*1957 г. Апрель* *Т. LXI, вып. 4*

*УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК*

# СИЛЬНОФОКУСИРУЮЩИЕ УСКОРИТЕЛИ С ПОСТОЯННЫМ МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ*)

*К. Р. Саймон, Д. В. Керст, Л. В. Джонс, Л. Дж. Ласлет, К. М. Тервилигер*

Принцип сильной фокусировки[1], обеспечивающий высокую степень устойчивости как радиальных, так и вертикальных бетатронных колебаний в циклических ускорителях, позволяет сконструировать множество типов ускорителей с постоянным ведущим магнитным полем. В таких машинах существуют устойчивые равновесные орбиты для всех частиц, начиная от энергии инжекции и до максимальной. Все эти орбиты могут быть заключены в узком кольце, как в синхротроне или бетатроне; магнитное поле при этом должно изменяться с радиусом достаточно быстро, чтобы обеспечить существование орбит для частиц с различной энергией. Если градиент ведущего поля не зависит от азимута, то один из видов бетатронных колебаний будет явно неустойчивым. Однако, используя магнитное поле, градиент которого зависит от азимута (сильная фокусировка), можно обеспечить устойчивость обоих видов бетатронных колебаний, даже при быстром изменении поля с радиусом. Циклические ускорители заряженных частиц можно разделить на четыре группы в соответствии с типом ведущего магнитного поля, которое в них используется: постоянное поле с постоянным градиентом (обычный циклотрон, фазотрон и микротрон), импульсное поле с постоянным градиентом (слабофокусирующий синхротрон и бетатрон), сильная фокусировка с импульсным полем (сильнофокусирующий синхротрон), сильная фокусировка с постоянным полем (кольцевой фазотрон**), бетатрон и циклотрон).

Практически наиболее важными кажутся два типа сильнофокусирующих ускорителей с постоянным полем. В машине с радиальными секторами[2] сильная фокусировка обеспечивается за счет того, что поля в последовательных фокусирующем и дефокусирующем секторах изменяются с радиусом одинаковым образом, но противоположны по знаку (кроме того, в определенных случаях поля изменяются в противоположных направлениях). Так как орбита в секторах с обратным направлением поля стремится уйти от центра машины, установка имеет значительно большие размеры, чем обычный сильнофокусирующий ускоритель на ту же энергию при равных магнитных полях. Этот серьезный недостаток в значительной степени устранен в конструкции со спиральными секторами[3], в которой магнитное поле состоит из двух частей: из поля, увеличивающегося с радиусом и не зависящего от азимута, и поля, также увеличивающегося с радиусом, но периодического по азимуту. Гребни (максимумы)

*) *Phys. Rev.* **103**, 1837 (1956). Один из ускорителей такого типа был предложен в 1953 г. А. А. Коломенским, В. А. Петуховым, М. С. Рабиновичем («Некоторые вопросы теории циклических ускорителей». Изд. АН СССР, 1955.) (*Прим. перев.*)

**) В соответствии с установившейся в нашей литературе терминологией мы заменили название сильнофокусирующий синхротрон с постоянным ведущим полем на кольцевой фазотрон. (*Прим. перев.*)

и впадины (минимумы) периодического поля расположены на спиралях, составляющих малый угол с орбитой. Расстояние между гребнями по радиусу мало по сравнению с радиальной апертурой. Частицы, пересекающие гребни под малым углом, испытывают сильную фокусировку. Поскольку здесь нет необходимости в участках с обратным полем, периметр этой машины может быть сравним с периметром эквивалентного обычного сильнофокусирующего ускорителя.

Кольцевой фазотрон имеет множество важных преимуществ по сравнению с обычным сильнофокусирующим синхротроном, главное из них — интенсивность пучка. Так как магнитное поле в таких машинах не зависит от времени, частота повторения импульсов определяется только частотой повторения циклов модуляции высокой частоты (сокращенно в. ч.). В обычном синхротроне частота повторения импульсов ограничена временем завершения цикла магнитного поля. Разумно предполагать, что частота повторения циклов в. ч. может быть сделана значительно выше, чем частота воспроизведения магнитного поля. Другой причиной высокой интенсивности пучка служит то обстоятельство, что в сильнофокусирующих ускорителях с постоянным полем возможна большая апертура инжекции (больше в конструкции с радиальными секторами, чем со спиральными). Другими преимуществами кольцевого фазотрона являются чисто инженерные и эксплуатационные упрощения. Магнит, питаемый постоянным током, проще и дешевле построить и обслуживать, чем импульсный. Магнит можно сделать сплошным, так как нет токов Фуко, а остаточное поле и трудности, связанные с насыщением, менее важны, чем в ускорителях с импульсным полем. Все искажения поля не зависят от времени. Исчезает необходимость точного согласования ускоряющего напряжения с магнитным полем, в результате чего мы имеем большую свободу при конструировании системы в. ч. Инжекция возможна при более низкой энергии, чем это предполагается для обычного синхротрона, благодаря возможности проводить ее при меньших значениях поля, легкости программы частотной модуляции и большой апертуры на радиусе инжекции; сложность системы инжекции при этом будет несколько уменьшена. Недостатками кольцевого фазотрона являются значительное увеличение периметра для установки с радиальными секторами (по крайней мере в 3 раза) и сложность получения требуемых магнитных полей, в особенности, для машины со спиральными секторами.

Бетатрон с постоянным ведущим полем потенциально должен иметь гораздо большую интенсивность, чем обычный бетатрон[4]. Пучок может инжектироваться значительную долю цикла, если имеется соответствующий дополнительный ускоряющий поток, длительность которого можно сделать в настоящее время больше нескольких десятков микросекунд. Единственное ограничение на ток пучка при инжекции, по-видимому, накладывается влиянием пространственного заряда, но оно может быть уменьшено при использовании высоковольтной инжекции. В бетатронах с постоянным ведущим полем отсутствует проблема связи ведущего поля с ускоряющим потоком; имеется также ряд других инженерных упрощений, о которых упоминалось выше.

Применение принципа сильной фокусировки к циклотрону позволяет выбирать такую зависимость магнитного поля от радиуса, при которой период обращения частицы остается постоянным независимо от энергии даже в релятивистской области. В современных циклотронах (фазотронах) на большие энергии необходима модуляция частоты, для того чтобы компенсировать релятивистское возрастание массы. Циклотрон с постоянной частотой должен увеличить выход пучка на два порядка. Циклотрон с радиальными секторами, в котором поле периодически меняется по азимуту, был впервые предложен Томасом[5]. Конструкция со спиральными секторами в применении к циклотрону кажется более обещающей.

В первой части этой статьи мы подробно рассмотрим сильнофокусирующие ускорители с постоянным полем как с радиальными, так и со спиральными секторами. Во второй части развивается теория орбит в этих ускорителях. Третья часть содержит описание кольцевого фазотрона с радиальными секторами на энергию 10 *Бэв* и со спиральными секторами на энергию 20 *Бэв*, бетатрона с постоянным ведущим полем и сильнофокусирующего циклотрона.

## I. ТИПЫ СИЛЬНОФОКУСИРУЮЩИХ УСКОРИТЕЛЕЙ С ПОСТОЯННЫМ ПОЛЕМ

### 1. Кольцевой фазотрон с радиальными секторами

Циклический ускоритель частиц с радиальными секторами можно построить так, что орбиты частиц максимальной энергии будут расположены на внешнем крае машины, а орбиты частиц при инжекции — на внутреннем крае, и наоборот. Здесь мы будем рассматривать установки, в которых орбиты частиц максимальной энергии расположены на внешнем крае. (Мы будем разбирать случай кольцевого фазотрона, но большинство выводов будет справедливо также для бетатрона и циклотрона.) В кольцевом фазотроне с радиальными секторами магнит состоит из $N$ тождественных элементов, каждый из которых составлен из фокусирующего и дефокусирующего секторов. Сектор, фокусирующий в радиальном направлении, конечно, дефокусирует по вертикали, и наоборот. Азимутальные границы секторов совпадают с радиусами, проведенными из центра машины (отсюда происходит название: конструкция с радиальными секторами). Направление магнитного поля в соседних секторах противоположно, хотя зависимость поля от радиуса одинакова. Поле в средней плоскости на любом азимуте определяется функцией

$$H \sim \left(\frac{r}{r_0}\right)^k, \tag{1.1}$$

где $r_0$ — радиус равновесной орбиты, отсчитываемый от центра машины, $k$ — постоянная величина для данной установки. На рис. 1 показан образец магнитного поля такого типа. Такая форма поля означает, что орбиты частиц различной энергии подобны, т. е. фотографически отображают друг друга. В идеальном случае поле вдоль замкнутой равновесной орбиты постоянно в каждом секторе, и траектории частиц составлены из дуг окружностей. В действительности такая идеальная орбита не может быть получена, так как невозможно создать резкие границы поля. Однако, допуская такую идеализацию, мы получим особенно простой случай, когда поля на орбите данной энергии имеют одну и ту же величину в секторах с положительным и отрицательным направлением поля. Равновесная орбита для этого случая показана на рис. 2.

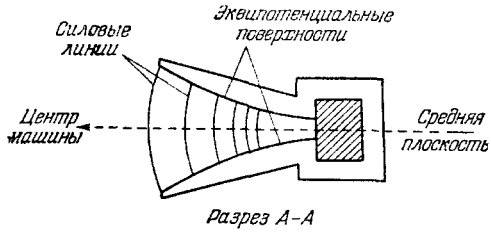


Рис. 1. Поперечный разрез магнита для машины с радиальными секторами.

Очевидно, что отклонение частицы от равновесной орбиты определяется степенью сильной фокусировки. Число радиальных $\nu_x$ и вертикальных $\nu_z$ бетатронных колебаний за оборот зависит от величины $k$ и длины секторов. $\nu_x$ и $\nu_z$ постоянны для всех энергий. Секторы с отрицательным полем желательно делать короче, чтобы уменьшить радиус машины. Минимальная длина секторов с отрицательным полем определяется необходимостью сохранения устойчивости вертикальных бетатронных колебаний. Некоторая вертикальная

фокусировка и радиальная дефокусировка имеют место благодаря «зубчатости» орбиты и пересечения краев сектора не под прямым углом. Если мы хотим сохранить вертикальную устойчивость в установке, в которой число элементов периодичности велико и влияние «зубчатости» орбит мало, то необходимо секторы с отрицательным полем делать не короче 2/3 секторов с положительным полем. Это означает, что периметр установки без учета прямолинейных промежутков в 5 раз больше того, который был бы необходим в отсутствие секторов с отрицательным полем. Отношение (в данном случае 5) радиуса установки к минимальному радиусу кривизны назовем коэффициентом увеличения установки. Постоянное магнитное поле в кольцевом фазотроне может быть сделано значительно больше импульсного магнитного поля в обычной машине. Поэтому размеры установки с радиальными секторами в действительности будут приблизительно в 3 раза больше, чем размеры сильнофокусирующего ускорителя на ту же энергию с импульсным полем. Желательно также протяженность секторов по радиусу сделать как можно меньше, что требует больших градиентов поля. Допустимый градиент определяется влиянием ошибок при сборке магнита. При разумном выборе градиента минимальная апертура по радиусу составляет приблизительно 2% от радиуса установки.

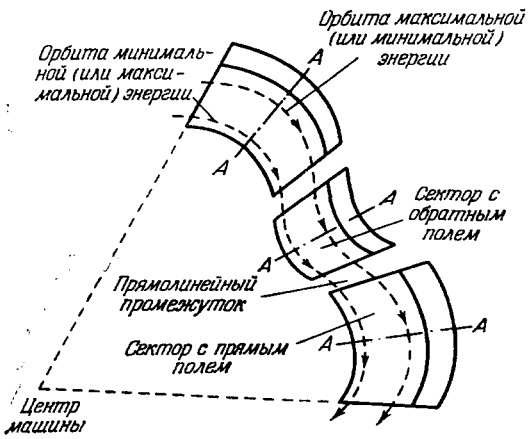


Рис. 2. Вид сверху на магнит с радиальными секторами.

## 2. Кольцевой фазотрон со спиральными секторами

В кольцевом фазотроне со спиральными секторами орбита частиц максимальной энергии расположена на внешнем крае. Нецелесообразно иметь орбиту частиц максимальной энергии внутри машины и инжектировать частицы снаружи, так как при этом трудно обеспечить устойчивость радиальных колебаний.

Ведущее поле в средней плоскости, если нет прямолинейных промежутков, дается формулой

$$H = \overline{H}_0 \left(\frac{r}{r_0}\right)^k \left\{1 + f \cos\left[N\theta - N \operatorname{tg}\zeta \ln\left(\frac{r}{r_0}\right)\right]\right\}, \qquad (2.1)$$

где $r$ — радиус, проведенный из центра машины, $k$ — показатель магнитного поля, $\theta$ — азимутальный угол относительно центра установки, $f$ — коэффициент неоднородности (относительное изменение поля), $N$ — число секторов (период изменения поля) и $\zeta$ — угол наклона спирали (угол между спиралью — геометрическим местом значений максимального поля — и радиусом).

На рис. 3 показано несколько гребней и впадин, образующих периодические спирали поля, направленные к внешней стороне машины, и начерчена равновесная орбита для этой конструкции. Все равновесные орбиты представляют подобные фигуры, линейные размеры которых пропорциональны радиусу, а сами они поворачиваются с радиусом благодаря спиральной периодичности поля. На рис. 4 изображена зависимость магнитного поля от радиуса в средней плоскости. При пересечении периодических гребней и впадин поля под малым углом частицы чувствуют сначала градиент одного знака, затем дру-

того, в результате чего осуществляется сильная фокусировка бетатронных колебаний. Вследствие нарастания поля по радиусу отрицательный градиент меньше положительного. В некоторой степени это компенсируется благодаря «зубчатости» орбит, приводящей к тому, что частицы проходят больший путь в поле с отрицательным градиентом по сравнению с частицами, которые двигались бы по окружности. Степень бетатронной фокусировки зависит от скорости нарастания поля по радиусу, от коэффициента неоднородности и угла спирали.

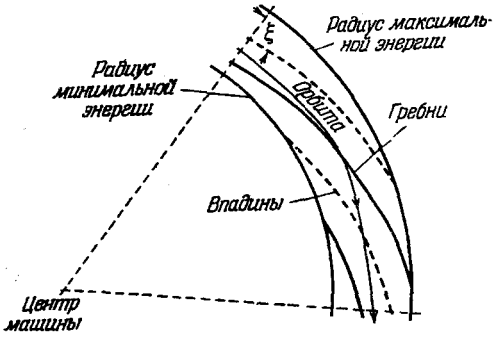


Рис. 3. Схема конструкции со спиральными секторами.

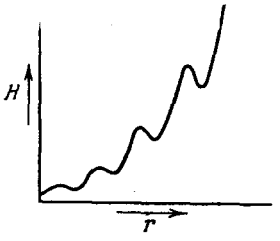


Рис. 4. Радиальная зависимость магнитного поля в средней плоскости.

Минимальная радиальная апертура ограничена главным образом трудностью достижения достаточно сильной фокусировки периодическим полем при заданной вертикальной апертуре. Если ограничиться синусоидальным изменением поля, то коэффициент $f = 1/4$ при заданной степени фокусировки обеспечивает максимальный вертикальный зазор для случая, когда используются полюсные наконечники без распределенных прямых и обратных обмоток. При таких малых $f$ коэффициент увеличения установки, равный в данном случае $(1 + f)$, близок к единице. Следовательно, радиус кольцевого фазотрона со спиральными секторами приблизительно равен радиусу обычного синхротрона на эквивалентную энергию. Максимальная радиальная апертура при разумном выборе параметров составляет $3^0/_0$ от радиуса.

## 3. Другие типы сильнофокусирующих ускорителей с постоянным полем

Рассмотренные выше ускорители имеют равновесную орбиту постоянной формы, масштаб которой пропорционален радиусу. Существует множество модификаций этих ускорителей. Некоторые из них отличаются только другим видом зависимости поля от азимута.

Изменения такого рода не влияют на постоянство формы равновесных орбит и будут весьма незначительно влиять на другие характеристики машины. Другие модификации сохраняют $\nu_x$ и $\nu_z$ постоянными, но нарушают свойство подобия равновесных орбит. Азимутальные границы фокусирующих и дефокусирующих секторов можно сделать не совпадающими с радиусами, а поля в секторах с положительным и отрицательным направлением — различными функциями радиуса (сектор с отрицательным полем может иметь даже поле, равное нулю). Края секторов можно срезать в одном и том же направлении, приближаясь тем самым к конструкции со спиральными секторами. Используя специальные обмотки, можно перейти от конструкции со спиральными секторами на внешнем крае машины, где желателен малый коэффициент увеличения установки, к конструкции с радиальными секторами, дающей возможность получить большую вертикальную апертуру при инжекции,

на внутреннем крае. Такая установка должна иметь преимущества обоих типов, но при значительном усложнении конструкции магнита.

Еще одной модификацией является циклотрон со спиральными секторами и постоянной частотой. В этой установке частоту обращения частиц можно сделать не зависящей от энергии даже в релятивистской области. Однако орбиты в данном случае не будут подобными, и невозможно поддерживать $\nu_x$ и $\nu_z$ постоянными.

## II. ТЕОРИЯ ОРБИТ

### 4. Геометрия равновесных орбит

Для построения теории устойчивости движения в сильнофокусирующих ускорителях с постоянным полем удобно характеризовать их системой равновесных орбит. Будем предполагать поэтому, что задана система равновесных орбит, лежащих в средней плоскости. Если вместо этого задано магнитное поле, то равновесные орбиты определяются путем интегрирования уравнений движения.

Геометрические свойства каждой орбиты и связь между орбитами периодически повторяются по азимуту с периодом $2\pi/N$. Каждая орбита характеризуется ее эквивалентным радиусом $R$, определяемым соотношением

$$S = 2\pi R, \tag{4.1}$$

где $S$ — длина орбиты. В общем случае $R$ будет немного больше среднего радиуса $\langle r \rangle$. Определим азимутальную координату $\Theta$ уравнением

$$s = \Theta R, \tag{4.2}$$

где $s$ — расстояние, измеренное вдоль равновесной орбиты от некоторой точки отсчета, скажем от азимутального угла $\theta_0$. Потребуем, чтобы в точке отсчета орбита была перпендикулярна радиусу, проведенному из центра машины, а точки отсчета лежали на непрерывной кривой. Параметр $\Theta$ будет равен азимутальному углу $\theta - \theta_0$ плюс малая периодическая функция с периодом $2\pi/N$.

Каждая орбита будет теперь определяться периодическим параметром $\mu(\Theta, R)$, равным

$$\mu(\Theta, R) = \frac{R}{\rho(\Theta, R)}. \tag{4.3}$$

Здесь $\rho$ — радиус кривизны. Задание $\mu(\Theta, R)$ совместно с требованием, чтобы центр орбиты лежал в начале координат в средней плоскости, полностью определяет орбиту $R$ при заданной точке отсчета. Для наших целей достаточно задать угол $\zeta(R)$ между радиусом, проведенным из центра машины, и координатной кривой $\Theta = 0$ в месте их пересечения (рис. 5). Выбор параметра $\mu(\Theta, R)$ ограничен условием периодичности по $\Theta$ с периодом $2\pi/N$ и величиной среднего значения

$$\langle \mu \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mu \, d\Theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{S} \frac{ds}{\rho} = 1. \tag{4.4}$$

Кроме того, функция $\mu(\Theta, R)$ ограничена требованием, чтобы в точке $\Theta = 0$ орбита $R$ была перпендикулярна к радиусу, проведенному из центра машины. Это требование приводит к дальнейшему усложнению ограничений, накладываемых на функцию $\mu$. Если $\Theta = 0$ есть точка симметрии орбиты, то легко

написать ограничение в аналитическом виде

$$\mu(-\Theta,\ R) = \mu(\Theta,\ R). \tag{4.5}$$

Если же нет точек симметрии, то необходимо построить орбиту, чтобы правильно определить точку отсчета $\Theta = 0$. К счастью, ошибки в определении точки отсчета приводят только к малым ошибкам (порядка $1/N^2$) в уравнениях для бетатронных колебаний при условии, что угол $\zeta$ задан правильно.

Нам потребуются также параметры $\eta(\Theta, R)$ и $\varepsilon(\Theta, R)$, устанавливающие связь перпендикулярного расстояния $dx$ между двумя близкими орбитами и приращения $d\Theta$ параметра $\Theta$ вдоль ортогональной траектории к орбитам с приращением $dR$ параметра $R$ (см. рис. 5):

$$dx = \eta dR, \tag{4.6}$$

$$d\Theta = \frac{\varepsilon dR}{R}. \tag{4.7}$$

Можно показать[6], что $\eta$, $\varepsilon$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \Theta} = \mu\eta - 1, \tag{4.8}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial \Theta} = -\mu\varepsilon - \int R\,\frac{\partial \mu}{\partial R}\,d\Theta, \tag{4.9}$$

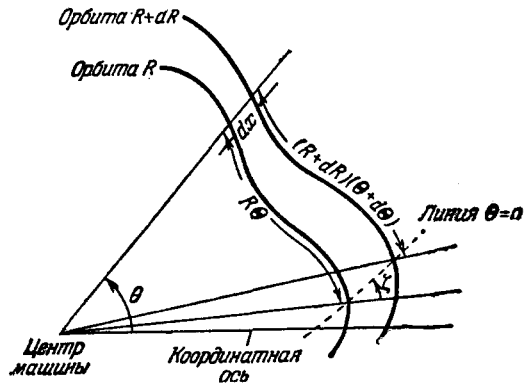


Рис. 5. Схема равновесных орбит.

где три константы интегрирования выбраны так, что $\varepsilon$ и $\eta$ — периодические функции $\Theta$ (т. е. так, что средние значения членов в правой части уравнений (4.8), (4.9) равны нулю) и

$$\left[\frac{\varepsilon}{\eta}\right]_{\Theta=0} = \operatorname{tg}\zeta. \tag{4.10}$$

Если все равновесные орбиты геометрически подобны, параметр $\mu$ зависит только от $\Theta$ и не зависит от $R$. Ради простоты мы будем всюду ограничиваться рассмотрением машин этого типа. Если, кроме того, $\zeta$ не зависит от $R$, то из уравнений (4.8), (4.9), (4.10) следует, что параметры $\eta$ и $\varepsilon$ также не зависят от $R$. В этом случае мы будем говорить, что равновесные орбиты подобны: равновесные орбиты подобны, если любая система орбит в окрестности равновесной может быть получена фотографическим увеличением или уменьшением системы орбит в окрестности любой другой равновесной орбиты.

Решения уравнений (4.8) и (4.9) можно получить методом последовательных приближений. Положим

$$\mu = 1 + fg(N\Theta), \tag{4.11}$$

где $g(N\Theta)$ имеет период $2\pi$ по $N\Theta$, среднее значение, равное нулю, и нормирована так, что средний квадрат ее равен $1/2$; $f$ — коэффициент неоднородности поля. Так как члены в правой части уравнений (4.8) и (4.9) имеют период $2\pi/N$ (и среднее значение, равное нулю), они приводят к появлению в $\eta$ и $\varepsilon$ осциллирующих членов порядка $1/N$. Интеграл в уравнении (4.9) равен нулю, если предположить, что $\mu$ не зависит от $R$; в общем случае он приводит только к очень малым осциллирующим членам, если $\mu$ меняется незначительно при очень малом относительном увеличении радиуса. Величина $\operatorname{tg}\zeta$ равна нулю в машинах с радиальными секторами и порядка $N$ в машинах

со спиральными секторами. Мы примем поэтому в качестве нулевого приближения для $\varepsilon$, $\eta$

$$\eta \simeq 1, \quad \varepsilon \simeq \operatorname{tg} \zeta, \tag{4.12}$$

что удовлетворяет условиям, наложенным на $\varepsilon$ и $\eta$.

Если $F(\xi)$ — любая периодическая функция $\xi$ с периодом $2\pi$, то удобно ввести обозначения

$$\langle F \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\xi)\, d\xi, \tag{4.13}$$

$$\{F\} = F(\xi) - \langle F \rangle, \tag{4.14}$$

$$F' = \frac{dF}{d\xi}, \tag{4.15}$$

$$F_1 = \int \{F\}\, d\xi, \tag{4.16}$$

$$F_{n+1} = \int F_n d\xi, \tag{4.17}$$

где константы интегрирования в последних двух уравнениях выбраны так, что среднее значение $F_n$ равно нулю. Все функции, определенные уравнениями (4.14)—(4.17), имеют период $2\pi$ и среднее значение, равное нулю.

Подставив теперь (4.11) и (4.12) в (4.8) и (4.9) и интегрируя, получим первое приближение

$$\eta = 1 - \frac{f \operatorname{tg} \zeta}{N} g_1(N\Theta), \tag{4.18}$$

$$\varepsilon = \operatorname{tg} \zeta - \frac{f g_1(0)}{N} \sec^2 \zeta + \frac{f}{N} g_1(N\Theta). \tag{4.19}$$

Константы интегрирования здесь выбраны соответствующим образом. [Заметим, что

$$\langle g_1 \cdot g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g_1 d g_1 = 0 \tag{4.20}$$

и, если $g(\xi)$ — четная функция, то $g_1(\xi)$ — нечетная и, следовательно, $g_1(0) = 0$. Во всяком случае $g_1(0)$ обычно мало.]

Второе приближение можно получить, подставляя $\eta$, $\varepsilon$ из (4.18), (4.19) в правую часть уравнений (4.8), (4.9) и интегрируя. Каждая последующая подстановка приводит к новым членам порядка $1/N^2$ и $f^2/N^2$ относительно предыдущих.

## 5. Бетатронные колебания

Для частицы с импульсом $p$, двигающейся по равновесной орбите $R$, согласно уравнению (4.3), имеем

$$pc = eH\rho = \frac{eHR}{\mu}, \tag{5.1}$$

где $H$ — напряженность магнитного поля. Отсюда получим $H$ как функцию

координат $R$ и $\Theta$

$$H(\Theta, R) = \left(\frac{pc}{eR}\right)\mu(\Theta, R). \tag{5.2}$$

Дифференцируя уравнение (5.1) по $x$, где $x$ измеряется в направлении, перпендикулярном орбите, получим

$$H\frac{\partial\rho}{\partial x} + \rho\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{c}{e}\frac{\partial p}{\partial x}. \tag{5.3}$$

Таким образом, показатель спадания поля равен

$$n = -\left(\frac{\rho}{H}\right)\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial\rho}{\partial x} - \rho\frac{\partial \ln p}{\partial x}. \tag{5.4}$$

Используя уравнения (4.3), (4.6) и (4.7), найдем

$$n = -\frac{1}{\eta\mu^2}\left[k\mu + \varepsilon\frac{\partial\mu}{\partial\Theta} + R\frac{\partial\mu}{\partial R}\right]. \tag{5.5}$$

Здесь $k$ — параметр, характеризующий изменение импульса:

$$k = R\frac{d\ln p}{dR} - 1. \tag{5.6}$$

Выражая $k$ через среднее значение магнитного поля $\bar{H} = pc/eR$, будем иметь

$$k = \left(\frac{R}{\bar{H}}\right)\frac{d\bar{H}}{dR}. \tag{5.7}$$

Отсюда ясно, что $k$ определяет средний показатель спадания магнитного поля. Линеаризованные уравнения бетатронных колебаний около равновесной орбиты имеют вид [7]

$$\frac{d^2x}{ds^2} - \frac{1-n}{\rho^2}x = 0, \tag{5.8}$$

$$\frac{dz^2}{ds^2} + \frac{n}{\rho^2}z = 0, \tag{5.9}$$

где $x$ и $z$ — отклонения от равновесной орбиты в радиальном и аксиальном направлениях. Отсюда, используя (4.2) и (4.3), получим

$$\frac{d^2x}{d\Theta^2} + \mu^2(1-n)x = 0, \tag{5.10}$$

$$\frac{d^2z}{d\Theta^2} + \mu^2 nz = 0. \tag{5.11}$$

Характер бетатронных колебаний определяется поэтому функциями $\mu^2(\Theta, R)$ и

$$\mu^2 n = -\frac{1}{\eta}\left(k\mu + \varepsilon\frac{\partial\mu}{\partial\Theta} + R\frac{\partial\mu}{\partial R}\right). \tag{5.12}$$

Принимая во внимание уравнения (4.8) и (4.9), можно записать (5.12) в виде

$$\mu^2(1-n) = \frac{(k+1)}{\eta}\mu - \frac{1}{\eta}\frac{\partial^2\eta}{\partial\Theta^2}. \tag{5.13}$$

Если равновесные орбиты подобны, то $\mu$, $\eta$, $\varepsilon$ — функции только $\Theta$; согласно (5.13) $\mu^2 n$ также будет функцией только $\Theta$. Таким образом, при условии постоянства $k$ бетатронные колебания будут подобны. Ускорители с такими свойствами назовем подобными. Для подобных ускорителей будут справедливы соотношения

$$p = p_0 \left(\frac{R}{R_0}\right)^{k+1} \tag{5.14}$$

и

$$H = \overline{H}_0 \left(\frac{R}{R_0}\right)^k \mu(\Theta). \tag{5.15}$$

## 6. Приближенные решения уравнений бетатронных колебаний

В этом параграфе мы получим ряд приближенных формул, которые позволят установить свойства сильнофокусирующих ускорителей с постоянным полем. Если длина волны бетатронных колебаний велика по сравнению с длиной элемента периодически (по крайней мере, равна длине четырех элементов), то применимо гладкое приближение, подробный анализ которого дан в приложении А. В этом случае уравнения «гладких» бетатронных колебаний принимают вид

$$\frac{d^2X}{d\Theta^2} + \nu_x^2 X = 0, \tag{6.1}$$

$$\frac{d^2Z}{d\Theta^2} + \nu_z^2 Z = 0, \tag{6.2}$$

где согласно уравнениям (5.10), (5.11) и (А.13)

$$\nu_x^2 = \langle \mu^2 (1-n) \rangle + \langle \{\mu^2 (1-n)\}_1^2 \rangle, \tag{6.3}$$

$$\nu_z^2 = \langle \mu^2 n \rangle + \langle \{\mu^2 n\}_1^2 \rangle. \tag{6.4}$$

Решение уравнений (6.1) и (6.2) есть

$$X = A \cos \nu_x \Theta + B \sin \nu_x \Theta, \tag{6.5}$$

$$Z = C \cos \nu_z \Theta + D \sin \nu_z \Theta. \tag{6.6}$$

К этим «гладким» решениям должны быть добавлены пульсации, которые можно определить из уравнения (А.7). Ясно, что $\nu_x$ и $\nu_z$ есть число радиальных и вертикальных бетатронных колебаний за оборот. Приближенные формулы (6.3) и (6.4) дают $\nu_x$ и $\nu_z$ с точностью 10% при условии, что $\nu_x$ и $\nu_z$ оба меньше $N/4$.

Для того чтобы отсутствовала резонансная раскачка бетатронных колебаний, необходимо избегать целых и полуцелых значений $\nu_x$ и $\nu_z$, а также целых значений $(\nu_x + \nu_z)$ [8]. Следовательно, $\nu_x$ и $\nu_z$ должны быть те же самые для всех орбит или приблизительно таковыми. Это является принципиальным ограничением для сильнофокусирующих ускорителей с постоянным полем. В ускорителях, в которых выполнено условие подобия, $\nu_x$ и $\nu_z$ неизбежно те же самые для всех орбит, что является, конечно, преимуществом такого рода конструкций.

Связь между длиной волны бетатронных колебаний и параметрами установки зависит от того, какие члены в уравнении (5.13) являются определяющими. В кольцевом фазотроне с радиальными секторами $\zeta = 0$; поэтому при большом числе элементов периодичности (скажем $N > 10$) $\eta$ очень близко к единице, и второй член в уравнении (5.13) мал, за исключением краев

секторов, где он приводит к фокусирующим эффектам. За фокусировку краями секторов ответственен член $-(\varepsilon/\eta)(\partial\mu/\partial\Theta)$ в уравнении (5.12). Среднее значение этого члена не равно нулю, часть его содержится в $\mu$-члене уравнения (5.13); таким образом, уравнения (6.7) и (6.8) описывают большинство средних фокусирующих краевых эффектов в машине с радиальными секторами.

Будем называть первый член в уравнении (5.13) $\mu$-членом, второй $\eta$-членом. В ускорителях со спиральными секторами сильная фокусировка обеспечивается в основном $\eta$-членом. Следует заметить, что $\eta$-член включает в себя член $(R/\eta)(\partial\mu/\partial R)$, который появляется, когда орбиты неподобны. Нетрудно видеть, что в обычном сильнофокусирующем синхротроне [1] этот член является основным, определяющим фокусировку.

Рассмотрим сначала ускоритель с радиальными секторами, обладающий большим числом элементов периодичности, и пренебрежем $\eta$-членом. Из § 4 следует, что $\eta=1$, если $f/N\ll 1$.

Запишем $\mu$ в виде (4.11). Тогда, воспользовавшись (5.13) и полагая $\eta=1$, из уравнений (6.3) и (6.4) получим

$$\nu_x^2=k+1+\frac{(k+1)^2f^2}{N^2}\langle g_1^2\rangle, \tag{6.7}$$

$$\nu_z^2=-k+\frac{f^2}{2}+\frac{(k-1)^2f^2}{N^2}\langle g_1^2\rangle. \tag{6.8}$$

В уравнении (6.8) мы пренебрегли малым членом, содержащим $\{g^2\}$. Изменение фазы бетатронных колебаний при прохождении одного элемента периодичности равно

$$\sigma=\frac{2\pi\nu}{N}. \tag{6.9}$$

Для обеспечения устойчивости [1] $\sigma$ должно быть меньше $\pi$, а чтобы было справедливо «гладкое» приближение — меньше $\pi/2$. $k$ и $f$ можно выразить теперь через $\sigma_x$ и $\sigma_z$, используя уравнения (6.7) и (6.8):

$$k+1=\frac{N^2}{8\pi^2}(\sigma_x^2-\sigma_z^2+b), \tag{6.10}$$

$$f=\frac{4\pi}{[2\langle g_1^2\rangle]^{1/2}}\frac{[\sigma_x^2+\sigma_z^2-b]^{1/2}}{[\sigma_x^2-\sigma_z^2+b]}, \tag{6.11}$$

где

$$b=\frac{4\pi^2}{N^2}\left[1+\frac{f^2}{2}-\frac{4kf^2}{N^2}\langle g_1^2\rangle\right]. \tag{6.12}$$

Для достаточно больших $N$ величиной $b$ можно пренебречь.

При соответствующем выборе $\sigma_x$ и $\sigma_z$ значение $k$ может быть или положительным или отрицательным, т. е. в кольцевом фазотроне с радиальными спектрами и большим $N$ орбита, соответствующая максимальной энергии, может находиться или на внешнем, или на внутреннем крае камеры. Член $b$, существенный при малых $N$, положителен. Поэтому целесообразней иметь установку с положительным $k$, так как в этом случае при заданном $N$ можно достигнуть больших значений $k$ и меньших $f$. Чем меньше радиальная апертура, тем больше должно быть $k$, а следовательно, и $N$. Если мы определим коэффициент увеличения установки $C$ как отношение среднего радиуса кривизны равновесной орбиты к минимальному, то

$$C=|\mu|_{\max}=|1+fg(N\Theta)|_{\max}. \tag{6.13}$$

Желательно иметь $C$ как можно меньше, так как при заданном максимальном магнитном поле это приводит к минимальным размерам ускорителя. Из уравнения (6.11) следует, что при заданном виде функции $g$ коэффициент увеличения установки тем меньше, чем больше $\sigma_x$ и меньше $\sigma_z$ (и, наоборот, если $k$ отрицательно).

Рассмотрим «прямоугольные» колебания поля по азимуту, средняя квадратичная величина которых равна ½:

$$g(\xi)=\begin{cases}\left[\dfrac{1-q}{2q}\right]^{1/2}, & -q\pi<\xi<q\pi \quad \text{(I)}\\ -\left[\dfrac{q}{2(1-q)}\right]^{1/2}, & q\pi<\xi<2\pi-q\pi \quad \text{(II)}\end{cases} \tag{6.14}$$

$$g(\xi+2\pi)=g(\xi). \tag{6.15}$$

Эта функция изображена на рис. 6. Область 1 назовем сектором с положительным направлением поля, область 2 — сектором с отрицательным направлением поля. Нам требуется величина $\langle g_1^2\rangle$, которую нетрудно вычислить

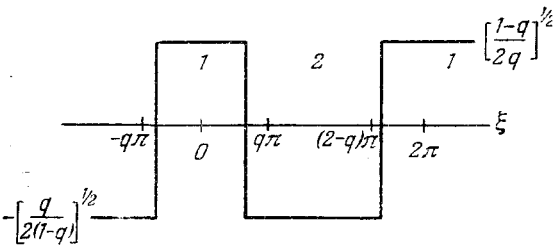


Рис. 6. Вид функции $g(\xi)$.

$$\langle g_1^2\rangle=\frac{1}{6}\pi^2 q(1-q). \tag{6.16}$$

Обозначим

$$K=f\,[\langle g_1^2\rangle]^{1/2}. \tag{6.17}$$

Тогда коэффициент увеличения установки равен большей из двух величин

$$C=1+\frac{\sqrt{3}\,K}{\pi q} \quad \text{или} \quad \frac{\sqrt{3}\,K}{\pi(1-q)}-1. \tag{6.18}$$

Коэффициент увеличения установки будет минимальным, если $q$ выбрано так, что обе величины (6.18) совпадают. Тогда мы имеем

$$\mu=1+fg(N\Theta)=\begin{cases}C, & -q\pi<N\Theta<q\pi, \quad \text{(I)}\\ -C, & q\pi<N\Theta<2\pi-q\pi. \quad \text{(II)}\end{cases} \tag{6.19}$$

Радиус кривизны, а следовательно, и магнитное поле постоянны по величине вдоль равновесной орбиты и противоположны по знаку в обоих секторах. Отношение азимутальных размеров секторов равно:

$$\Gamma=\frac{q}{(1-q)}=\frac{C+1}{C-1}. \tag{6.20}$$

Используя (6.18) и (6.20), получим выражение для минимального коэффициента увеличения установки:

$$C=\frac{\Gamma+1}{\Gamma-1}=\left[1+\frac{1}{2}f^2\right]^{1/2}. \tag{6.21}$$

Если мы примем $\sigma_z=\frac{\pi}{6}$, $\sigma_x=\frac{\pi}{2}$, $b=0$ и воспользуемся приближенными формулами (6.10) и (6.11), то будем иметь

$$K=\sqrt{45}, \qquad \Gamma=1{,}31, \qquad C=7{,}5, \qquad f=10{,}5, \qquad k=\frac{N^2}{36}.$$

В следующем параграфе будет показано более точно, что минимальное значение $C$ для больших $N$ равно приблизительно 5.

В кольцевом фазотроне со спиральными секторами $\zeta$ приблизительно равно 90° и $\eta$ — член в уравнении (5.13) велик. Так как коэффициент неоднородности $f$ можно взять небольшим, переменная часть $\mu$-члена будет мала. Будем опять предполагать, что $\mu$ задается уравнением (4.11), а $\eta$ — приближенным выражением (4.18). Используя разложение $1/\eta$ в степенной ряд, можно легко получить соотношение

$$\left\langle\left(\frac{\mu}{\eta}\right)\right\rangle = 1 + \frac{f^2 \operatorname{tg}^2 \zeta}{N^2} \langle g_1^2 \rangle + \cdots \tag{6.22}$$

Будем пренебрегать членами второго порядка малости и выше, а также осциллирующей частью $\mu/\eta$. $\eta$-член можно записать в следующем виде:

$$\frac{1}{\eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial \Theta^2} = \frac{\partial}{\partial \Theta}\left(\frac{1}{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial \Theta}\right) + \left(\frac{1}{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial \Theta}\right)^2 . \tag{6.23}$$

Первый член в правой части уравнения велик и колеблется около нулевого среднего значения, второй член мал, но его средняя величина не равна нулю и положительна. Пренебрегая осциллирующей частью второго члена, подставим (6.23) в (5.13) и, воспользовавшись полученным выражением, из уравнений (6.3), (6.4) найдем

$$\nu_x^2 = k + 1 , \tag{6.24}$$

$$\nu_z^2 = -k + \frac{1}{2} f^2 + 2 \left\langle\left(\frac{1}{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial \Theta}\right)^2\right\rangle . \tag{6.25}$$

Заметим, что в этом приближении $\eta$-член не дает вклада в радиальную фокусировку. Взяв $\eta$ в виде, задаваемом уравнением (4.18), получим

$$\left\langle\left(\frac{1}{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial \Theta}\right)^2\right\rangle = f^2 \operatorname{tg}^2 \zeta \left\langle \frac{g^2}{(1 - f N^{-1} \operatorname{tg} \zeta g_1)^2} \right\rangle =$$

$$= f^2 \operatorname{tg}^2 \zeta \left[ \frac{1}{2} + \frac{2 f^2 \operatorname{tg}^2 \zeta}{N^2} \langle \dot{g}^2 g_1^2 \rangle + \cdots \right]. \tag{6.26}$$

Пренебрежем членами второго и более высокого порядка малости в квадратных скобках. Подставляя в уравнения (6.24) и (6.25), будем иметь

$$f^2 \operatorname{tg}^2 \zeta = \left(\nu_x^2 + \nu_z^2 - 1\right) , \tag{6.27}$$

где мы пренебрегли также членом $f^2/2$. Заметим, что в этом приближении соотношения (6.24) и (6.27) не зависят от вида функции $g(N\Theta)$; от вида $g(N\Theta)$ зависит только коэффициент увеличения установки, определяемый уравнением (6.13). Выразив $\nu_x$, $\nu_z$ через $\sigma_x$, $\sigma_z$, можно записать формулы (6.24) и (6.27) в виде

$$k + 1 = \frac{N^2 \sigma_x^2}{4\pi^2} , \tag{6.28}$$

$$f^2 \operatorname{tg}^2 \zeta = \frac{N^2}{4\pi^2}\left(\sigma_x^2 + \sigma_z^2\right) - 1. \tag{6.29}$$

*Координатная кривая* $\Theta = 0$ *удовлетворяет в полярных координатах* $r$ *и* $\theta$ уравнению

$$\frac{1}{r} \frac{dr}{d\theta} = \operatorname{ctg} \zeta. \tag{6.30}$$

Расстояние между гребнями (точками максимального магнитного поля) по радиусу в единицах $r$ равно поэтому

$$\lambda = \frac{\Delta r}{r} = \frac{2\pi}{(N \operatorname{tg} \zeta)}. \tag{6.31}$$

Таким образом, при фиксированных $\sigma_x$, $\sigma_z$ и $N$ отношение $f/\lambda$ задано. Максимально возможный зазор между полюсами магнита пропорционален $\lambda$. Если неоднородность поля по азимуту создается шиммированием полюсных наконечников без применения обмоток, то можно показать, что для заданного $f/\lambda$ максимальный зазор получается при $f \simeq 1/4$ и равен приблизительно $1/4\lambda r$. При этих условиях неоднородность поля по азимуту очень близка к синусоидальной

$$g(\xi) = \cos \xi, \tag{6.32}$$

и коэффициент увеличения установки будет

$$C = 1 + f = 1{,}25.$$

Возьмем, как и выше, $\sigma_z = \pi/6$, $\sigma_x = \pi/2$, а $f$ положим равным $^1/_4$, тогда получим $k + 1 = N^2/16$, $\lambda = 5{,}95N^{-2}\,[1 - 14{,}4N^{-2}]^{-1/2}$, $\operatorname{tg}\zeta = 1{,}05N\,[1 - 14{,}4N^{-2}]^{-1/2}$.

## 7. Устойчивость движения в линейном приближении в ускорителях с радиальными секторами

Для того чтобы получить более точную связь между параметрами, вернемся к уравнениям бетатронных колебаний (5.10) и (5.11). Используя формулы (5.12), (4.18) и (4.19) при $\zeta = 0$, перепишем уравнения (5.10) и (5.11) для случая «прямоугольного» изменения поля по азимуту (6.19) в виде

$$\frac{d^2 x}{d\Theta^2} \pm kCx = 0, \tag{7.1}$$

$$\frac{d^2 z}{d\Theta^2} \mp kCz = 0, \tag{7.2}$$

где верхний знак относится к секторам с положительным направлением поля, а нижний — с отрицательным. Член $\varepsilon\,\partial\mu/\partial\Theta$ в (5.12) приводит в уравнениях (5.10) и (5.11) к членам, определяющим фокусировку на краях секторов. Мы будем пока пренебрегать ими. Это приближение справедливо только тогда, когда $N \gg f$, и мы соответственно пренебрегаем также единицей по сравнению с $n$. Когда $N$ мало, должны быть учтены краевые эффекты и члены высших порядков в $\eta$. Осциллирующие члены в $\eta$ отражают неэквидистантность соседних равновесных орбит. Для малых $N$ краевые эффекты приводят к усилению вертикальной фокусировки и ослаблению радиальной, так что становится возможным использовать значительно меньшие значения коэффициента неоднородности поля $f$ без ухудшения вертикальной устойчивости, если $k > 0$.

Положим $N\Theta_0 = -q\pi$, $N\Theta_1 = q\pi$, $N\Theta_2 = (2 - q)\pi$. Тогда решения уравнения (7.1) внутри секторов с положительным и отрицательным направлением поля приводят к следующим матричным соотношениям между $x' = dx/d\Theta$ и $x$ в точках $\Theta_0$, $\Theta_1$, $\Theta_2$:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_1 \end{pmatrix} = M_+ \begin{pmatrix} x_0' \\ x_0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x_2' \\ x_2 \end{pmatrix} = M_- \begin{pmatrix} x_1' \\ x_1 \end{pmatrix}, \tag{7.3}$$

где

$$\left.\begin{aligned} M_+ &= \begin{pmatrix} \cos\psi_+ & (kC)^{-1/2}\sin\psi_+ \\ -(kC)^{1/2}\sin\psi_+ & \cos\psi_+ \end{pmatrix}, \\ M_- &= \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\psi_- & (kC)^{1/2}\operatorname{sh}\psi_- \\ (kC)^{1/2}\operatorname{sh}\psi_- & \operatorname{ch}\psi_- \end{pmatrix}. \end{aligned}\right\} \tag{7.4}$$

$$\left.\begin{aligned} \psi_+ &= \frac{2\pi q}{N}(kC)^{1/2}, \\ \psi_- &= \frac{2\pi(1-q)}{N}(kC)^{1/2}. \end{aligned}\right\} \tag{7.5}$$

Следовательно,

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_2' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_0 \\ x_0' \end{pmatrix}, \tag{7.6}$$

где

$$M = M_- \cdot M_+ = \begin{pmatrix} \cos\psi_+\operatorname{ch}\psi_- - \sin\psi_+\operatorname{sh}\psi_-, & (kC)^{-1/2}(\cos\psi_+\operatorname{sh}\psi_- + \sin\psi_+\operatorname{ch}\psi_-) \\ (kC)^{1/2}(\cos\psi_+\operatorname{sh}\psi_- - \sin\psi_+\operatorname{ch}\psi_-), & \cos\psi_+\operatorname{ch}\psi_- + \sin\psi_+\operatorname{sh}\psi_- \end{pmatrix} \tag{7.7}$$

Отсюда получим[8]

$$\cos\sigma_x = \frac{1}{2}Sp(M) = \cos\psi_+\operatorname{ch}\psi_-, \tag{7.8}$$

и аналогично

$$\cos\sigma_z = \cos\psi_-\operatorname{ch}\psi_+. \tag{7.9}$$

$\psi_+$ и $\psi_-$ можно выразить через отношение $\Gamma$ длин секторов [см. (6.20)] и локальный показатель поля

$$n = \frac{k}{C}; \tag{7.10}$$

$$\left.\begin{aligned} \psi_+ &= \left(\frac{2\pi}{N}\right)\left(\frac{\Gamma}{\Gamma-1}\right)n^{1/2}, \\ \psi_- &= \left(\frac{2\pi}{N}\right)\left(\frac{1}{\Gamma-1}\right)n^{1/2} \end{aligned}\right\} \tag{7.11}$$

($n$ здесь считается положительным). Формулы (7.5), (7.8), (7.9) и (7.11) были написаны для $k > 0$. Однако они могут быть использованы также и для $k < 0$; в этом случае удобно считать $C$ отрицательным.

Минимальный коэффициент увеличения установки получается при максимальном значении $\sigma_x$ и минимальном $\sigma_z$, или наоборот. Если возьмем $\sigma_x = 3/4\pi$, $\sigma_z = \pi/6$, то из уравнений (7.8) и (7.9) получим

$$\psi_- = 1{,}32,$$

$$\psi_+ = 1{,}93.$$

Из уравнений (7.11) и (6.21) будем иметь

$$\left.\begin{aligned} \Gamma &= \frac{\psi_+}{\psi_-} = 1{,}46, \\ C &= 5{,}35. \end{aligned}\right\} \tag{7.12}$$

Минимальная теоретическая величина $C$ равна 4,45 для $\sigma_x = \pi$, $\sigma_z = 0$. Поэтому $\sigma_x$ и $\sigma_z$ должны выбираться возможно ближе к границе области устойчивости, но так, чтобы амплитуда бетатронных колебаний оставалась в разумных пределах. Для $\sigma_x = \pi/2$, $\sigma_z = \pi/6$ эти более точные формулы дают $\Gamma = 1{,}29$, $C = 7{,}9$. (Сравните с приближенными значениями 1,31 и 7,5, полученными в предыдущем параграфе.)

Более общий расчет, учитывающий прямолинейные промежутки и краевые эффекты, может быть выполнен аналогичным образом. Предположим, что магнитное поле вдоль равновесной орбиты постоянно и противоположно по знаку в соседних секторах и что поле в прямолинейных промежутках равно нулю (рис. 7). Обозначим относительную длину орбиты внутри секторов с положительным и отрицательным направлением поля и в прямолинейном промежутке через $q_1$, $q_2$, $q_0$ соответственно. Таким образом,

$$2q_0 + q_1 + q_2 = 1. \tag{7.13}$$

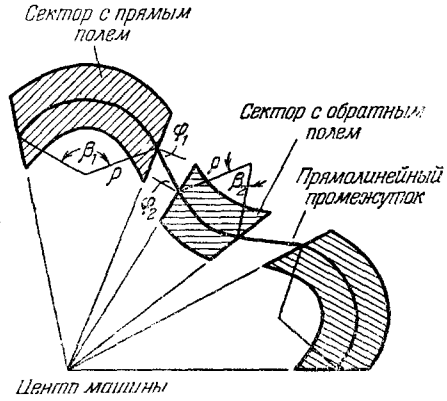


Рис. 7. Равновесная орбита и обозначения для машины с радиальными секторами и прямолинейными промежутками.

Углы $\beta_1$ и $\beta_2$, показанные на рис. 7, равны

$$\beta_1 = \frac{2\pi C q_1}{N}, \qquad \beta_2 = \frac{2\pi C q_2}{N}. \tag{7.14}$$

Число элементов периодичности есть

$$N = \frac{2\pi}{(\beta_1 - \beta_2)}, \tag{7.15}$$

так что коэффициент увеличения установки

$$C = \frac{1}{(q_1 - q_2)}. \tag{7.16}$$

Через $\Phi_1$ и $\Phi_2$ на рис. 7 обозначены углы между орбитой и нормалью к краю сектора. Удобно ввести также обозначения:

$$\delta = \frac{2\pi C q_0}{N}, \tag{7.17}$$

$$\psi_1 = \beta_1 (n_1 + 1)^{1/2}, \qquad \psi_2 = \beta_2 (n_2 - 1)^{1/2}, \tag{7.18}$$

$$\psi_3 = \beta_1 n_1^{1/2}, \qquad \psi_4 = \beta_2 n_2^{1/2}, \tag{7.19}$$

$n_1$ и $n_2$ — локальные показатели спадания поля в центре секторов с положительным и отрицательным направлением поля

$$n = \frac{k}{(\eta C)}, \tag{7.20}$$

где

$$\eta_1 = 1 - 2q_2\left(1 - \frac{\sin(\pi C q_2/N)}{C q_2 \sin(\pi/N)}\right) - 2q_0\left(1 - \frac{\cos(\pi C q_2/N)}{(N/\pi)\sin(\pi/N)}\right) \tag{7.21}$$

и

$$\eta_2 = 1 - 2q_1\left(1 - \frac{\sin(\pi C q_1/N)}{C q_1 \sin(\pi/N)}\right) - 2q_0\left(1 - \frac{\cos(\pi C q_1/N)}{(N/\pi)\sin(\pi/N)}\right). \tag{7.22}$$

Здесь не пренебрегается единицей по сравнению с $n$. Однако пренебрегается

изменением $\eta$ внутри секторов. В результате получается:

$$\left.\begin{aligned}\cos\sigma_x = {} & [1 + 2\delta(\operatorname{tg}\Phi_1 + \operatorname{tg}\Phi_2) + 2\delta^2 \operatorname{tg}\Phi_1 \operatorname{tg}\Phi_2] \cos\psi_1 \operatorname{ch}\psi_2 + \\ & + [(n_1+1)^{-1/2}(\operatorname{tg}\Phi_1 + \operatorname{tg}\Phi_2 + \delta \operatorname{tg}^2\Phi_1 + 2\delta \operatorname{tg}\Phi_1 \operatorname{tg}\Phi_2 + \\ & + \delta^2 \operatorname{tg}^2\Phi_1 \operatorname{tg}\Phi_2) - (n_1+1)^{1/2}(\delta + \delta^2 \operatorname{tg}\Phi_2)] \sin\psi_1 \operatorname{ch}\psi_2 + \\ & + [(n_2-1)^{-1/2}(\operatorname{tg}\Phi_1 + \operatorname{tg}\Phi_2 + \delta \operatorname{tg}^2\Phi_2 + 2\delta \operatorname{tg}\Phi_1 \operatorname{tg}\Phi_2 + \\ & + \delta^2 \operatorname{tg}^2\Phi_2 \operatorname{tg}\Phi_1) + (n_2-1)^{1/2}(\delta + \delta^2 \operatorname{tg}\Phi_1)] \cos\psi_1 \operatorname{sh}\psi_2 + \\ & + \frac{1}{2}[-(n_1+1)^{1/2}(n_2-1)^{1/2}\delta^2 - (n_1+1)^{1/2}(n_2-1)^{-1/2} \times \\ & \times (1+\delta \operatorname{tg}\Phi_2)^2 + (n_1+1)^{-1/2}(n_2-1)^{1/2}(1+\delta \operatorname{tg}\Phi_1)^2 + \\ & + (n_1+1)^{-1/2}(n_2-1)^{-1/2}(\operatorname{tg}\Phi_1 + \operatorname{tg}\Phi_2 + \\ & + \delta \operatorname{tg}\Phi_1 \operatorname{tg}\Phi_2)^2] \sin\psi_1 \operatorname{sh}\psi_2,\end{aligned}\right\} \quad (7.23)$$

$$\left.\begin{aligned}\cos\sigma_z = {} & [1 - 2\delta(\operatorname{tg}\Phi_1 + \operatorname{tg}\Phi_2) + 2\delta^2 \operatorname{tg}\Phi_1 \operatorname{tg}\Phi_2] \cos\psi_4 \operatorname{ch}\psi_3 + \\ & + [n_2^{1/2}(-\operatorname{tg}\Phi_1 - \operatorname{tg}\Phi_2 + \delta \operatorname{tg}^2\Phi_2 + 2\delta \operatorname{tg}\Phi_1 \operatorname{tg}\Phi_2 - \\ & - \delta^2 \operatorname{tg}^2\Phi_2 \operatorname{tg}\Phi_1) - n_2^{1/2}(\delta - \delta^2 \operatorname{tg}\Phi_1)] \sin\psi_4 \operatorname{ch}\psi_3 + \\ & + [n_1^{-1/2}(-\operatorname{tg}\Phi_1 - \operatorname{tg}\Phi_2 + \delta \operatorname{tg}^2\Phi_1 + 2\delta \operatorname{tg}\Phi_1 \operatorname{tg}\Phi_2 - \\ & - \delta^2 \operatorname{tg}^2\Phi_1 \operatorname{tg}\Phi_2) + n_1^{1/2}(\delta - \delta^2 \operatorname{tg}\Phi_2)] \cos\psi_4 \operatorname{sh}\psi_3 + \\ & + \frac{1}{2}[-n_2^{1/2} n_1^{1/2}\delta^2 - n_2^{1/2} n_1^{-1/2}(1-\delta \operatorname{tg}\Phi_1)^2 + n_2^{-1/2} n_1^{1/2} \times \\ & \times (1-\delta \operatorname{tg}\Phi_2)^2 + n_2^{-1/2} n_1^{-1/2}(-\operatorname{tg}\Phi_1 - \operatorname{tg}\Phi_2 + \\ & + \delta \operatorname{tg}\Phi_1 \operatorname{tg}\Phi_2)^2] \sin\psi_4 \operatorname{sh}\psi_3.\end{aligned}\right\} \quad (7.24)$$

## 8. Устойчивость движения в линейном приближении для ускорителя со спиральными секторами

Для ускорителя со спиральными секторами коэффициент увеличения установки близок к единице, и достижение минимальной величины $C$ не является больше определяющим условием. Расстояние между гребнями $\lambda$, однако, довольно мало, и, если зазор между полюсами магнита максимален, то изменение поля по азимуту в средней плоскости должно быть приблизительно синусоидальным. Поэтому будем предполагать, что поле в средней плоскости имеет вид

$$H = \bar{H}_0 \left(\frac{r}{r_0}\right)^k \left\{1 + f \sin\left[N\theta - \left(\frac{1}{w}\right) \ln\left(\frac{r}{r_0}\right)\right]\right\}, \quad (8.1)$$

где

$$\frac{1}{w} = N \operatorname{tg}\zeta = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (8.2)$$

Такая форма поля выбрана для того, чтобы обеспечить условие подобия.

Линеаризованные уравнения бетатронных колебаний можно получить, исходя из общего анализа, проведенного в первых двух параграфах, хотя более желательно вывести их непосредственно. Если ограничиться линейными членами в дифференциальных уравнениях, характеризующих отклонение частицы от координатной окружности радиуса

$$r_1 = \frac{cp}{\left[e\bar{H}_0 \left(\frac{r_1}{r_0}\right)^k\right]}, \quad (8.3)$$

то получим

$$r'' + \left[1 + k + \left(\frac{f}{w}\right) \cos N\theta\right](r - r_1) \simeq f \cdot r_1 \cdot \sin N\theta, \tag{8.4}$$

$$z'' - \left[k + \left(\frac{f}{w}\right) \cos N\theta\right] z \simeq 0. \tag{8.5}$$

Эти уравнения движения указывают на наличие сильной фокусировки аналогичной обычной, характеризуемой дифференциальным уравнением Матье, но в правой части уравнения для радиального движения присутствует вынуждающий член, благодаря которому будут возбуждаться вынужденные колебания вида

$$r - r_1 = -\frac{f}{N^2 - (k+1)} r_1 \sin N\theta. \tag{8.6}$$

Благодаря вынужденному движению может заметно меняться частота бетатронных колебаний, и нелинейные члены в уравнениях движения будут велики. Предпочтительней поэтому написать разложение относительно более удобной координатной кривой

$$x = r - r_1 + \frac{f}{N^2 - (k+1)} r_1 \sin N\theta. \tag{8.7}$$

Таким способом получим следующие линеаризованные уравнения:

$$x'' + \left[k + 1 - \frac{1}{2} \frac{\frac{f^2}{w^2}}{N^2 - (k+1)} + \right.$$

$$\left. + \frac{f}{w} \cos N\theta + \frac{1}{2} \frac{\frac{f^2}{w^2}}{N^2 - (k+1)} \cos 2N\theta \right] x = 0, \tag{8.8}$$

$$z'' - \left[k - \frac{1}{2} \frac{\frac{f^2}{w^2}}{N^2 - (k+1)} + \frac{f}{w} \cos N\theta + \frac{1}{2} \frac{\frac{f^2}{w^2}}{N^2 - (k+1)} \cos 2N\theta \right] z = 0. \tag{8.9}$$

Эти уравнения имеют вид обобщенного уравнения Матье

$$\frac{d^2u}{d\tau^2} + (A + B \cdot \cos 2\tau + C \cdot \cos 4\tau)\, u = 0. \tag{8.10}$$

Отброшенные члены в коэффициентах $A$ и $C$ уравнения (8.10), как видно из (8.8) и (8.9), порядка $k^2\ w^2$ от главных членов. Поэтому для $f = 1/4$ допускаемая ошибка в этих коэффициентах меньше 2% во всей области устойчивости (рис. 8). Члены, отброшенные в коэффициентах $B$, порядка $1/8\ (f/N^2w)^2$ в уравнении (8.8) и $1/2\ (f/N^2w)^2$ в уравнении (8.9), так что допускаемые ошибки во всей области устойчивости будут меньше 2% и 8% соответственно. Коэффициент при третьей гармонике, которую мы опустили, порядка $1/8\ (f/N^2w)^2$ и $1/2(f/N^2w)^2$ коэффициента $B$ соответственно. Так как третья гармоника дает вклад в величину $\sigma$, пропорциональный 1/9 квадрата коэффициента, ее влиянием полностью можно пренебречь.

Таблицы характеристических показателей ($\sigma/\pi$) обобщенного уравнения Матье (8.10) были вычислены на электронной машине вариационным методом [9]. Значения $A$ табулированы для $\sigma$, $B$, $C$, перекрывающих основную часть первой области устойчивости. В эти таблицы включен также случай обычного уравнения Матье ($C = 0$). Насколько нам известно, в настоящее время для области устойчивости существуют неопубликованные таблицы характеристических показателей уравнения Матье.

На рис. 8 показана область устойчивости бетатронных колебаний в кольцевом фазотроне со спиральными секторами для $k \gg 1$, рассчитанная на основе написанных выше формул и табулированных решений уравнения (8.10). Если $k \gg 1$, коэффициенты $A$, $B$, $C$ зависят только от $k/N^2$ и $f/N^2w$. Поэтому линии постоянных $\sigma_x$ и $\sigma_z$ мы представляем в координатах $k/N^2$ и $f/N^2w$. Если положить $\sigma_z = \pi/6$, $\sigma_x = \pi/2$ и $f = 1/4$, то получим $k = 0{,}057\ N^2$, $f/N^2w = 0{,}25$ и $\lambda = 6{,}3\ N^{-2}$. (Сравните с приближенными значениями $k = 0{,}062\ N^2$, $f/N^2w = 0{,}265$ и $\lambda = 5{,}95\ N^{-2}$, полученными в конце § 6.)

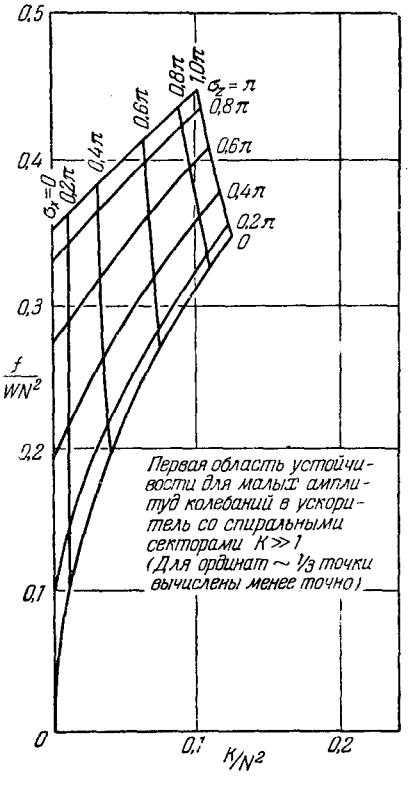


Рис. 8. Зависимость $\sigma_x$ и $\sigma_z$ внутри области устойчивости от параметров спиральных секторов для $k \gg 1$.

## 9. Нелинейные эффекты

Предыдущий анализ бетатронных колебаний был основан на разложении уравнений движения по степеням смещения от равновесной орбиты, ограничиваясь только линейными членами. Малые амплитуды бетатронных колебаний $x$ и $z$ удовлетворяли тогда линейным дифференциальным уравнениям с коэффициентами, периодичными по $\Theta$.

В идеальном ускорителе единственная периодичность связана с $N$ тождественными элементами, и период коэффициентов равен $2\pi/N$. В реальной машине неизбежны различные возмущения, так что коэффициенты будут строго периодичны по $\Theta$ с периодом $2\pi$ и приблизительно периодичны с периодом $2\pi/N$. С периодичностью $2\pi/N$ связано требование, что $\sigma_x$ и $\sigma_z$ не должны быть целыми или полуцелыми кратными $2\pi$. В действительности $\sigma$ должно быть меньше $\pi$, так как в противном случае допуски на сооружение и сборку магнита становятся очень жесткими. Чтобы избежать резонансов с возмущениями, $\nu_x$ и $\nu_z$ не должны быть целыми или полуцелыми. Кроме того, если возмущения могут приводить к связи $x$ и $z$ движения, то $\nu_x + \nu_z$ не должно быть целым. Эти требования связаны с периодичностью $2\pi$.

Изучение влияния нелинейных членов в уравнениях движения не продвинулось пока столь далеко, как изучение линеаризованных уравнений. Приближенные аналитические методы решения нелинейных уравнений были развиты Мозером[10], Штарком[8] и Хагедорном[11]. Их результаты сводятся к следующему: если коэффициенты имеют период $2\pi$ по $\Theta$ и $\nu_x$, $\nu_z$ — числа бетатронных колебаний за период $2\pi$, то резонансы имеют место, когда

$$n_x\nu_x + n_z\nu_z = \text{целое число}, \tag{9.1}$$

$$n_x,\ n_z = 0,\ 1,\ 2, \ldots$$

Пусть

$$n_x + n_z = q. \tag{9.2}$$

Тогда, если $q = 1$ или $q = 2$, движение неустойчиво даже в линейном при-

ближении (это правило установлено в предыдущем параграфе). Если $q=3$, то, вообще говоря, влияние квадратичных членов в дифференциальных уравнениях таково, что движение становится неустойчивым даже при очень малых амплитудах. Если $q=4$, то движение может быть устойчивым или неустойчивым в зависимости от вида кубичного (и линейного) членов. Если $q>4$, то, вообще говоря, движение устойчиво для достаточно малых амплитуд бетатронных колебаний. Во всяком случае, если $q\geqslant 4$ и уравнения движения нелинейны, существует предельная амплитуда бетатронных колебаний, начиная с которой колебания становятся неустойчивыми, по крайней мере, в том смысле, что частицы покидают камеру.

Численные расчеты, проведенные на электронной счетной машине, и эксперименты, проведенные брукхэйвенской группой[12] на электронном аналоге сильнофокусирующего ускорителя, по-видимому, подтверждают эти выводы,

Если применить этот критерий к периодичности по элементам с периодом $2\pi/N$, то нужно заменить $\nu_x$ и $\nu_z$ в (9.1) на $\sigma_x/2\pi$, $\sigma_z/2\pi$ (числа бетатронных колебаний за элемент периодичности). В этом случае мы приходим, например, к выводу, что значения $\sigma_x$ или $\sigma_z$, близкие к $2\pi/3$, опасны, так же как значения, при которых $\sigma_x+2\sigma_z$ или $\sigma_z+2\sigma_x$ близки к $2\pi$. Назовем эти резонансы, связанные с периодичностью конструкции магнита, «секторными» резонансами. Численными расчетами было показано, что предельная амплитуда бетатронных колебаний в ускорителях со спиральными секторами становится очень малой, когда $\sigma$ приближается к $2\pi/3$.

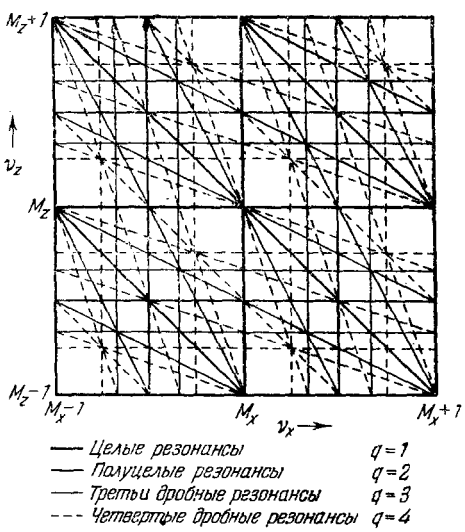


Рис. 9. Линейные и нелинейные резонансы в ускорителе с сильной фокусировкой. $M_x$ и $M_z$ — целые.

Применяя этот критерий к периодичности $2\pi$, найдем значения $\nu_x$ и $\nu_z$ (рис. 9), исключаемые с помощью этого правила. На рис. 9 $\nu_x$ представлены горизонтальными и $\nu_z$ вертикальными линиями. Линии, обозначенные $q=1$, 2, 3, 4, представляют значения $\nu$, исключенные с помощью этого правила. Линии $q=1$ изображают целые резонансы, линии $q=2$ — полуцелые резонансы (вертикали и горизонтали) и резонансы связи (диагональ), линии $q=3,4$ — третий и четвертый дробные резонансы. Пока еще неясно, насколько серьезны третий и четвертый дробные резонансы, так как они возникают только благодаря нелинейностям. Эксперименты на электронном аналоге в Брукхэйвене[12] показывают, что для обнаружения этих резонансов необходимо специально ввести нелинейные возмущения. Это, конечно, несправедливо для резонансов $\sigma=2\pi/3$, рассмотренных в предыдущем параграфе, которые являются резонансами, связанными с периодичностью конструкции магнита. В настоящее время, по-видимому, разумнее избегать по возможности всех запрещенных линий, изображенных на рис. 9.

Было показано, что нелинейные члены в ускорителях с радиальными секторами невелики; по порядку величины не больше, чем в обычных сильнофокусирующих ускорителях. Однако нелинейные члены в ускорителях со спиральными секторами много больше, и они играют более важную роль в определении характера бетатронных колебаний. Численные расчеты показы-

вают, что хотя влияние нелинейных эффектов в кольцевом фазотроне со спиральными секторами значительно, предельные амплитуды все же достаточно велики, чтобы бетатронные колебания были устойчивы, если $\sigma$ не слишком близко к $2\pi/3$ (скажем, $\sigma_x < 0{,}6\pi$).

## 10. Фазовая устойчивость

Импульс $p(R)$ определяется интегрированием уравнения (5.6)

$$p = p_0 \exp\left[\int_{R_0}^{R} \frac{k+1}{R}\, dR\right]. \tag{10.1}$$

Если $k$ не зависит от $R$, это равенство переходит в (5.14). Таким образом, импульс и энергия определяются как функции параметра $R$. Так как $R$, вообще говоря, близко к среднему радиусу орбиты, радиальная апертура, требуемая при заданных начальном и конечном импульсах, может быть определена из уравнения (10.1). Ясно, что для заданного интервала импульсов радиальная апертура уменьшается при увеличении $k$. Если $k \gg 1$, то радиальная апертура много меньше $R$, и при постоянном $k$ приближенно получим

$$\frac{R_1 - R_0}{R_0} \simeq \left(\frac{1}{k+1}\right) \ln\left(\frac{p_1 - p_0}{p_0}\right). \tag{10.2}$$

Угловая скорость частицы на орбите $R$ равна

$$\omega = \frac{d\Theta}{dt} = \frac{\beta c}{R} = \frac{pc^2}{ER}, \tag{10.3}$$

где $E$ — полная энергия, включая и энергию покоя. Возводя (10.3) в квадрат и дифференцируя, будем иметь

$$\frac{E}{\omega}\frac{d\omega}{dE} = \frac{1}{\left(\frac{E^2}{E_0^2}\right) - 1} - \frac{1}{\left(\frac{R}{E}\right)\left(\frac{dE}{dR}\right)}. \tag{10.4}$$

Продифференцируем теперь уравнение

$$E^2 = p^2c^2 + E_0^2. \tag{10.5}$$

Используя затем уравнение (5.6), получим

$$\frac{E}{\omega}\frac{d\omega}{dE} = \frac{(k+1)E_0^2 - E^2}{(E^2 - E_0^2)(k+1)}. \tag{10.6}$$

Если $k = \text{const}$, это уравнение можно проинтегрировать. Тогда

$$\frac{\omega}{\omega_1} = \frac{E_1}{E}\left(\frac{E^2 - E_0^2}{E_1^2 - E_0^2}\right)^{\frac{k}{2(k+1)}}, \tag{10.7}$$

где $\omega_1$ — угловая частота обращения частицы с энергией $E_1$. График $\omega/\omega_1$ показан на рис. 10, где $\omega_t$ — угловая частота, соответствующая критической энергии; $k$ взято равным 99. Если определить критическую энергию как

$$E_t = (k+1)^{1/2} E_0, \tag{10.8}$$

то для $E < E_t$ значение $d\omega/dE$ положительно, в то время как для $E > E_t$ значение $d\omega/dE$ отрицательно. Если частицы ускоряются высокочастотным электрическим полем, приложенным к одной или большему числу щелей, то теории фазовой устойчивости в сильнофокусирующих ускорителях с постоянным полем аналогична теории для обычного циклотрона или синхротрона[13]. Когда $d\omega/dE$ положительно, частица может совершать устойчивые колебания около равновесной фазы, расположенной на возрастающей части волны в. ч. Когда $d\omega/dE$ отрицательно, равновесная фаза находится на спадающей части волны в. ч. При $E = E_t$ фазовой устойчивости нет. Для того чтобы частицы ускорить до энергии большей критической, необходимо перебросить в соответствующий момент равновесную фазу с возрастающей на спадающую часть волны.

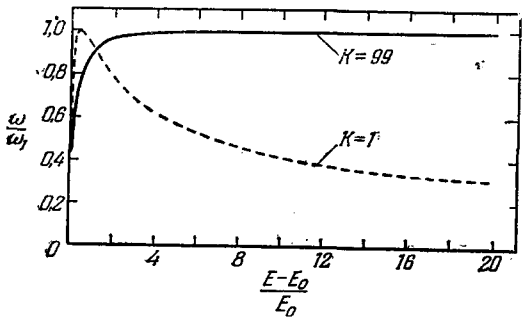


Рис. 10. Зависимость частоты обращения от энергии.

В циклотроне частота обращения $\omega/2$ должна быть одной и той же для всех энергий, и уравнение (10.6) дает тогда связь между $k$ и $E$ вида

$$k + 1 = \frac{E^2}{E_0^2}. \tag{10.9}$$

В циклотроне $k$ должно возрастать с энергией, и бетатронные колебания поэтому неподобны, даже если равновесные орбиты подобны.

## III. ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ К КОНСТРУИРОВАНИЮ УСКОРИТЕЛЕЙ

### 11. Кольцевой фазотрон

Как пример применения развитой теории к конструированию ускорителей на большие энергии, ниже приведены возможные параметры кольцевого фазотрона с радиальными и спиральными секторами. При выборе параметров кольцевого фазотрона во многом исходят из тех же соображений, что и для сильнофокусирующего ускорителя с импульсным полем[1]: резонансы, допуски при сборке, рассеяние на газе. Инжекция и ускорение, по-видимому, будут довольно существенно отличаться от инжекции и ускорения в обычном синхротроне на сравнимую энергию.

В то время как для протонного сильнофокусирующего синхротрона на энергию 25 *Бэв* предполагается использовать для инжекции линейный ускоритель на энергию 50 *Мэв*, для кольцевого фазотрона можно использовать электростатический генератор Ван-де-Граафа на энергию 5 *Мэв*. Электростатический генератор как инжектор обладает рядом преимуществ по сравнению с линейным ускорителем: большой импульсный ток, простота, меньшая стоимость, стабильность энергии и меньшие размеры пучка. Хотя наиболее вероятной является инжекция в течение одного оборота, осуществляемая с помощью импульсного инфлектора, пропускающего в импульсе ток несколько миллиампер, возможна также для получения больших токов в пучке инжекция в течение многих оборотов.

Возможность инжекции при малых энергиях была очевидна при самом зарождении принципа сильной фокусировки в постоянном поле. Большой интервал импульсов в ускорителе с постоянным полем требует большой площади полюсных наконечников, работающей при очень малой плотности потока.

Однако была показана нерентабельность использования железа при малых плотностях потока. Поэтому было предложено использовать последовательность ускорителей с большой плотностью потока в железе и с регенеративным выводом пучка, применяемым для инжекции частиц из одного ускорителя в следующий на бо́льшую энергию. Такая система вывода использовалась на бетатронах и недавно была осуществлена на циклотроне; время перестройки орбит позволяет использовать эту систему для инжекции, обеспечивая одновременно как движение инжектируемого пучка от магнитного возмущения, так и затухание возбужденных в нем колебаний. Однако эта схема потребует очень тщательной регулировки. Выполнимость такой системы была доказана обширной теоретической работой Тенга[14] и других в Аргоннской национальной лаборатории. Тенг подчеркивает, что использование высокоэнергетичной инжекции позволяет в значительной степени обойти проблему модуляции частоты и контроля формы малых магнитных полей, возникающей при малой энергии инжекции. Проблема модуляции в. ч. в ускорителях с постоянным полем имеет много интересных возможностей решения, отсутствующих в ускорителях с импульсным полем.

Произвольная зависимость частоты от времени позволяет использовать в кольцевом фазотроне механическую систему модуляции частоты в резонаторе с большой добротностью $Q$. При большом $Q$, возможном в ненагруженной полости, требуемый прирост энергии за оборот может быть сообщен частицам одним резонатором, потребляющим разумную мощность. Модуляция может быть осуществлена с помощью движущейся диафрагмы, настраивающей объем резонатора. Опыты на модели показывают, что такая система позволяет менять частоту в 3 раза. Если энергия инжекции 5 *Мэв*, то для достижения релятивистских скоростей требуется изменение частоты в 10 раз. Поэтому можно использовать один резонатор, работающий как самовозбуждающийся генератор, для ускорения частиц до энергии около 50 *Мэв*. Затем напряжение на этом резонаторе включается и выключается второй резонатор, продолжающий ускорять частицы дальше. Переключение может управляться сравнением частот между резонаторами. Относительные фазы резонаторов можно контролировать слабой связью между ними. (На электронном синхротроне Мичиганского университета, система в. ч. которого состоит из двух резонаторов, было показано, что можно осуществить переход от одного резонатора к другому без заметных потерь частиц.) При желании можно добавить третий резонатор и сделать второй переход в области релятивистских энергий, где частота обращения частиц меняется мало (см. рис. 10). Третий резонатор должен быть сконструирован таким образом, чтобы обеспечить очень большое напряжение в малой области частот. Тонкая настройка частоты может осуществляться с помощью реактивных ламп, питающих резонатор.

Эта система в. ч. позволяет, по-видимому, ускорять протоны до энергии 20 *Бэв* с частотой повторения несколько импульсов в секунду. Несмотря на то, что описанная выше система, предложенная на основе опытов, в настоящее время уже сооружается, в будущем могут оказаться более выгодными другие системы в. ч. Например, следующие:

1. Большое число низковольтных, нагруженных ферритом резонаторов с малым $Q$, требуемый закон изменения частоты в которых достигается путем изменения по определенному закону подмагничивающего тока в ферритах. Эта система запланирована для протонного синхротрона CERN *) и брукхэйвенского сильнофокусирующего синхротрона с импульсным полем.

2. Использование дрейфовых трубок (или в качестве их одного или нескольких секторов), работающих на высокой гармонике частоты обращения. В этом случае настройка на широкую область частот, по-видимому, затруднительна.

*) Европейский Совет ядерных исследований при ЮНЕСКО. (*Прим. перев.*)

3. Было предложено также несколько схем в. ч., при использовании которых в камере могут ускоряться одновременно несколько групп частиц различной энергии. Если некоторые из них окажутся осуществимыми, то появится возможность значительно увеличить скважность*) и, следовательно, интенсивность.

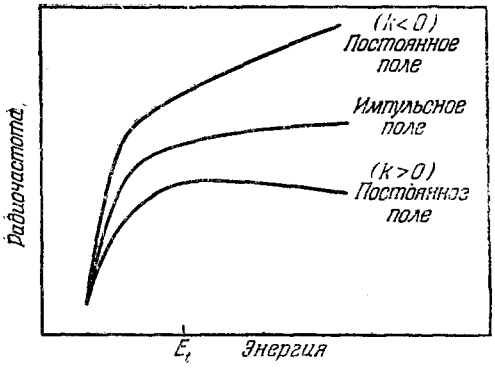


Рис. 11. Зависимость в. ч. от энергии в сильнофокусирующих ускорителях с импульсным и постоянным магнитным полем.

В ускорителях с сильной фокусировкой при достижении критической энергии $E_t$, определяемой уравнением (10.8), исчезает фазовая устойчивость. В кольцевом фазотроне с радиальными секторами и отрицательным $k$ (орбиты максимальной энергии расположены внутри машины) критическая энергия отсутствует. Ускорители со спиральными секторами и отрицательным $k$, по-видимому, невозможны. На рис. 11 показана зависимость частоты от энергии для сильнофокусирующего ускорителя с импульсным полем и для ускорителя с постоянным полем при $k > 0$ и $k < 0$.

## 12. Кольцевой фазотрон с радиальными секторами на энергию 10 *Бэв*

Для иллюстрации свойств кольцевого фазотрона на большую энергию рассмотрим конструкцию с радиальными секторами. Из всех конструкций, предложенных в настоящее время, она наиболее изучена, хотя конструкция со спиральными секторами, по-видимому, более экономична. Из уравнений (7.23) и (7.24) можно найти $\sigma_x$ и $\sigma_z$ для данных $N$, $n$, $\beta_1$, $\beta_2$ и $\delta$. В таблице I при-

Таблица I

Примерные параметры ускорителя с радиальными секторами

| | | |
|---|---|---|
| $N = 64$ | $\beta_1 = 15{,}00°$ | $\sigma_x = 122{,}1°$ |
| $n_1 = n_2 = 36$ | $\beta_2 = 9{,}37°$ | $\sigma_z = 22{,}0°$ |
| $C = 5{,}35$ | $\delta = 0{,}05°$ | $\nu_x = 21{,}7$ |
| $k = 192{,}5$ | $\Phi_1 = \Phi_2 = 5{,}74°$ | $\nu_z = 3{,}91$ |

ведены типичные значения параметров для ускорителя с 64 элементами периодичности. Для данного примера мы выбрали максимальную энергию протонов 10 *Бэв* и максимальное магнитное поле 20 000 гаусс. Ограничения на степень радиальной и вертикальной фокусировки определяются допусками, которым должны удовлетворять параметры машины (например, $n$), чтобы избежать резонансов. Так как $\nu_x$ при постоянном $\sigma_x$ приблизительно пропорционально корню квадратному из $n$, ослабление фокусировки смягчает эти допуски. В случае, когда справедливы выражения (7.8) и (7.9), допуск на $n$ для $\Delta\nu = 1/2$ определяется выражением

$$\frac{dn}{n} = \frac{2\pi \sin \sigma}{N(\psi_1 \sin \psi_1 \operatorname{ch} \psi_2 - \psi_2 \cos \psi_1 \operatorname{sh} \psi_2)}. \tag{12.1}$$

*) Под скважностью понимается отношение длительности импульса ускоренных частиц ко времени ускорения. *Прим. перев.*

Для выбранной нами конструкции допуск на $n$ составляет приблизительно 1%. Для постоянного поля величина $n$ может быть выдержана с большей степенью точности, чем в случае импульсного поля, так как все искажения не зависят от времени.

Неправильная установка секторов в сильнофокусирующих ускорителях приводит к большим искажениям равновесных орбит [15]. Можно показать [15], что в кольцевом фазотроне с радиальными секторами искажение равновесной орбиты для данной среднеквадратичной ошибки в установке секторов будет больше, чем в обычном сильнофокусирующем ускорителе с тем же числом элементов периодичности и сравнимыми величинами $\nu_x$, $\nu_z$, приблизительно на отношение периметров. Здесь было сделано упрощающее предположение, что в каждом элементе периодичности сектора выставлены идеально, а ошибки в установке самих элементов беспорядочны и независимы.

Для этого ускорителя среднеквадратичная ошибка в установке 128 секторов, равная 0,02 *мм*, должна привести к максимальному искажению равновесной орбиты $\pm$ 2,0 *см*.

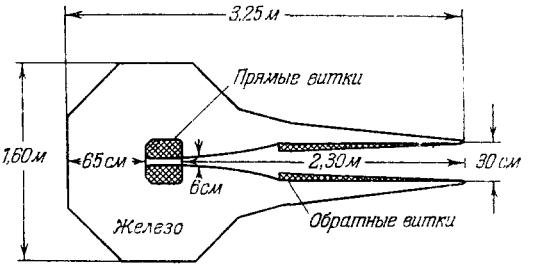


Рис. 12. Разрез магнита и катушек для ускорителя с радиальными секторами.

Влияние пространственного заряда и рассеяние на газе было рассмотрено Блахманом и Курантом [16] и другими [17]. В данном случае пучок, инжектируемый из электростатического генератора Ван-де-Граафа, будет занимать после рассеяния апертуру $\pm$ 10 *см*. Адиабатическое затухание бетатронных колебаний при увеличении импульса в 100 раз уменьшит эти колебания до $\pm$ 1,0 *см*. При разумном выборе прироста энергии за оборот (75 *кэв*) можно получить $3 \cdot 10^{11}$ протонов в импульсе.

Значения физических величин, соответствующие параметрам таблицы I, приведены в таблице II.

Таблица II

Физические параметры ускорителя с радиальными секторами. Индекс «0» относится к максимальной энергии, индекс «$i$» — к энергии инжекции.

| | | |
|---|---|---|
| $E_0 = 10$ *Бэв* | $E_i = 5$ *Мэв* | кинетическая энергия протонов |
| $r_0 = 97{,}3$ *м* | $r_i = 95$ *м* | радиус кольцевого фазотрона |
| $B_0 = 20\,000$ *гс* | $B_i = 200$ *гс* | ведущее магнитное поле |
| $\rho_0 = 18{,}2$ *м* | $\rho_i = 17{,}8$ *м* | радиус кривизны |
| $Z_0 = 3{,}0$ *см* | $Z_i = 15{,}0$ *см* | вертикальная полуапертура |
| $r_0 - r_i = 2{,}3$ *м* | — | радиальная апертура |
| $E_t = 12$ *Бэв* | | критическая энергия |
| $Z_i = 2{,}5$ *см* | | вертикальная полувысота инжектируемого пучка |
| $\delta_i = \pm 0{,}001$ радиана | | угловая расходимость инжектируемого пучка |
| $p = 5 \cdot 10^{-6}$ *мм* Hg | | давление в вакуумной камере. |

На рис. 12 показан поперечный разрез возможной конструкции магнита. Большинство изменений поля может быть осуществлено с помощью обратных

витков, расположенных на полюсных наконечниках. В таблице III приведены характеристики секторов для ускорителя, параметры которого указаны в таблицах I и II.

При использовании описанной выше системы в. ч. частота повторения

Таблица III

Характеристики секторов ускорителя на энергию 10 *Бэв*

| | |
|---|---|
| Полный вес железа . . . . . | 9650 *т* |
| Полный вес меди . . . . . | 670 *т* |
| Требуемый ток . . . . . | 112 000 ампер-витков |
| Мощность на возбуждение магнита . . . | 5,5 *мгвт* |

импульсов определяется только величиной прикладываемого напряжения в. ч. и допустимой скоростью механической модуляции частоты.

Использование этой системы в. ч. позволит получить, по-видимому, 1—3 импульса в секунду, по $3 \cdot 10^{11}$ протонов в импульсе.

## 13. Кольцевой фазотрон со спиральными секторами на энергию 20 *Бэв*

Рассмотрим кольцевой фазотрон, магнитное поле в котором задается формулой (8.1). Движение частиц в таком поле было рассмотрено во второй части. Уравнения (6.24), (6.27) и (6.31) показывают, что в «гладком» приближении

$$\nu_x^2 = 1 + k, \tag{13.1}$$

$$\nu_z^2 = -k + \left(\frac{f}{wN}\right)^2 + \frac{1}{2} f^2, \tag{13.2}$$

где $w = \lambda/2\pi$ и $\lambda$ — относительное расстояние по радиусу между двумя соседними гребнями.

Параметры кольцевого фазотрона со спиральными секторами на энергию 20 *Бэв* будут получены, исходя из «гладкого» приближения и условия $\sigma = 2\pi\nu/N < \pi$ (условие устойчивости решений уравнения Хилла). Затем будет показано изменение этих параметров на основе точного решения линеаризованных дифференциальных уравнений с помощью электронной счетной машины.

Из многих типов инжекторов мы можем выбрать линейный ускоритель на энергию 50 *Мэв*, циклотрон или для гораздо более низкой энергии электростатический генератор Ван-де-Граафа. Предположим, что в ускорителе представлены все равновесные орбиты, соответствующие интервалу энергий частиц от 5 *Мэв* на внутреннем крае рабочей области и до 20 *Бэв* на внешнем. Можно выбрать $k = 82{,}5$, $r_0 = 5000$ *см*, где $r_0$ — средний радиус орбиты при максимальной энергии и средней напряженности поля на орбите 14 000 *гаусс*. Это дает для среднего радиуса при энергии 5 *Мэв* величину $r_i = 4688$ *см*. Требуемая радиальная апертура равна приблизительно $d = r_0 - r_i = 312$ *см*. Отношение величины среднего поля на орбите, соответствующей максимальной энергии, к среднему полю на орбите инжекции есть $\overline{H}_0/\overline{H}_i = 203$.

Так как $k = 82{,}5$, согласно «гладкому» приближению будет $\nu_x = 9{,}15$. Чтобы остаться внутри области устойчивости решений линеаризованных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, мы должны иметь $2\nu < N$. Выберем число секторов $N$ или гребней, пересекаемых при одном обороте, равным 31. Это дает $\sigma_x = 0{,}6\,\pi$. Мы можем тогда выбрать $\sigma_z = 0{,}268\,\pi$, так что $\nu_z = 4{,}15$. Такой выбор $\nu_x$ и $\nu_z$ позволяет избежать за-

прещенных линий на рис. 9. Вероятная рабочая точка находится в этом случае в одном из двух больших квадратов в плоскости $\nu_x$, $\nu_z$. Характеристики гребней можно теперь найти из второго уравнения «гладкого» приближения (13.2), которое дает для выбранных значений $N$ и $k$ $f/w = 218$.

Таким образом, если взять $f = 1/4$, то $\lambda = 0{,}00506$, и расстояние по радиусу между соседними гребнями на внешнем крае равно 25,3 *см*. Этот результат является приближенным.

Для случая, когда магнитное поле в средней плоскости представляется формулой (8.1), на рис. 8 начерчена область устойчивости, рассчитанная на основе точных решений линеаризованных уравнений. Согласно этой диаграмме, при $\sigma_x = 0{,}615\pi$ и $\sigma_z = 0{,}25\pi$ будет $f/wN^2 = 0{,}303$ и $k/N^2 = 0{,}075$. Если выбрать число элементов периодичности $N = 33$, то $\nu_x = 10{,}15$, $\nu_z = 4{,}15$. Обе величины находятся теперь в средине большого квадрата, ограниченного целым, полуцелым и третьим дробным резонансами (чтобы находиться в центре допустимого максимального квадрата, рабочая точка $\nu_x$, $\nu_z$ должна быть на 0,15 выше или ниже линий целых резонансов для обоих измерений). Если снова взять $f = 1/4$, то $w = 1/1320$, и расстояние по радиусу между гребнями равно $\lambda r_0 = 23{,}8$ *см*.

Рассмотрим вопрос о достижении заданного значения $f$. Форма эквипотенциальных поверхностей, соответствующих коэффициенту неоднородности поля $f = 1/4$ при $k = 150$, показана на рис. 13. На рис. 13 приведено несколько эквипотенциальных кривых для различных значений магнитного потенциала.

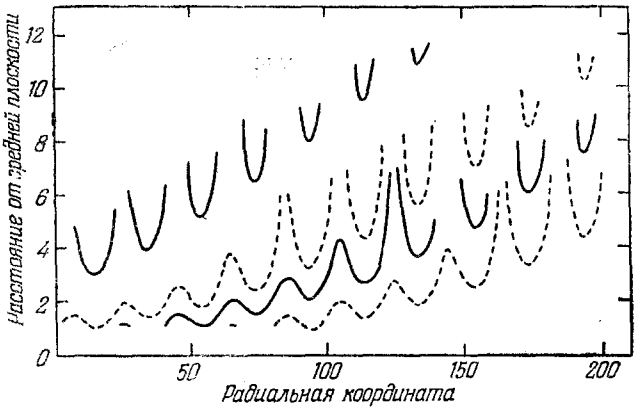


Рис. 13. Форма эквипотенциалей в магните со спиральными секторами для $k = 150$ и $f = 0{,}25$. Абсцисса и ордината в одних и тех же единицах.

Эти кривые были получены численными расчетами. Они указывают на существование глубоких щелей в поверхности полюсных наконечников, когда гребни находятся на расстоянии приблизительно $0{,}13\lambda$ от средней плоскости. По-видимому, щели в поверхности появляются, когда вертикальный зазор между гребнями превышает $1/4$ расстояния по радиусу между ними. Появление этих щелей означает, что при большой величине вертикального зазора необходимы полюса противоположной полярности для обеспечения требуемого значения коэффициента неоднородности поля $f$. Чтобы не врезать в полюса участки с обратным полем, вертикальный зазор между гребнями нужно делать меньше $1/4$ расстояния по радиусу между ними. Такой же результат был получен аналитически.

На рис. 14 показана форма эквипотенциальных поверхностей для случая $f = 1/4$. Зависимость вертикального зазора от $f$ представлена на рис. 15, где $G$ — максимальный вертикальный зазор между вершинами гребней в случае,

когда нет дополнительных прямых обмоток. Если потребовать постоянства $\nu_x$ и $\nu_z$, то величина $f/w$ также должна быть постоянной. Таким образом получается зависимость $G \cdot f/w$ от $f$, изображенная на рис. 15. Мы видим, что при условии постоянства фокусировки, т. е. при $f/w = \text{const}$ значение $f$,

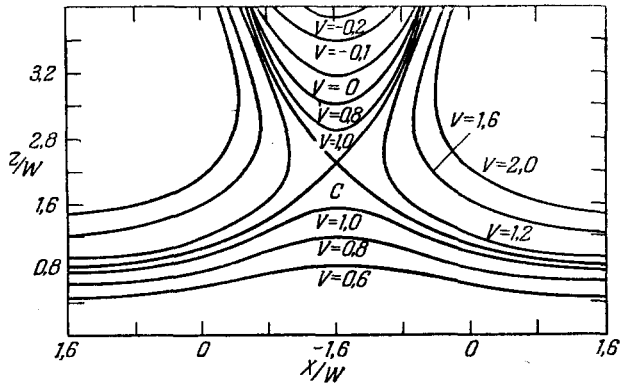


Рис. 14. Магнитный потенциал $V = Z/W + f \sin(X/W) \sin[H(Z/W)]$ для $k = 0$ и $f = 0{,}25$. Полюса, соответствующие $V = 1{,}1$, дают максимальный вертикальный зазор без щелей в поверхности полюсов.

соответствующее максимальному вертикальному зазору между гребнями, равно $^1/_4$, а максимальный вертикальный зазор в единицах $\lambda r$ равен $G = 0{,}275$. Из графиков также следует, что при отсутствии щелей в полюсных наконечниках для $f$ в интервале от 0,14 до 0,36 вертикальный зазор меньше максимального только на 10%. Этот аналитический результат совпадает, как уже упоминалось, с результатом, полученным численными расчетами.

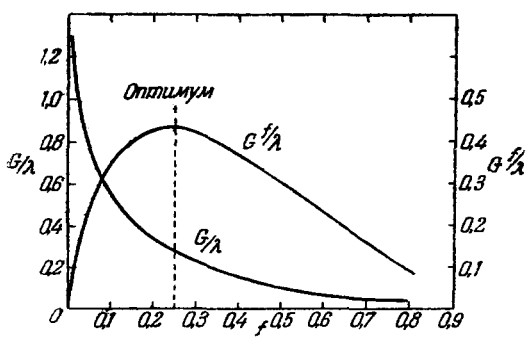


Рис. 15. Максимальный зазор $G$, умноженный на $(f/\lambda)$, как функция $f$. Использован критерий отсутствия щелей в полюсах. Изменение поля в средней плоскости синусоидально.

Для рассматриваемого примера $\lambda r_0 = 2\pi w r_0 = 23{,}8$ *см*. Это означает, что если выбрать $G = 0{,}275\,\lambda r_0$, то на радиусе инжекции $G = 6{,}15$ *см* и при максимальной энергии 6,6 *см*.

Без применения дополнительных обмоток, распределенных на поверхности полюсов, следовало бы менять вертикальный зазор в 203 раза, чтобы магнитное поле менялось в такое же число раз. Размещая между гребнями дополнительные обмотки, можно сохранить полную апертуру на всех радиусах. Таким образом, соответствующим подбором обмоток и токов в них $G(r)$ можно сделать всегда равным приблизительно 0,275 от радиального расстояния между гребнями, которое практически постоянно. Однако совсем необязательно иметь вертикальный зазор постоянным для всех радиусов, так как амплитуды бетатронных колебаний затухают во времени как $p^{-1/2}$. Если импульс увеличивается приблизительно в 203 раза, то апертура, необходимая для бетатронных колебаний, уменьшается приблизительно в $\sqrt{200} \sim 14$ раз. Следовательно, желательно иметь апертуру на радиусе инжекции $\sim$ в 10 раз

большую, чем при максимальной энергии, и выгодно, чтобы во время инжекции пучок заполнял ее всю. В действительности вертикальный зазор должен быть больше того, который требуется при учете затухания, чтобы избежать потерь частиц из-за искажения равновесной орбиты, вследствие неизбежных ошибок при сборке магнита. Если поддерживать максимально возможный вертикальный зазор, т. е. поддерживать $G$ равным $0{,}275\,\lambda r$, апертура в действительности будет даже несколько увеличиваться в процессе ускорения благодаря небольшому увеличению $r$. Поэтому, чтобы увеличить апертуру на радиусе инжекции, требуется ввести обратные полюса в этом месте. Это можно осуществить с помощью дополнительных прямых витков, расположенных между гребнями, как указано на рис. 16. В этом случае полюса можно раздвинуть и тем самым увеличить вертикальную апертуру. Таким образом, повидимому, можно увеличить вертикальный зазор на радиусе инжекции вдвое.

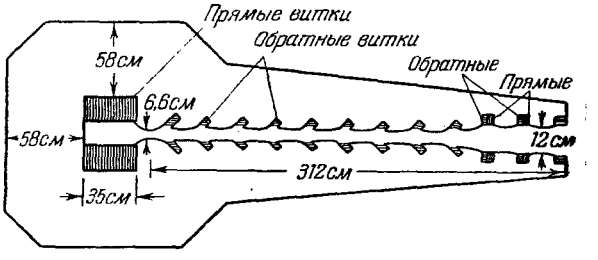


Рис. 16. Конструкция магнита со спиральными секторами.

Конфигурация гребней и витков, обеспечивающих правильную форму поля, представлена на рис. 16. Контуры железа совпадают с эквипотенциальными поверхностями. На рисунке показано также расположение витков между гребнями. Ток в этих витках определяет положение некоторых эквипотенциальных поверхностей, позволяя установить полюсные наконечники так, чтобы вертикальный зазор между гребнями был постоянным. Так как магнитное поле уменьшается между всеми соседними гребнями на одну и ту же величину, количество обратных витков в пазу уменьшается на одно и то же число по отношению к соседнему. Таким образом, в пазу на гребне максимального поля сосредоточено большее число ампер-витков. На рис. 16 также показано, как применение прямых и обратных токов позволяет увеличить вертикальный зазор на радиусе инжекции. На возбуждение такого магнита требуется мощность, равная приблизительно 1,8 *мгвт*.

При таком методе создания требуемой конфигурации поля необходимо пропустить обмотки через гребни, так как гребни расположены по спирали. Прямолинейные промежутки между секторами дают возможность возвращать витки обратно на тот же радиус. Поскольку поле меняется от гребня к гребню приблизительно на 35%, вертикальный зазор между вершинами гребней должен меняться также на 35% от одного конца сектора к другому. Изменение вертикального зазора вдоль гребней будет менее значительным, если сектора, имеющие длину около 9,76 *м*, разделены прямолинейными промежутками, скажем, на 3 части длиной приблизительно по 3 *м*. Тогда вертикальный зазор вдоль гребней будет изменяться приблизительно на 12%, а витки между гребнями могут возвращаться на тот же радиус через каждые $\sim 3{,}4$ *м* (рис. 17).

Введение прямолинейных промежутков, в которых поле приблизительно равно нулю, ведет, однако, к усложнению задачи. Если границы прямолинейных промежутков совпадают с радиусами, то установка и орбиты не подобны. Следовательно, $\sigma$ меняется в процессе ускорения. Эта проблема, изучавшаяся технической группой MURA*), является одной из наиболее важных. Было показано, что расположение прямолинейных промежутков, о котором говорилось выше, приводит к минимальному изменению $\sigma$ при разумной длине промежутков.

*) Ускорительная группа среднего запада. США. *Прим. перев.*

Имеется другой метод получения магнитного поля заданной конфигурации, который упрощает некоторые проблемы. Он изучался технической группой MURA на магнитных моделях. Конфигурация магнита показана на рис. 18. Средняя зависимость поля от радиуса $(r)^k$ достигается с помощью обратных витков, расположенных на полюсах магнита, аналогично тому, как это делается в ускорителе с радиальными секторами. Зависимость поля по азимуту обеспечивается введением железных шимм определенной конфигурации. Так как шиммы располагаются по спиралям, их необходимо разделять несколькими немагнитными прокладками (например, медными вкладышами), для того чтобы магнитный поток не распространялся вдоль шимм. Такие гребни и нужные поля были получены на модели Петерсоном и Эльфом в технической группе MURA.

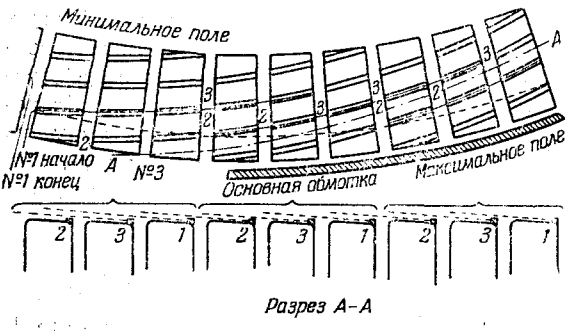


Рис. 17. Схема расположения обмоток в магните со спиральными секторами.

Эксперименты показали, что в кольцевом фазотроне со спиральными секторами возможно смягчить требования к вертикальному зазору. Петерсон и Эльф могли увеличивать $f$ значительно больше $^1/_4$ без уменьшения вертикального зазора и без использования обратных полюсов. Это достигалось

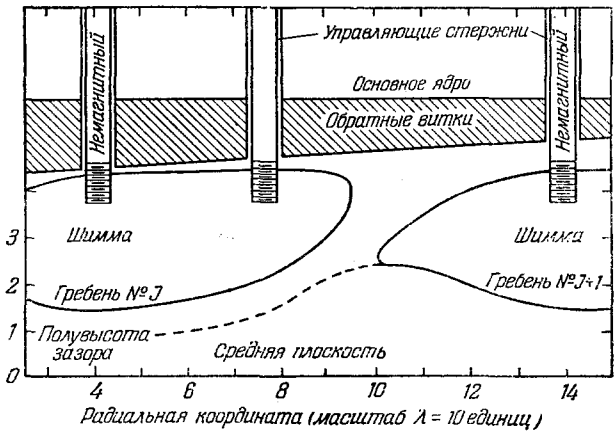


Рис. 18. Конструкция магнита с подвижными шиммами.

путем небольших отклонений от простой синусоидальной формы изменения поля по азимуту. Величина $f \sim 0{,}38$ была получена без больших гармонических искажений поля в средней плоскости. Требуется дальнейшее изучение этой возможности с целью показать, насколько сильно возрастает сильнофокусирующий член в $\nu_z$ при достижимых формах поля. Любое увеличение фокусировки в $z$-направлении позволит увеличить вертикальную апертуру.

Прежде чем выбирать величину вертикального зазора, нужно ответить еще на один вопрос. Как указывалось в § 9, существует предельная амплитуда устойчивых бетатронных колебаний, после достижения которой частицы начинают колебаться около второй равновесной орбиты, расположенной внутри или вне камеры. Если вторая орбита находится внутри камеры, то

частицы будут теряться только в том случае, когда амплитуда колебаний больше наименьшего расстояния от орбиты до стенки камеры. Для радиальных колебаний величина предельной амплитуды может быть заключена в интервале от 0,1 до 0,3 расстояния по радиусу между гребнями, а для вертикальных — значительно меньше. В приведенном примере величина предельной амплитуды небольшая, так как $\sigma_x \sim 2\pi/3$. Поэтому имеет смысл уменьшить влияние некоторых нелинейностей, так как это позволит увеличить вертикальную апертуру за 0,275 расстояния по радиусу между гребнями. Численные расчеты показали, что при некоторых видах нелинейностей не имеет смысла увеличивать вертикальную апертуру, поскольку предельная амплитуда не превышает размеров камеры. В настоящее время в связи с конструированием ускорителя со спиральными секторами и большой полезной вертикальной апертурой исследуются источники нелинейных эффектов. Вообще говоря, если угол $\zeta$ делать меньше, так чтобы колебания мало менялись на протяжении сектора, предельная амплитуда возрастает.

Наиболее обещающим методом уменьшения $\zeta$ и, следовательно, нелинейностей является использование таких магнитов, которые обеспечивают большие значения $f$. Укажем две наиболее важные конструкции магнитов.

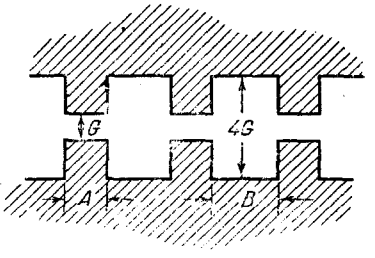


Рис. 19. Вид магнитного зазора с прямоугольными шиммами.

Прямоугольные железные шиммы, вертикальный зазор между которыми составляет $^1/_4$ зазора между полюсами без них (рис. 19). Учитывая поток рассеяния, для случая $A = 2$ и $B = 9$ можно написать $f = \sqrt{2\langle\Delta H^2\rangle}/\overline{H} = 0{,}71$, где $A$ и $B$ даются в единицах половины зазора. Если выбрать, как и в предыдущем примере, $f/w = 330$, то $w = 0{,}00215$. Такая конструкция позволяет сделать хорошую вертикальную апертуру на радиусе инжекции:

$$G = \left[\frac{4\pi w}{(A+B)}\right]\cdot 4688 \text{ см} = 11{,}1 \text{ см}.$$

Коэффициент увеличения установки меньше, чем $(A+B)/\left(A+\frac{1}{4}B\right) = 2{,}3$, т. е. вполне приемлем для радиуса инжекции. Если не требовать подобия равновесных орбит, то пропорции гребней можно изменить, а коэффициент увеличения установки уменьшить на радиусе, соответствующем максимальной энергии. Например, можно осуществить непрерывный переход к $A = 9$, $B = 8$ и $G = 7$ *см* при том же значении $f/w$ с учетом потока рассеяния. Коэффициент увеличения установки при учете краевых эффектов будет тогда 1,38.

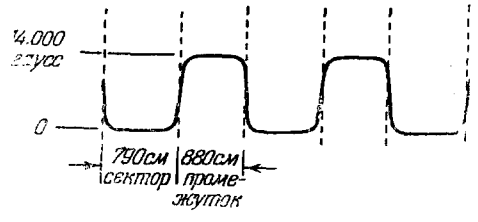


Рис. 20. Вид поля вдоль окружности в магните с разделенными спиральными секторами на радиусе 10 000 *см*, при зазоре 30 *см*.

Второй конструкцией, обладающей многими преимуществами, является магнит с разделенными спиральными секторами. Обматывая каждый гребень в отдельности прямыми витками и располагая витки на поверхности полюсов, как показано на рис. 12 для магнита с радиальными секторами, гребни можно разделить так, чтобы поле между ними уменьшалось почти до нуля. Это позволяет сильно увеличить $f$. Для поля, изображенного на рис. 20, коэффициент увеличения установки равен 2, коэффициент неоднородности поля $f = 1{,}28$ и верти-

кальная апертура может быть около 30 *см*. Угол между краями секторов и орбитой еще достаточно велик, чтобы обеспечить большую предельную амплитуду бетатронных колебаний (возможна амплитуда до 90 *см*). Форма секторов показана на рис 21.

Чтобы уменьшить потребляемую мощность, вертикальную апертуру в области максимального поля можно сделать много меньше 30 *см*. Однако апертуру на радиусе инжекции в высшей степени желательно сохранить.

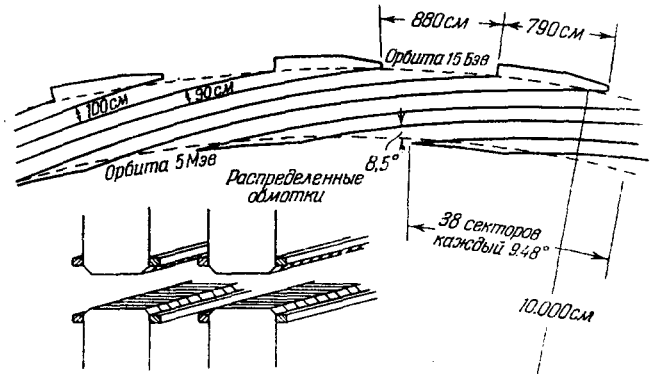


Рис. 21. Вид магнита с разделенными спиральными секторами. Каждый гребень имеет собственные обмотки.

Хотя такая система и приводит к большому периметру установки, тем не менее она обладает многими преимуществами по сравнению с уже описанными системами. Такой магнит проще соорудить, легче построить вакуумную камеру. Доступ к мишеням также облегчается. В тех местах, где потребуются большие прямолинейные промежутки, секторы можно раздвинуть, не нарушая подобия. Предельная амплитуда бетатронных колебаний достаточно велика, и поэтому рабочая апертура на радиусе инжекции существенно увеличивается.

## 14. Бетатрон с постоянным ведущим полем

Постоянное ведущее поле дает возможность сильно увеличивать время инжекции при использовании бетатронного ускорения[4]. Частицы можно инжектировать все время, пока нарастает центральный магнитный поток. В процессе ускорения частицы раскручиваются по спиралям, попадая в область максимального поля. После того, как изменение потока, пронизывающего орбиту частицы, становится равным величине $\Delta\Phi$, соответствующей увеличению импульса до его конечного значения, частица достигает мишени (или радиуса эжектора). Частицы продолжают поступать на мишень до тех пор, пока поток продолжает возрастать за величину $\Delta\Phi$. Если величина $\Delta\Phi$ меньше максимального центрального потока $\Phi_0$, то время полезной инжекции и эжекции может составлять 25% времени изменения центрального потока от $-\Phi_0/2$ до $+\Phi_0/2$. В том случае, когда сердечник питается переменным током, скважность $D$ (относительное время полезной инжекции) выражается формулой (ср. рис. 22)

$$D = \frac{1}{2\pi} \arccos \left[\frac{2\Delta\Phi}{\Phi_0} - 1\right]. \qquad (14.1)$$

Чтобы частицы не терялись из-за соударения с инжектором, требуется определенная минимальная скорость нарастания магнитного потока в момент инжекции; фактически это приводит к уменьшению скважности.

Поскольку равновесная орбита не является круговой и радиус ее меняется в процессе ускорения, связь между $\Delta\Phi$ и приращением импульса

отличается от таковой в обычном бетатроне. Напряжение, приходящееся на оборот, в гауссовой системе равно

$$V = \frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt}, \tag{14.2}$$

где $\Phi$ — поток в бетатронном сердечнике.

Прирост энергии за единицу времени определяется формулой

$$\frac{dE}{dt} = \left(\frac{e\omega}{2\pi c}\right)\frac{d\Phi}{dt}. \tag{14.3}$$

Здесь $\omega/2\pi$ — частота обращения частицы [уравнение (10.3)]. Отсюда получим

$$R\cdot dp = \frac{dE}{\omega} = \left(\frac{e}{2\pi c}\right) d\Phi. \tag{14.4}$$

Следовательно, требуемое изменение ускоряющего потока будет определяться соотношением

$$\Phi_2 - \Phi_1 = \frac{2\pi c\bar{R}}{e}(p_2 - p_1), \tag{14.5}$$

где

$$\bar{R} = \frac{1}{p_2 - p_1}\int_{p_1}^{p_2} R\,dp. \tag{14.6}$$

Если $k = \text{const}$, то из уравнения (5.14) следует

$$\bar{R} = R_2\cdot\left(\frac{k+1}{k+2}\right)\frac{1-(p_1/p_2)^{\frac{k+2}{k+1}}}{1-(p_1/p_2)}.$$

Для $p_1 \ll p_2$ это уравнение упрощается

$$\bar{R} = \left(\frac{k+1}{k+2}\right) R_2. \tag{14.7}$$

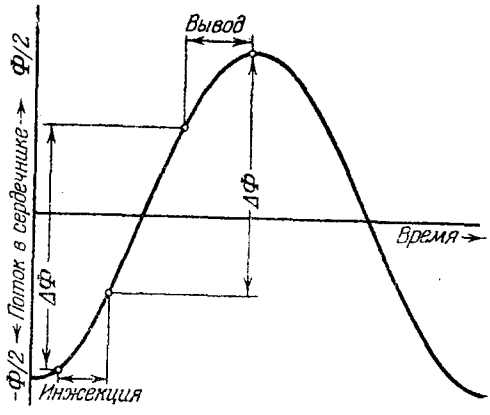


Рис. 22. Зависимость бетатронного потока от времени.

Использование постоянного ведущего поля в области энергий от 20 до 300 *Мэв* позволяет увеличить скважность более, чем в $10^4$ раз по сравнению с существующими бетатронами и синхротронами. Увеличение тока пучка будет, по-видимому, меньше вследствие влияния пространственного заряда при инжекции.

В бетатронах с импульсным ведущим полем большое количество энергии рассеивается в зазоре магнита, и поэтому необходимо использовать оборудование, способное создавать большие токи и напряжения. В бетатронах с постоянным ведущим полем в импульсном режиме работает только ускоряющий сердечник. Он может быть выполнен в виде замкнутого железного кольца. В этом случае рассеяние значительно уменьшается и, следовательно, уменьшается потребляемая мощность. Оборудование для такой установки требуется более простое.

Для ускорения электронов до нескольких сот *Мэв* можно использовать бетатрон как с радиальными, так и со спиральными секторами. Требования к конструкции остаются теми же, что и для кольцевого фазотрона. Так как изменение центрального потока для заданного интервала изменения импульса пропорционально периоду обращения частицы, то для бетатрона проблема уменьшения периметра установки с радиальными секторами становится вдвойне

важной. Поэтому для бетатронов, по-видимому, более разумно выбирать $N$ в интервале от 10 до 30.

Ускоренный пучок электронов в сильнофокусирующем бетатроне с постоянным полем приблизительно моноэнергетичен, а длительность импульса соответствует скважности, о которой говорилось выше. Современные бетатроны и синхротроны дают крайне моноэнергетичный пучок и большую длительность импульса. Таким образом, бетатрон с постоянным ведущим полем, не ухудшая практически характеристик пучка, позволяет получать, кроме того, средние токи в пучке порядка нескольких миллиампер. Поэтому он является весьма выгодной установкой для ускорения электронов до энергий от нескольких десятков *Мэв* до нескольких сотен *Мэв*.

## 15. Сильнофокусирующий циклотрон

Чтобы заставить полурелятивистские частицы обращаться в циклотроне с постоянной частотой и по приблизительно круговым орбитам, необходимо создать поле, растущее с радиусом. Неустойчивость движения в аксиальном направлении, возникающую при этом, можно ликвидировать, используя принцип сильной фокусировки. Существует множество конфигураций магнитного поля, позволяющих осуществить такой циклотрон. Впервые циклотрон такого типа был предложен Томасом[5]. Циклотрон Томаса является по существу сильнофокусирующим ускорителем с постоянным полем, синусоидально меняющимся по азимуту. Он состоит из трех или большего числа радиальных секторов. Томас показал, что в такой машине существуют устойчивые орбиты для энергий ниже предельной, определяемой числом секторов. Большая экспериментальная работа по циклотрону Томаса была проделана в Калифорнийском университете. Она завершилась успешным сооружением и испытанием двух экспериментальных моделей, ускоряющих электроны до скорости, равной половине скорости света[18]. Мы кратко обсудим здесь основные черты сильнофокусирующего циклотрона, делая основной упор на конструкцию со спиральными секторами.

В § 10 было получено соотношение (10.9) между полной энергией $E$ и средним показателем поля $k$ для циклотрона. В § 7 было получено также приближенное соотношение, связывающее $k$ с частотой бетатронных колебаний. Для ускорителей со спиральными секторами справедлива простая формула (6.24)

$$\nu_x = (1 + k)^{1/2}. \tag{15.1}$$

Согласно формуле (10.9) $\nu_x$ непосредственно связано с энергией

$$\nu_x \approx \frac{E}{E_0}. \tag{15.2}$$

Движение частиц в таком ускорителе, как и в обычном циклотроне, начинается от центра установки при $E \sim E_0$ и $\nu_x \sim 1$. По мере увеличения энергии, как следует из уравнения (15.2), частицы последовательно должны проходить целые или полуцелые резонансы при значениях энергии, равных целому или полуцелому кратному $E_0$. Если считать первый целый резонанс определяющим энергию частиц в циклотроне, то максимальная кинетическая энергия будет равна приблизительно энергии покоя (согласно более точным расчетам даже несколько меньше[19]). При достаточно большом напряжении на дуантах и малых искажениях поля, по-видимому, будет возможно провести частицы через резонансы достаточно быстро и тем самым избежать заметного увеличения амплитуды колебаний. Во всяком случае, для обеспечения устойчивости $\nu_x$ должно быть меньше $^1/_2 N$, и достижимая энергия не может превышать

$^1/_2 NE_0$. Третий дробный резонанс (см. § 9) при $\sigma_x = 2\pi/3$ ($\nu_x = N/3$) может резко понизить величину достижимой энергии $E$ при данном числе секторов $N$.

В ускорителе с радиальными секторами при малом числе элементов периодичности $N (N < 8)$ сильная фокусировка обеспечивается главным образом $\eta$-членом в уравнении (5.13). Следовательно, соотношения (15.1) и (15.2) по-прежнему приблизительно правильны, и предыдущее рассмотрение качественно верно. В особенности это относится к циклотрону Томаса.

Как следует из уравнений (6.24) и (6.25), в циклотроне, для которого $\eta$-член в уравнении (5.13) является доминирующим, фокусировка зависит от $k$ и величины

$$F = 2\left\langle\left(\frac{1}{\eta}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial\Theta}\right)^2\right\rangle + \frac{1}{2}f^2. \tag{15.3}$$

Фокусирующий параметр $F$, согласно уравнениям (6.24) и (6.25), равен

$$F = \nu_x^2 + \nu_z^2 - 1. \tag{15.4}$$

В § 6 было отмечено, что в ускорителях со спиральными секторами оптимальная величина коэффициента неоднородности поля $f$ равна приблизительно $^1/_4$. С помощью уравнения (6.26) фокусирующий параметр $F$ для этого значения $f$ можно записать в виде

$$F \approx \frac{1}{16}\left(\operatorname{tg}^2\zeta + \frac{1}{2}\right). \tag{15.5}$$

На рис. 23 начерчены окружности постоянного $F$ в координатах $\nu_x$, $\nu_z$. Вертикальные линии соответствуют постоянному $k$ и, следовательно, постоянной

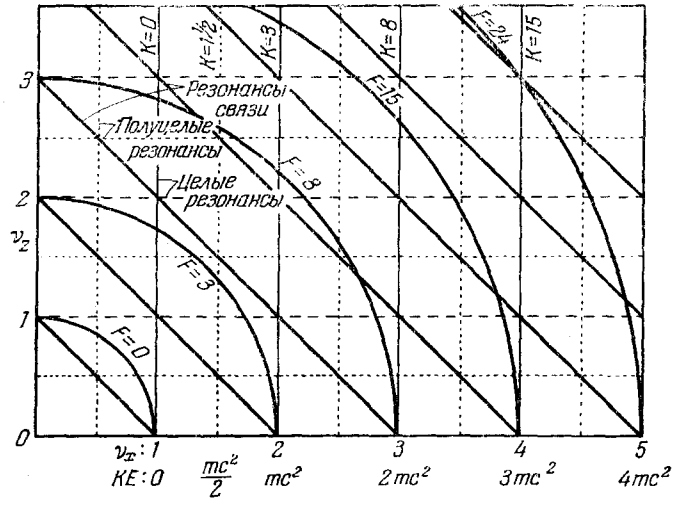


Рис. 23. Рабочая область для циклотрона со спиральными секторами. $F$ — параметр фокусировки.

энергии $E$. Нанесены также линии, соответствующие целым и полуцелым резонансам ($\nu_x$, $\nu_z$ — целые или полуцелые) и резонансам связи ($\nu_x + \nu_z$ — целое). В процессе ускорения рабочая точка $\nu_x$, $\nu_z$ будет перемещаться по кривой, связывающей линию $k = 0$ с линией $k = (E/E_0)^2 - 1$. Форма этой кривой будет зависеть от способа изменения $F$ с радиусом. В реальной ма-

шине в центре $F$ приблизительно равно нулю, так что кривая будет начинаться вблизи точки $\nu_x = 1$, $\nu_z = 0$. При ускорении частиц можно ожидать трудностей, когда рабочая точка будет пересекать какую-либо резонансную линию; особенно опасны целые резонансы или резонансы с вертикальными колебаниями, так как вертикальная апертура не велика. Из графика на рис. 23 следует, что частицы обязательно пройдут полуцелый резонанс с радиальными колебаниями вблизи $E = E_0 + \frac{1}{2}E_0$ и резонанс связи, прежде чем достигнут энергии $E = 2E_0$.

Остановимся более подробно на основных характеристиках сильнофокусирующего циклотрона. Частота обращения частиц в циклотроне равна

$$\frac{\omega}{2\pi} = \frac{\beta c}{2\pi R} = \frac{c}{2\pi \lambda\!\!\!^{-}}, \tag{15.6}$$

где $2\pi\lambda\!\!\!^{-}$ — длина волны в. ч. (предполагается, что ускорение идет на первой гармонике). Отсюда получим

$$\frac{E}{E_0} = \frac{\lambda\!\!\!^{-}}{(\lambda\!\!\!^{-2} - R^2)^{1/2}}. \tag{15.7}$$

Импульс $p(R)$ равен

$$p = \frac{mcR}{(\lambda\!\!\!^{-2} - R^2)^{1/2}}, \tag{15.8}$$

и, следовательно, среднее магнитное поле определяется формулой

$$\bar{H} = \frac{pc}{eR} = \frac{mc^2/e}{(\lambda\!\!\!^{-2} - R^2)^{1/2}}. \tag{15.9}$$

Тогда из уравнения (10.9) для $k$ будем иметь

$$k = \frac{R^2}{\lambda\!\!\!^{-2} - R^2}. \tag{15.10}$$

Соотношения (15.6) — (15.10) являются точными. Для того чтобы определить форму спиральных гребней, необходимо решить уравнения для бетатронных колебаний. Приблизительную картину можно составить на основании уравнений (15.1), (15.4) и (15.5). Совместно с уравнением (15.10) эти формулы дают

$$\operatorname{tg}^2 \zeta = \frac{16R^2}{\lambda\!\!\!^{-2} - R^2} + 16\nu_z^2 - \frac{1}{2}. \tag{15.11}$$

Предположим, что рабочая точка на рис. 23 движется вдоль горизонтальной линии $\nu_z = 1/\sqrt{32}$. Тогда

$$\operatorname{tg} \zeta \cong \frac{4R}{(\lambda\!\!\!^{-2} - R^2)^{1/2}}. \tag{15.12}$$

Если пренебречь зубчатостью равновесной орбиты, то можно заменить $R$ на радиус $r$. Подставляя затем (15.12) в (6.30), получим уравнение спирального гребня в полярных координатах

$$\theta_0 = 4 \arcsin\left(\frac{r}{\lambda\!\!\!^{-}}\right). \tag{15.13}$$

Если предположить, что изменение поля по азимуту синусоидально, то функция $\mu$ имеет вид

$$\mu = 1 + \frac{1}{4}\cos[N(\theta - \theta_0)], \tag{15.14}$$

и магнитное поле дается формулой

$$H = \overline{H}\mu = \frac{mc^2/e}{(\lambda\!\!\!^{-2} - R^2)^{1/2}} \left\{1 + \frac{1}{4}\cos\left[N\theta - 4N\arcsin\left(\frac{r}{\lambda\!\!\!^{-}}\right)\right]\right\}. \quad (15.15)$$

Число секторов $N$ в этом приближении считалось произвольным. Если энергия ускоренных частиц $E = 2E_0$ (кинетическая энергия для протонов $\sim 1$ *Бэв*), то $\nu_x \simeq 2$ на внешнем радиусе. Чтобы не нарушалась устойчивость бетатронных колебаний, $N$ в этом случае должно быть не меньше 4, а чтобы избежать третьего дробного резонанса при $\sigma_x = 2\pi/3$, нужно, по-видимому,

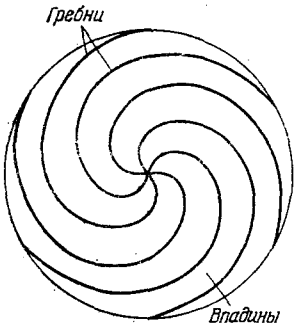


Рис. 24. Расположение гребней в циклотроне с 6 спиральными секторами.

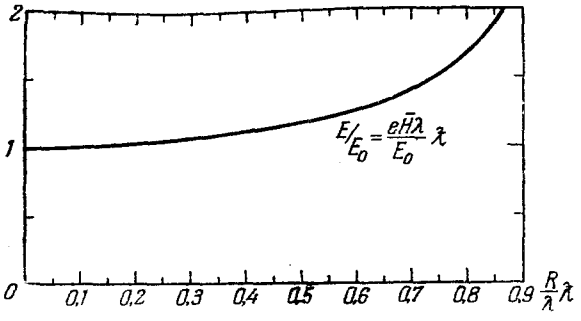


Рис. 25. Зависимость полной энергии и магнитного поля от радиуса в циклотроне с постоянной частотой ($E_0$ — масса покоя и $2\pi\lambda$ — длина волны колебаний).

выбрать $N = 6$. На рис. 25 представлены $E$ и $\overline{H}$ как функции $R$ для такого циклотрона. На рис. 24 показано расположение гребней, даваемое уравнением (15.13), для циклотрона с шестью спиральными секторами на максимальную энергию $E = 2E_0$.

## ПРИЛОЖЕНИЕ А

### Гладкое приближение

Пусть уравнение движения в одном из измерений имеет вид

$$\frac{d^2x}{d\theta^2} = f(x, \theta), \quad (A.1)$$

где $f(x, \theta)$ — периодическая функция с периодом $2\pi/N$ по $\theta$. Мы будем предполагать, что $N \gg \nu$, т. е. длина волны бетатронных колебаний велика по сравнению с длиной элемента периодичности. Поэтому разумно искать приближенное решение в виде

$$x = X + \xi(X, \theta), \quad (A.2)$$

где $X(\theta)$ — «гладкие» колебания, удовлетворяющие уравнению

$$\frac{d^2X}{d\theta^2} = F(X), \quad (A.3)$$

не зависящему от периодической структуры магнита. $\xi(X, \theta)$ — «пульсации» периодичные по $\theta$ с периодом $2\pi/N$. Среднее значение пульсаций для фиксированного $X$ равно нулю. Будем предполагать также, что пульсации $\xi$ и производные $dX/d\theta$, $d^2X/d\theta^2$ малы. Смысл малости этих величин мы вскоре уточним.

Подставляя (А.2) в (А.1), получим

$$X'' + \xi_{\theta\theta} + 2\xi_{X\theta} X' + \xi_{XX} X'^2 + \xi_X X'' = f(X + \xi, \theta), \tag{A.4}$$

где штрихи означают производные по $\theta$. Усредним теперь по $\theta$, считая $X$, $X'$, $X''$ фиксированными. Учитывая, что $\langle\xi\rangle = 0$, получим уравнение, соответствующее (А.3):

$$\frac{d^2X}{d\theta^2} = \langle f(X + \xi, \theta)\rangle. \tag{A.5}$$

Далее, используя определение (4.14), можем записать

$$\xi_{\theta\theta} = \{f(X + \xi, \theta)\} - 2\xi_{X\theta} X' - \xi_{XX} X'^2 - \xi_X X''. \tag{A.6}$$

Отсюда видно, что последние два члена порядка $(\sigma/2\pi)^2$ относительно первого и поэтому пренебрежимо малы, когда $N \gg \nu$. Второй член имеет порядок $\sigma/\pi$ относительно первого, но можно показать, что в первом приближении он не влияет на решение уравнения (А.5). Поэтому пренебрежем последними тремя членами в уравнении (А.6) и заменим $\{f(X + \xi, \theta)\}$ на $\{f(X, \theta)\}$, т. е. предположим, что $\{\xi f_X\} \ll \{f\}$. Теперь мы можем проинтегрировать уравнение (А.6) и получить первое приближение для пульсаций

$$\xi = f_2(X, \theta). \tag{A.7}$$

Здесь использованы обозначения (4.16), (4.17). Подставив выражение для пульсаций (А.7) в уравнение (А. 5) и ограничившись первым порядком по $\xi$, найдем гладкое приближение

$$\frac{d^2X}{d\theta^2} = \langle f\rangle + \langle f_2 \cdot f_X\rangle. \tag{A.8}$$

(По существу тот же самый результат был получен Сигургейрссоном [20].) Приближенное решение уравнения (А.1) мы получим, прибавляя к решению уравнения (А.8) пульсации, определяемые выражением (А. 7). Второй член в правой части уравнения (А. 8) можно проинтегрировать по частям и записать уравнение в виде

$$\frac{d^2X}{d\theta^2} = \langle f\rangle - \langle f_1 \cdot f_{X_1}\rangle. \tag{A.9}$$

Если правая часть в (А.1) зависит от $x$ линейно

$$f(x, \theta) = g(\theta)\, x, \tag{A.10}$$

то уравнение (А.9) является линейным уравнением

$$\frac{d^2X}{d\theta^2} = [\langle g\rangle - \langle g_1^2\rangle]\, X. \tag{A.11}$$

Приближенное решение этого уравнения выражается через функции Флоке

$$x = e^{\pm i\nu\theta}(1 + g_2(\theta)], \tag{A.12}$$

где

$$\nu^2 = \langle g_1^2\rangle - \langle g\rangle. \tag{A.13}$$

Этот результат можно обобщить на случай двух измерений

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2x}{d\theta^2} &= f(x,\ z,\ \theta),\\ \frac{d^2z}{d\theta^2} &= g(x,\ z,\ \theta).\end{aligned}\right\} \tag{A.14}$$

Решения ищем в виде

$$\left.\begin{aligned}x &= X+\xi,\\ z &= Z+\zeta.\end{aligned}\right\} \tag{A.15}$$

Отсюда получим приближенные уравнения

$$\left.\begin{aligned}\xi &= f_2(X,\ Z,\ \theta),\\ \zeta &= g_2(X,\ Z,\ \theta),\end{aligned}\right\} \tag{A.16}$$

где $X$ и $Z$ удовлетворяют уравнениям

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2X}{d\theta^2} &= \langle f\rangle + \langle f_2\cdot f_X\rangle + \langle g_2\cdot f_Z\rangle,\\ \frac{d^2Z}{d\theta^2} &= \langle g\rangle + \langle f_2 g_X\rangle + \langle g_2\cdot g_Z\rangle.\end{aligned}\right\} \tag{A.17}$$

Усреднение по $\theta$ здесь проведено в предположении, что $X$, $Z$ постоянны.

Как было показано, уравнения (A.13) дают значения $\nu$ или $\sigma = \frac{2\pi\nu}{N}$ с точностью 10% от $[\langle g_1^2\rangle]^{1/2}$ при условии, что $[\langle g_1^2\rangle]^{1/2} \lesssim \frac{N}{4}$. Нами были рассмотрены также некоторые нелинейности и было показано, что уравнения (A.8) и (A.17) находятся в хорошем согласии с более точными расчетами, за исключением окрестности границ области устойчивости. Сами границы области устойчивости, где длина волны бетатронных колебаний равна $\infty$, также достаточно точно определяются из уравнений (A.8) и (A.17). Резонансные же линии, соответствующие «секторным» резонансам (представляющие больший интерес), где длина волны бетатронных колебаний становится равной длине небольшого числа секторов, вообще не предсказываются «гладкими» уравнениями.

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА


1. Courant, Livingston and Snyder, Phys. Rev. **88**, 1190 (1952).
2. K. R. Symon, Phys. Rev. **98**, 1152 (A) (1955).
3. Kerst, Terwilliger, Jones and Symon, Phys. Rev. **98**, 1153 (A) (1955).
4. Terwilliger, Jones, Kerst and Symon, Phys. Rev. **98**, 1153 (A) (1955).
5. L. H. Thomas. Phys. Rev. **54**, 588 (1938).
6. K. R. Symon, Midwestern Universities Research Association report, MURA—KRS—8 (не опубликовано). E. A. Crosbie and B. Hamermesh, Argonne Accelerator Group, Progress Report, № 7, July 13, 1955 (не опубликовано).
7. N. M. Blachman and E. D. Courant, Rev. Sci. Instr. **20**, 596 (1949).
8. P. A. Sturrock, Static and Dynamic Electron Optics (Cambridge University Press, Cambridge, 1955), гл. 7.
9. Laslett, Snyder and Hutchinson, Tables for the determination of stability boundaries and characteristics exponents for a Hill's equation characterizing the Mark FFAG synchrotron, Midwestern Universities Research Association Notes, 1955 (не опубликовано).
10. J. Moser, Nachr. Acad. Wiss. Göttingen, Math.-physik. Kl. IIa, № 6 (1955).
11. R. Hagedorn, CERN Report, CERN — RS/RH9, 1955 (не опубликовано).

12. Courant, Kassner, Raka, Smith and Spiro, Phys. Rev. **100**, 1269 (A) (1955).
13. D. Bohm and L. Foldy, Phys. Rev. **70**, 249 (1946); D. M. Dennison and T. H. Berlin, Phys. Rev. **69**, 542 (1946); R. Q. Twiss and N. H. Frauk, Rev. Sci. Instr. **20**, 1 (1949).
14. L. C. Teng, Phys. Rev. **100**, 1247 (1955).
15. E. D. Courant and H. S. Snyder, Internal Brookhaven National Laboratory Report, 1953 (не опубликовано); G. Lüders, CERN reports CERN — PS/GL4, GL6, GL7, GL8 and GL9 (не опубликовано). E. Crosbie, Argoune Accelerator Group, Progress Report, № 5, 1955 (не опубликовано).
16. N. M. Blachman and E. D. Courant, Phys. Rev. **74**, 140 (1948); Phys. Rev. **75**, 315 (1949).
17. J. Seiden, Compt. rend. **237**, 1075 (1953); D. W. Kerst, Phys. Rev. **60**, 47 (1941); J. P. Blewett, Phys. Rev. **69**, 87 (1946).
18. D. L. Judd, Phys. Rev. **100**, 1804 (A) (1955); Pyle, Kelly, Richardson and Thornton, Phys. Rev. **100**, 1804 (A) (1955); Heusinkveld, Jakobson, Rubj, Smith and Wright, Phys. Rev. **100**, 1804 (A) 1955.
19. D. S. Falk and T. A. Welton, Bull. Am. Phys. Soc., сер. II, 1, 60 (1956).
20. T. Sigurgiersson, CERN — T/TS — 1; CERN — T/TS — 3, 1953 (не опубликовано).