюдаемому числу. Возможно, что вследствие сильного резонансного взаимодействия частицы образовывали комплексы (квазичастицы), время жизни которых больше R . Введение подобных комплексов без наличия дополнительных экспериментальных данных было бы произвольно (и поэтому лишено значительной ценности). Однако

*) Если сечение $\sigma_{\pi-\pi} \sim (1/\mu)^2$, то учет взаимодействия вторичных частиц в духе статистической концепции следует⁷ провести путем изменения величины объема V .

опыты по рассеянию π -мезонов на нуклонах доказывают наличие сильного максимума для сечения рассеяния при энергии π -мезонов ~ 200 Мэв, что свидетельствует о сильном резонансном взаимодействии π -мезона и нуклона⁸, которое можно описать⁹⁻¹⁰ с помощью промежуточного так называемого изобарного состояния, соответствующего частице с обычным и изотопическим спинами, равными $3/2$. Поэтому можно предположить¹¹, что в процессе соударения образуются такие квазичастицы с обычным и изотопическим спинами, равными $3/2^*$). Масса такой квазичастицы принята в соответствии с⁹ равной 1,32. Естественно в духе всей статистической концепции допустить, что вероятность их образования определяется статистическим весом. После окончания взаимодействия каждая изобара распадается на π -мезон и нуклон. Возможность учета резонансного взаимодействия с помощью подобной модели можно обосновать с иной точки зрения¹⁴. Рассмотрим вначале пример, принадлежащий Л. Д. Ландау¹⁴. Будем считать в нулевом приближении частицы не взаимодействующими, а в первом приближении примем во внимание лишь парное взаимодействие. Тогда добавочный член в сумме состояний, обусловленный взаимодействием, можно записать в форме¹⁵

$$Z = Z_1 + Z_2, \quad (2,2)$$

где $Z_1 = \sum e^{-\epsilon_n/kT}$ (ϵ_n — значение энергии в состоянии n) — сумма состояний по дискретному спектру, а Z_2 — сумма состояний по непрерывному спектру с учетом парного взаимодействия. Этот член равен

$$Z_2 = \frac{1}{\pi} \sum_l \int_0^\infty (2l+1) \frac{d\delta_l}{dp} e^{-p^2/mkT} dp, \quad (2,3)$$

где δ_l — фаза рассеяния с моментом l , p — импульс. Если рассеяние носит резонансный (в пределе дельтобразный) характер при каком-либо значении l , то

$$Z_2 = \frac{2l+1}{\pi} e^{-p_l^2/mkT}. \quad (2,4)$$

Таким образом, к статистической сумме прибавляется член, соответствующий как бы состоянию с энергией p_l^2/m .

В общем случае можно учесть парное взаимодействие аналогично. Можно показать, что статистический вес S_{n+1} системы n π -мезонов и одного нуклона с учетом парного взаимодействия равен

$$S_n(M) = S_{0,n}(M) + \frac{2l+1}{\pi} \int S_{0,n-1}(M+\mu+E_1) \frac{\partial \delta_{l,T}}{\partial E_1} dE_1, \quad (2,5)$$

где T — изотопический спин системы, S_0 — статистический вес без учета взаимодействия, $S_{0,n-1}(M+\mu+E_1)$ — статистический вес для системы из $n-1$ мезонов и одной «частицы» с массой $M+\mu+E_1$ (E_1 — кинетическая энергия нуклона и мезона в системе их центра тяжести). Если фаза рассеяния имеет резонансный характер при некотором l , то второй член формулы (2,5) равен:

$$(2l+1) S_{0,n-1}(M_1),$$

где $M_1 = M + \mu + E_1$.

*) Впервые предположение о значительной роли изобарных состояний в процессах, связанных с образованием мезонов, было выдвинуто Белинфанте¹² и Пизли¹³. Что касается самой идеи изобарных состояний, то она была выдвинута сравнительно давно в связи с известными трудностями мезонной теории^{58,59}.

Таким образом, этот член точно соответствует изобаре с массой M_1 , т. е. резонансное взаимодействие можно описывать с помощью квазичастиц, обладающих массой M_1 .

3. ИЗОТОПИЧЕСКИЙ СПИН, ТОЖДЕСТВЕННОСТЬ, РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПО ЗАРЯДОВЫМ СОСТОЯНИЯМ

Фактор $f_{T, S, \dots}$ в формуле для статистического веса можно разбить на три множителя: g_S , $\frac{1}{m!n!}$ и $p_n(T)$

$$f_{T, S, \dots} = g_S \frac{1}{m!n!} p_n(T). \quad (3,1)$$

Множитель g_S учитывает спин частиц, фактор $\frac{1}{m!n!}$ учитывает тождественность имеющихся n π -мезонов и m нуклонов, наконец, функция $p_n(T)$ возникает из требования сохранения изотопического спина при соударении. Ферми^{3, 16} не принимал во внимание обычный спин частиц. Легко видеть, что учет его ничего не меняет, если ограничиться энергиями, при которых вероятность рождения антинуклонов пренебрежимо мала. Действительно, спин π -мезонов равен нулю, число же нуклонов при соударении не изменяется. Следовательно, множитель $g_S = m(2S + 1)$, где m — число нуклонов и S — их спин, является общим для всех реакций, и его можно опустить. Иная ситуация имеет место, когда нуклоны могут находиться в изобарных состояниях. В этом случае будем считать, что $g_S = 1$ для процессов без участия изобар и $g_S = 2k$ для процессов с k изобарами (так как изобарные состояния с $S = 3/2$ вырождены по обычному спину в два раза больше, чем нуклоны).

Соответственно множитель $\frac{1}{m!n!}$ равен $\frac{1}{2!n!}$ для процесса, продуктами которого являются два нуклона (или две изобары) и n π -мезонов, и равен $\frac{1}{1!n!}$ для процесса, в результате которого появляются n мезонов, один нуклон и одна изобара.

Переходим к рассмотрению изотопического статистического фактора $p_n(T)$. По определению, множитель $p_n(T)$ равен числу различных изотопических состояний с заданными T и T_3 , в которых могут находиться продукты рассматриваемой реакции. Значения $p_n(T)$ можно найти по правилам векторного сложения моментов. Для системы, состоящей из n мезонов и m нуклонов, имеем¹⁷

$$p_n(T) \equiv p_{m, n}(T) = (2T + 1) \sum_i \frac{(-1)^{i+n}}{2i + m + 1} \binom{n}{i} \binom{2i + m + 1}{i + \frac{1}{2}m - T}. \quad (3,2)$$

Если среди m нуклонов один находится в изобарном состоянии, то $p_n(T)$ выражается через функцию $p_{m, n}(T)$ так:

$$p_{N', m-1, n}(T) = p_{m, n+1}(T) - p_{m, n}(T). \quad (3,3)$$

Индекс N' в $p_{N', m-1, n}(T)$ указывает на наличие одной изобары. Соответственно, для двух нуклонов в изобарных состояниях получим следующее выражение для $p_n(T)$ через функции, определенные формулами (3,2) и (3,3):

$$p_{N'N', m-2, n}(T) = p_{m, n+2}(T) - 2p_{N', m-1, n}(T) + p_{m, n}(T). \quad (3,4)$$

Численные значения функции $p_{m,n}(T)$ при различных значениях T , m и n приведены в 17.

В некоторых случаях система сталкивающихся частиц не имеет определенного изотопического спина. Так, при соударении π^- -мезона с протоном система с вероятностью $a = 1/3$ имеет изотопический спин $T = 3/2$ и с вероятностью $b = 2/3$ изотопический спин $T = 1/2$ (*). В этом случае нужно провести расчет вероятностей для обоих значений T порознь, нормировать полученные вероятности для $T = T_1$ и $T = T_2$ одинаковым образом (например, так, чтобы их сумма при каждом T была равна 100) и, наконец, сложить полученные вероятности с весами a и b для случаев $T = T_1$ и $T = T_2$ соответственно. Результат, однако, мало меняется, если просто считать, что в таких случаях множитель, учитывающий сохранение изотопического спина, имеет вид $p_n = ap_n(T_1) + bp_n(T_2)$,

$$J_{T,S,\dots} = g_S \frac{1}{m!n!} (ap_n(T_1) + bp_n(T_2)).$$

В таблице I приведены значения $J_{T,S,\dots}$ для ряда случаев. Перейдем теперь к вопросу о распределении продуктов реакции по зарядовым состоя-

Таблица I

Значения коэффициентов $J_{T,S,\dots}$, учитывающих изотопический спин, тождественность и обычный спин

Соударяющиеся частицы Продукты реакции	$\begin{matrix} n-p \\ p-p \\ T=1 \end{matrix}$	$T=0$	$n-p$	Соударяющиеся частицы Продукты реакции	$\begin{matrix} \pi^- - n \\ \pi^+ - p \\ T=3/2 \end{matrix}$	$T=1/2$	$\begin{matrix} \pi^+ - n \\ \pi^- - p \end{matrix}$
	NN	$1/2$	$1/2$		$1/2$	$N1$	1
NN'	2	0	1	$N2$	1	1	1
$NN'1$	1	$1/2$	$3/4$	$N'1$	2	2	2
$N'N'$	2	2	2	$N3$	$5/6$	$2/3$	$13/18$
$NN'1$	4	2	3	$N'2$	3	2	$7/3$
$NN2$	1	$1/2$	$3/4$	$N4$	$1/2$	$3/8$	$5/12$
$N'N'1$	6	2	4	$N'3$	$7/3$	$2/3$	$17/9$
$NN'2$	5	2	$7/2$	$N5$	$1/4$	$7/40$	$1/5$
$NN3$	$3/4$	$1/3$	$13/24$	$N'4$	$5/2$	1	$7/6$
$N'N'2$	7	3	5				
$NN'3$	4	$5/3$	$17/6$				
$NN4$	$7/16$	$3/16$	$5/16$				
$N'N'3$	6	$7/3$	$23/6$				
$NN'4$	$5/2$	1	$7/4$				
$NN5$	0,212	0,087	0,15				

N — нуклон, N' — изобара, $NN'3$ — состояние с одним нуклоном, одной изобарой и тремя π -мезонами и т. д.

ниям. Вероятности зарядовых состояний для различных процессов приведены в таблицах II—VI. Вероятности нормированы так, что их сумма для данного процесса равна 1. Как и раньше, процесс характеризуем числом изобар среди продуктов реакции и числом мезонов. Для краткости приведены лишь вероятности зарядовых состояний с учетом распада изобар. Как

*) В общем случае величины a и b определяются изотопическими спинами сталкивающихся частиц.

Таблица II

Зарядовые распределения продуктов π^- — p-соударений.
 Для π^+ — p-соударений надо заменить знаки зарядов мезонов на противоположные и заменить $p \rightarrow \bar{p}$, $\bar{p} \rightarrow p$

Число мезонов m	Продукты реакции	Nm			$N'(m-1)$		
		$\begin{matrix} (T, T_3) = \\ = (\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}) \end{matrix}$	$\begin{matrix} (T, T_3) = \\ = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) \end{matrix}$	$\pi^- - p$	$\begin{matrix} (T, T_3) = \\ = (\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}) \end{matrix}$	$\begin{matrix} (T, T_3) = \\ = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) \end{matrix}$	$\pi^- - p$
1	p— n 0 p ₁	$\frac{1}{3}$ $\frac{2}{3}$ 1	$\frac{2}{3}$ $\frac{1}{3}$ 1	$\frac{5}{9}$ $\frac{4}{9}$ 1			
2	p—0 n 00 n+— p ₂	0,467 0,133 0,400 2	0,333 0,167 0,500 2	0,378 0,155 0,467 2	0,378 0,044 0,578 1	0,222 0,222 0,556 1	0,274 0,163 0,563 1
3	p+— p—00 n+—0 n 000 p ₃	0,240 0,200 0,480 0,080 5	0,300 0,200 0,450 0,050 4	0,277 0,200 0,462 0,061 $\frac{13}{3}$	0,222 0,170 0,505 0,103 3	0,267 0,178 0,511 0,044 2	0,248 0,174 0,508 0,070 $\frac{7}{3}$
4	p+—0 n+— p—000 n+—00 n 0000 p ₄	0,362 0,190 0,105 0,324 0,019 12	0,356 0,222 0,089 0,311 0,022 9	0,358 0,210 0,095 0,316 0,021 10	0,335 0,212 0,094 0,346 0,013 7	0,320 0,240 0,080 0,333 0,027 5	0,326 0,229 0,085 0,339 0,021 $\frac{17}{3}$
5	p+— p+—00 n+—0 n+—000 p—0000 n 00000 p ₅	0,119 0,305 0,333 0,191 0,043 0,009 30	0,136 0,300 0,340 0,177 0,040 0,007 21	0,129 0,302 0,337 0,182 0,042 0,008 24	0,114 0,283 0,352 0,199 0,040 0,012 18	0,127 0,280 0,362 0,187 0,038 0,006 12	0,121 0,281 0,358 0,192 0,039 0,009 14

Таблица III

Зарядовые распределения продуктов π^- — n-соударений.
 Для π^+ — p-соударений надо заменить знаки зарядов мезонов на противоположные и заменить $n \rightarrow \bar{n}$, $\bar{n} \rightarrow n$

Число мезонов m	Продукты реакции	Без изобар	С изобарой	Число мезонов m	Продукты реакции	Без изобар	С изобарой
		Nm	$N'(m-1)$			Nm	$N'(m-1)$
1	n— p ₁ ($\frac{3}{2}$)	1 1	0	4	p+— p—00 n+—0 p ₄ ($\frac{3}{2}$)	0,190 0,210 0,476 0,124 12	0,136 0,149 0,569 0,146 7
2	p— n—0 p ₂ ($\frac{3}{2}$)	0,40 0,60 2	0,133 0,867 1				
3	p—0 n+— n—00 p ₃ ($\frac{3}{2}$)	0,320 0,400 0,280 5	0,178 0,489 0,333 3	5	p+—0 p—000 n+— n+—00 n—0000 p ₅ ($\frac{3}{2}$)	0,286 0,114 0,167 0,381 0,052 30	0,222 0,089 0,193 0,436 0,060 18

Таблица IV

Зарядовое распределение продуктов $n - p$ -столкновений

Число мезонов m	Продукты реакции	NNm			$NN'(m-1)$			$N'N'(m-2)$			
		(0, 0)	(1, 0)	$n-p$	(0, 0)	(1, 0)	$n-p$	(0, 0)	(1, 0)	$n-p$	
0	np p_0	1 1	1 1	1 1							
1	$pp-$ $pn 0$ $nn+$ p_1	0,333 0,333 0,334 1	0,250 0,500 0,250 2	0,278 0,444 0,278 $\frac{3}{2}$	0 0 0 0	0,167 0,666 0,167 1	0,167 0,666 0,167 $\frac{1}{2}$				
2	$pp-0$ $pn+-$ $pn 00$ $nn+0$ p_2	0,166 0,500 0,167 0,167 2	0,200 0,450 0,150 0,200 4	0,189 0,466 0,156 0,189 3	0,111 0,556 0,222 0,111 1	0,150 0,567 0,133 0,150 2	0,137 0,563 0,163 0,137 $\frac{3}{2}$	0,111 0,556 0,222 0,111 1	0,022 0,911 0,045 0,022 1	0,067 0,733 0,133 0,067 1	
3	$pp+---$ $pp-00$ $pn+-0$ $nn++-$ $pn 000$ $nn+00$ p_3	0,150 0,100 0,450 0,150 0,050 0,100 4	0,133 0,100 0,467 0,133 0,067 0,100 9	0,138 0,100 0,462 0,138 0,062 0,100 $\frac{13}{2}$	0,133 0,089 0,511 0,133 0,045 0,089 2	0,120 0,087 0,503 0,120 0,080 0,087 5	0,124 0,087 0,508 0,124 0,070 0,087 $\frac{7}{2}$	0,081 0,066 0,690 0,081 0,015 0,067 1	0,074 0,081 0,585 0,074 0,105 0,081 3	0,076 0,078 0,611 0,076 0,081 0,078 2	
4	$pp+---0$ $pn++++$ $pp-000$ $pn+-00$ $nn++++0$ $pn 0000$ $nn+000$ p_4	0,178 0,222 0,044 0,311 0,178 0,022 0,045 9	0,180 0,204 0,049 0,318 0,179 0,021 0,049 21	0,179 0,209 0,048 0,316 0,179 0,021 0,048 15	0,160 0,240 0,040 0,333 0,160 0,027 0,040 5	0,165 0,224 0,043 0,341 0,165 0,019 0,043 12	0,163 0,229 0,043 0,338 0,163 0,021 0,043 $\frac{17}{2}$	0,124 0,282 0,037 0,363 0,124 0,033 0,037 3	0,138 0,260 0,034 0,387 0,138 0,009 0,034 7	0,133 0,267 0,035 0,380 0,133 0,017 0,035 5	
5	$pp++++---$ $pp+---00$ $pn++++0$ $nn++++---$ $nn++++00$ $pp-0000$ $nn+0000$ $pn 00000$ p_5	0,068 0,150 0,340 0,068 0,150 0,177 0,020 0,020 0,007 21	0,063 0,151 0,336 0,063 0,151 0,185 0,021 0,021 0,009 51	0,064 0,151 0,338 0,064 0,151 0,182 0,021 0,021 0,008 36							

Таблица V

Зарядовое распределение продуктов p — p -соударений

Число мезонов	Продукты реакции	NNm	$NN'(m-1)$	$N'N'(m-2)$
0	pp $p_0(1)$	1 1		
1	$pp0$ $pn+$ $p_1(1)$	0,25 0,75 2	0,167 0,833 1	
2	$pp+-$ $pp00$ $pn+0$ $pn++$ $p_2(1)$	0,300 0,100 0,450 0,150 4	0,350 0,117 0,483 0,050 2	0,200 0,178 0,578 0,044 1
3	$pp+-0$ $pn++++$ $pp000$ $pn+00$ $pn++++0$ $p_3(1)$	0,267 0,333 0,033 0,233 0,134 9	0,280 0,360 0,033 0,247 0,080 5	0,244 0,422 0,030 0,252 0,052 3
4	$pp++++-$ $pp+-00$ $pn++++0-$ $pn+++++-$ $pp0000$ $pn+000$ $pn++++00$ $p_4(1)$	0,122 0,180 0,408 0,082 0,012 0,106 0,090 21	0,131 0,190 0,431 0,060 0,013 0,110 0,065 12	0,119 0,186 0,480 0,036 0,014 0,112 0,053 7

Таблица VI

Зарядовое распределение продуктов аннигиляции нуклонов (p или \bar{p}) с антинуклонами (\bar{p} или p). Распределение для $\bar{p}\bar{p}$ получается из распределения для pp заменой знака заряда мезонов на противоположный *)

Число мезонов	Зарядовые состояния	$(T, T_0) = (0, 0)$	$(T, T_0) = (1, 0)$	$\bar{p}p$	Зарядовые состояния	$\bar{p}p(T, T_0) = (1, -1)$
2	00 $+-$ p_2	0,333 0,667 1	0 1 1	0,167 0,833 1	$+0$ $p_2(1)$	1 1
3	000 $+-0$ p_3	0 1 1	0,200 0,800 3	0,150 0,850 2	$+-$ -00 $p_3(1)$	0,700 0,300 3
4	$++++$ $+-00$ 0000 p_4	0,400 0,533 0,067 3	0,400 0,600 0,000 6	0,400 0,578 0,022 $\frac{9}{2}$	$+-$ -000 $p_4(1)$	0,800 0,200 6
5	$++++0$ $+-000$ 00000 p_5	0,667 0,333 0,000 6	0,629 0,342 0,028 15	0,640 0,340 0,020 $\frac{21}{2}$	$++++$ $+-000$ -0000 $p_5(1)$	0,286 0,629 0,085 15

*) В недавно появившейся работе ²³ для вероятностей состояний с одними нейтральными мезонами получено аналитическое выражение.

обычно, считаем, что вероятности распада изобар таковы, что

$$\begin{aligned} N^{++} &\rightarrow (p0), & N^0 &\rightarrow \frac{1}{3}(p^-) + \frac{2}{3}(n0), \\ N^+ &\rightarrow \frac{2}{3}(p0) + \frac{1}{3}(n^+), & N^- &\rightarrow (n^-) \end{aligned}$$

(N^{++} -состояние с $t_3 = 3/2$, N^+ -состояние с $t_3 = 1/2$), т. е. изобара N^+ с вероятностью $2/3$ распадается с излучением π^0 -мезона и с вероятностью $1/3$ — с излучением π^+ -мезона и т. д.

Для каждого процесса в таблицах приведены также значения $p_n(T)$. Если умножить вероятности зарядовых состояний на соответствующие $p_n(T)$, получим изотопические статистические веса зарядовых состояний. Однако последними пользоваться обычно не приходится. Вычисления зарядовых распределений по статистической теории для различных случаев выполнено в работах ^{16, 18-22}. Подробности, касающиеся вычислений, даны в приложении I. Возможные отклонения от зарядовых распределений, определяемых статистической теорией, обсуждаются в приложении II.

4. ФАЗОВЫЙ ОБЪЕМ

Получение общей формулы для величины объема $Q_n(E_0)$ в $3(n-1)$ -мерном фазовом пространстве, занимаемом системой n частиц с учетом законов сохранения энергии и импульса, представляет значительные трудности. Известные в статистической физике выражения совершенно непригодны, поскольку при их выводе предполагается условие $\ln n \gg 1$ (используется формула Стирлинга), что совершенно не выполняется в интересующих нас случаях. Кроме того, обычно учитывается лишь закон сохранения энергии, в то время как сохранением импульса пренебрегают*).

В своей основной работе ³ Ферми вычислял величину $Q_n(E_0)$, учитывая точно лишь сохранение энергии (сохранение импульса было приближенно учтено в его формулах заменой n на $(n-1)$ для двух крайних случаев: нерелятивистского, когда полная энергия E частицы представляется соотношением $E = M^2 + p^2/2M$ (p — импульс частицы, M — ее масса), и ультрарелятивистского, когда $E = p$).

Он же привел выражения $Q_n(E_0)$ для «смешанного» случая, когда некоторые частицы можно считать нерелятивистскими, а остальные — ультрарелятивистскими, причем учитывается приближенно закон сохранения импульса лишь для нерелятивистских (тяжелых) частиц. Ясно, однако, что, с одной стороны, область применимости этих формул весьма ограничена; с другой стороны, не определена величина ошибки, обусловленной приближенностью расчетов. Поэтому для количественных сопоставлений теоретических и экспериментальных результатов необходимы точные вычисления $W_n(E_0)$.

В ряде работ было произведено уточнение формул, полученных Ферми. Так, Янг и Христиан ²⁴ и Блок ²⁵ вычисляли статистические веса численно с помощью электронных машин. Однако трудности, стоящие на этом пути, столь велики, что удалось провести расчеты для числа частиц, не превышающего 4—5. В работах ^{26, 27} приведено выражение для статистического веса трех частиц, при условии, что одна из частиц обладает заданным импульсом p . Общие выражения для любого n для двух крайних — ультрарелятивистского и нерелятивистского — случаев, при точном учете как закона сохранения энергии, так и закона сохранения

*) По-видимому, оба приближения эквивалентны в том смысле, что при $n \gg 1$ влиянием закона сохранения импульса можно пренебречь.

импульса, получаются сравнительно просто^{28,29}. Наконец, Мильбурн в¹⁸ приводит формулы для $W_n(E_0)$, когда масса одной частицы учитывается точно, а остальные n частиц ($n \leq 3$) считаются ультрарелятивистскими.

Мы опишем³⁰ общий метод вычисления $Q_n(E_0)$; полученные с его помощью общие выражения включают как частные случаи и упомянутые формулы. Фазовый объем $Q_n(E_0)$ системы частиц, для которой выполняются условия

$$\sum_{i=1}^n \sqrt{p_i^2 + \mu_i^2} \leq E_0 \text{ и } \sum_{i=1}^n p_i = 0 \text{ *)}$$

(мы рассматриваем Π -систему; обобщение формул на случай отличного от нуля суммарного импульса см. ниже в § 5), есть, по определению, следующая величина:

$$Q_n(E_0) = \int \dots \int_{3n} \delta \left(\sum_{i=1}^n p_i \right) U \left(E_0 - \sum_{i=1}^n \sqrt{p_i^2 + \mu_i^2} \right) \prod_{i=1}^n dp_i, \quad (4,1)$$

где $\delta(z)$ — дельта-функция, а $U(z)$ — ступенчатая функция Хевисайда, равная единице при положительном аргументе и нулю — при отрицательном. Воспользовавшись тождеством $dU(z)/dz = \delta(z)$, получаем следующую формулу:

$$W_n(E_0) = \frac{dQ_n(E_0)}{dE_0} = \int \dots \int_{3n} \delta \left(\sum_{i=1}^n p_i \right) \delta \left(E_0 - \sum_{i=1}^n \sqrt{p_i^2 + \mu_i^2} \right) \prod_{i=1}^n dp_i, \quad (4,2)$$

которая может быть преобразована к следующему виду (см. приложение III):

$$W_n(E_0) = \left(\frac{\pi}{2} \right)^{n-1} E_0^{3n-4} \frac{\pi^n \left(\prod_{i=1}^n \nu_i^2 \right)}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(x+y)} (x+y)^n (x-y)^2}{(xy)^n} \times \\ \times \prod_{i=1}^n H_2^{(2)}(2\nu_i \sqrt{xy}) dx dy, \quad (4,3)$$

где $H_2^{(2)}(z)$ — функция Ханкеля второго порядка, $\nu_i = \frac{\mu_i}{E_0}$. Оказывается возможным получить значение интеграла, стоящего в (4,3), в виде степенного ряда по величинам ν_i^2 и $\nu_i^2 \ln \frac{1}{\nu_i}$. Общий метод вычисления членов этого ряда изложен в приложении III; здесь же мы приведем значение нескольких первых членов, записав все выражения для $W_n(E_0)$ в форме

$$W_n(E_0) = \left(\frac{\pi}{2} \right)^{n-1} E_0^{3n-4} \sum_{i=1}^{\infty} P_i(\nu). \quad (4,4)$$

*) p_i, μ_i — импульс и масса i -й частицы.

а) Все частицы обладают одинаковой массой μ ($\nu_i = \nu$):

$$\begin{aligned}
 P_1(\nu) &= D_n^{(0)}, & P_2(\nu) &= C_n^1 D_n^{(1)} \nu^2, \\
 P_3(\nu) &= C_n^1 D_n^{(2)} \nu^4 \ln \frac{1}{\nu}, \\
 P_4(\nu) &= \left\{ \left(\frac{3}{4} C_n^1 + C_n^2 \right) D_n^{(2)} + \frac{1}{2} C_n^1 F_n^{(2)} \right\} \nu^4, \\
 P_5(\nu) &= \left(-\frac{1}{3} C_n^1 + 2C_n^2 \right) D_n^{(3)} \nu^6 \ln \frac{1}{\nu}, \\
 P_6(\nu) &= \left\{ \left(-\frac{17}{36} C_n^1 + \frac{3}{2} C_n^2 + C_n^3 \right) D_n^{(3)} + \left(-\frac{1}{6} C_n^1 + C_n^2 \right) F_n^{(3)} \right\} \nu^6, \\
 P_7(\nu) &= C_n^2 D_n^{(4)} \nu^8 \ln^2 \frac{1}{\nu}, \\
 P_8(\nu) &= \left\{ \left(\frac{1}{24} C_n^1 + \frac{1}{12} C_n^2 + 3C_n^3 \right) D_n^{(4)} + C_n^2 F_n^{(4)} \right\} \nu^8 \ln \frac{1}{\nu}
 \end{aligned} \tag{4,5}$$

и т. д. *).

Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned}
 D_n^{(A)} &= (-1)^A \frac{(4n - 2A - 4)!}{(3n - 2A - 4)! (2n - A - 1)! (2n - A - 2)!}, \\
 F_n^{(A)} &= D_n^{(A)} \{ 2(4n - 2A - 4)! \alpha(4n - 2A - 3) - 2(3n - 2A - 4)! \times \\
 &\times \alpha(3n - 2A - 3) - (2n - A - 1)! \alpha(2n - A) - (2n - A - 2)! \times \\
 &\times \alpha(2n - A - 1) \},
 \end{aligned} \tag{4,6}$$

$$\alpha(z) = \begin{cases} 0, & z = 1 \\ \sum_{m=1}^{z-1} \frac{1}{m}, & z = 2, 3, 4, \dots \\ (-1)^{z+1} |z|!, & z = 0, -1, -2, \dots \end{cases}$$

C_n^k — биномиальные коэффициенты.

б) Все частицы обладают разными массами **):

$$\begin{aligned}
 P_2(\nu_1, \dots, \nu_n) &= D_n^{(1)} \sum_{i=1}^n \nu_i^2, & P_3(\nu_1, \dots, \nu_n) &= D_n^{(2)} \sum_{i=1}^n \nu_i^4 \ln \frac{1}{\nu_i}, \\
 P_4(\nu_1, \dots, \nu_n) &= D_n^{(2)} \left\{ \frac{3}{4} \sum_{i=1}^n \nu_i^4 + \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^{n'} \nu_i^2 \nu_j^2 \right\} + \frac{1}{2} F_n^{(2)} \sum_{i=1}^n \nu_i^4, \\
 P_5(\nu_1, \dots, \nu_n) &= \\
 &= D_n^{(3)} \left\{ -\frac{1}{3} \sum_{i=1}^n \nu_i^6 \ln \frac{1}{\nu_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n'} \nu_i^2 \nu_j^2 \left(\nu_i^2 \ln \frac{1}{\nu_i} + \nu_j^2 \ln \frac{1}{\nu_j} \right) \right\}.
 \end{aligned} \tag{4,7}$$

*) Нами вычислено 12 членов ряда, однако мы не приводим их все из-за громоздкости соответствующих выражений.

**) Значение $P_1(\nu_1, \dots, \nu_n)$ не зависит от ν_i и одинаково во всех случаях.

Штрих у знака суммы означает, что при суммировании пропускается член с $i=j$.

Обобщение остальных членов ряда на этот случай не представляет труда, однако ввиду громоздкости выражений мы их здесь выписывать не будем. При $v_i \rightarrow 0$ частицы следует считать ультрарелятивистскими; при этом формула (4,4) имеет вид

$$W_n(E_0)_{y.p} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1} D_n^{(0)} E_0^{3n-4} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1} \frac{(4n-4)!}{(3n-4)!(2n-1)!(2n-2)!} E_0^{3n-4}. \quad (4,8)$$

Вывод формулы (4,8) в^{28, 29}.

Выражение (4,4) дает точное решение задачи; однако ряд этот при больших n сходится плохо, и даже использование 10—15 его членов не дает возможности вычислить $W_n(E_0)$ при значении кинетической энергии

$T_0 \sim \sum_{i=1}^n \mu_i$. Поэтому целесообразно получить более удобные формулы для этой области энергий, в частности, можно использовать «смешанную» формулу, но точно учесть в ней закон сохранения импульса, так как, по-видимому, пренебрежение им является источником значительных ошибок. Такие вычисления также были проделаны в работе³⁰.

Выражение (4,2) для «смешанного» случая имеет следующий вид (m «тяжелых» частиц с массой M , n релятивистских частиц):

$$W_{m,n}(E_0) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^4 \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(E_0 - mM)\tau_1} d\tau_1 \int \int \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_2 d\tau_3 d\tau_4 \times \times \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(p^2/2M + (p\tau))} d\mathbf{p} \right]^m \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\tau_1 p + (p\tau))} d\mathbf{p} \right]^n. \quad (4,9)$$

Путем громоздких вычислений получаем следующее выражение:

$$W_{m,n}(E_0) = \frac{2\pi^{n + \frac{3}{2}(m-1)} (mM)^{3n + \frac{3}{2}m - 4} M^{\frac{3}{2}m}}{(2n-1)!} S. \quad (4,10)$$

S определяется по-разному, в зависимости от четности числа m ($\alpha = \frac{2(E_0 - mM)}{mM}$):

а) m — четное

$$S = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left\{ \operatorname{arctg} \sqrt{\alpha} \sum_{k=1}^{3n + \frac{3}{2}m - 3} p_{3n + \frac{3}{2}m - 3 - k} \alpha^{3n + \frac{3}{2}m - 3 - k} - \sqrt{\alpha} \sum_{l=0}^{3n + \frac{3}{2}m - 5} q_l \alpha^l \right\}, \quad (4,11)$$

где

$$\left. \begin{aligned} p_{3n + \frac{3}{2}m - 3 - k} &= \frac{(-1)^{k-1} (2k-1)! \left(2n - \frac{3}{2} - k\right)!}{[(k-1)!]^2 \left(3n + \frac{3m}{2} - 3 - k\right)! 2^{2k-3} \sqrt{\pi}}, \\ q_l &= \sum_{i=0}^l (-1)^i \frac{p_{l-i}}{2i+1}, \end{aligned} \right\} (4,12)$$

б) m — нечетное

$$S = (1 + \alpha)^{n + \frac{3m}{2} - 3} \sum_{k=0}^{2n-1} a_k (1 + \alpha)^k + \sum_{r=0}^{n + \frac{3m}{2} - 3} b_r \alpha^r, \quad (4,13)$$

где

$$\left. \begin{aligned} a_k &= (-1)^{k-1} C_{2n-1}^k \frac{\left(k - \frac{3}{2}\right)!}{\left(k + \frac{3m}{2} - 3\right)!}, \\ b_r &= \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k C_{2n-1}^k \frac{\left(k - \frac{3}{2}\right)!}{\left(k + \frac{3m}{2} - r - 3\right)! r!}. \end{aligned} \right\} (4,14)$$

В том случае, если «тяжелые» частицы обладают разными массами, в приведенных выше выражениях должна быть сделана замена:

$$mM \rightarrow \sum_{i=1}^m M_i; \quad M^2 \rightarrow \prod_{i=1}^m M_i^{2/3}. \quad (4,15)$$

Если (4,10) разложить в ряд по степеням α и ограничиться первым членом, то мы получим выражение, приведенное Ферми³ (а также в обзоре¹⁴):

$$W_{m, n}(E_0)_{\text{Ферми}} = \frac{2\pi^{n + \frac{3}{2}(m-1)} (mM)^{3n + \frac{3}{2}m - 4} M^{\frac{3}{2}m} \alpha^{3n + \frac{3m}{2} - \frac{5}{2}}}{\left(3n + \frac{3m}{2} - \frac{5}{2}\right)!}. \quad (4,16)$$

Это выражение существенно отличается от (4,10) (рис. 1). При $n=0$ формула (4,10) переходит в

$$W_m(E_0) = \frac{(2M\pi)^{\frac{3}{2}(m-1)} T^{\frac{3m}{2} - \frac{5}{2}}}{m^{\frac{3}{2}} \left(\frac{3m}{2} - \frac{5}{2}\right)!} \quad (4,17)$$

— формулу для случая, когда все частицы являются нерелятивистскими. Для геометрической интерпретации последней формулы целесообразно привести простой ее вывод.

Уравнения $\sum_{i=1}^m p_i^2/2M = E_0 - mM$ и $\sum_{i=1}^m p_i = 0$ определяют некоторую поверхность второго порядка в $3(m-1)$ -мерном фазовом пространстве; легко показать, что этой поверхностью является эллипсоид, у которого

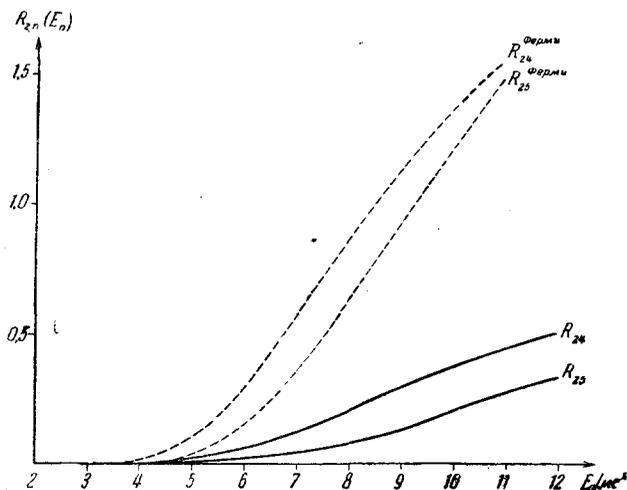


Рис. 1. Отношение $R_{2,n}(E_0) = \frac{W_{2,n}(E_0)}{W_{2,n}(E_0)_{у.р}}$ статистических весов к их выражению при пренебрежении массами покоя, для следующих систем: два нуклона и четыре мезона (R_{24}) и два нуклона и пять мезонов (R_{25}). Статистические веса вычислялись по формулам (4.4) и (4.18). Пунктиром нанесены те же отношения, вычисленные по формуле Ферми (4.16). По оси абсциссе отложена энергия в Ц-системе в единицах Mc^2 .

3 полуоси равны $a_1 = \sqrt{2M(E_0 - mM)/m}$, а остальные $3m - 6$ полуосей равны $a_2 = \sqrt{2M(E_0 - mM)}$. Воспользовавшись формулой для объема $3(m-1)$ -мерного эллипсоида $V_{3(m-1)} = \frac{\pi^{3(m-1)/2}}{[3(m-1)/2]!} \prod_{i=1}^{3(m-1)} a_i$, получаем $Q_m(E_0)$;

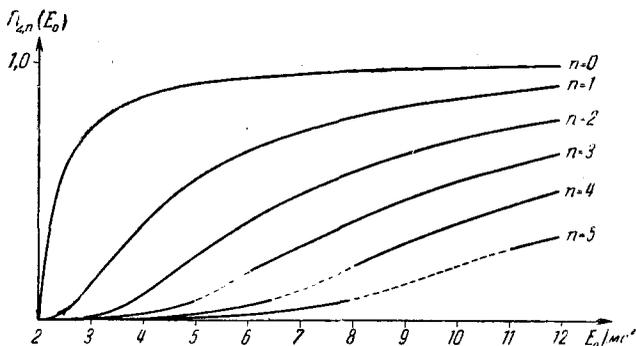


Рис. 2. Отношение $R_{2,n}(E_0)$ для систем, состоящих из двух нуклонов и n мезонов. Начальные участки кривых вычислялись по формуле (4.18); участки при больших энергиях — по формуле (4.4). Пунктиром отмечены области интерполяции между обеими формулами.

после дифференцирования по E_0 приходим к (4.17).

Приведем далее графическую зависимость $W_{m,n}(E_0)$ для наиболее интересного случая двух нуклонов и n π -мезонов (рис. 2).

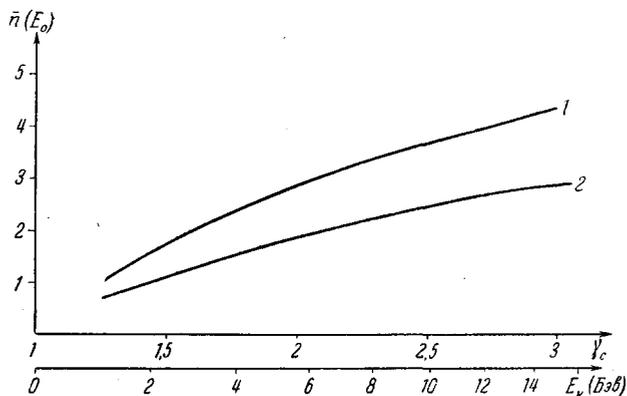


Рис. 3. Зависимость $\bar{n}(E_0)$ наиболее вероятного числа образованных мезонов при $p-p$ -взаимодействии для изобарного варианта: кривая 1 — полное число π -мезонов, кривая 2 — число заряженных π -мезонов. По оси абсцисс отложены: E_k — кинетическая энергия движущегося в L -системе нуклона и $\gamma_c = 1/\sqrt{1-V^2}$, где V — скорость C -системы относительно L -системы.

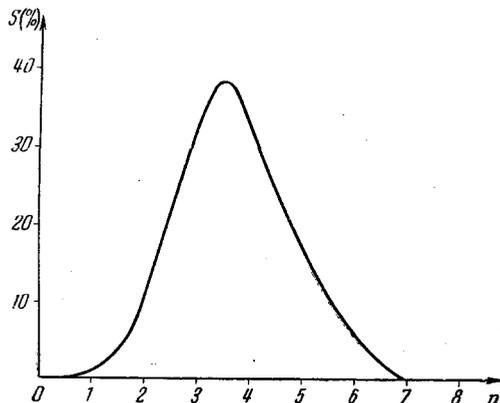


Рис. 4. Относительная вероятность в % образования n π -мезонов при столкновении двух нуклонов с $E_k = 10$ Bev. Расчет проведен для изобарного варианта.

Начальные участки кривых были вычислены по формулам (4,10), которые для этого частного случая имеют вид ($M=1$):

$$\begin{aligned}
 W_{2,1}(E_0) &= 8\pi^2 \left\{ (\alpha^2 + 6\alpha + 5) \operatorname{arctg} \sqrt{\alpha} - \left(\frac{13}{3} \alpha + 5 \right) \sqrt{\alpha} \right\}, \\
 W_{2,2}(E_0) &= \\
 &= \frac{4\pi^3}{3} \left\{ \left(\frac{1}{10} \alpha^5 - \frac{1}{2} \alpha^4 + 5\alpha^3 + 35\alpha^2 + \frac{105}{2} \alpha + \frac{231}{10} \right) \operatorname{arctg} \sqrt{\alpha} - \right. \\
 &\quad \left. - \left(-\frac{1}{10} \alpha^4 + \frac{56}{105} \alpha^3 + \frac{553}{25} \alpha^2 + \frac{224}{5} \alpha + \frac{231}{10} \right) \sqrt{\alpha} \right\}, \\
 W_{2,3}(E_0) &= \frac{\pi^4}{30} \left\{ \left(\frac{1}{24} \alpha^8 - \frac{1}{7} \alpha^7 + \frac{1}{2} \alpha^6 - \frac{7}{3} \alpha^5 + \frac{105}{4} \alpha^4 + 231\alpha^3 + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{1001}{2} \alpha^2 + 429\alpha + \frac{7293}{56} \right) \operatorname{arctg} \sqrt{\alpha} + \frac{1}{56} \left(\frac{7}{3} \alpha^7 - \frac{79}{7} \alpha^6 + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{467}{15} \alpha^5 - \frac{2129}{15} \alpha^4 - \frac{772409}{105} \alpha^3 - \frac{107393}{5} \alpha^2 - 21593\alpha - 7293 \right) \sqrt{\alpha} \right\}
 \end{aligned} \tag{4,18}$$

и т. д.

Остальная часть кривых вычислялась с помощью ряда (4,4). На графике для удобства отложены по оси ординат величины

$$W_{2,n}(E_0)/W_{2,n}(E_0)_{y.p} = R_{2,n}(E_0),$$

где $W_{2,n}(E_0)_{y.p}$ соответствует ультрарелятивистским частицам (формула (4,8)).

В заключение приведем зависимость $\bar{n}(E_0)$ наиболее вероятного числа образованных π -мезонов от энергии (рис. 3) и относительные вероятности рождения различного числа мезонов при столкновении нуклонов с энергией 10 Бэв (рис. 4).

5. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВТОРИЧНЫХ ЧАСТИЦ ПО ИМПУЛЬСАМ

До сих пор мы интересовались распределением по числу частиц. В этом разделе мы рассмотрим импульсное распределение вторичных частиц. Найдем вероятность $\omega_n(E_0, p) dp$ того, что в системе, состоящей из n частиц, одна из них с массой μ унесет импульс (в Π -системе), заключенный в интервале $(p, p + dp)$ *). Воспользовавшись тем, что объем, занимаемый этой частицей в фазовом пространстве, равен $4\pi p^2 dp$, а импульс всей системы равен нулю, легко получить, что

$$\omega_n(E_0, p) dp = 4\pi p^2 W_{n-1}(E_0 - \sqrt{p^2 + \mu^2}, p) dp. \tag{5,1}$$

Чтобы вычислить $\omega_n(E_0, p)$, нужно обобщить полученные ранее выражения (см. § 4 и дополнение III) для величин $W_n(E)$, в которых полный импульс системы полагался равным нулю, на случай, когда $p \neq 0$. Пусть $W_n(E, p)$ — искомая величина. Рассмотрим общий случай^{31**}). Обобщение формулы (4,4), представляющей точное решение задачи, когда $p = 0$, осуществляется следующим образом:

а) величину $v_i = \mu_i/E$ нужно заменить на

$$v_i \frac{\mu_i}{\sqrt{E^2 - p^2}},$$

*) Напомним, что E_0 — полная энергия сталкивающихся частиц в Π -системе.

***) Вычисление величины $W_n(E, p)$ для ультрарелятивистского случая было проведено в²⁹.

б) величины $D_n^{(A)}$, $F_n^{(A)}$ вычисляются по формулам ($p/E = k$):

$$D_n^{(A)} = \frac{(1-k^2)^{n-2}}{2k} (-1)^A \sum_{r=0}^n C_n^r \left\{ \frac{(1+k)^{n-r+1} (1-k)^r}{(2n-r-A-1)! (n+r-A-2)!} - \frac{(1+k)^{n-r} (1-k)^{r+1}}{(2n-r-A-2)! (n+r-A-1)!} \right\}, \quad (5,2)$$

$$F_n^{(A)} = \frac{(1-k^2)^{n-2}}{2k} (-1)^A \sum_{r=0}^n C_n^r \left\{ (1+k)^{n-r} (1-k)^{r+1} \times \right. \\ \times \left[\frac{\alpha(n+r-A)}{(2n-r-A-2)!} + \frac{\alpha(2n-r-A-1)}{(n+r-A-1)!} \right] - (1+k)^{n-r+1} (1-k)^r \times \\ \left. \times \left[\frac{\alpha(n+r-A-1)}{(2n-r-A-1)!} + \frac{\alpha(2n-r-A)}{(n+r-A-2)!} \right] \right\}. \quad (5,3)$$

В полученных выражениях при вычислении импульсного распределения нужно, согласно (5,1), положить

$$E = E_0 - \sqrt{p^2 + \mu^2}.$$

Рассмотрим далее смешанный случай (n ультрарелятивистских частиц, m нерелятивистских); здесь имеет место формула

$$W_{n, m}(E, p) = \frac{2^{3n} \pi^n (2\pi)^{3(m-1)/2} M^{3m/2}}{(mM)^{3/2}} \left(T - \frac{p^2}{2mM} \right)^{3n + \frac{3m}{2} - \frac{5}{2}} \times \\ \times \sum_{k=0}^{\infty} C_{k+2n-1}^k (-1)^k (2k+1)!! \left(\frac{T - \frac{p^2}{2mM}}{mM} \right)^k \times \\ \times \left\{ \sum_{r=0}^k \frac{C_k^r}{(2r+1)!!} \frac{\left(\frac{2p^2}{2mMT - p^2} \right)^r}{\left(p + 3n + \frac{3m}{2} - \frac{5}{2} - r \right)!} \right\}. \quad (5,4)$$

Легко видеть, что все приведенные выражения при $p=0$ переходят в соответствующие формулы § 4. Простой вид имеет формула (5,5) при $n=0$ (все частицы считаются нерелятивистскими)²⁹:

$$W_m(E) = \frac{(2\pi M)^{3(m-1)/2}}{m^{3/2} \left(\frac{3m}{2} - \frac{5}{2} \right)!} \left(T - \frac{p^2}{2mM} \right)^{\frac{3m}{2} - \frac{5}{2}}. \quad (5,5)$$

Приведем также точную формулу для системы, состоящей из трех частиц:

$$\omega_3(E_0, p) dp = p^2 (E_0 - \sqrt{p^2 + \mu^2})^2 \{ (1-k^2)^2 (3-k^2) + \\ + 2k^2 (1-k^2) (\nu_1^2 + \nu_2^2) - (3+k^2) (\nu_1^2 + \nu_2^2) \} \times \\ \times \frac{\sqrt{|1 - (\nu_1 + \nu_2)^2| |1 - (\nu_1 - \nu_2)^2|}}{(1-k^2)^2} dp, \quad (5,6)$$

где ν_1 и ν_2 характеризует массы остальных двух частиц.

Для иллюстрации полученных формул на рис. 5 приведены импульсные распределения π -мезонов при аннигиляции покоящейся нуклон-анти-нуклонной пары *).

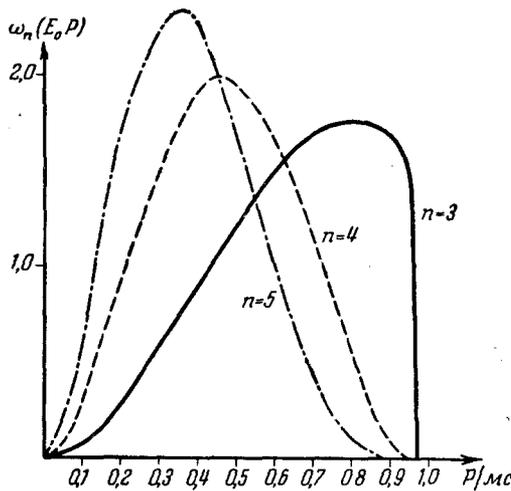


Рис. 5. Нормированные импульсные распределения π -мезонов при аннигиляции анти-нуклонов в покое.

6. СРАВНЕНИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИХ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ
о $(N-N)$ - и $(\pi-N)$ -СТОЛКНОВЕНИЯХ ПРИ ЭНЕРГИИ 1—5 Бэв **)

Рассмотрим сначала нуклон-нуклонные соударения. Будем называть для краткости расчет без учета «изобар», т. е. без учета мезон-нуклонного взаимодействия в состоянии $(^3/2, ^3/2)$, вариантом А статистической теории, а расчет с учетом этого взаимодействия — вариантом Б. Статистические веса различных процессов приведены в таблице VII.

Таблица VII

Статистические веса процессов при $n-p$ - и $p-p$ -соударениях.
В варианте А возможны только процессы $NN, NN1, NN2$ и т. д.

		Число мезонов		0		1		2		3		4			
		Тип процесса		NN	NN'	$NN1$	$N'N'$	$NN'1$	$NN2$	$N'N'1$	$1NN'2$	$NN3$	$N'N'2$	$NN'3$	$NN4$
Статистические веса	$n-p$	$\begin{cases} E_k = 1,7 \text{ Бэв} \\ E_k = 2,3 \text{ »} \end{cases}$	11	18	27	22	19	3							
			6	10	25	15	32	5	2	4	1				1
Статистические веса	$p-p$	$\begin{cases} E_k = 2,3 \text{ »} \\ E_k = 3,0 \text{ »} \\ E_k = 5,3 \text{ »} \end{cases}$	4	15	25	12	32	5			3	4			
			3	10	20	10	33	9			9	5	1		
					1	7	1	17	11			12	32	4	

*) Подробно аннигиляция антинуклонов рассматривается в § 7.

***) Анализ столкновений нуклонов с энергией ≥ 10 Бэв с тяжелыми ядрами с точки зрения статистической теории был проведен И. А. Ивановской и Д. С. Чернальским 56.

Столкновения нейтронов с протонами при средней энергии налетающих частиц $E_k = 1,7$ Бэв экспериментально изучались в работе²⁴. Было найдено 185 трехлучевых реакций и ни одной 5-лучевой, которую можно было бы интерпретировать как $(pp + - -)$. На этом основании авторы полагают, что вероятностью рождения трех мезонов можно пренебречь. Среди трехлучевых реакций выделялись случаи образования одного мезона $(pp -)$ и двух мезонов $(pp + -)$ и $(pp - 0)$. Отношение $\frac{(pp + -) + (pp - 0)}{(pp -)}$ колеблется в пределах ошибок опыта от 3 до 4. Расчет по варианту А дает для этого отношения значение 0,2, тогда как по варианту В получаем 3,5¹¹. Кроме того, с помощью таблиц IV и VII нетрудно убедиться, что вероятность образования 5-лучевых звезд для обоих вариантов в соответствии с опытом мала.

Если попытаться изменением параметра R , который определяет размеры области взаимодействия, согласовать с опытом отношение $\frac{(pp + -) + (pp - 0)}{(pp -)}$ для варианта А, то это приведет к сильному увеличению вероятности рождения трех мезонов, что снова будет резко противоречить эксперименту.

Что касается соотношения между $(pp + -)$ и $(pp - 0)$, то его опытное значение определено менее точно. Экспериментальная величина отношения $\frac{(pp + -)}{(pp - 0)}$ равна 3, однако и значение 7 и даже 11 не противоречат опыту. По варианту А это отношение равно 2,5—3 и не зависит от энергии. Для варианта В указанное отношение равно 2,5 при энергии ниже порога $NN'1$ (1 Бэв); при энергиях 1—1,4 Бэв оно равно 3—4, и, наконец, при энергии $E_k = 1,7$ Бэв $\frac{(pp + -)}{(pp - 0)} = 6$. С дальнейшим повышением энергии это отношение снова уменьшается.

Использованный в²⁴ пучок нейтронов содержал частицы с энергией 1—2,3 Бэв. Значительная часть спектра нейтронов расположена вблизи порога для процесса $N'N'$ или даже ниже его. Это обстоятельство не позволяет провести расчет распределения продуктов реакции по импульсам для варианта В, так как около порога теория не применима. В отношении углового распределения продуктов реакции нужно сделать следующее замечание. При экспериментальном изучении соударений нейтронов с протонами, а также соударений π -мезонов с нуклонами найдена такая особенность взаимодействий: налетающая частица имеет тенденцию сохранять направление своего движения после соударения. Эту особенность невозможно объяснить, исходя из предположения о достижении статистического равновесия в системе (даже если учесть при этом закон сохранения момента количества движения). Таким образом, угловое распределение продуктов реакции оказывается наиболее существенно зависящим от вида матричного элемента и не может быть объяснено статистической теорией.

Рассмотрим $p-p$ -соударения при 2,7 Бэв. Сравним отношение числа случаев 4-лучевых реакций к полному числу неупругих соударений (продуктами 4-лучевых реакций являются 4 заряженные частицы и любое количество нейтральных). Экспериментальное^{32,33} отношение $\frac{\sigma_{(4\text{-лучев})}}{\sigma_{\text{неупр}}} = 0,16$.

Вычисленные значения по вариантам А и В равны 0,11 и 0,19 соответственно. Экспериментальное отношение чисел случаев рождения одного, двух и трех мезонов равно 36 : 48 : 16. Вычисленные по вариантам А и В отношения соответственно равны 68 : 28 : 4 и 36 : 52 : 12.

Для энергии 5,3 Бэв сравнение вычисленного и экспериментального распределений продуктов $p-p$ -соударений приведено в таблице VIII²².

Остановимся далее на отношении

$\rho = \frac{\pi^+}{\pi^-}$ — числа рожденных при соударениях π^+ -мезонов к числу π^- -мезонов. Для соударений $p-p$ при 2–3 Бэв и соударений $p + {}_4\text{Be}^9$ при 1–2,3 Бэв вычисленные и экспериментальные значения приведены в таблице IX³⁴. Предполагается, что в соударениях $p + {}_4\text{Be}^9$ налетающий протон взаимодействует с одним из нуклонов Be как со свободной частицей.

Рассмотрим теперь множественное образование мезонов при соударении π^- -мезонов с нуклонами^{20, 37}. В системе центра инерции сталкивающиеся мезон и нуклон движутся с разными скоростями. Будем считать, что объем области взаимодействия, как и для нуклон-нуклонных соударений,

Таблица VIII

Распределение по числу лучей продуктов $p-p$ -соударений при 5,3 Бэв

Число лучей неуругих соударений	Эксперимент	Статистическая теория	
		вариант Б	вариант А
2	14	15	21,5
4	16	16	10
6	2	1	0,5

Таблица IX

Экспериментальные и теоретические значения $\rho = \frac{\pi^+}{\pi^-}$ при соударениях $p-p$ и $p + {}_4\text{Be}^9$

Кинетическая энергия налетающего протона в Бэв	Экспериментальное значение $\rho = \frac{\pi^+}{\pi^-}$	Значение $\rho = \frac{\pi^+}{\pi^-}$ по статистической теории	
		вариант Б	вариант А
$p-p$ { 2,3 3,0	7 ± 2 $5 \pm 0,6$	4,6 4	16 10
$p + {}_4\text{Be}^9$ { 1,0 2,3	6 1,8	5 1,8	3,5 2,7*)

определяется лоренцовски сокращенным вследствие движения нуклона мезонным облаком нуклона. Статистические веса различных процессов при $\pi^- - p$ -соударениях для энергий $E_k = 1,4$ и $4,5$ Бэв приведены в таблице X.

Таблица X

Статистические веса процессов $\pi^- - p$ -соударений при 1,4 и 4,5 Бэв

Число вторичных мезонов	0	1	2	3	4	
Тип процесса	N_1	N_2 N_1'	N_3 N_2'	N_4 N_3'	N_5 N_4'	
Статистический вес {	$E_k = 1,4$ Бэв	21	30 29	5 14	1	
	$E_k = 4,5$ »	1	13 2	22 19	10 23	2 8

*) В работе³⁵ для варианта А при энергии $E_k = 2$ Бэв приведено значение $\rho = 1,7$. Вероятно, это просто опечатка. Из таблиц IV–V легко найти, что $\rho = 1,7$ лишь в случае, когда вероятностью рождения одного мезона можно пренебречь по сравнению с вероятностью рождения двух мезонов (ср. также³⁶). В рассматриваемом случае для варианта А имеет место скорее обратное.

Используя распределение по зарядовым состояниям, приведенное в таблице III, легко найти вероятности различных реакций. Для энергии 1,4 *Бэв* статистический вес упругого рассеяния имеет довольно значительную величину. Вычисленное значение упругого рассеяния нужно сравнивать с так называемым некогерентным упругим рассеянием¹⁸. Это рассеяние обусловлено вылетом из области сильного взаимодействия в результате реакции только одного мезона. Кроме того, согласно квантовой механике, всякое неупругое рассеяние должно сопровождаться упругим дифракционным рассеянием на малые углы. При экспериментальном определении величины некогерентного рассеяния предполагается, что последнее проявляется как рассеяние на большие углы.

Таблица XI
Распределение заряженных продуктов $\pi^- - p$ -соударений при 1,4 *Бэв*

Заряженные продукты реакции	Эксперимент	Вариант Б	Вариант А
$(\pi^- + p)_{\text{упр}}$	0,11	0,15	0,28
$(\pi^- + p)_{\text{неупр}}$	0,35	0,28	0,28
$\pi^+ + \pi^-$	0,50	0,51	0,40
$\pi^+ + 2\pi^- + p$	0,04	0,06	0,04

В таблице XI приведено сравнение с опытом распределений заряженных продуктов $\pi^- - p$ -соударений. В этой таблице $(\pi^- + p)_{\text{упр}}$ есть сумма $(p - 0)$ и $(p - 00)$, а $(\pi^+ + \pi^-)$ — соответственно сумма $(n + -)$ и $(n + - 0)$. Сравнение с опытом для варианта А выполнено также в работе^{18*}.

Отметим также, что для обоих вариантов А и Б около $1/5$ всех реакций должны давать состояния, содержащие только нейтральные продукты $(n0)$, $(n00)$ и $(n000)$. Сравнение с опытом распределений заряженных продуктов $\pi^- - p$ -соударений по числу лучей при 4,5 *Бэв* приведено в таблице XII.

В связи с тем, что в мезон-нуклонных соударениях участвует лишь один нуклон, разница между результатами расчета по вариантам А и Б оказывается меньше, чем в случае нуклон-нуклонных соударений.

Перейдем теперь к рассмотрению энергетического распределения продуктов реакции. Будем считать, что в системе, где изобара покоится, ее распад изотропен. Шириной изобарного уровня пренебрегаем.

При распаде изобары на лету спектр импульсов мезонов дается выражением³⁸

$$N(p) dp = \frac{p dp}{2 \sqrt{c^2 + p^2} p c \gamma V}, \quad \gamma |p_c - E_c V| \leq p \leq \gamma |p_c + E_c V|.$$

*) Вероятности зарядовых состояний, приведенные в¹⁸, несколько отличаются от соответствующих значений в таблице XI. Это связано с тем, что радиус области взаимодействия (в отличие от принятого нами) выбирается в¹⁸ равным $R = \frac{2\pi\hbar}{Mc} = 1,32 \cdot 10^{-13}$ см.

Таблица XII

Распределение заряженных продуктов $\pi^- - p$ -соударений по числу лучей при энергии 4,5 *Бэв*

Тип соударения	Эксперимент	Статистическая теория	
		вариант Б	вариант А
Упругое недиф. рассеян.	2	1	2
2-лучевые неупругие . . .	44	49	56
4-лучевые неупругие . . .	28	24,5	17
6-лучевые неупругие . . .	1	0,5	0,1

Здесь $p_c = 0,23 \text{ Бэв}/c$ — импульс мезона при распаде покоящейся изобары, V — скорость изобары; $\gamma = (1 - V^2)^{-1/2}$, $E_c = (\mu^2 + p_c^2)^{1/2}$. В случае, если изобары имеют спектр скоростей $f(P_b)$ (для чего необходимо, чтобы среди продуктов реакции, кроме изобары, были по крайней мере еще две частицы), спектр мезонов, образующихся при их распаде, определяется выражением

$$N(p) dp = \frac{p dp}{2 \sqrt{p^2 + \mu^2} p_c} M_b \int_{P_{b \min}(p)}^{P_{b \max}} \frac{f(P_b)}{P_b} dP_b,$$

где $P_{b \min}(p) = \frac{V_b \min M_b}{\sqrt{1 - V_b^2}}$, V_b — мо-

дуль корня уравнения

$$p = \frac{|p_c^2 \pm E_c V_b|}{\sqrt{1 - V_b^2}}.$$

Индекс «b» относится к изобаре; M_b , P_b — масса и импульс изобары и т. д. Интеграл зависит от p через функцию нижнего предела.

Рассмотрим энергетическое распределение мезонов, рожденных при соударениях $p + {}_4\text{Be}^9$ при энергии налетающих протонов 2,3 Бэв. Согласно ^{36, 39} спектр мезонов в рассматриваемой реакции сказывается примерно

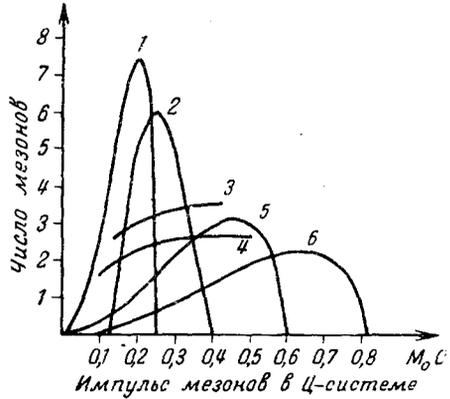


Рис. 6. Импульсное распределение мезонов от различных процессов: 1 — спектр свободных мезонов в процессе $N^+N^+\pi$; 2 — спектр мезонов из распада изобар в процессе $NN^+\pi$; 3 — спектр мезонов в процессе NN^+ ; 4 — спектр мезонов в процессе NN^+ ; 5 — спектр свободных мезонов в процессе $NN^+\pi$; 6 — спектр мезонов в процессе NN^+ .

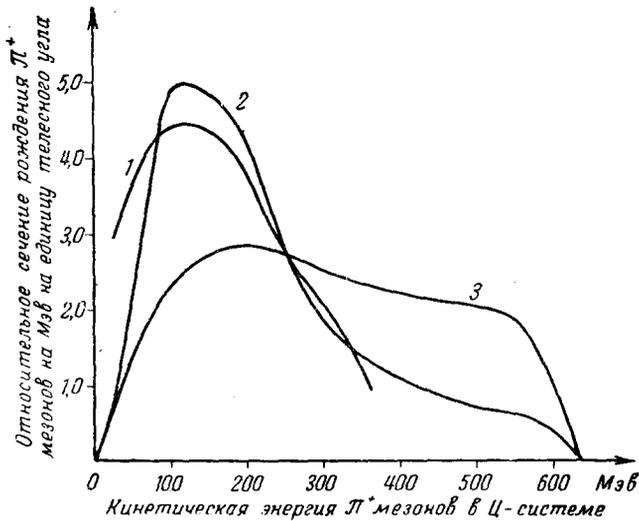


Рис. 7. Энергетическое распределение π^+ -мезонов в $p + {}_4\text{Be}^9$ -соударениях при 2,3 Бэв: 1 — эксперимент; 2 — расчет по варианту B статистической теории; 3 — расчет по варианту A статистической теории.

таким, каким он должен быть, если налетающий протон взаимодействует с одним из нуклонов ядра Be как со свободным. На рис. 6 приведены

спектры различных процессов. Вычисленные и экспериментальные спектры π^+ - и π^- -мезонов приведены на рис. 7 и 8. Экспериментальный спектр получен преобразованием из L -системы, где наблюдение велось под углом в 32° с направлением пучка, в C -систему; в этой последней спектр получается в интервале углов $106^\circ - 74^\circ$. Конечно, правильнее было бы произ-

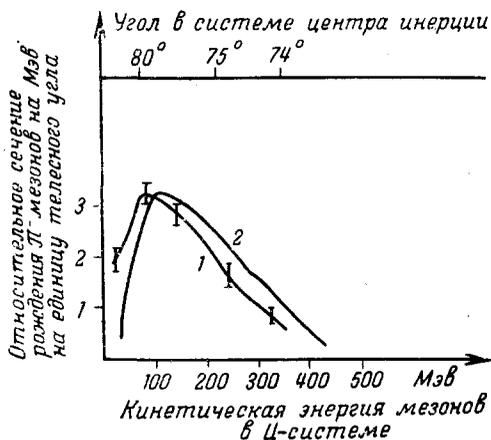


Рис. 8. Энергетическое распределение π^- -мезонов в $p + \text{Be}^9$ -соударениях при 2,3 Бэв; 1—эксперимент; 2—расчет по варианту B статистической теории.

водить сравнение с экспериментальным спектром в C -системе, проинтегрированным по телесному углу, однако такой спектр еще не известен. Как видно из рис. 7, расчет по варианту B приводит к удовлетворительному согласию с опытом.

Приведем также распределения по импульсам π -мезонов и нуклонов из реакций $\pi^- + p \rightarrow \begin{cases} p + \pi^- + \pi^0 \\ n + \pi^+ + \pi^- \end{cases}$ при 1,4 Бэв. Соответствующие экспери-

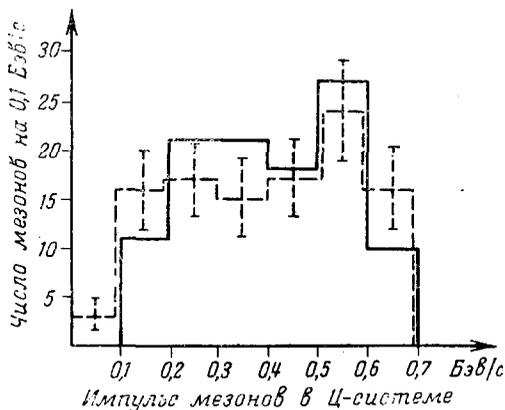


Рис. 9. Спектр мезонов в процессе $N2\pi$, усредненный по энергии налетающих мезонов. Пунктир — эксперимент, сплошная линия — расчет по статистической теории (вариант A).

ментальные данные получены в работе ⁴⁰. Усредненные по энергии налетающих частиц импульсные распределения мезонов для вариантов A и B приведены на рис. 9 и 10 (сплошные линии). Пунктиром на этих рисунках нанесены экспериментальные распределения. Аналогичные результаты для импульсного распределения протонов приведены на рис. 11—12.

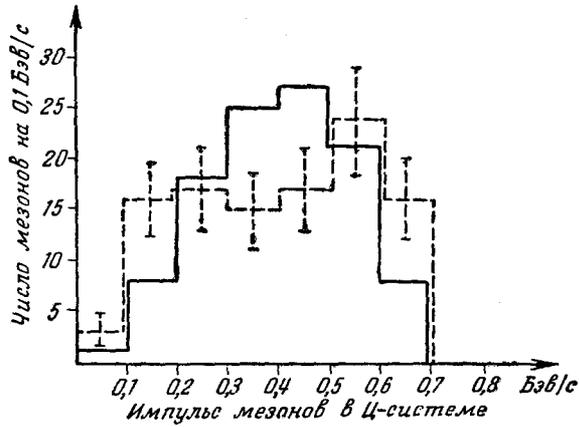


Рис. 10. Распределение мезонов по импульсам от реакций (p-0) и (p+). Пунктир — эксперимент, сплошная линия — расчет по статистической теории (вариант B).

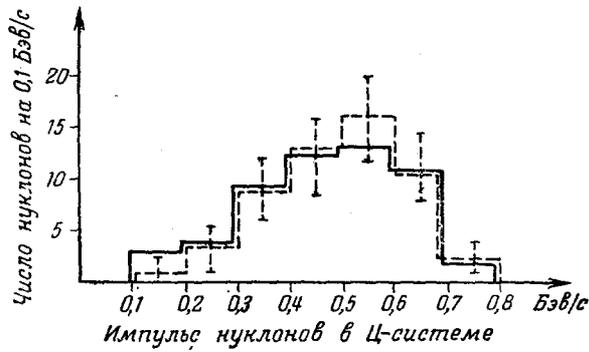


Рис. 11. Импульсное распределение нуклонов в процессе №2л. Пунктир — эксперимент, сплошная линия — расчет по статистической теории (вариант A).

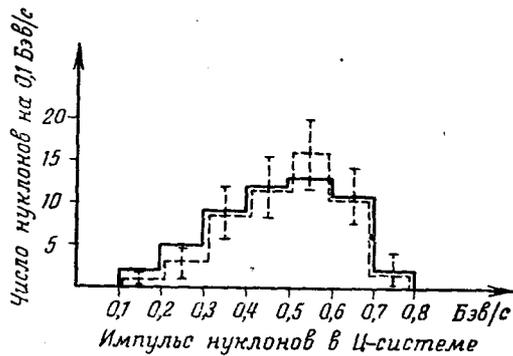


Рис. 12. Импульсное распределение нуклонов в реакциях (p-0) и (p+ -). Пунктир — эксперимент, сплошная линия — расчет по статистической теории (вариант B).

Рассмотрим, наконец, образование K -мезонов и гиперонов в рамках статистической теории. Будем считать, что обычный спин K -мезонов равен нулю, а гиперонов $-1/2$. Учитываем лишь те реакции, в которых сохраняется странность (см., например, ⁴¹). Для таких реакций статистические веса вычисляются обычным образом. Рассмотрим $\pi^- - p$ -соударения при 1,4 и 4,5 $Bэв$. Статистические веса процессов без рождения нестабильных частиц даны в таблице X. Относительно них приводим статистические веса процессов с образованием нестабильных частиц. При энергии 1,4 $Bэв$ энергетически возможны лишь следующие реакции:

$$\pi^- + p \rightarrow \Lambda^0 + \vartheta^0,$$

$$\pi^- + p \rightarrow \Sigma + \vartheta.$$

Их статистические веса равны 10 и 13 соответственно. Отношение сечения рождения нестабильных частиц к сечению рождения π -мезонов оказывается, таким образом, равным 0,23 для варианта B и 0,4 для варианта A .

Экспериментальная же величина $\frac{\sigma(K)}{\sigma(\pi)}$ гораздо меньше $\sim 1/30$ и, по-видимому, существенно не меняется при увеличении энергии налетающего π -мезона до 4,5 $Bэв$ ^{40, 42}. Вычисленное по статистической теории отношение $\frac{\sigma(K)}{\sigma(\pi)}$ при 4,5 $Bэв$ даже несколько больше, чем при энергии 1,4 $Bэв$.

Статистические веса процессов $(\Lambda^0 \vartheta \pi)$, $(\Sigma \vartheta \pi)$, $(\Xi \vartheta \vartheta)$ и $(N \vartheta \vartheta)$ соответственно равны 7, 12, 3 и 6. Некоторый вклад в сечение рождения нестабильных частиц должны давать реакции с 4 частицами $(\Lambda^0 \vartheta \pi \pi)$, $(\Sigma \vartheta \pi \pi)$ и т. д. Таким образом, $\frac{\sigma(K)}{\sigma(\pi)}$ оказывается $\sim 0,3$.

Если считать, что объем области сильного взаимодействия для нестабильных частиц меньше, чем для π -мезонов, то $\frac{\sigma(K)}{\sigma(\pi)}$ соответствующим образом уменьшится. Нужны, однако, более подробные экспериментальные данные, чтобы выяснить, можно ли выбрать такой объем для нестабильных частиц, чтобы получить согласие с опытом при различных энергиях.

7. ПРИМЕНЕНИЕ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ К ПРОЦЕССАМ, СВЯЗАННЫМ С АННИГИЛЯЦИЕЙ АНТИНУКЛОНОВ

В последнее время было установлено ⁴³⁻⁴⁵, что при аннигиляции нуклон-антинуклонной пары образуется звезда с несколькими лучами. Известно, что применимость теории возмущений к процессам, связанным с аннигиляцией, крайне сомнительна; поэтому целесообразно и в этом случае использовать статистическую теорию. Оправданием для подобного подхода является выделение сравнительно большой ($\geq 1,8 Bэв$) энергии в такого рода процессах. Как ранее упоминалось, уже при такой энергии статистическая теория правильно предсказывает ряд особенностей столкновения частиц (см. § 6). В первых расчетах ^{46, 47} множественности частиц при аннигиляции, основанных на применении статистической теории, были использованы приближенные выражения для статистических весов*).

*) В работе ⁴⁷ при вычислении статистических весов допущена ошибка. В выбранной нами системе единиц формула (1,3) имеет вид

$$S_n(E_0) \cong \left(5 \frac{V}{V_0}\right)^{n-1} f_{T, s, \dots} \frac{dQ_n(E_0)}{dE_0}$$

(где V_0 определяется по (2,1)), тогда как в ⁴⁷ нет множителя 5.

Из этой таблицы видно, что примерно в 65% случаев в звезде должна присутствовать пара K -мезонов, при этом число K -мезонов в среднем составляет около 30% от числа всех частиц.

Приведенные теоретические расчеты можно сравнить с экспериментальными данными, полученными Э. Сегре и др.⁴⁶ В фотоэмульсиях было зарегистрировано примерно 30 аннигиляционных звезд со средним числом π -мезонов $\sim 5 \pm 1$ на одну звезду. Точное число образованных при этом K -частиц получить не удалось, определено была зарегистрирована лишь одна пара K -частиц и две пары были идентифицированы как K -частицы лишь предположительно.

Следовательно, вероятность рождения K -мезонов при аннигиляции составляет лишь несколько процентов от вероятности образования π -мезонов. Это соотношение, как уже упоминалось, имеет место также и в результате столкновения частиц (см. § 6). Поэтому следует сделать вывод, что расчет в варианте B дает значительно завышенное число K -мезонов. Это обстоятельство также указывает на то, что в рамках статистической теории K -мезоны следует учитывать иначе, чем π -мезоны.

ПРИЛОЖЕНИЕ I

ВЕРоятности зарядовых состояний в статистической теории

Изложим кратко метод нахождения зарядовых распределений продуктов реакции. Пусть $[T, T_3]_{i_3^{(1)}, i_3^{(2)}, \dots, i_3^{(n)}}$ означает собственную функцию оператора изото-

пического спина \hat{T}_3 и его проекции \hat{T}_3 с собственными значениями $T(T+1)$ и T_3 соответственно; $i_3^{(i)}$ — изотопическая переменная i -й частицы системы. Рассмотрим систему, состоящую из двух подсистем с изотопическими спинами T' и T'' . Тогда согласно правилам векторного сложения моментов изотопический спин всей системы может принимать значения $T = T' + T''$, $T' + T'' - 1, \dots, |T' - T''|$. Предположим, что нам известны вероятности зарядовых состояний подсистем при любых (T', T'_3) , (T'', T''_3) , и найдем зарядовое распределение системы в состоянии T, T_3 . Так как зарядовое распределение подсистемы определяется значением проекции изотопического спина подсистемы (при фиксированном значении самого изотопического спина), то задача сводится к определению вероятностей, с которыми в состоянии T, T_3 встречаются значения проекций T'_3, T''_3 . Эти вероятности определяются квадратами соответствующих коэффициентов Клебша — Жордана в разложении

$$[T, T_3] = \sum_{T'_3} (T', T''_3, T'_3, T''_3 | T, T_3) [T', T'_3] [T'', T''_3]. \quad (I,1)$$

Формулы для вычисления коэффициентов Клебша — Жордана $(T', T''_3, T'_3, T''_3 | T, T_3)$ приведены в монографиях⁴⁸⁻⁴⁹, численные значения для некоторых случаев можно найти в¹².

В простейшем случае каждая подсистема состоит только из одной частицы. Пусть эти частицы будут π -мезонами. Найдем зарядовое распределение такой системы в состоянии $T=2, T_3=0$. В рассматриваемом частном случае выражение (I,1) имеет вид

$$[2, 0]_{i_3} = \sqrt{\frac{1}{6}} [1, -1]_1 [1, 1]_2 + \sqrt{\frac{2}{3}} [1, 0]_1 [1, 0]_2 + \sqrt{\frac{1}{6}} [1, 1]_1 [1, -1]_2. \quad (I,2)$$

Здесь $[1, -1]_{i_3} \equiv [1, -1]_{i_3^{(i)}}$; $i_3^{(i)}$ принимает значения 1, 0, -1; $[1, -1]_{i_3^{(i)}}$ отлична от нуля лишь при $i_3^{(i)} = -1$.

Из (1,2) следует, что в рассматриваемом состоянии $T=2$, $T_3=0$ с вероятностью $1/3$ находятся π^+ - и π^- -мезоны (им соответствуют первый и последний члены в правой части в (1,2)) и с вероятностью $2/3$ — два π^0 -мезона.

Обозначим это зарядовое распределение так:

$$(2, 0) = \frac{2}{3} (00) + \frac{1}{3} (+ -).$$

Аналогично находятся вероятности зарядовых распределений для других T и T_3 . В результате получаются следующие зарядовые распределения системы двух мезонов:

$$\left. \begin{aligned} (0, 0) &= \frac{2}{3} (+ -) + \frac{1}{3} (0, 0) & (2, 2) &= (+ +) \\ (1, 1) &= (+ 0) & (2, 1) &= (+ 0) \\ (1, 0) &= (+ -) & (2, 0) &= \frac{1}{3} (+ -) + \frac{2}{3} (0, 0) \\ (1, -1) &= (- 0) & (2, -1) &= (- 0) \\ & & (2, -2) &= (- -) \end{aligned} \right\} \quad (1,3)$$

Далее можно рассмотреть систему, состоящую из двух мезонов (подсистема I) и одного нуклона (подсистема II). Найдем зарядовое распределение в состоянии $T=3/2$, $T_3=-3/2$. Так как изотопический спин нуклона равен $1/2$, то вся система может иметь $T=3/2$ при условии, что подсистема из двух мезонов имеет изотопический спин 1 или 2.

В первом случае изотопическая функция системы такова:

$$\left[\frac{3}{2}, -\frac{3}{2} \right]_{123} = \left[\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right]_1 [1, -1]_{23},$$

соответствующее зарядовое распределение равно

$$\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2} \right) = (n - 0),$$

во втором случае соответственно получим

$$\left[\frac{3}{2}, -\frac{3}{2} \right]_{123} = \sqrt{\frac{4}{5}} \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]_1 [2, -2]_{23} - \sqrt{\frac{1}{5}} \left[\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right]_1 [2, -1]_{23},$$

$$\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2} \right) = \frac{4}{5} (p - -) + \frac{1}{5} (n - 0).$$

В рамках статистической теории эти два распределения равновероятны. Искомое распределение есть, следовательно, среднее арифметическое

$$\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2} \right) = \frac{6}{10} (n - 0) + \frac{4}{10} (p - -).$$

Аналогичные выражения нетрудно написать и для других значений T и T_3 . Продолжая этот процесс для систем с большим числом частиц, можно получить зарядовые распределения для всех интересующих нас процессов.

ПРИЛОЖЕНИЕ 11

ЗАРЯДОВОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ И ИЗОТОПИЧЕСКАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ

До сих пор мы считали, что различные изотопические состояния равновероятны. Если не использовать это предположение, то зарядовое распределение не будет полностью определяться заданием изотопического спина системы и чисел частиц разного сорта в ней. В частности, появится зависимость от поведения изотопической функции при перестановке тождественных частиц (ср. ⁵⁰⁻⁵¹).

Используя сначала лишь изотопическую инвариантность, можно проследить, какие изменения в зарядовом распределении можно ожидать, если предположение о равновероятности допустимых изотопических состояний в каких-либо случаях окажется неверным (ср. также ⁵²).

Рассмотрим систему, состоящую из двух подсистем:

1) подсистемы из m нуклонов (среди которых могут быть нуклоны в изобарных состояниях) и

2) подсистемы из n мезонов. Ограничиваясь случаями $m \leq 2$, $n \leq 5$, найдем зарядовые распределения подсистем; после этого нетрудно получить зарядовое распределение всей системы аналогично тому, как это сделано в приложении 1. Очевидно, что зарядовое распределение системы, содержащей не более двух частиц, полностью определяется заданием T и T_3 . Рассмотрим подробно³⁰ случай $n=3$, $T=1$ и $T_3=1$.

Соответственно тому, что подсистема, состоящая из двух мезонов, может иметь изотопический спин 0, 1 и 2, имеется три изотопические функции системы из трех мезонов, описывающие состояния с $T=1$. Эти функции можно записать в следующей форме:

$$\begin{aligned} [1, 1]_{123} &= \sqrt{\frac{1}{3}} [1, 1]_1 \{ [1, 1]_2 [1, -1]_3 - [1, 0]_2 [1, 0]_3 + [1, -1]_2 [1, 1]_3 \}, \\ [1, 1]'_{123} &= -\sqrt{\frac{1}{4}} [1, 0]_1 \{ [1, 1]_2 [1, 0]_3 - [1, 0]_2 [1, 1]_3 \} + \\ &+ \sqrt{\frac{1}{4}} [1, 1]_1 \{ [1, 1]_2 [1, -1]_3 - [1, -1]_2 [1, 1]_3 \}, \\ [1, 1]''_{123} &= \sqrt{\frac{1}{10}} [1, 1]_1 \left\{ \sqrt{\frac{1}{6}} [1, -1]_2 [1, 1]_3 + \sqrt{\frac{2}{3}} [1, 0]_2 [1, 0]_3 + \right. \\ &+ \left. \sqrt{\frac{1}{6}} [1, 1]_2 [1, -1]_3 \right\} - \sqrt{\frac{1}{10}} [1, 0]_1 \left\{ \sqrt{\frac{1}{2}} [1, 1]_2 [1, 0]_3 + \sqrt{\frac{1}{2}} [1, 0]_2 [1, 1]_3 \right\} + \\ &+ \sqrt{\frac{3}{5}} [1, -1]_1 [1, 1]_2 [1, 1]_3. \end{aligned}$$

При перестановке изотопических переменных выписанные функции переходят в линейные комбинации их самих. Осуществляемое этими функциями представление группы перестановок приводимо. Базисные функции неприводимых представлений оказываются следующими:

$$\left. \begin{aligned} e_0 &= c' \{ [1, 1]_1 (x_2 x_3) + [1, 1]_3 (x_1 x_3) + [1, 1]_3 (x_1 x_2) \}, \\ e_1 &= c \{ 2 [1, 1]_1 (x_2 x_3) - [1, 1]_2 (x_1 x_3) - [1, 1]_3 (x_1 x_2) \}, \\ e_2 &= c \{ 2 [1, 1]_3 (x_1 x_3) - [1, 1]_1 (x_2 x_3) - [1, 1]_3 (x_1 x_2) \}, \end{aligned} \right\} \quad (\text{II}, 1)$$

где

$$(x_i x_j) = \sqrt{\frac{1}{3}} \{ [1, 1]_i [1, -1]_j - [1, 0]_i [1, 0]_j + [1, -1]_i [1, 1]_j \},$$

c' , c — нормировочные коэффициенты.

Функция e_0 переходит сама в себя при любых перестановках координат, т. е. преобразуется по единичному представлению группы перестановок; две функции e_1 и e_2 преобразуются по двумерному представлению, которому соответствует схема Юнга \square^{42} . В частности, e_2 получается из e_1 перестановкой переменных 1-го и 2-го мезонов.

Полная волновая функция должна быть симметричной по отношению к одновременной перестановке любой пары координат мезонов (изотопических и пространственных одновременно). Пусть $f_0(1, 2, 3)$ — симметричная функция пространственных координат мезонов, а $f_1(1, 2, 3)$ и $f_2(1, 2, 3)$ — функции пространственных координат, образующие базис двумерного представления \square группы перестановок. Тогда, используя функции (II,1), можно составить две полные нормированные на 1 волновые функции:

$$F_1 = f_0 e_0, \quad (\text{II}, 2)$$

$$F_2 = \sum_{i, k} a_{ik} f_i e_k = \sum_{k=1}^2 a_k e_k. \quad (\text{II}, 3)$$

Коэффициенты a_{ik} выбраны так, что функция (II,3) переходит сама в себя при перестановке любой пары координат мезонов; a_{ik} определяются при этом однозначно и никаких других полных волновых функций из f_0, f_1, f_2 и функций (II,1) построить нельзя. Действительно, с точки зрения теории групп построение симметричной полной волновой функции системы мезонов состоит в нахождении базисной функции единичного представления прямого произведения двух представлений, одно из которых определяется функциями пространственных переменных мезонов, другое — функциями изотопических переменных. Но известно, что прямое произведение двух различных неприводимых представлений не содержит единичного представления, прямое же произведение представления самого на себя содержит единичное представление и притом только один раз⁴⁸.

Зарядовое распределение в состоянии (II,2) равно

$$(1, 1) \square = \frac{4}{5} (+ + -) + \frac{1}{5} (+ 00), \quad (II,4)$$

а в состоянии (II,3)

$$(1, 1) \square = \frac{1}{2} (+ + -) + \frac{1}{2} (+ 00). \quad (II,5)$$

Зарядовое распределение в состоянии (II,3) определяется любой из функций e_k , так как e_1 и e_2 и произвольная линейная комбинация их дают одно и то же зарядовое распределение.

Всякое состояние системы трех мезонов с полным спином $T = 1$ можно разложить по функциям (II,2) и (II,3). Пусть квадраты коэффициентов разложения равны a и b ($a + b = 1$)*. Тогда зарядовое распределение в рассматриваемом состоянии равно сумме зарядовых распределений (II,4) и (II,5), взятых с весами a и b соответственно.

Предположим, что функция пространственных координат $\psi(1, 2, 3)$ такова, что все 3! функции, полученные из исходной всевозможными перестановками координат, линейно независимы. Эти функции осуществляют регулярное представление группы перестановок, которое приводимо и содержит каждое неприводимое представление столько раз, какова его размерность. В рассматриваемом случае базисные функции неприводимых представлений таковы: одна полносимметричная f_0 , два набора по две функции f_1, f_2 и f'_1, f'_2 , каждый набор образует базис представления \square , и, наконец, одна антисимметричная функция. Таким образом, исходя из координатной функции общего типа, можно построить одну полную волновую функцию типа (II,2) и две полные волновые функции типа (II,3). Считая состояния, описываемые этими функциями, равновероятными, получим зарядовое распределение статистической теории.

Мы подробно рассмотрели состояние с $T = 1$ системы трех мезонов. Аналогичные результаты можно получить и для других значений T систем из 3—5 мезонов.

Изотопические функции состояний с изотопическим спином T , образующие базис некоторого неприводимого представления, снова дают одно и то же зарядовое распределение, так же как и любая их линейная комбинация. Использовать явный вид этих функций поэтому не приходится. Зарядовое распределение функций приведено в таблице XVI. Цифры над схемами Юнга указывают размерность соответствующего неприводимого представления.

С помощью таблицы XVI можно легко получить зарядовые распределения систем, состоящих из 1—2 нуклонов и 3—4 мезонов, изотопические функции которых образуют базис некоторого неприводимого представления группы перестановок.

Тривиальный пример отклонения от зарядового распределения статистической теории представляют процессы, идущие вблизи порога. Так, для случая $\pi^- \rightarrow p \rightarrow N + 4\pi$ по статистической теории имеем

$$\sigma(p + - - -) : \sigma(p - - - 00) : \sigma(p + - - 0) : \sigma(p - 000) = 6,7 : 7,3 : 16,7 : 4,3.$$

Если один мезон рождается из распада изобары, то отношение меняется несущественно — 5:5:20:5.

* Нетрудно убедиться (см., например, в⁴⁸ § 94), что интеграл $\int F_1 F_2 d\tau$ (интерференционный член) исчезает.

Таблица XVI

Зарядовые распределения базисных функций неприводимых представлений группы перестановок. Распределения для функций с отрицательными T_3 получаются из соответствующих положительных изменением знака заряда мезонов на противоположный

(T, T_3)	Зарядовое распределение				
(0,0)	+ - 0			1	
(1,1)	$\begin{matrix} + + - \\ + 0 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 4/5 \\ 1/5 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1/2 \\ 1/2 \end{matrix}$		
(1,0)	$\begin{matrix} + - 0 \\ 0 0 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 2/5 \\ 3/5 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}$		
(2,2)	+ + 0		1		
(2,1)	$\begin{matrix} + + - \\ + 0 0 \end{matrix}$		$\begin{matrix} 1/2 \\ 1/2 \end{matrix}$		
(2,0)	+ - 0		1		
(3,3)	+ + +	1			
(3,2)	+ + 0	1			
(3,1)	$\begin{matrix} + + - \\ + 0 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1/5 \\ 4/5 \end{matrix}$			
(3,0)	$\begin{matrix} + - 0 \\ 0 0 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 2/5 \\ 2/5 \end{matrix}$			
(T, T_3)	Зарядовое распределение				
(0,0)	$\begin{matrix} + + - - \\ + - 0 0 \\ 0 0 0 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 8/15 \\ 4/15 \\ 3/15 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 0 \end{matrix}$		
(1,1)	$\begin{matrix} + + - 0 \\ + 0 0 0 \end{matrix}$			$\begin{matrix} 2/5 \\ 2/5 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}$
(1,0)	$\begin{matrix} + + - - \\ + - 0 0 \end{matrix}$			$\begin{matrix} 4/5 \\ 1/5 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}$

Продолжение таблицы XVI

(T, T_3)	Зарядовое распределение				
(2, 2)	$\begin{matrix} + + + - \\ + + 0 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 6/7 \\ 1/7 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 2/3 \\ 1/3 \end{matrix}$	
(2, 1)	$\begin{matrix} + + - 0 \\ + 0 0 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 4/7 \\ 3/7 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 2/3 \\ 1/3 \end{matrix}$	
(2, 0)	$\begin{matrix} + + - - \\ + - 0 0 \\ 0 0 0 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 8/21 \\ 1/21 \\ 12/21 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}$	
(3, 3)	$+ + + 0$			1	
(3, 2)	$\begin{matrix} + + + - \\ + + 0 0 \end{matrix}$			$\begin{matrix} 1/3 \\ 2/3 \end{matrix}$	
(3, 1)	$\begin{matrix} + + - 0 \\ + 0 0 0 \end{matrix}$			$\begin{matrix} 11/15 \\ 4/15 \end{matrix}$	
(3, 0)	$\begin{matrix} + + - - \\ + - 0 0 \end{matrix}$			$\begin{matrix} 3/15 \\ 12/15 \end{matrix}$	
(4, 4)	$+ + + +$	1			
(4, 3)	$+ + + 0$	1			
(4, 2)	$\begin{matrix} + + + - \\ + + 0 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 4/28 \\ 24/28 \end{matrix}$			
(4, 1)	$\begin{matrix} + + - 0 \\ + 0 0 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 12/28 \\ 16/28 \end{matrix}$			
(4, 0)	$\begin{matrix} + + - - \\ + - 0 0 \\ 0 0 0 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 3/35 \\ 24/35 \\ 8/35 \end{matrix}$			

(T, T_3)	Зарядовое распределение					
(0, 0)	$\begin{matrix} + + - - 0 \\ + - 0 0 0 \end{matrix}$					$\begin{matrix} 2/3 \\ 1/3 \end{matrix}$
(1, 1)	$\begin{matrix} + + + - - \\ + + - 0 0 \\ + 0 0 0 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 24/35 \\ 8/35 \\ 3/35 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 4/10 \\ 3/10 \\ 3/10 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 4/10 \\ 6/10 \\ 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}$	
(1, 0)	$\begin{matrix} + + - - 0 \\ + - 0 0 0 \\ 0 0 0 0 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 8/35 \\ 12/35 \\ 15/35 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 8/10 \\ 2/10 \\ 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 2/10 \\ 8/10 \\ 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$	

Однако на пороге, когда все мезоны вылетают в s -состоянии, возможно только сечение $\sigma \propto$. Тогда изотопическая функция состояния такова:

$$\left[\frac{3}{2}, -\frac{3}{2} \right] = \sqrt{\frac{4}{5}} p [2, -2] \propto - \sqrt{\frac{1}{5}} n [2, -1] \propto.$$

Используя зарядовые распределения в состояниях $(2, -2)$ и $(2, -1)$, приведенные в таблице XVI, получим для рассматриваемого состояния

$$\sigma(p + ---) : \sigma(p --- 00) : \sigma(p + --- 0) : \sigma(p --- 000) = 24 : 4 : 4 : 3.$$

Из таблицы XVI также видно, что других состояний с симметричной функцией координат мезонов больше нет. Таким образом, вблизи порога должно быть

$$\frac{\sigma(p + ---)}{\sigma(p + --- 0)} = 6,$$

тогда как далеко от порога по статистической теории это отношение равно 0,4.

ПРИЛОЖЕНИЕ III

ВЫВОД ОБЩЕГО ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ ФАЗОВОГО ОБЪЕМА СИСТЕМЫ n ПРОИЗВОЛЬНЫХ ЧАСТИЦ

Воспользовавшись интегральным представлением δ -функции, запишем (4,2) в форме:

$$W_n(E_0) = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^4 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iE_0\tau_1} d\tau_1 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_2 d\tau_3 d\tau_4 \times \\ \times \prod_{k=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i[\tau_1 \sqrt{p_k^2 + \mu_k^2} + (\tau_k p_k)]} dp_k, \quad (III, 1)$$

где $\tau = (\tau_2, \tau_3, \tau_4)$. Обращаясь к введенным Дираком⁵³ сингулярным функциям $\Delta^{(1)}$, Δ , можно показать, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i[\tau_1 \sqrt{p_k^2 + \mu_k^2} + (\tau_k p_k)]} dp_k = \frac{(2\pi)^3}{i} \frac{d}{d\tau_1} \times \\ \times [\Delta^{(1)}(\mu_k, \tau_1^2 - \tau^2) + i\Delta(\mu_k, \tau_1^2 - \tau^2)]. \quad (III, 2)$$

Используя далее представление $\Delta^{(1)}$, Δ через функции Ханкеля (см., например,⁵⁴) и делая замену переменных $\tau_1 = \frac{x+y}{E_0}$, $\tau = \frac{x-y}{E_0}$, получаем (4,3)*.

Путь интегрирования в (4,3) лежит на прямой, параллельной действительной оси и стремящейся к ней снизу. Основная трудность последующих вычислений заключается в том, что функция Ханкеля имеет в нуле существенную особенность логарифмического типа. Чтобы преодолеть эту трудность, воспользуемся леммой Жордана (здесь эта лемма применима, поскольку функция Ханкеля $H_2^{(2)}(z) \rightarrow z^{-1/2}$) и преобразуем контур интегрирования следующим образом: его начало находится в точке $i\infty - \delta$ ($\delta \rightarrow 0$, причем $\delta > 0$), затем он идет параллельно мнимой оси, обходит нуль снизу и приходит в точку $i\infty + \delta$. Таким образом, интегрирование производится по берегам разреза вдоль мнимой оси. Сведем далее вычисление (4,3) к вычислению суммы вычетов. Подставив в (4,3) разложение для функции Ханкеля, возведенной в n -ю степень, выберем из полученного выра-

* Иной вывод формулы (4,3) предложен ранее в работе²⁸.

жения члены, дающие вклад в данное $P_l(v)$, где коэффициенты будут некоторыми комбинациями интегралов двух основных типов:

$$I_1(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iz} dz}{z^k} \quad \text{и} \quad I_2(k, l) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iz} \ln^l z dz}{z^k}. \quad (\text{III, 3})$$

Первый интеграл по теореме вычетов равен

$$I_1(k) = 2\pi i^k / \Gamma(k). \quad (\text{III, 4})$$

Второй интеграл преобразуем следующим образом:

$$I_2(k, l) = \frac{d^l}{dk^l} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iz} dz}{z^k} = \frac{d^l}{dk^l} I_1(k) = 2\pi \frac{d^l}{dk^l} (i^k / \Gamma(k)). \quad (\text{III, 5})$$

Последнее выражение может быть представлено с помощью логарифмических производных гамма-функций, которые в свою очередь выражаются через дзета-функцию Римана (см., напр., ⁵⁶). Путем довольно кропотливых, хотя и простых, алгебраических преобразований получаем приведенные в тексте выражения членов $P_l(v)$ (см. (4,5) и (4,7)).

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. H. W. Lewis, J. R. Oppenheimer, S. A. Wouthuysen, Phys. Rev **73**, 127 (1948).
2. W. Heisenberg, Zeit. fur Physik **126**, 569 (1949); Zeit. fur Physik **133**, 65 (1952).
3. E. Fermi, Prog. Theor. Phys. **5**, 570 (1950).
4. Л. Д. Ландау, Изв. АН СССР **17**, 51 (1953).
5. H. W. Lewis, Rev. Mod. Phys. **24**, 241 (1952).
6. И. Л. Розенталь, Д. С. Чернавский, УФН **52**, 185 (1954).
7. И. Я. Померанчук, ДАН СССР **78**, 889 (1951).
8. P. L. Anderson, E. Fermi, R. Martin, D. E. Nagle, Phys. Rev. **86**, 793 (1952).
9. И. Е. Тамм, Ю. А. Гольфанд, В. Я. Файнберг, ЖЭТФ **26**, 649 (1954).
10. S. Minami, T. Nakano, K. Nishijima, H. Okonogi, E. Yamada, Prog. Theor. Phys. **8**, 531 (1952).
11. С. З. Беленький, А. И. Никишов, ЖЭТФ **28**, 744 (1955).
12. F. J. Belinfante, Phys. Rev. **92**, 145 (1953).
13. D. C. Peaslee, Phys. Rev. **94**, 1085 (1954).
14. С. З. Беленький, Nuclear Physics **2**, 259 (1956).
15. G. E. Uhlenbeck, E. Beth, Physica **3**, 729 (1936); **4**, 195 (1937).
16. E. Fermi, Phys. Rev **92**, 452 (1953); **93**, 1434 (1954).
17. Y. Yeivin, A de Shalit, Nuovo Cim. **1**, 1146 (1955).
18. R. H. Milburn, Rev. Mod. Phys. **27**, 1 (1955).
19. Y. Yeivin, Bull. Res. Couns. Isr. **4**, 407 (1956).
20. А. И. Никишов, ЖЭТФ **30**, 990 (1956).
21. А. И. Никишов, ЖЭТФ **30**, 1149 (1956).
22. В. М. Максименко и А. И. Никишов, ЖЭТФ **31**, 727 (1956).
23. Charles Goebel, Phys. Rev. **103**, 258 (1956).
24. W. B. Fowler, R. P. Shutt, A. M. Thorndike, W. L. Whittemore, Phys. Rev. **95**, 1026, (1954).
25. M. M. Block, Phys. Rev. **101**, 796 (1956).
26. O. Koivod—Hansen, Phil. Mag. **42**, 1411 (1951).
27. М. И. Подгорецкий, И. Л. Розенталь, ЖЭТФ **27**, 129 (1954).
28. C. V. Leroqe, R. N. Stuart, Phys. Rev. **94**, 1724 (1954).
29. И. Л. Розенталь, ЖЭТФ **28**, 118 (1955).
30. В. М. Максименко, И. Л. Розенталь, ЖЭТФ **32**, № 4 (1957).
31. В. М. Максименко, ЖЭТФ (в печати).
32. M. M. Block, E. M. Harth, V. T. Cocconi, E. Hart, W. B. Fowler, R. P. Shutt, A. M. Thorndike, W. L. Whittemore, Phys. Rev. **103**, 1484 (1956).
33. R. P. Shutt, Proc. 5-th Ann. Rochester Conf. (1955).
34. А. И. Никишов, ЖЭТФ **29**, 249 (1955).
35. E. Fermi, Suppl. Nuovo Cim. II, № 1, 81 (1955).
36. L. C. L. Yuan, S. L. Lindenbaum, Phys. Rev. **103**, 403 (1956).

37. А. И. Никишов, ЖЭТФ **30**, 601 (1956).
38. И. Л. Розенталь, УФН, LIV 405 (1954).
39. R. L. Lindenbaum, L. C. L. Yuan, Proc. 5-th Ann. Rochester Conf. (1955).
40. L. M. Eisberg, N. B. Fowler, R. M. Lea, W. D. Shephard, R. P. Shutt, A. M. Thorndike, W. L. Whittemore, Phys. Rev. **97**, 797 (1955).
41. M. Geil-Mann, Proc. Pisa Conf. (1955).
42. G. Maenchen, W. M. Powell, G. Saphir, R. W. Wright, Phys. Rev. **99**, 1619 (1955).
43. R. D. Hill, S. D. Johansson, F. T. Gardner, Phys. Rev. **101**, 907 (1956).
44. O. Chamberlain, W. W. Chupp, G. Goldhaber, E. Segre, G. Wiegand, E. Amaldi, G. Baroni, C. Castagnoli, C. Tranzinetti, A. Manfredini, Phys. Rev. **101**, 909 (1956).
45. Э. Сегре, Доклад на Всесоюзной конференции по физике частиц высокой энергии, Вестник АН СССР, № 10, 26 (1956).
46. С. З. Беленький, И. Л. Розенталь, ЖЭТФ **30**, 595 (1956).
47. G. Sundarshan, Phys. Rev. **103**, 777 (1956).
48. Л. Д. Дандау и Е. М. Лифшиц, Квантовая механика, Гостехиздат, 1948.
49. Е. Кондон, Г. Шортли, Теория атомных спектров, ИЛ, 1949.
50. В. Б. Берестецкий, ДАН СССР **92**, 519 (1953).
51. D. Amati, V. Vitale, Nuovo Cim. II, № 4, 719 (1956).
52. W. B. Fowler, R. P. Shutt, A. M. Thorndike, W. L. Whittemore, V. T. Cocconi, E. Hart, M. M. Block, E. M. Harth, E. C. Fowler, J. D. Garrison, T. W. Morris, Phys. Rev. **103**, 1489 (1956).
53. P. A. M. Dirac, Proc. Camb. Phil. Soc. **30**, 150 (1934).
54. А. И. Ахиезер, В. Б. Берестецкий, Квантовая электродинамика, Гостехиздат, 1953.
55. Е. Т. Уиттекер и Г. Н. Ватсон, Курс современного анализа, ч. II, ГТТИ (1934).
56. И. А. Ивановская, Д. С. Чернавский, Nuclear Physics (в печати).
57. Г. А. Милехин, И. Л. Розенталь, ЖЭТФ (в печати).
58. W. Heitler, S. T. Ma, Proc. Roy. Soc. **176**, 368 (1940).
59. В. Л. Гинзбург, ЖЭТФ **13**, 33 (1943).