

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК**ТЕОРИЯ МНОГОКРАТНОГО РАССЕЯНИЯ ГАММА-ЛУЧЕЙ****В. С. Галишев, В. И. Огиевецкий, А. Н. Орлов****СОДЕРЖАНИЕ**

I. Введение	161
§ 1. Основные процессы взаимодействия гамма-излучения с веществом	162
§ 2. Число квантов, интенсивность и фактор возрастания	166
II. Уравнение переноса излучения	167
§ 3. Уравнение переноса излучения и разложение плотности фотонов по полиномам Лежандра	167
§ 4. Энергетический спектр и угловое распределение фотонов в неограниченной однородной среде	169
III. Метод полиномиальных разложений. Результаты и сравнение с опытом	172
§ 5. Основы метода полиномиальных разложений	172
§ 6. Плоский изотропный источник	172
§ 7. Точечный (изотропный) источник	178
§ 8. Численные результаты и сравнение с опытом	179
1. Плоский источник	179
2. Точечный источник	185
IV. Приближение малых углов. Энергетический спектр рассеянного гамма-излучения на больших глубинах проникновения	191
§ 9. Вводные замечания	191
§ 10. Уравнение переноса излучения в приближении малых углов рассеяния	192
§ 11. Решение уравнения переноса излучения в приближении малых углов	193
§ 12. Эволюция углового распределения с ростом глубины проникновения	195
§ 13. Состояние ограниченного радиационного равновесия	196
§ 14. Энергетический спектр гамма-излучения на больших глубинах проникновения в приближении малых углов	196
§ 15. Учет угловых отклонений	197
§ 16. Полуасимптотический метод Спенсера	200
V. Другие приближенные методы вычисления многократного рассеяния	202
§ 17. Метод Монте-Карло	202
§ 18. Приближенные прямые методы	207
§ 19. Метод последовательного прохождения через тонкие слои	212
Заключение	214
Цитированная литература	214

I. ВВЕДЕНИЕ

За последнее десятилетие широкое применение в науке и технике получили мощные источники гамма-лучей. Распространяясь в различных поглощающих средах (воздух, бетон, вода, свинец и т. д.), гамма-лучи испытывают поглощение и рассеяние, причем при большой толщине поглотителя основная

доля интенсивности приходится не на первичные, а на многократно рассеянные кванты. Нетрудно показать (Губанов⁴⁴), что при начальной энергии квантов в несколько *Мэв* количество актов рассеяния до момента поглощения кванта путем фотоэффекта может достигать в легких поглотителях 10—15. Ослабление интенсивности I гамма-лучей с глубиной проникновения x в поглотитель при наличии многократного рассеяния не следует простому экспоненциальному закону $I = I_0 e^{-\mu x}$. Ослабление зависит сложным образом как от энергетического спектра падающего излучения, так и от свойств и геометрии поглотителя. С целью выяснения этой зависимости было проведено много экспериментальных исследований и теоретических расчетов. В опубликованных до сих пор обзорах^{40, 42, 57} по взаимодействию гамма-излучения с веществом рассматриваются лишь отдельные работы по многократному рассеянию гамма-лучей.

Целью настоящего обзора является систематическое изложение опубликованных в литературе методов теоретического исследования и расчета многократного рассеяния гамма-лучей. Экспериментальные данные приводятся лишь для сопоставления с результатами теории*).

Мы ограничиваемся рассмотрением гамма-квантов с энергией от 0,05 до 10 *Мэв*. За нижней границей этого интервала вероятность поглощения кванта значительно больше вероятности рассеяния, так что многократное рассеяние практически исключено, а при энергиях выше нескольких *Мэв* становятся существенными каскадные процессы, исследование которых составляет предмет каскадной теории ливней (см., например,³⁹). К тому же энергия гамма-квантов естественных и искусственных радиоактивных источников лежит ниже этого предела.

§ 1. Основные процессы взаимодействия гамма-излучения с веществом

В настоящем параграфе кратко рассмотрены элементарные процессы взаимодействия гамма-квантов с веществом поглотителя и приводятся формулы и обозначения, необходимые для дальнейшего изложения.

Многократное рассеяние гамма-лучей происходит путем последовательных элементарных актов взаимодействия квантов с веществом, точнее, с различными элементарными частицами или полями. В настоящее время можно указать ряд типов таких элементарных процессов взаимодействия, которые классифицируются по виду полей (частиц), с которыми гамма-квант взаимодействует, и по тем изменениям, которые претерпевает квант при взаимодействии. Возможно взаимодействие гамма-квантов с 1) электронами, 2) нуклонами, 3) электромагнитным полем электронов и нуклонов, 4) мезонным полем нуклонов. В результате каждого из этих процессов может произойти: А) полное поглощение кванта, Б) неупругое рассеяние, В) упругое рассеяние.

Таким образом, возможно всего $4 \times 3 = 12$ различных процессов взаимодействия. Вероятность их зависит от энергии квантов и для некоторых процессов очень мала. Весьма существенно, что к мало вероятным процессам относится рассеяние гамма-квантов друг на друге. Это позволяет пользоваться принципом суперпозиции интенсивностей гамма-излучения.

В интересующей нас области энергии наиболее часто происходят следующие процессы: (1А) фотоэлектрическое поглощение (фотоэффект), (1Б) некогерентное рассеяние на электроны (комpton-эффект), (3А) образование пары электрон—позитрон. Процессы — (1А) и (3А) приводят к полному поглощению кванта. Правда, при тормозном излучении образовавшихся в этих процессах электронов и позитронов возможно появление вторичных гамма-квантов, но ввиду малой

*) Для справочных целей в списке литературы экспериментальные работы выделены и указано, какие измерения в них приведены. Выделены также те теоретические работы, в которых получены конкретные численные результаты.

вероятности таких каскадных процессов мы будем считать единственным источником рассеянных квантов комптон-эффект.

Переходя к количественному описанию вероятности процессов поглощения и рассеяния, условимся в дальнейшем энергию выражать в единицах энергии покоя электрона $m_e c^2 = 0,5108 \approx 0,5$ Мэв и обозначать ее в этом случае через α . При обсуждении экспериментальных данных и для удобства сравнения с оригинальными работами энергия будет иногда выражаться в Мэв и тогда обозначаться через E , так что

$$\alpha = E/m_e c^2 \approx 2E.$$

Длину волны гамма-лучей λ будем выражать в комптоновских единицах $\lambda_k = h/mc = 0,02427 \cdot 10^{-8}$ см*).

Приведем теперь выражения для вероятностей перечисленных трех процессов, которые нам потребуются в дальнейшем. Эти вероятности определяются эффективными сечениями, выводы и сводки которых даются во многих монографиях и обзорах^{41, 56}. Ниже приведены формулы для эффективных сечений σ , рассчитанных на атом с порядковым номером Z .

При фотоэффекте гамма-фотон поглощается атомным электроном, который отрывается от атома. Энергия кванта частично расходуется на преодоление связи электрона с атомом, а большая часть переходит в кинетическую энергию электрона. Основная доля полного сечения фотоэффекта приходится на электроны K -оболочки. В нерелятивистской области ($\alpha < 1$) в борновском приближении эта доля равна

$$\sigma_{\Phi} = \sigma_0 \frac{4\sqrt{2}}{(137)^4} Z^5 \alpha^{-\frac{7}{2}}, \quad (1,1)$$

где

$$\sigma_0 = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 = \frac{8\pi}{3} r_0^2 = 6,6537 \cdot 10^{-25} \text{ см}^2 \quad (1,2)$$

сть сечение томсоновского рассеяния. В крайней релятивистской области $\alpha \gg 1$)

$$\sigma_{\Phi} = \sigma_0 \frac{3}{2(137)^4} Z^5 \alpha^{-1}. \quad (1,3)$$

В промежуточной области энергий ($\alpha \approx 1$) теория дает более сложные выражения. Чтобы учесть фотоэффект на электронах других оболочек, σ_{Φ} принято умножать на $5/4$ (точнее см., например,⁶⁶).

Комптон-эффект можно рассматривать как столкновение гамма-кванта с атомным электроном⁴⁷. Поскольку энергия связи электрона в атоме значительно меньше энергии фотона, электрон можно рассматривать как свободный. Используя релятивистские законы сохранения энергии и импульса при столкновении, нетрудно получить зависимость между энергией α_0 падающего фотона, энергией α рассеянного фотона и углом рассеяния θ :

$$\alpha = \frac{\alpha_0}{1 + \alpha_0(1 - \cos \theta)}. \quad (1,4)$$

Энергия $\alpha_0 - \alpha$ передается электрону отдачи. Поскольку численно $\lambda = \alpha^{-1}$, из (1,4) следует

$$\lambda = \lambda_0 + 1 - \cos \theta. \quad (1,5)$$

*) Иногда под λ_k понимают величину, в 2π раз меньшую.

Эффективное сечение комптоновского рассеяния определяется формулой Клейна—Нишины—Тамма

$$d\sigma_k = Z \frac{r_0^2}{2} \left(\frac{\alpha}{\alpha_0} \right)^2 \left(\frac{\alpha}{\alpha_0} + \frac{\alpha_0}{\alpha} - 1 + \cos^2 \theta \right) d\Omega, \quad (1,6)$$

где $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$ — элементарный телесный угол около направления вылета рассеянного кванта. Произведение $d\sigma_k$ на число атомов в 1 см^3 и численно равно вероятности $dW_{\theta, \varphi}$ рассеяния при прохождении квантом пути в 1 см и может быть представлено в виде

$$dW_{\theta, \varphi} = \bar{K}(\cos \theta) \sin \theta d\theta d\varphi, \quad (1,7)$$

где

$$\bar{K}(\cos \theta) = nZ \frac{r_0^2}{2} \left(\frac{\alpha}{\alpha_0} \right)^2 \left(\frac{\alpha}{\alpha_0} + \frac{\alpha_0}{\alpha} - 1 + \cos^2 \theta \right) \quad (1,8)$$

— плотность вероятности. Интегрируя (1,7) по азимуту φ , получим вероятность рассеяния независимо от азимута

$$dW_{\theta} = K(\cos \theta) \sin \theta d\theta, \quad (1,9)$$

где

$$K = 2\pi \bar{K}. \quad (1,10)$$

В ряде случаев требуется выражение для вероятности рассеяния не в заданном направлении θ, φ , а с заданным изменением энергии от α_0 до α . Заменяя в (1,9) $\cos \theta$ согласно (1,4), получим

$$dW_{\alpha} = K \left(\frac{1}{\alpha_0}, \frac{1}{\alpha} \right) \frac{d\alpha}{\alpha^2} = K'(\alpha_0, \alpha) d\alpha. \quad (1,11)$$

Далее легко найти вероятность рассеяния с изменением длины волны от λ_0 до λ . Для этого следует в (1,9) заменить $\cos \theta$ через λ согласно (1,5). Тогда

$$dW_{\lambda} = K(\lambda_0, \lambda) d\lambda, \quad (1,12)$$

где

$$K(\lambda_0, \lambda) = nZ\pi r_0^2 \left(\frac{\lambda_0}{\lambda} \right)^2 \left[\frac{\lambda_0}{\lambda} + \frac{\lambda}{\lambda_0} - 2(\lambda - \lambda_0) + (\lambda - \lambda_0)^2 \right]. \quad (1,13)$$

Наконец, интегрируя $d\sigma_k$ по всем углам, получим полное эффективное сечение комpton-эффекта для гамма-кванта с энергией α :

$$\sigma_k = \sigma_0 Z \frac{3}{8\alpha} \left\{ \left[1 - \frac{2(\alpha+1)}{\alpha^2} \right] \ln(2\alpha+1) + \frac{1}{2} + \frac{4}{\alpha} - \frac{1}{2(2\alpha+1)^2} \right\}. \quad (1,14)$$

При энергиях $\alpha > 2$ возможен процесс типа (3А) — поглощение фотона в поле ядра (значительно реже в поле электрона) с образованием пары — электрона и позитрона. При этом энергия фотона переходит в энергию покоя электрона и позитрона и в кинетическую энергию этих частиц. Простые аналитические выражения для эффективного сечения образования пар σ_n существуют только для крайней релятивистской области, которая в нашем обзоре не рассматривается. При $\alpha < 2$ сечение $\sigma_n = 0$ и далее монотонно растет с α . Вблизи $\alpha = 2$ $\sigma_n \sim Z^2$.

Складывая эффективные сечения (1,1), (1,14) и σ_n , получим полное сечение взаимодействия гамма-кванта с атомом, порядкового номера Z

$$\sigma_{\text{в}} = \sigma_{\text{ф}} + \sigma_k + \sigma_n. \quad (1,15)$$

Умножение σ на число атомов в 1 см^3 даёт коэффициент поглощения

$$\mu = \sigma \cdot n, \quad (1,16)$$

определяющий известный закон ослабления интенсивности I узкого пучка гамма-квантов с глубиной проникновения.

$$I = I_0 e^{-\mu x}, \quad (1,17)$$

где I_0 есть значение I при $x=0$. Величина $\mu^{-1} = l$ называется средней длиной свободного пробега. Координаты, измеренные в средних длинах свободного пробега, будем обозначать через $X = x/l$ и т. д.

В соответствии с (1,15) μ можно представить как сумму

$$\mu = \mu_p + \mu_k + \mu_n. \quad (1,18)$$

Зависимость μ от α представлена для некоторых элементов на рис. 1, причем для свинца нанесены пунктиром отдельные слагаемые μ . Как видно, для фотонов с малой энергией наибольшее значение имеет фотоэффект, в области

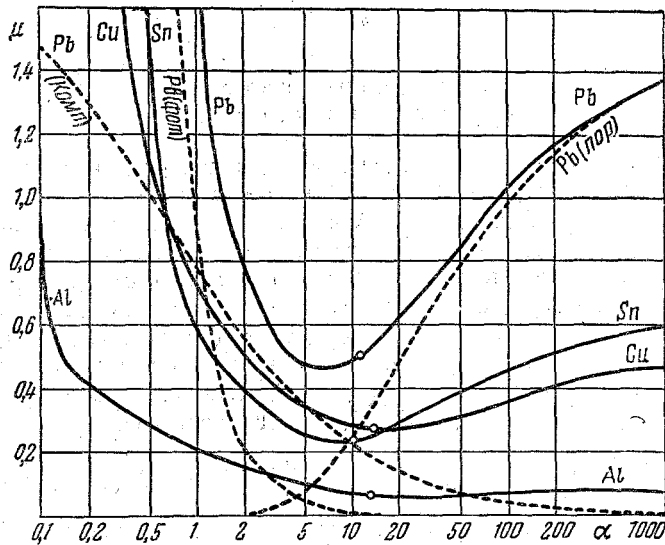


Рис. 1. Коэффициент поглощения μ (см $^{-1}$) для гамма-лучей в свинце, олове, меди и алюминии как функция энергии.

минимума кривой $\mu(\alpha)$ ослабление пучка происходит, в основном, за счет комpton-эффекта, а при еще больших энергиях преобладает образование пар.

Теоретические значения μ находятся в хорошем согласии с экспериментальными данными. Особенно точной является формула для комptonовского рассеяния (1,6), играющая основную роль в теории многократного рассеяния.

Относительные числа квантов, выбывающих из падающего монохроматического пучка за счет различных взаимодействий, равны соответственно $\sigma_{\text{ф}}/\sigma$, $\sigma_{\text{к}}/\sigma$ и $\sigma_{\text{п}}/\sigma$. Эти же отношения определяют относительные доли поглощаемой энергии. Энергия квантов, поглощаемых путем фотоэффекта и образования пар, превращается в основном в кинетическую энергию электронов и позитронов. При комpton-эффекте энергия падающего кванта α частично передается рассеянному кванту ($\alpha\sigma_{\text{р}}/\sigma$), а частично электрону отдачи ($\alpha\sigma_{\text{э}}/\sigma$). При рассматриваемых нами не очень больших энергиях электроны, образующиеся во всех трех процессах, быстро теряют приобретенную ими кинетическую энергию главным образом за счет ионизации атомов поглотителя. Доля энергии, переданная электронам, поглощается практически в том же месте, где поглотился гамма-квант. В отличие от этого энергия, переданная рассеянному фотону, не поглощается вблизи рассеивающего атома, а переходит в энергию потока рассеянного излучения.

Чтобы вычислить эту энергию, достаточно умножить $d\sigma_k$ на $\alpha(\cos\theta)/\alpha_0$ и проинтегрировать по всем углам. Тогда получим

$$\sigma_p = Z \frac{3}{8} \sigma_0 \left[\frac{1}{\alpha^3} \ln(1+2\alpha) + \frac{2(1+\alpha)(2\alpha^2-2\alpha-1)}{\alpha^2(1+2\alpha)^3} + \frac{8\alpha^2}{3(1+2\alpha)^3} \right]. \quad (1,19)$$

Очевидно,

$$\sigma_s = \sigma_k - \sigma_p. \quad (1,20)$$

Таким образом, средняя энергия, поглощаемая в результате всех взаимодействий, равна

$$\alpha \varepsilon_n = \frac{\alpha(\sigma_\phi + \sigma_s + \sigma_p)}{\sigma}, \quad (1,21)$$

а рассеянная энергия

$$\alpha \varepsilon_p = \frac{\alpha \sigma_p}{\sigma}. \quad (1,22)$$

§ 2. Число квантов, интенсивность и фактор возрастания

В настоящем параграфе приведены определения ряда величин, характеризующих гамма-излучение, и соотношения между этими величинами.

Обозначим через $N(\mathbf{r}, \mathbf{u}, \lambda) d\mathbf{u} d\lambda$ число фотонов с длиной волны в интервале от λ до $\lambda + d\lambda$, движущихся в направлении единичного вектора \mathbf{u} в элементе телесного угла $d\mathbf{u}$ и пересекающих в 1 сек. 1 см^2 поверхности, перпендикулярной вектору \mathbf{u} , с центром в точке \mathbf{r} . Плотность потока фотонов или, кратко, плотность фотонов $N(\mathbf{r}, \mathbf{u}, \lambda)$ будет входить во все последующие расчеты. При сопоставлении теории с экспериментом обычно необходимо знать плотность потока энергии фотонов $I(\mathbf{r}, \mathbf{u}, E)$. Эта величина легко может быть выражена через функцию $N(\mathbf{r}, \mathbf{u}, \lambda)$. Для этого достаточно учесть, что

$$N(\mathbf{r}, \mathbf{u}, \lambda) d\mathbf{u} d\lambda = -N(\mathbf{r}, \mathbf{u}, E) du \frac{mc^2}{E^2} dE = -\bar{N}(\mathbf{r}, \mathbf{u}, E) du dE,$$

где $\bar{N}(\mathbf{r}, \mathbf{u}, E)$ — плотность фотонов на интервал энергии в 1 Мэв. Тогда плотность потока энергии в Мэв, соответствующая этой плотности фотонов \bar{N} , по определению равна

$$I(\mathbf{r}, \mathbf{u}, E) = E \cdot \bar{N}(\mathbf{r}, \mathbf{u}, E). \quad (2,1)$$

Эта величина называется также интенсивностью гамма-излучения*).

Аргумент E в (2,1) можно заменить на α . Тогда

$$I(\mathbf{r}, \mathbf{u}, \alpha) = \alpha \bar{N}(\mathbf{r}, \mathbf{u}, \alpha). \quad (2,2)$$

В ряде задач число аргументов функций N , \bar{N} и I уменьшается из соображений симметрии. Так, в одномерном случае (например, бесконечно широкий плоско-параллельный пучок, падающий нормально на плоский поглотитель, перпендикулярный оси x), $I(\mathbf{r}, \mathbf{u}, E) = I(x, u_x, E)$. Интегрирование этой величины по угловой переменной дает $I_0(x, E)$ — спектральное распределение интенсивности на расстоянии x от источника независимо от их углового распределения. Интегрирование I по переменной E дает $I_A(x, u_x)$ — угловое распределение интенсивности на расстоянии x от источника. Наконец, интегрирование I одновременно по углам и энергиям дает $I_T(x)$ — полную интен-

*) Величины N и I называются иногда также «дифференциальными спектрами» фотонов и интенсивности соответственно.

сивность излучения. В случае точечного изотропного источника следует положить $I(\mathbf{r}, \mathbf{u}, E) = I(r, u_r, E)$, где $r = |\mathbf{r}|$, а $u_r = \left(\mathbf{u} \frac{\mathbf{r}}{r}\right)$. Интегрирование функции $I(r, u_r, E)$ по u_r , E или u_r и E одновременно дает $I_0(r, E)$, $I_A(r, u_r)$ и $I_T(r)$ соответственно. В экспериментальных работах обычно ставится задача определения одной из величин I , I_0 , I_A или I_T . Результаты измерений выражаются часто через так называемый фактор возрастания (build-up factor), определяемый отношением

$$B(x) = \frac{I_T}{I^{(0)}} = \frac{I^{(0)} + I'}{I^{(0)}} = \frac{\text{полный поток энергии (нерассеянный + рассеянный)}}{\text{нерассеянный поток энергии}}, \quad (2,3)$$

который показывает, каким образом по мере удаления от источника возрастает доля рассеянного излучения в полном потоке. Аналогично I_A , I_0 и I_T можно путем интегрирования $N(x, u_x, E)$ или $N(r, u_r, E)$ определить величины N_A , N_0 , N_T , а также фактор возрастания B_N по числу фотонов.

Интегрирование $N(\mathbf{r}, \mathbf{u}, \lambda)$ по всему пространству и по всем углам дает так называемый равновесный спектр

$$\mathfrak{N}(\lambda) = \int N(\mathbf{r}, \mathbf{u}, \lambda) d\mathbf{r} d\mathbf{u}. \quad (2,4)$$

В некоторых работах результаты измерений описываются при помощи прозрачности (transmission), которая является произведением фактора возрастания на $\exp(-x/\cos \psi_0)$ (ψ_0 — угол между направлением падающего излучения и нормалью к плоскости поглотителя).

Для оценки воздействия, оказываемого гамма-лучами на поглотитель, важно знать не количество прошедшей через него энергии, а количество поглощенной энергии. Количество поглощенной в 1 см^3 энергии гамма-лучей называется дозой, а доза, полученная поглотителем за 1 сек., называется мощностью дозы. Согласно (1,21) и (2,2) она равна

$$M = \alpha \bar{N} \epsilon_n n s = I (\sigma_n + \sigma_{\phi} + \sigma_s) n. \quad (2,5)$$

II. УРАВНЕНИЕ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ

§ 3. Уравнение переноса излучения и разложение плотности фотонов по полиномам Лежандра

Строгая теория прохождения гамма-квантов через вещество основана на исследовании интегро-дифференциального уравнения переноса. Это уравнение описывает изменение плотности фотонов $N(\mathbf{r}, \mathbf{u}, \lambda)$ при переходе из одной точки к другой вдоль направления распространения квантов и в случае однородной среды имеет вид

$$\mathbf{u} \text{ grad } N(\mathbf{r}, \mathbf{u}, \lambda) = -\mu(\lambda) N(\mathbf{r}, \mathbf{u}, \lambda) + \int_{\lambda-2}^{\lambda} d\lambda' K(\lambda', \lambda) \int d\mathbf{u}' \frac{1}{2\pi} \delta(1 - \mathbf{u}\mathbf{u}' - \lambda + \lambda') N(\mathbf{r}, \mathbf{u}', \lambda') + S(\mathbf{r}, \mathbf{u}, \lambda). \quad (3,1)$$

Слева стоит изменение $N(\mathbf{r}, \mathbf{u}, \lambda)$; слагаемые правой части представляют: а) уменьшение плотности фотонов в результате поглощения и рассеяния, б) увеличение плотности фотонов за счет комптоновского рассеяния фотонов с длиной волны λ' ($\lambda - 2 \leq \lambda' \leq \lambda$), в) увеличение плотности фотонов за счет

источника излучения. Дельта-функция обеспечивает выполнение закона рассеяния (1,5), множитель $(2\pi)^{-1}$ вводится из соображений нормировки, $K(\lambda', \lambda)$ определяется формулой (1,13), а вид функции $S(\mathbf{r}, \mathbf{u}, \lambda)$ зависит от геометрических размеров, спектрального состава и углового распределения источника. В тех случаях, когда источник испускает кванты с длиной волны $\lambda_0 > \lambda - 2$, нижний предел интеграла следует заменить на λ_0 .

Начнем рассмотрение уравнения переноса с важного частного случая источника, расположенного на безграничной плоскости $x=0$ и испускающего кванты с длиной волны $\lambda = \lambda_0$. Распределение интенсивности гамма-лучей от такого источника зависит лишь от одной координаты x .

Функция $S(\mathbf{r}, \mathbf{u}, \lambda)$ в этом случае имеет вид

$$S(\mathbf{r}, \mathbf{u}, \lambda) = \delta(x) f(u_x) \delta(\lambda - \lambda_0), \quad (3,2)$$

где $f(u_x)$ описывает угловое распределение испущенных квантов. В частности, для изотропного источника $f = \text{const}$, а для направленного, т. е. дающего излучение в виде бесконечно широкого параллельного пучка с заданным углом $\phi_0 = \arccos u_{x0}$ с нормалью к плоскости $x=0$, $f(u_x) = \text{const} \cdot \delta(u_x - u_{x0})$. Функция $f(u_x)$ предполагается нормированной так, чтобы

$$\int \int d\mathbf{r} d\mathbf{u} S(\mathbf{r}, \mathbf{u}, \lambda) = \delta(\lambda - \lambda_0). \quad (3,3)$$

Поэтому для плоского направленного наклонного источника

$$S(\mathbf{r}, \mathbf{u}, \lambda) = \frac{1}{2\pi} \delta(u_x - u_{x0}) \delta(x) \delta(\lambda - \lambda_0), \quad (3,4)$$

а для плоского изотропного источника

$$S(\mathbf{r}, \mathbf{u}, \lambda) = \frac{1}{4\pi} \delta(x) \delta(\lambda - \lambda_0). \quad (3,5)$$

Уравнение переноса излучения (3,1) для плоского источника (3,2) переписывается сейчас так:

$$\begin{aligned} \frac{u_x \partial N(x, u_x, \lambda)}{\partial x} = & -\mu(\lambda) N(x, u_x, \lambda) + \\ & + \int_{\lambda-2}^{\lambda} d\lambda' K(\lambda', \lambda) \int d\mathbf{u}' (2\pi)^{-1} \delta(1 - \mathbf{u}\mathbf{u}' - \lambda + \lambda') N(x, u'_x, \lambda') + \\ & + \delta(x) \delta(\lambda - \lambda_0) f(u_x). \end{aligned} \quad (3,6)$$

Для дальнейших приложений целесообразно преобразовать это уравнение к иному виду. Для этого выделим зависимость $N(x, u_x, \lambda)$ от u_x путем разложения по полиномам Лежандра

$$N(x, u_x, \lambda) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{4\pi} N_l(x, \lambda) P_l(u_x), \quad (3,7)$$

а дельта-функцию заменим по формуле

$$\delta(1 - \mathbf{u}\mathbf{u}' - \lambda + \lambda') = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{2} P_l(1 - \lambda + \lambda') P_l(\mathbf{u}\mathbf{u}'). \quad (3,8)$$

Подставим (3,7) и (3,8) в уравнение (3,6), умножим его на $P_l(u_x)$ и проинтегрируем по u . При этом учитывается: 1) при преобразовании левой части — рекуррентная формула для полиномов Лежандра

$$u_x P_l(u_x) = \frac{1}{2l+1} [(l+1) P_{l+1}(u_x) + l P_{l-1}(u_x)], \quad (3,9)$$

2) при преобразовании второго члена справа — теорема сложения полиномов Лежандра

$$P_l(u u') = P_l(u_x) P_l(u'_x) + 2 \sum_{n=1}^l \frac{(l-n)!}{(l+n)!} P_l^n(u_x) P_l^n(u'_x) \cos n(\varphi - \varphi'). \quad (3,10)$$

Окончательный результат интегрирования имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{2l+1} \left[(l+1) \frac{\partial N_{l+1}}{\partial x} + l \frac{\partial N_{l-1}}{\partial x} \right] = -\mu(\lambda) N_l(x, \lambda) + \\ + \int_{\lambda-2}^{\lambda} d\lambda' K(\lambda', \lambda) P_l(1 - \lambda + \lambda') N_l(x, \lambda') + \delta(x) \delta(\lambda - \lambda_0) \Lambda_l \end{aligned} \quad (3,11)$$

$$(l = 0, 1, 2, \dots),$$

где

$$\Lambda_l = \int du P_l(u_x) f(u_x). \quad (3,12)$$

В частности, если $f(u_x) = \frac{1}{2\pi} \delta(1 - u_x)$ (ср. (3,4)), то $\Lambda_l = 1$; а если $f(u_x) = (4\pi)^{-1}$ (см. (3,5)), то $\Lambda_l = \delta_{l0}$.

Таким образом, решение уравнения (3,6) эквивалентно решению бесконечной системы уравнений (3,11) для коэффициентов разложения плотности фотонов N по полиномам Лежандра.

§ 4. Энергетический спектр и угловое распределение фотонов в неограниченной однородной среде

В случае, когда источники распределены равномерно в неограниченной однородной среде, функция N заведомо не зависит от \mathbf{r} и \mathbf{u} . Тогда равновесный спектр $\mathfrak{N}(\lambda)$, определяемый (2,4), с точностью до множителя совпадает с N .

Уравнение, определяющее равновесный спектр, получается из уравнения переноса (3,1), если в нем провести указанные в (2,4) интегрирования и отделить дельта-функцию от решения (ср. преобразование уравнения (35) на стр. 194 в ⁶⁵). В таком случае при $\lambda_0 > \lambda - 2$ будем иметь

$$\mu(\lambda) \mathfrak{N}(\lambda) = \int_{\lambda_0}^{\lambda} d\lambda' K(\lambda', \lambda) \mathfrak{N}(\lambda') + K(\lambda_0, \lambda). \quad (4,1)$$

В уравнении (4,1) можно перейти от длин волн к энергии, если использовать соотношения (1,11) и

$$\mathfrak{N}(\lambda) d\lambda = -\frac{\mathfrak{N}(\alpha) d\alpha}{\alpha^2} = -\bar{\mathfrak{N}}(\alpha) d\alpha. \quad (4,2)$$

Тогда вместо (4,1) получим

$$\mu(\alpha) \bar{N}(\alpha) = \int_{\alpha}^{\alpha_0} d\alpha' K'(\alpha', \alpha) \bar{N}(\alpha') + K'(\alpha_0, \alpha). \quad (4,3)$$

Решение уравнения (4,3) было получено Карром и Ламкиным⁶⁴ численным интегрированием. На рис. 2 представлены их результаты для равновесной плотности фотонов \bar{N} (рассчитанной на 1 Мэв и выраженной в единицах плотности источника) для алюминия, меди и свинца при первоначальной энергии $\alpha_0 = 10$. Возрастание \bar{N} с уменьшением энергии обусловлено увеличением числа квантов за счет многократного рассеяния. При дальнейшем уменьшении энергии начинает сказываться резкое возрастание коэффициента поглощения фотонов за счет фотоэффекта, что обуславливает спадение \bar{N} .

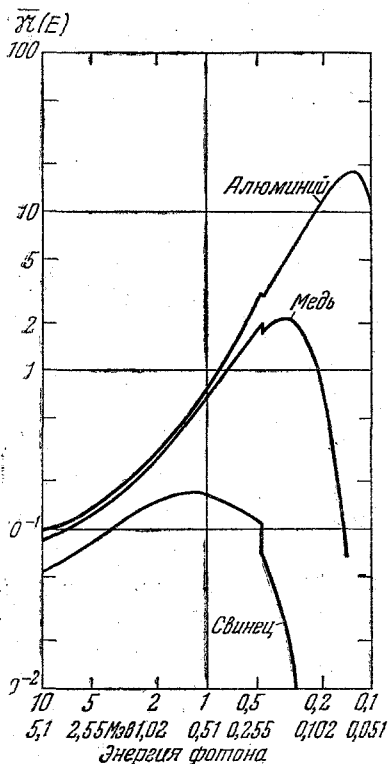


Рис. 2. Равновесный спектр фотонов с $E_0 = 10 \text{ мэв}$ в функции от энергии для алюминия, меди и свинца.

распределения рассеянных фотонов $\bar{N}(u_x, \alpha)$ уравнение⁶⁷

$$\begin{aligned} \mu(\alpha) \bar{N}(u_x, \alpha) = & \int_{\alpha}^{\alpha_0} d\alpha' K'(\alpha', \alpha) \int d\mathbf{u}' \frac{1}{2\pi} \delta\left(\mathbf{u}\mathbf{u}' - 1 + \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha'}\right) \bar{N}(u', \alpha') + \\ & + K'(\alpha_0, \alpha) \delta\left(u_x - 1 + \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha_0}\right), \quad (4,4) \end{aligned}$$

где K' определяется (11,1).

Разложим $\bar{N}(u_x, \alpha)$ и дельта-функции по полиномам Лежандра (ср. § 3). Умножая затем уравнение (4,4) на $P_l(u_x)$ и интегрируя по \mathbf{u} , легко показать,

что коэффициенты разложения $\overline{N}_l(\alpha)$ функции $\overline{N}(u_x, \alpha)$ по полиномам Лежандра удовлетворяют уравнению

$$\mu(\alpha) \overline{N}_l(\alpha) = \int_{\alpha}^{\alpha_0} K'(\alpha', \alpha) P_l \times \\ \times \left(1 - \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha'}\right) \overline{N}_l(\alpha') d\alpha' + \\ + K'(\alpha_0, \alpha) P_l \left(1 - \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha_0}\right). \quad (4,5)$$

В частности, для $l=0$ уравнение (4,5) совпадает с уравнением (4,3).

Уравнение (4,5) решалось ⁶⁷ методом последовательных приближений для алюминия и начальной энергии $\alpha_0 = 10$. За нулевое приближение принималась плотность однократно рассеянных квантов, за первое приближение — двукратно рассеянных и т. д. Результаты представлены на рис. 3 и 4. На этих графиках имеются разрывы типа дельта-функции (показаны вертикальными сплошными линиями) и типа «ступеньки».

Разрывы первого рода связаны с однократно рассеянными квантами и обусловлены тем, что при заданных значениях начальной энергии α_0 и энергии после рассеяния α_1 все однократно рассеянные кванты отклоняются на один и тот же угол θ_1 и, следовательно, функция распределения этих квантов $N^{(0)}(u_x, \alpha)$, являющаяся частью $N(u_x, \alpha)$, в точке (α_1, θ_1) обращается в бесконечность. Случай $\alpha = \alpha_{180} = 0,476$ отвечает однократному рассеянию на угол 180° . Для $\alpha < \alpha_{180}$ однократное рассеяние вообще отсутствует (рис. 4).

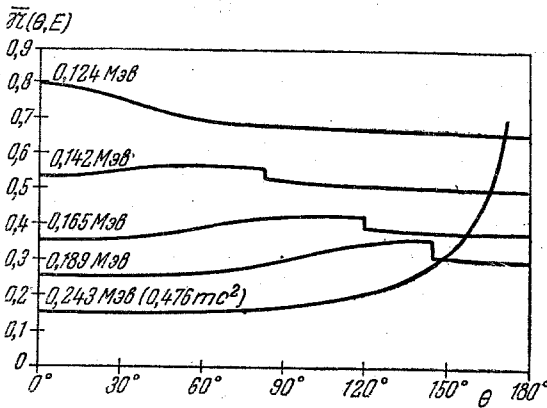


Рис. 4. Равновесное угловое распределение фотонов в алюминии. Энергия рассеянных фотонов $\leq 0,243$ Мэв.

Полагая $\alpha_0 = 10$, а α равным последовательно значениям энергии, указанным на кривых рис. 3 и 4, легко подметить, что по мере уменьшения энергии рассеянных квантов до $\alpha = 0,476$ величина угла θ_m увеличивается (рис. 3), а при дальнейшем понижении энергии уменьшается (рис. 4).

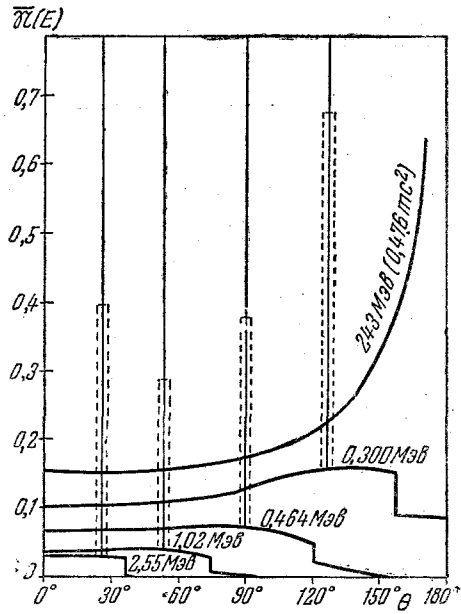


Рис. 3. Равновесное угловое распределение фотонов в алюминии. Энергия рассеянных фотонов $\geq 0,243$ Мэв.

Разрывы второго рода связаны с двукратно рассеянными квантами и появляются, когда угол θ равен максимальной величине угла отклонения фотона в результате двукратного рассеяния θ_m . Нетрудно видеть, что

$$\cos \theta_m = 1 - 2 \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha_0} \right) + \\ + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha_0} \right)^2.$$

Из рис. 3 и 4 видно также, что с понижением энергии возрастает число фотонов, рассеянных на угол, больший, чем максимальный угол θ_m при двукратном рассеянии. Иначе говоря, роль высоких порядков рассеяния возрастает с уменьшением энергии.

III. МЕТОД ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ. РЕЗУЛЬТАТЫ И СРАВНЕНИЕ С ОПЫТОМ

§ 5. Основы метода полиномиальных разложений

Решение интегро-дифференциального уравнения (3,1) в большинстве даже простых задач связано с серьезными математическими трудностями. Между тем нередко вид решения в общих чертах можно предугадать (экспоненциальный спад с глубиной проникновения x). Обозначим его через $w(x)$. В этих случаях выгодно воспользоваться методом полиномиальных разложений, где в качестве весовой функции берется $w(x)$. Поясним основные положения метода полиномиальных разложений на примере с функцией распределения $N(x)$, зависящей от одной переменной x . Допустим, что x меняется в пределах от $-\infty$ до $+\infty$, а плотность $N(x)$ исчезает на обоих концах этой области. Чтобы получить полиномиальное разложение плотности, выбирается весовая функция $w(x)$ такая, что $w(\infty) = w(-\infty) = 0$. Затем выбирается последовательность полиномов $p_0(x), p_1(x), \dots$, которая имеет присоединенную последовательность полиномов $p_0^+(x), p_1^+(x), \dots$, удовлетворяющих условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(x) p_n^+(x) p_n(x) dx = \delta_{nn'}. \quad (5,1)$$

Тогда

$$N(x) = w(x) \sum_{n=0}^{\infty} a_n p_n(x), \quad (5,2)$$

а коэффициенты a_n на основании (5,1) и (5,2) даются формулой

$$a_n = \int_{-\infty}^{\infty} p_n^+(x) N(x) dx. \quad (5,3)$$

На практике определение коэффициентов a_n сводится к решению системы интегральных уравнений, более простых, чем (3,1).

При применении этого метода к отысканию плотности гамма-квантов необходимо учитывать геометрические особенности конкретной задачи и в соответствии с ними выбирать весовую функцию так, чтобы она возможно лучше описывала предполагаемый вид $N(\mathbf{r}, \mathbf{u}, \lambda)$. Это обеспечит быструю сходимость ряда (5,2).

§ 6. Плоский изотропный источник

В этом случае источником излучения является бесконечная плоскость $x=0$, все точки которой излучают изотропно.

На основании (3,11) уравнение переноса излучения сводится к системе

$$\begin{aligned} \frac{1}{2l+1} \left[(l+1) \frac{\partial N_{l+1}}{\partial x} + l \frac{\partial N_{l-1}}{\partial x} \right] = -\mu(\lambda) N_l(x, \lambda) + \\ + \int_{\lambda-2}^{\lambda} d\lambda' K(\lambda', \lambda) P_l(1 - \lambda + \lambda') N_l(x, \lambda') + \delta(x) \delta(\lambda - \lambda_0) \delta_{l0} \quad (6,1) \\ (l=0, 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

Приступая к решению уравнений (6,1), предположим, что источник окружен с обеих сторон бесконечно протяженной средой. Тогда плотность N симметрична относительно плоскости источника:

$$N(x, u_x, \lambda) = N(-x, -u_x, \lambda). \quad (6,2)$$

Коэффициенты разложений по полиномам Лежандра левой и правой частей выражения (6,2) связаны друг с другом соотношением

$$N_l(x, \lambda) = (-1)^l N_l(-x, \lambda). \quad (6,3)$$

Отсюда, в частности, вытекает важное следствие для моментов плотности фотонов, определяемых по формуле

$$b_{ln}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} y^n N_l(y, \lambda) dy. \quad (6,4)$$

Если l четное, то согласно (6,3) $N_l(x, \lambda)$ будет четной функцией от x и, следовательно, все нечетные моменты будут равны нулю, то есть

$$b_{l1} = b_{l3} = \dots = 0 \quad (l \text{ четное}). \quad (6,5)$$

Аналогично для l нечетного

$$b_{l0} = b_{l2} = \dots = 0 \quad (l \text{ нечетное}). \quad (6,6)$$

Следовательно, в случае плоского изотропного источника все моменты через один исчезают и не могут быть использованы для определения плотности N .

Для разложения функции $N_l(x, \lambda)$ в этом случае Спенсер и Фано¹⁸ предложили ввести новые полиномы. Весовая функция выбирается с учетом условий симметрии функции распределения (6,3). При l четном в качестве весовой функции берется $\frac{1}{2} e^{-\beta|x|}$; при l нечетном $\frac{1}{2} \beta x e^{-\beta|x|}$. Зная весовые функции, мы можем написать (ср. (5,2))

$$N_l(x, \lambda) = \frac{1}{2} e^{-\beta|x|} \sum_{n=0}^{\infty} a_{ln}(\lambda) U_n(\beta|x|) \quad (l \text{ четное}), \quad (6,7)$$

$$N_l(x, \lambda) = \frac{1}{2} \beta x e^{-\beta|x|} \sum_{n=0}^{\infty} a_{ln}(\lambda) V_n(\beta|x|) \quad (l \text{ нечетное}), \quad (6,8)$$

где U_n и V_n — полиномы степени n , к определению которых мы переходим.

U_n и V_n желательно подобрать так, чтобы небольшое число первых членов разложений (6,7) и (6,8) уже являлось достаточно хорошей аппроксимацией для $N_l(x, \lambda)$. Иначе говоря, необходимо потребовать, чтобы, начиная с некоторого n' , моменты функции $N_l(x, \lambda)$ порядка $n > n'$ равнялись нулю, т. е. для четного l

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n'} e^{-\beta|x|} U_n(\beta|x|) dx = 0 \quad (n > n'), \quad (6,9)$$

а для нечетного l

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n'+1} \beta x e^{-\beta |x|} V_n(\beta |x|) dx = 0 \quad (n > n'). \quad (6,10)$$

Ради сокращения записи удобно ввести в соотношения (6,9) и (6,10) переменную $y = \beta x$ и, кроме того, преобразовать их к виду

$$\int_0^{\infty} e^{-y} y^{2n'} U_n(y) dy = 0 \quad (n > n') \quad (6,11)$$

и

$$\int_0^{\infty} y e^{-y} y^{2n'+1} V_n(y) dy = 0 \quad (n > n'). \quad (6,12)$$

Отсюда определяются с точностью до произвольных постоянных полиномы U_n и V_n , если их искать в виде

$$U_n(y) = \sum_{l=0}^n a_l y^l,$$

$$V(y) = \sum_{l=0}^n b_l y^l.$$

В этом легко убедиться, полагая последовательно $n=0, 1, 2, \dots$. Тогда

$$U_0(y) = a_0, \quad U_1(y) = -a_1(1-y), \quad U_2(y) = a_2(3-5y+y^2), \quad \dots,$$

$$V_0(y) = b_0, \quad V_1(y) = -b_1(3-y), \quad V_2(y) = b_2(15-9y+y^2), \quad \dots$$

Рассмотрим присоединенные полиномы U_n^+ и V_n^+ . Согласно (5,1) они определяются следующим образом:

$$\int_0^{\infty} e^{-y} U_n^+(y) U_n(y) dy = 0 \quad (n < n'), \quad (6,13)$$

$$\int_0^{\infty} y e^{-y} V_n^+(y) V_n(y) dy = 0 \quad (n < n'). \quad (6,14)$$

Чтобы не впасть в противоречие с предыдущим изложением при замене $n' \leftarrow n$, мы должны считать полиномы U_n^+ составленными лишь из четных степеней y , а полиномы V_n^+ из нечетных степеней y , то есть

$$U_n^+(y) = \sum_{l=0}^{n'} c_l y^{2l}, \quad V_n^+(y) = \sum_{l=0}^{n'} d_l y^{2l+1}.$$

В таком случае с помощью соотношений (6,13) и (6,14) можно получить явные выражения для присоединенных полиномов, но опять-таки с точностью до про-

произвольных постоянных. Действительно, полагая $n' = 0, -1, -2, \dots$, находим

$$U_0^+(y) = c_0, \quad U_1^+(y) = c_0 \left(1 - \frac{1}{2!} y^2\right), \quad U_2^+(y) = c_0 \left(1 - y^2 + \frac{1}{4!} y^4\right), \dots,$$

$$V_0^+(y) = e_0 y, \quad V_1^+(y) = e_1 \left(2y - \frac{1}{3!} y^3\right),$$

$$V_2^+(y) = e_2 \left(3y - \frac{1}{2} y^3 + \frac{1}{5!} y^5\right), \dots,$$

где

$$e_0 = d_0, \quad e_1 = \frac{1}{2} d_0, \quad e_2 = \frac{1}{3} d_0, \quad \dots$$

Остается определить произвольные постоянные a_n , b_n , c_0 и d_0 . Для этого используем условия нормировки

$$\left. \begin{aligned} \int_0^\infty e^{-y} U_n^+ U_n dy &= 1, \\ \int_0^\infty y e^{-y} V_n^+ V_n dy &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (6,15)$$

Поскольку в них входят полиномы попарно со своими сопряженными, мы можем в сопряженных полиномах взять c_0 и e_n произвольными, а a_n и b_n определить из (6,15). Полагая $c_0 = 1$, получим

$$U_0 = 1, \quad U_1 = \frac{1}{2} (1 - y), \quad U_2 = \frac{1}{8} (3 - 5y + y^2), \dots,$$

$$U_0^+ = 1, \quad U_1^+ = 1 - \frac{1}{2} y^2, \quad U_2^+ = 1 - y^2 + \frac{1}{24} y^4, \dots$$

Далее, полагая $e_n = 1$, найдем

$$V_0 = \frac{1}{2}, \quad V_1 = \frac{1}{8} (3 - y), \quad V_2 = \frac{1}{48} (15 - 9y + y^2), \dots,$$

$$V_0^+ = y, \quad V_1^+ = 2y - \frac{1}{3!} y^3, \quad V_2^+ = 3y - \frac{1}{2} y^3 + \frac{1}{5!} y^5, \dots$$

В общем случае

$$U_n(y) = \frac{(-1)^n}{2^n} \left(\frac{\partial}{\partial y} - 1 \right)^{2n} \sum_{j=0}^n C_{n+j}^j \frac{2^{-j} y^{n-j}}{(n-j)!}, \quad (6,16)$$

$$V_n(y) = \frac{1}{2(n+1)} \left(\frac{\partial}{\partial y} - 1 \right)^2 U_n(y), \quad (6,17)$$

$$U_{n'}^+(y) = \sum_{j=0}^{n'} C_{n'}^j \frac{(-y)^j}{(2j)!}, \quad (6,18)$$

$$V_{n'}^+(y) = - \sum_{j=1}^{n'} C_{n'+1}^j \frac{(-y^2)^j}{(2j-1)! y}. \quad (6,19)$$

Наконец, следует указать более простую, но совершенно эквивалентную запись формул (6,11)–(6,15) (ср. (5,1))

$$\int_0^{\infty} e^{-y} U_n^+ U_{n'} dy = \delta_{nn'}, \quad (6,20)$$

$$\int_0^{\infty} y e^{-y} V_n^+ V_{n'} dy = \delta_{nn'}, \quad (6,21)$$

из которой следует (ср. (5,3)):

$$\begin{aligned} a_{ln}(\lambda) &= \int_{-\infty}^{\infty} U_n^+(\beta x) N_l(x, \lambda) \beta dx = \\ &= \sum_{j=0}^n C_n^j \frac{(-1)^j}{(2j)!} b_{l, 2j}(\lambda) \quad (l \text{ четное}), \end{aligned} \quad (6,22)$$

$$\begin{aligned} a_{ln}(\lambda) &= \int_{-\infty}^{\infty} V_n^+(\beta x) N_l(x, \lambda) \beta dx = \\ &= \sum_{j=1}^{n+1} C_{n+1}^j \frac{(-1)^{j-1}}{(2j-1)!} b_{l, 2j-1}(\lambda) \quad (l \text{ нечетное}), \end{aligned} \quad (6,23)$$

где b_{ln} , n -й пространственный момент $N_l(x, \lambda)$ (см. формулу (6,4)).

Нам остается найти уравнения для коэффициентов a_{ln} в (6,7) и (6,8). Для этого умножим уравнение (6,1) на $\beta U_n^+(\beta x)$, если l четное, или на $\beta V_n^+(\beta x)$, если l нечетное, и интегрируем по x от $-\infty$ до $+\infty$. Тогда слева появятся интегралы, которые вычисляются посредством интегрирования по частям; они будут давать член, исчезающий при подстановке пределов, и интеграл, содержащий либо производную $\frac{dU_n^+}{dx}$ (для l четного), либо $\frac{dV_n^+}{dx}$ (для l нечетного). Эти производные заменяются с помощью формул*):

$$\frac{dU_n^+}{dy} = -V_{n-1}^+, \quad \frac{dV_n^+}{dy} = \sum_{l=0}^n U_l^+. \quad (6,24)$$

Таким образом, коэффициенты a_{ln} будут удовлетворять уравнениям**)

$$\begin{aligned} \frac{\beta}{2l+1} [(l+1)a_{l+1, n-1} + la_{l-1, n-1}] &= -\mu(\lambda) a_{ln}(\lambda) + \\ + \int_{\lambda-2}^{\lambda} d\lambda' K(\lambda', \lambda) P_l(1-\lambda-\lambda') a_{ln}(\lambda') &+ \beta \delta(\lambda - \lambda_0) \delta_{l0} \quad (l \text{ четное}) \end{aligned} \quad (6,25)$$

*) Первое из этих соотношений следует из (6,18) и (6,19); при доказательстве

второго следует воспользоваться, кроме того, формулой $C_n^k = \sum_{i=1}^{n-k+1} C_{n-i}^{k-1}$.

**) В оригинале работы¹⁸ в формуле (20) для нечетного l слева должен стоять знак минус.

31

$$-\frac{\beta}{2l+1} \sum_{n'=0}^n [(l+1) a_{l+1, n'} + l a_{l-1, n'}] = -\mu(\lambda) a_{ln}(\lambda) + \\ + \int_{\lambda-2}^{\lambda} d\lambda' K(\lambda', \lambda) P_l(1 - \lambda + \lambda') a_{ln}(\lambda') \quad (l \text{ нечетное}). \quad (6,26)$$

Уравнения (6,25) и (6,26) могут быть проинтегрированы численно, если отделить дельта-функции от решений этих уравнений (ср. § 3). Существенно, что $a_{ln} = 0$ для $n \leq \frac{l}{2} - 1$, так как член с источником присутствует только в уравнении с $l=0$. Принимая во внимание это обстоятельство, выпишем систему уравнений, которую следует решить для определения первых четырех коэффициентов a_{0n} разложения функции $N_0(x, \lambda)$ — плотности фотонов в заданной точке независимо от их направления. Эта система состоит из десяти уравнений:

$$\begin{aligned} F(a_{00}) + \beta \delta(\lambda - \lambda_0) &= 0, \\ F(a_{10}) &= -\frac{1}{3} \beta a_{00}, \\ F(a_{01}) + \beta \delta(\lambda - \lambda_0) &= \beta a_{10}, \\ F(a_{21}) &= \frac{2}{5} \beta a_{10}, \\ F(a_{11}) &= -\frac{1}{3} \beta (a_{00} + 2a_{21} + a_{01}), \\ F(a_{02}) + \beta \delta(\lambda - \lambda_0) &= \beta a_{11}, \\ F(a_{31}) &= -\frac{3}{7} \beta a_{21}, \\ F(a_{22}) &= \frac{1}{5} \beta [3a_{31} + 2a_{11}], \\ F(a_{12}) &= -\frac{1}{3} \beta [a_{00} + 2a_{21} + a_{01} + 2a_{22} + a_{02}], \\ F(a_{03}) + \beta \delta(\lambda - \lambda_0) &= \beta a_{12}, \end{aligned} \quad (6,27)$$

где

$$F[a_{ln}(\lambda)] = \\ = -\mu(\lambda) a_{ln}(\lambda) + \int_{\lambda-2}^{\lambda} d\lambda' K(\lambda', \lambda) P_l(1 - \lambda + \lambda') a_{ln}(\lambda'). \quad (6,28)$$

Заметим, что в случае плоского изотропного источника все вычисления можно также проводить с моментами b_{ln} вместо непосредственного определения коэффициентов a_{ln} . Это иногда является более удобным.

Столь подробное изложение решения уравнения переноса для плоского изотропного источника объясняется как практическим значением этой задачи, так и тем, что расчеты настоящего параграфа легко переносятся на случай плоского направленного источника, испускающего фотоны произвольной энергии

по нормали к плоскости^{18*)} и кладутся в основу исследований плоского направленного наклонного источника³. За недостатком места мы не можем останавливаться на этих вопросах.

§ 7. Точечный (изотропный) источник

Задача о точечном изотропном источнике приводится к рассмотренной в предыдущем параграфе^{**)}. Для этого заметим прежде всего, что вместо разложения (6,7) теперь следует писать

$$N_l^*(R, \lambda) = \frac{e^{-|R|}}{4\pi R^2} \sum_{n=0}^{\infty} a_{ln}^*(\lambda) U_n(|R|), \quad (7,1)$$

где $R = \beta r$, $r = |\mathbf{r}|$ — расстояние до источника; звездочка показывает принадлежность соответствующей величины к точечному изотропному источнику.

Отсюда (ср. (6,22))

$$a_{ln}^*(\lambda) = \int_0^{\infty} U_n^+(R) N_l^*(R, \lambda) 4\pi R^2 dR = \sum_{\nu=0}^n C_n^{\nu} \frac{(-1)^{\nu}}{(2\nu)!} b_{l,2\nu}^*(\lambda). \quad (7,2)$$

В частности, если интересоваться плотностью фотонов в данной точке безотносительно к их направлению, то есть если считать $l=0$, то легко установить связь коэффициентов a_{0n}^* с таковыми для плоского изотропного источника. Для этого необходимо учесть, что (доказательство приведено в добавлении А к работе Фано⁷):

$$N_0^*(R, \lambda) = -\frac{1}{4\pi R} \frac{\partial N_0(R, \lambda)}{\partial R}, \quad (7,3)$$

откуда в свою очередь вытекает соответствующее соотношение для моментов

$$b_{0,2\nu}^* = (2\nu + 1) b_{0,2\nu}. \quad (7,4)$$

Наконец, с помощью формул (7,2), (7,4) и (6,22) легко показать, что

$$a_{0n}^*(\lambda) = (2n + 1) a_{0n}(\lambda) - 2n a_{0, n-1}(\lambda). \quad (7,5)$$

Таким образом, коэффициенты a_{0n}^* для точечного изотропного источника известны, коль скоро известны коэффициенты a_{0n} для плоского изотропного источника.

Более сложной является задача о точечном направленном источнике. Такой источник можно считать элементарным. Всякий другой источник может рассматриваться как совокупность точечных направленных источников. Ввиду громоздкости выкладок мы не останавливаемся на этом случае, отсылая интересующихся к оригинальной работе¹⁸.

*) Для фотонов большой энергии расчеты значительно упрощаются (см.¹⁸, стр. 448).

**) Ее можно решить также независимо¹⁸.

§ 8. Численные результаты и сравнение с опытом

1. Плоский источник

В ряде экспериментальных работ исследовалось прохождение гамма-лучей через плоские поглотители в условиях, когда источник (обычно, радиоактивный препарат) располагается настолько далеко от поглотителя, что падающие лучи образуют широкий, практически параллельный пучок. Если не учитывать рассеяние в воздухе, такой источник эквивалентен плоскому направленному источнику на границе поглотителя.

Как указано в § 6, такая задача решена для случая большой энергии и нормального падения методом полиномиальных разложений в работе¹⁸ (§ IV, 1). Численные результаты получены для поглощения в свинце квантов с начальной энергией 10,2 Мэв. Спектр рассеянного излучения вычислялся до энергии 1 Мэв. При меньшей энергии нарушается упрощающее предположение метода¹⁸.

Рис. 5 иллюстрирует зависимость от энергии величины $e^{\mu_m x} I_0(\mu_m x, E)$ с $\mu_m = \mu(3,2 \text{ Мэв}) = 0,469 \text{ см}^{-1}$ (минимальная величина коэффициента ослабления) для пяти глубин проникновения. Положение источника на шкале энергии указывается сплошной линией, а его интенсивность площадью пунктирного прямоугольника. Шкала ординат предполагается нормированной на единицу интенсивности источника при $x=0$. Пунктирная кривая $\mu_m x=0$ слегка отклоняется от оси абсцисс, и это отклонение характеризует точность вычислений. Типичным для всех кривых является наличие максимума при энергии около 3 Мэв, соответствующего минимуму коэффициента ослабления (ср. рис. 2).

Вычисления для плоского источника, излучающего фотоны произвольной энергии по нормали к поверхности, были проделаны Спенсером и Стинсон¹⁹. В качестве примера они рассмотрели плоский источник энергии 1,33 Мэв в воде. Для того чтобы выписать в этом случае полиномиальное разложение для плотности энергии фотонов $I_0(\mu_0 x, E)$, достаточно представить плотность N_0 как сумму симметричной и антисимметричной компонент

$$N_0(x, \lambda) = N_0^{(s)}(x, \lambda) + N_0^{(a)}(x, \lambda),$$

причем $N_0^{(s)}$ должно быть разложено по полиномам U_n , а $N_0^{(a)}$ по полиномам V_n .

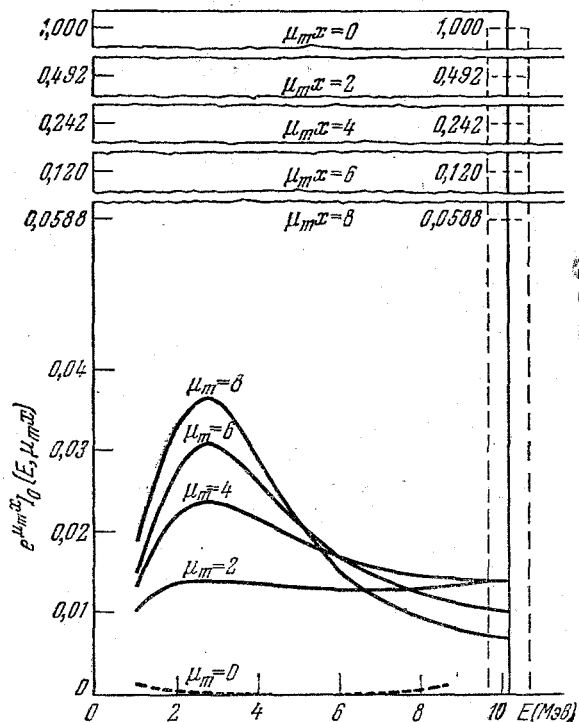


Рис. 5. Дифференциальный спектр $I_0(E, \mu_m x)$ интенсивности гамма-лучей при различных расстояниях от плоского направленного источника 10 Мэв в свинце.

Переходя от плотности фотонов $N_0(x, \lambda)$ к плотности энергии фотонов $I_0(\mu_0 x, E)$, будем иметь

$$I_0(\mu_0 x, E) = e^{-\mu_0 |x|} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} I_{0n}^{(s)}(E) U_n(|\mu_0 x|) + \mu_0 x \sum_{n=0}^{\infty} I_{0n}^{(a)}(E) V_n(|\mu_0 x|) \right\}.$$

Авторы¹⁹ вычислили по три первых члена в каждой из входящих сюда сумм с $\mu_0 = 0,0612 \text{ см}^{-1}$. По ним построены кривые рис. 6. Кривая для $\mu_0 x = -1$ соответствует обратному рассеянию.

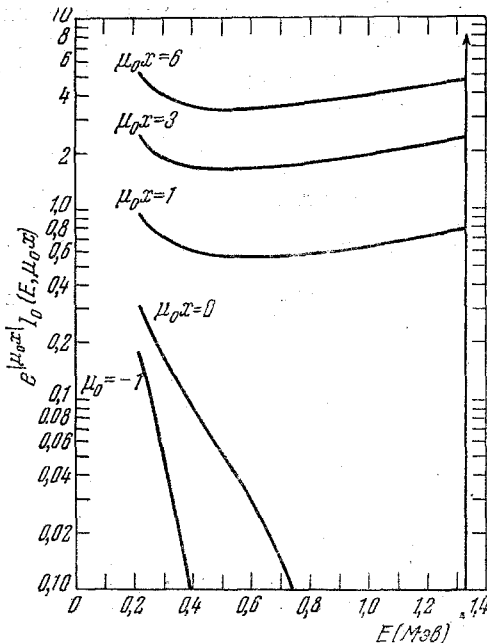


Рис. 6. Дифференциальный спектр интенсивности гамма-лучей при различных расстояниях от плоского направленного источника 1,33 Мэв в воде.

Сопоставление приведенных кривых, в особенности рис. 5, 7 и 9, позволяет проследить изменение спектра рассеянного излучения с толщиной поглотителя при различных значениях начальной энергии E_0 . При малой толщине число рассеянных квантов невелико и вид спектра, в основном, определяется спектром источника. При средних и больших толщинах существенно многократное рассеяние и вид спектра приближается к спектру в неограниченной среде (см. рис. 2). В легких элементах имеется максимум в мягкой области спектра. На рис. 6 и 8 он лежит за пределами энергии, для которых проведены расчеты. В тяжелых элементах (см., например, рис. 5) этот максимум отсутствует, но зато имеется максимум вблизи энергии, соответствующей минимуму коэффициента поглощения.

Исследование углового распределения излучения от плоского изотропного источника проведено Бергером¹. Рис. 7 иллюстрирует типичные результаты его расчетов для плоского изотропного источника 1 Мэв в воде при $\mu_0 x = 1$ и представляет зависимость $e^{\mu_0 x} I(x, u_x, E)$ от u_x . Максимумы кривых рис. 7 в основном обусловлены однократно рассеянным излучением. С увеличением $\mu_0 x$ они смещаются в сторону $u_x = 1$.

Бергер³ провел также расчеты по плоскому направленному наклонному источнику. Его результаты для источника 0,66 Мэв в воде приведены на рис. 8 и 9. Рис. 8 (a, b, c, d) показывает энергетический спектр $I_0^\psi(x, E)$ рассеянного излучения (в единицах $\frac{\text{Мэв}}{\text{см}^2 \text{сек}} \cdot \frac{1}{\text{Мэв}}$) при различных расстояниях x от плоскости источника для углов наклона $\psi = 0^\circ, 30^\circ, 60^\circ$ и 90° *). На рис. 9 (a, b) представлена зависимость полной интенсивности $I_T^\psi(x)$ от угла наклона источника и от расстояния от плоскости источника *).

*) Вычисления доведены до $E = 0,133 \text{ Мэв}$. Разрывы на кривых около 0,2 Мэв соответствуют минимальной энергии однократно рассеянных квантов.

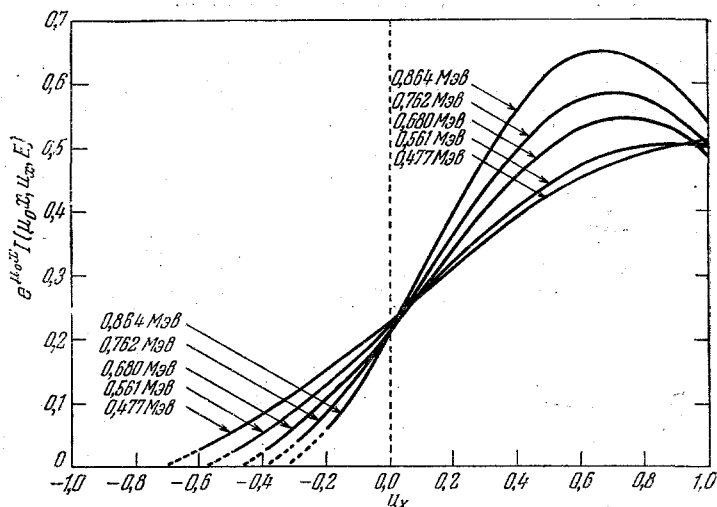


Рис. 7. Угловое распределение потока энергии $I(\mu_0 x, u_x, E)$ некоторых спектральных компонент на расстоянии $\mu_0 x = 1$ от плоского изотропного источника 1 Мэв в воде.

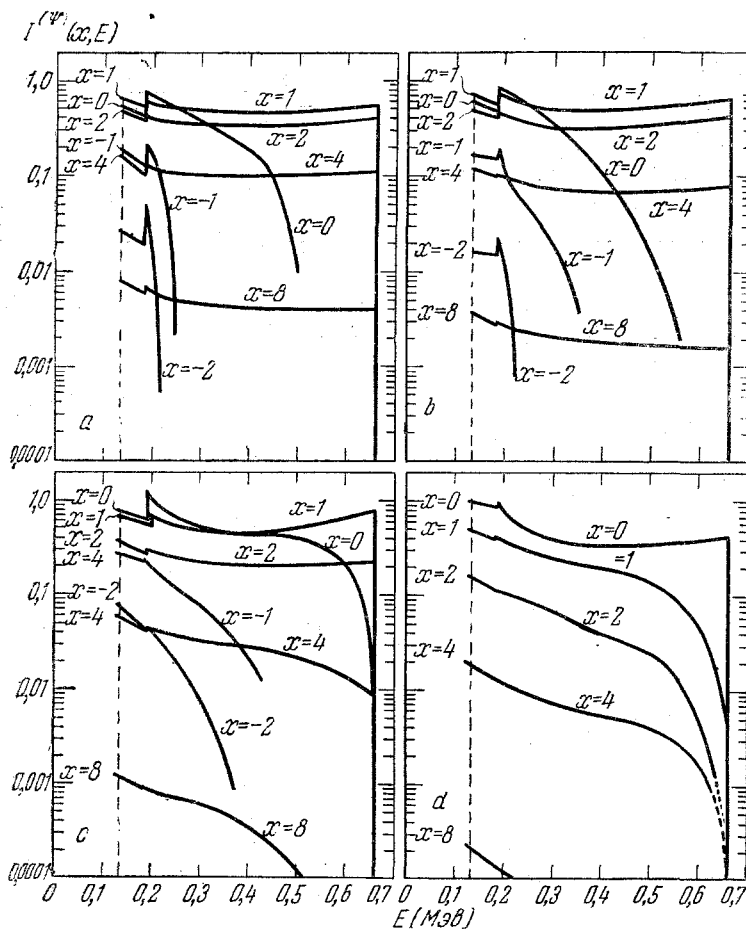


Рис. 8. Дифференциальный спектр $I^{(\psi)}(X, E)$ потока рассеянных гамма-лучей при различных расстояниях $X = \mu_0 x$ от плоского направленного наклонного источника 0,66 Мэв в воде.

Экспериментальных исследований спектрального и углового распределения рассеянного излучения в случае «плоского источника» в доступной нам литературе не имеется. Из приведенных теоретических результатов для плоских

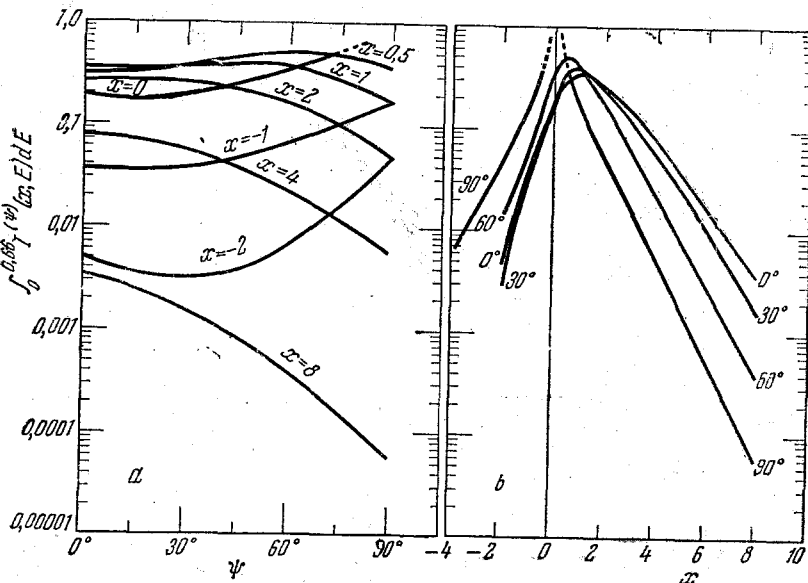


Рис. 9. Полный поток рассеянных гамма-лучей от плоского направленного наклонного источника 0,66 Мэв в воде.

источников подвергалась экспериментальной проверке только полная интенсивность излучения.

Рассмотрим относящиеся сюда экспериментальные работы. Бич, Тьюс и Фост²⁰ исследовали прохождение гамма-лучей Cs^{137} (0,66 Мэв), Na^{24} (1,38 и

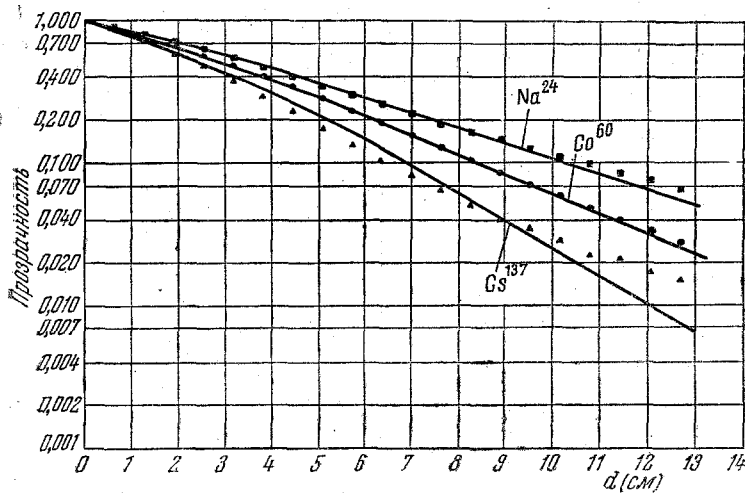


Рис. 10. Сравнение теоретических и экспериментальных данных для прозрачности в функции расстояния до плоскости источника.

2,76 Мэв) и Co^{60} (1,17 и 1,33 Мэв) через железо. В использованной ими установке источник был удален на расстояние 4,5 м от поглотителя (стопы железных плит $120 \times 120 \times 0,6 \text{ см}^3$) для обеспечения одинаковой интенсивности пучка по всей поверхности поглотителя. Гамма-излучение регистрировалось

счетчиком, помещенным за поглотителем. Результаты опыта и теоретические кривые прозрачности Спенсера и Фано приведены на рис. 10. Экспериментальные точки для Na^{24} и Co^{60} хорошо ложатся на теоретические кривые. Для Cs^{137} имеются отклонения, которые, по-видимому, в основном объясняются большим рассеянием излучения в воздухе, вследствие чего на поглотитель падают, помимо первичных, также и рассеянные кванты, что не учтено в расчете.

В работе Керн, Каннеди и Выкова³⁰ исследовалось прохождение гамма-излучения от плоского наклонного источника Cs^{137} через пластины бетона. На рис. 11 сравниваются их результаты для факторов возрастания с теорети-

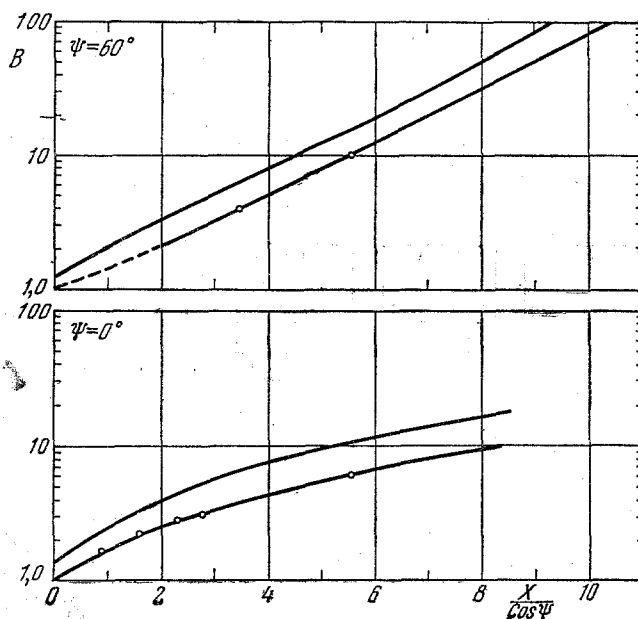


Рис. 11. Теоретические и экспериментальные факторы возрастания для излучения от плоского наклонного источника $0,66 \text{ Мэв}$ в функции от расстояния в направлении падающего излучения. Теоретические кривые соответствуют бесконечной массе воды, экспериментальные кривые — плоскопараллельной бетонной плите.

ческими кривыми Бергера³ для источника $0,66 \text{ Мэв}$ в воде и углов наклона $\psi = 0^\circ$ и $\psi = 60^\circ$. В обоих случаях экспериментальные кривые лежат ниже теоретических. Это объясняется тем, что факторы возрастания для бетона ниже, чем для воды. Кроме того, теоретические расчеты относятся к бесконечной среде, и, следовательно, учитывают попадание в детектор излучения, рассеянного глубже расположенными слоями, в то время как в опытах всегда использовались бетонные пластины конечной толщины и такое обратное рассеяние было исключено; кроме того, теоретические и экспериментальные кривые почти параллельны друг другу при $\frac{X}{\cos \psi} > 3$, что находится в согласии с результатами², полученными по методу Монте-Карло (см. § 17).

Ройс, Шур и Тейлор³³ исследовали прохождение широкого пучка гамма-лучей N^{16} (6 Мэв) через воду. В работе измерялась относительная доза гамма-излучения на различных расстояниях от источника с помощью антрацевого сцинтилляционного счетчика. Как видно из рис. 12, до расстояния 160 см экспериментальные данные (крестики) хорошо согласуются с рассчитанными по теории Спенсера и Фано⁶¹.

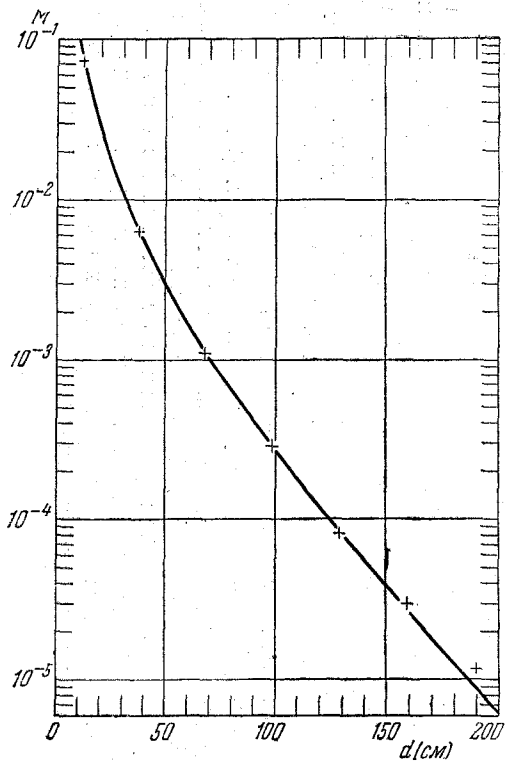


Рис. 12. Дозовое ослабление гамма-излучения N^{16} (6 Мэв) в воде. Сплошная кривая вычислена методом Спенсера и Фано, крестики на кривой — экспериментальные данные.

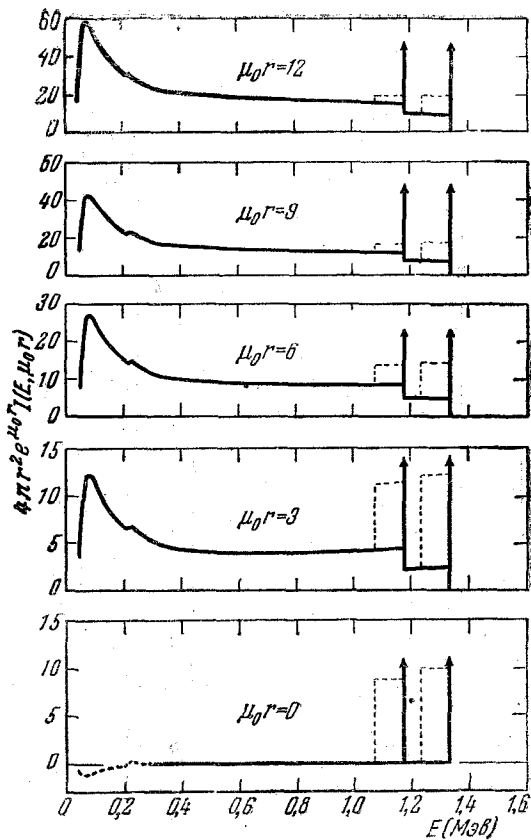


Рис. 13. Дифференциальный спектр $I_0(E, \mu_0 r)$ интенсивности гамма-лучей при различных расстояниях r от точечного изотропного источника Co^{60} в воде.

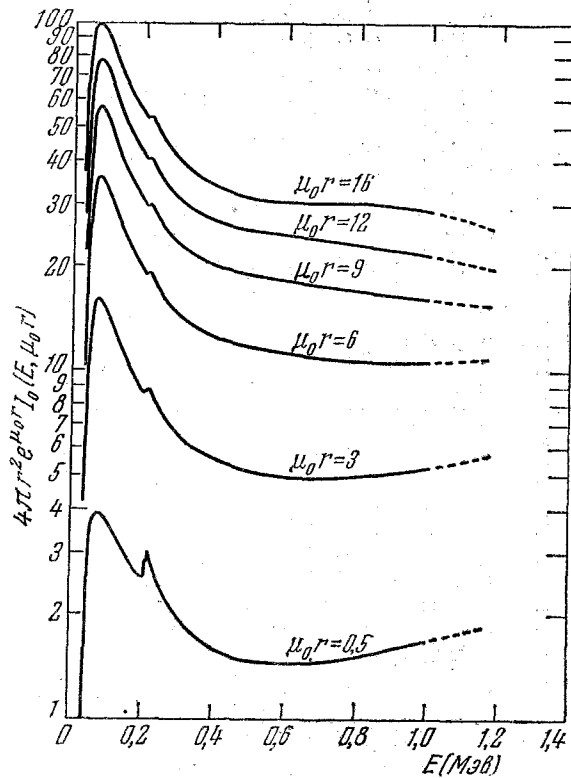


Рис. 14. Спектр рис. 13 в логарифмическом масштабе.

2. Точечный источник

Численные расчеты¹⁸ для случая точечного изотропного источника Co^{60} в воде проводились методом § 7. Было найдено четыре первых коэффициента разложения $N_0(r, \lambda)$ по полиномам U_n . Результаты вычислений¹⁸ представлены на рис. 13—15. Рисунок 13 дает интенсивность излучения $I_0(\mu r, E)$, помноженную на $4\pi r^2 e^{\mu_0 r}$, на различных расстояниях r от источника. Сплошные вертикальные линии указывают положение двух компонент источника Co^{60} . Площади пунктирных прямоугольников соответствуют интенсивности этих линий. Шкала ординат в этом случае нормируется на единицу интенсивности одной из компонент (1,33 Мэв) источника. (Коэффициент узкого пучка этой компоненты равен $\mu_0 = \mu(1,33 \text{ Мэв}) = 0,0612 \text{ см}^{-1}$.)

На рис. 14 изображены в полупологарифмическом масштабе те же самые кривые, что и на рис. 13. По ним видно, что при малых энергиях спектральное распределение не изменяется с возрастанием глубины проникновения, поскольку все кривые параллельны друг другу. Это свидетельствует о том, что количества порождаемых при рассеянии и поглощаемых путем фотоэффекта квантов в этой спектральной области находятся в «равновесии».

Наконец, рис. 15 позволяет сравнить теоретически вычисленный фактор возрастания (сплошная кривая) с экспериментальными данными Уайта³⁵. Теоретическая кривая получена с помощью спектрального распределения рис. 13. Совпадение экспериментальных и теоретических значений очень хорошее. Из рис. 15 видно, что фактор возрастания увеличивается с расстоянием несколько быстрее, нежели линейно.

Вторая экспериментальная работа с точечным источником Co^{60} , погруженным в воду, была выполнена Хейвардом²⁷. Им исследовался спектр вторичных электронов в воде на различных расстояниях от источника с помощью сцинтилляционного спектрометра.

Рис. 16 показывает дифференциальный спектр электронов, производимых квантами от источника Co^{60} для шести различных расстояний от него. По оси ординат откладывается число электронов, приходящееся на интервал энергии в 1 Мэв на 1 квант, испущенный источником, и на грамм кристалла антрацена, использованного в качестве фосфора в сцинтилляционном счетчике. Сплошные кривые на рис. 16 получены теоретически Спенсером. Положение экспериментальных точек по отношению к теоретическим кривым указывает, что общий характер изменения спектра с расстоянием правильно предсказывается теорией. При малом расстоянии (10 см) жесткий конец спектра хорошо выявляется и намечаются два пика, соответствующие двум компонентам источника Co^{60} . При расстояниях около метра и более изменения в форме спектра со стороны высоких энергий слишком незначительны и не были обнаружены из-за низкой разрешающей способности спектрометра.

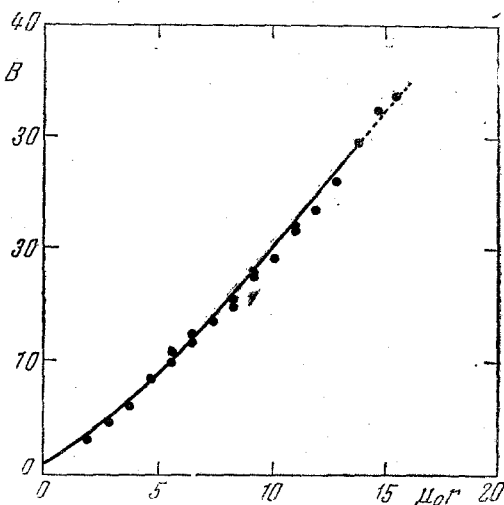


Рис. 15. Сравнение вычисленной кривой для фактора возрастания с экспериментальными данными³⁵.

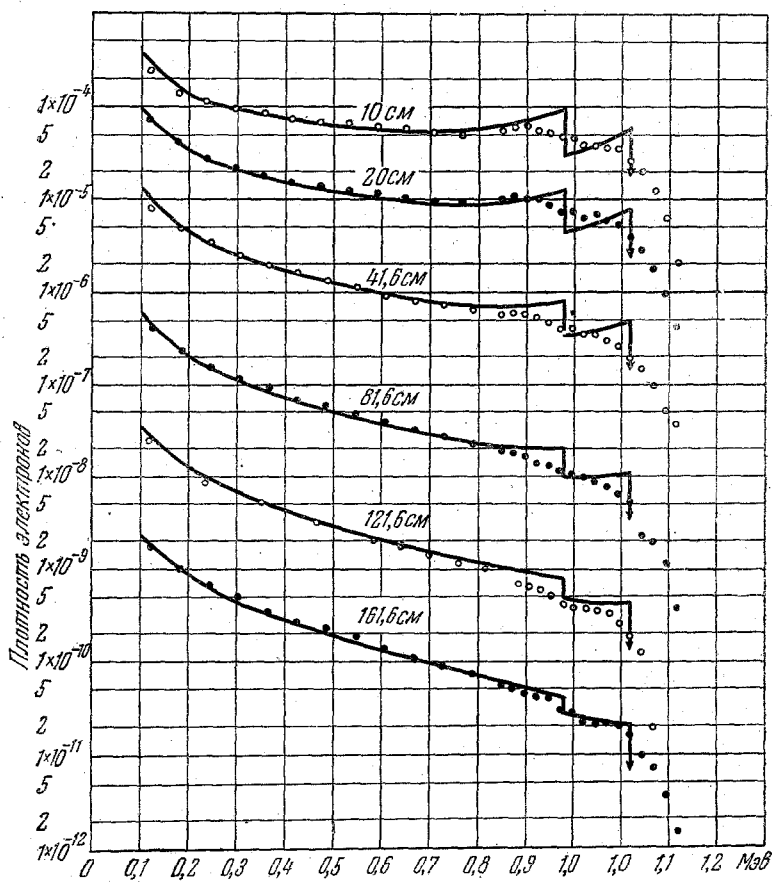


Рис. 16. Дифференциальный спектр электронов, производимых квантами от источника Co^{60} в воде для шести различных расстояний.

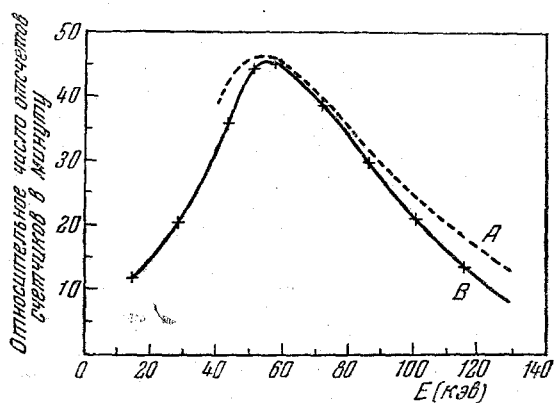


Рис. 17. Сравнение экспериментальных данных для мягкого участка спектра источника Co^{60} с результатами вычислений. А — теоретический спектр; В — экспериментальный спектр.

К обсуждаемым работам относятся и проведенные Вейссом и Бернштейном³⁴ измерения энергетического спектра гамма-лучей от точечного источника Co^{60} в воде для энергий ниже $0,1 \text{ Мэв}$ с помощью сцинтилляционного спектрометра. Максимальное расстояние от источника равнялось 190 см . Типичная спектральная кривая³⁴ для расстояния $r=160 \text{ см}$ представлена на рис. 17 (сплошная кривая). Пунктирная кривая соответствует вычислениям Спенсера и Фано. Как видно, обе кривые близки друг к другу. При изменении r от 70 до 190 см не наблюдалось никакого изменения ни в форме спектра, ни в положении максимума. Некоторое уширение спектральной кривой и смещение максимума в направлении высокой энергии наблюдалось лишь для $r < 30 \text{ см}$. Вейсс и Бернштейн измеряли также ослабление мягкой части спектра гамма-лучей Co^{60} с возрастанием расстояния от источника.

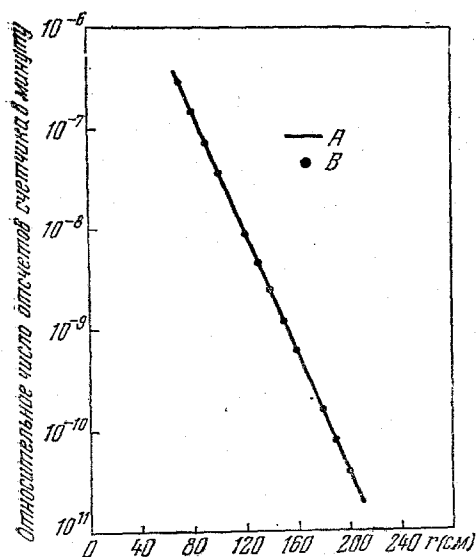


Рис. 18. Ослабление мягкой ветви спектра источника Co^{60} в функции от расстояния. — A — теоретическая кривая; B — экспериментальные точки.

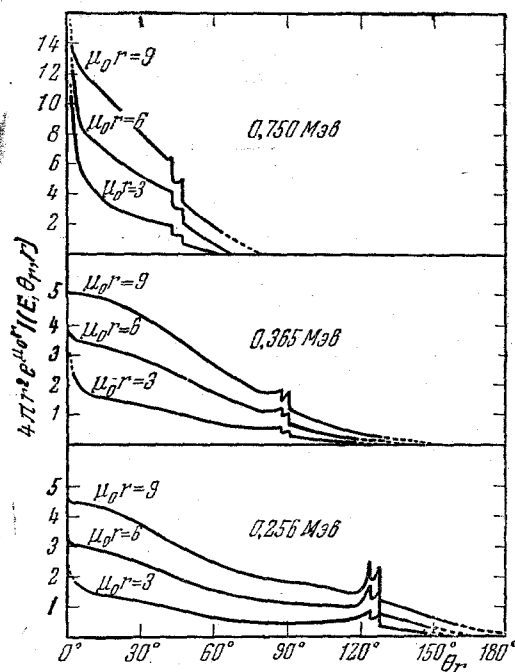


Рис. 19. Дифференциальное распределение $I(E, u_2, u_0, r)$ интенсивности гамма-лучей для некоторых спектральных компонент на расстоянии от точечного изотропного источника Co^{60} в воде.

Рис. 18 показывает, что и в этом случае теоретические предсказания прекрасно подтверждаются экспериментальными данными. Аналогичные результаты получены с источником Hg^{203} .

В цитированной выше работе Спенсера и Стинсон¹⁹ наряду с плоским направленным источником рассмотрены также точечный изотропный и точечный направленный источники. Для точечного изотропного источника Co^{60} в воде рассчитано угловое распределение фотонов для некоторых значений энергии (рис. 19); θ_r — угол отклонения фотона от линии, проведенной от источника к фотону, а для точечного направленного источника энергии $1,33 \text{ Мэв}$ в воде ввиду сложности расчетов задача решалась при сильно упрощающих предположениях и была вычислена зависимость среднего квадратичного радиального смещения излучения от энергии на различных глубинах.

Представляет также интерес работа Эллиота и др.²³, выполненная с целью проверки применимости теории Спенсера и Фано для тяжелых элементов и точечного изотропного источника Co^{60} . В качестве детектора рассеянного

излучения использована специальная фотографическая пленка. Экспериментальная величина фактора возрастания определена как отношение полного

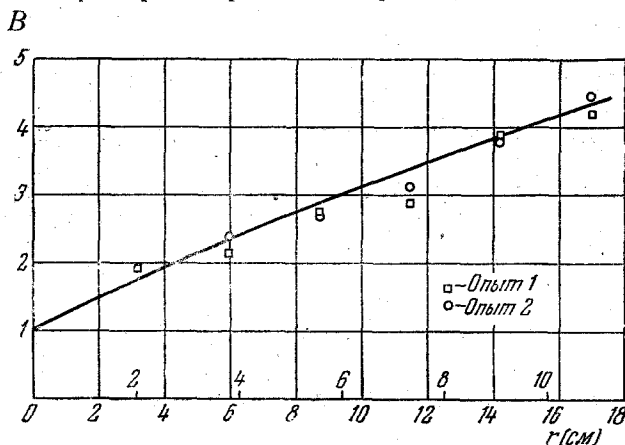


Рис. 20. Фактор возрастания для точечного изотропного источника Co^{60} в свинце. Сплошная кривая вычислена методом Спенсера и Фано.

почернения пленки к почернению, вычисленному для случая воздействия только нерассеянного излучения. Как видно из рис. 20, согласие теории (сплошная кривая) и данных эксперимента хорошее.

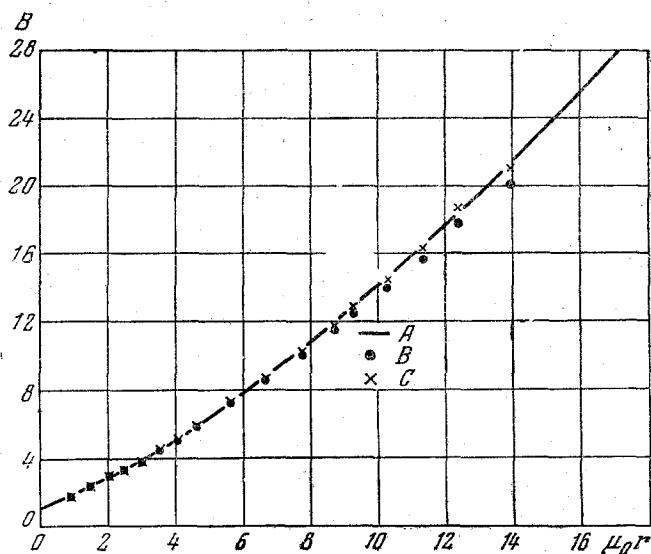


Рис. 21. Теоретические и экспериментальные факторы возрастания для точечного изотропного источника Co^{60} в железе в зависимости от расстояния до источника. — A — теория; B — эксперимент, основывающийся на теоретических коэффициентах поглощения, равных $0,0549 \text{ см}^2/\text{г}$ и $0,0516 \text{ см}^2/\text{г}$; C — эксперимент, основывающийся на коэффициентах поглощения на 0,4%, больших $\mu_1 = 0,0551 \text{ см}^2/\text{г}$ и $0,0518 \text{ см}^2/\text{г}$.

Детальному исследованию факторов возрастания для точечного источника Co^{60} в железе и свинце посвящена работа Гаррета и Уайта²⁶. Опыты прове-

дены при толщине железа до 14 свободных пробегов и свинца немного более 16 свободных пробегов. Ионизация измерялась воздушно эквивалентными конденсаторными камерами. Результаты измерений и расчетов по теории Спенсера и Фано представлены на рис. 21 и 22.

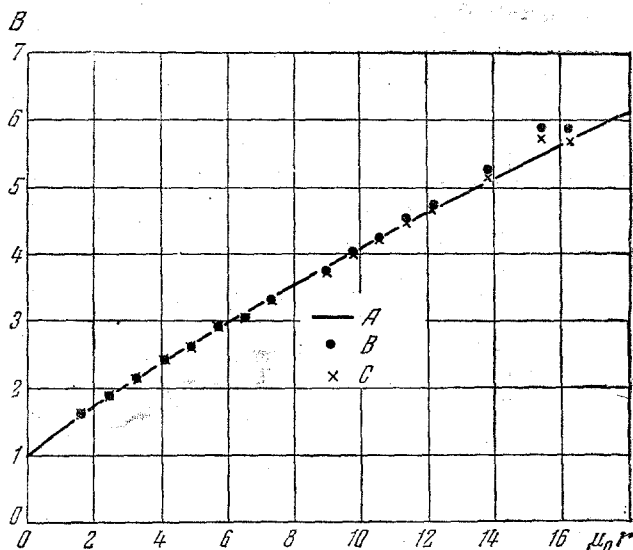


Рис. 22. Теоретические и экспериментальные факторы возрастания для точечного изотропного источника Co^{60} в свинце в функции от расстояния от источника. — А — теория; В — эксперимент, основывающийся на теоретических коэффициентах поглощения, равных $0,0585 \text{ см}^2/\text{г}$ и $0,0537 \text{ см}^2/\text{г}$; С — эксперимент, основывающийся на коэффициентах поглощения на 0,2%, меньших и соответственно равных $0,0584 \text{ см}^2/\text{г}$ и $0,0536 \text{ см}^2/\text{г}$.

Уайт³⁶ провел исследование по определению величин интенсивности $I_0(r, E)$ (рис. 23), $I_A(r, u_r)$ (рис. 24) и $I(r, u_r, E)$ (рис. 25) для источника Co^{60} , помещенного в бетон. Пунктирные и сплошные кривые рис. 23 являются теоретическими спектральными кривыми для воды и железа соответственно, вычисленными Гольдштейном и Уилкинсом⁶². Согласие между теорией и экспериментом, как отмечает автор, находится в пределах точности измерений. На рис. 24 представлено среднее угловое распределение интенсивности рассеянного излучения. Серия кривых рис. 25 дает интенсивности гамма-лучей в функции от энергии для различных значений углов при $\mu_0 r = 6,52$.

В недавно опубликованной работе Цыпина, Кухтевича и Казанского³⁸ была измерена величина дозового ослабления гамма-лучей (отношение ионизации, измеренной камерой в веществе, и ионизации, измеренной камерой в том же месте без исследуемого вещества) точечных источников Na^{24} в воде и в свинце и Au^{198} в железе. Как отмечают авторы, их экспериментальные данные дозового ослабления для Na^{24} совпадают с расчетными данными, полученными на основе таблиц дозовых факторов возрастания и коэффициентов поглощения, приведенных Фано⁵⁷.

В литературе имеются сообщения⁶¹ о том, что в Национальном Бюро Стандартов (США) проведена большая работа⁶² по вычислению распределения гамма-лучей для 206 случаев. Расчеты выполнены для большинства элементов периодической системы, включая вещества с чисто комптоновским рассеянием, для точечного изотропного и плоского направленного источников. Вычисления

проведены для расстояний от 1 до 20 свободных пробегов от источника при начальной энергии гамма-квантов от 0,5 до 10 Мэв.

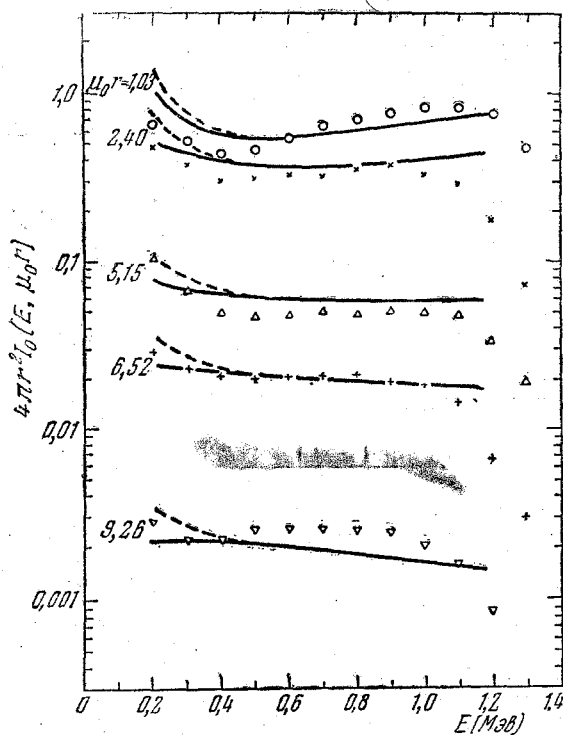


Рис. 23. Дифференциальный спектр $I_0(E, \mu_0 r)$ интенсивности гамма-лучей при различных расстояниях r от точечного изотропного источника Co^{60} в бетоне.

Как видно из приведенных в этом параграфе данных, пространственное, угловое и спектральное распределения излучения точечного источника не об-

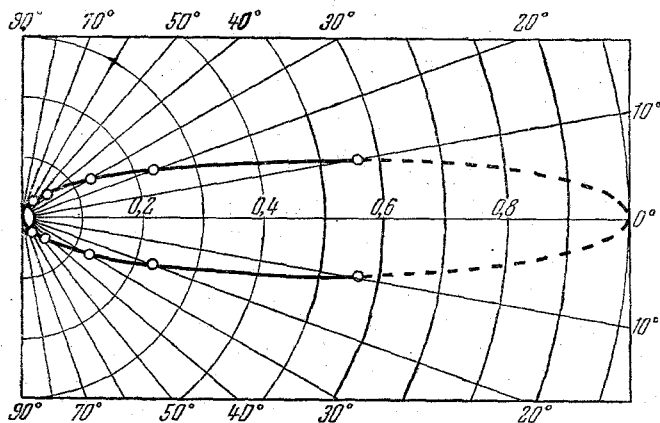


Рис. 24. Среднее угловое распределение. Расстояние от начала соответствует относительной интенсивности квантов всех энергий на единицу телесного угла для заданного θ .

наруживают каких-либо качественно отличных особенностей по сравнению с плоским источником.

Согласие теоретических данных, полученных методом уравнения переноса, с экспериментальными результатами хорошее, однако вычисления становятся

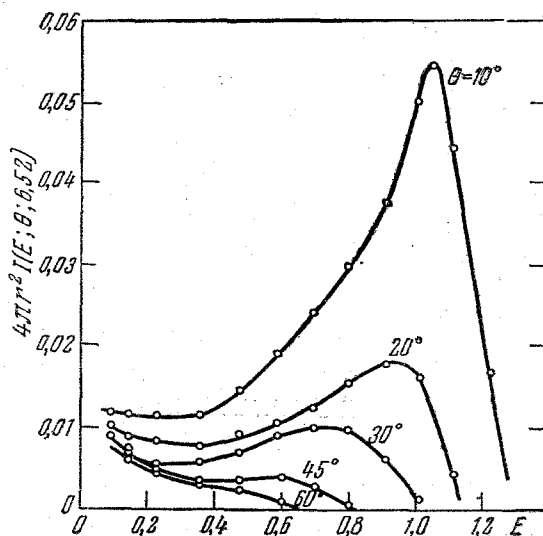


Рис. 25. Дифференциальное энергетическое и угловое распределение интенсивности гамма-излучения при $\mu_0 r = 6,52$.

весьма громоздкими, если глубина проникновения превышает 15—20 свободных пробегов.

IV. ПРИБЛИЖЕНИЕ МАЛЫХ УГЛОВ. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ СПЕКТР РАССЕЯННОГО ГАММА-ИЗЛУЧЕНИЯ НА БОЛЬШИХ ГЛУБИНАХ ПРОНИКНОВЕНИЯ

§ 9. Вводные замечания

Изложенный в предыдущей главе метод полиномиальных разложений является весьма конструктивным методом решения проблемы распространения гамма-излучения в веществе, но он годится для относительно небольших глубин проникновения и является численным. Для качественного аналитического подхода к проблеме может быть использовано то обстоятельство, что при комптон-эффекте для гамма-излучения с энергией порядка нескольких Мэв рассеяние на малые углы значительно вероятнее рассеяния на большие углы.

Настоящая глава состоит из двух частей. В первой части в приближении малых углов рассматривается аналитический вид энергетического спектра и углового распределения рассеянного гамма-излучения^{8, 48, 49, 55, 58, 59, 60}. Вторая часть посвящена чрезвычайно важным работам Спенсера и Фано^{7, 17, 55, 58} по исследованию асимптотических формул для энергетического спектра гамма-лучей на больших глубинах проникновения с учетом угловых отклонений.

Следует отметить, что приближение малых углов ($\cos \theta \simeq 1$, $\sin \theta \simeq \theta$; «straight — ahead» approximation) является довольно грубым и может претендовать, в основном, только на качественное описание. Действительно⁷, для случая плоского направленного источника, например, для фотона, летящего под углом θ с нормалью к плоскости источников, эффективный коэффициент поглощения равен $\frac{\mu(\lambda)}{\cos \theta}$. Если фотон с длиной волны λ_0 и направлением

$\theta_0 = 0$ вследствие комптон-эффекта отклоняется на угол $\theta = \arccos(1 - \delta\lambda)$, то эффективный коэффициент поглощения изменится от $\frac{\mu(\lambda_0)}{\cos \theta_0} = \mu(\lambda_0)$ до

$$\frac{\mu(\lambda_0 + \delta\lambda)}{1 - \delta\lambda} \sim \mu(\lambda_0) + \left(\frac{d\mu(\lambda)}{d\lambda} \right)_{\lambda=\lambda_0} \delta\lambda + \mu(\lambda_0) \delta\lambda.$$

Первый поправочный член, обусловленный изменением $\mu(\lambda)$, для большинства материалов имеет ту же по порядку величину, что и второй поправочный член, обусловленный угловыми отклонениями. Поэтому учет угловых отклонений по меньшей мере так же важен, как и учет энергетической зависимости коэффициента поглощения. Заметим, однако, что в легких элементах коэффициент поглощения в широком интервале энергий очень слабо зависит от энергии и разумно в этом случае параллельно с приближением малых углов пренебречь зависимостью коэффициента поглощения от энергии. Приближение малых углов оказалось интересным и в том отношении, что, как показал Фано⁷, учет угловых отклонений не меняет аналитического вида энергетического спектра гамма-лучей на больших глубинах проникновения, а приводит лишь к изменению определенных численных констант.

§ 10. Уравнение переноса излучения в приближении малых углов рассеяния

В случае плоского направленного источника в приближении малых углов угловое распределение рассеянного гамма-излучения обладает резко выраженной направленностью вперед. Поэтому в разложении (3,7) по полиномам Лежандра основную роль играют далекие члены с большим l . Используя известное соотношение

$$\lim_{l \rightarrow \infty} P_l \left(\cos \frac{\theta}{l} \right) = I_0(\theta), \quad (10,1)$$

можно перейти от разложения по полиномам Лежандра к разложению по функциям Бесселя нулевого порядка (преобразование Ганкеля):

$$N(x, \theta, \lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty N_l(x, \lambda) I_0(l\theta) l dl \quad (10,2)$$

и

$$N_l(x, \lambda) = 2\pi \int_0^\infty N(x, \theta, \lambda) I_0(l\theta) \theta d\theta \quad (10,3)$$

(такая операция была использована при изучении рассеяния электронов Компанейцем⁴⁶).

Энергетический спектр гамма-лучей описывается, очевидно, функцией

$$N_0(x, \lambda) = 2\pi \int_0^\infty N(x, \theta, \lambda) \theta d\theta.$$

Учитывая также, что при больших l

$$P_l(1 - \lambda + \lambda') \sim I_0(l \sqrt{2(\lambda - \lambda')}) \quad (10,4)$$

и

$$\frac{l+1}{2l+1} \frac{\partial N_{l+1}}{\partial x} + \frac{l}{2l+1} \frac{\partial N_{l-1}}{\partial x} \sim \frac{\partial N_l}{\partial x}, \quad (10,5)$$

можно привести зацепляющуюся бесконечную систему уравнений (3,11) к од-

ному уравнению⁴⁸

$$\frac{\partial N_I(x, \lambda)}{\partial x} = -\mu(\lambda) N_I(x, \lambda) + \int_{\lambda_0}^{\lambda} d\lambda' K(\lambda', \lambda) I_0(l \sqrt{2(\lambda - \lambda')}) \times \\ \times N_I(x, \lambda') + \delta(x) \delta(\lambda - \lambda_0). \quad (10,6)$$

Сделанное приведение соответствует приближению малых углов $\cos \theta \sim 1$, $\sin \theta \sim \theta$.

Для приближения, в котором $\cos \theta \sim 1 - \frac{\theta^2}{2}$, следовало бы (см. работу Вика⁶⁹) прибавить в правую часть (10,5) $\frac{1}{2} \frac{\partial^3 N_I(x, \lambda)}{\partial l^2 \partial x}$. Дифференциальный коэффициент рассеяния $K(\lambda', \lambda)$ (1,13) в ряде работ^{8, 48, 49, 58-60} аппроксимируют выражением

$$K(\lambda', \lambda) \sim \left(\frac{\lambda'}{\lambda}\right)^n C = \left(\frac{\lambda'}{\lambda}\right)^n \frac{3}{4} \mu_T, \quad (10,7)$$

где $\mu_T = \sigma_0 n Z$ — коэффициент томсоновского рассеяния (см. (1,2)). Наилучшее в смысле метода наименьших квадратов значение показателя степени⁴⁸ $n = 1,8$. В работах группы Фано n выбирается равным 0. В работах Фолди^{8, 59} $n = 1$. Как нетрудно видеть^{48, 60}, решение уравнения (10,6) в случае неравного нулю n отличается от решения при $n = 0$ только лишь множителем $\left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^n$. Так как, кроме того, мы интересуемся в приближении малых углов узким спектральным интервалом, то этот множитель будет ниже спускаться.

§ 11. Решение уравнения переноса излучения в приближении малых углов

В случае линейно зависящего от длины волны коэффициента поглощения $\mu(\lambda) = \mu_0 + \mu_0(\lambda - \lambda_0)$, применяя преобразование Лапласа по λ для $N_I(x, \lambda)$:

$$F_I(x, s) = \int_{\lambda_0}^{\infty} d\lambda \exp[-(\lambda - \lambda_0)s] N_I(x, \lambda), \quad (11,1)$$

имеем

$$N_I(x, \lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta - i\infty}^{\delta + i\infty} ds \exp[(\lambda - \lambda_0)s] F_I(x, s),$$

где для $F_I(x, s)$ получаем^{48, 49} выражение

$$F_I(x, s) = \exp[-\mu_0 x] \exp \left\{ C \int_0^x dy \frac{\exp \left[-\frac{l^2}{2(s - \mu_0 y)} \right]}{s - \mu_0 y} \right\}. \quad (11,2)$$

Если пренебречь зависимостью коэффициента поглощения от энергии ($\mu_0 = 0$), то выражение для $F_I(x, s)$ упрощается:

$$F_I(x, s) = \exp[-\mu_0 x] \exp \left\{ \frac{ax}{s} \exp \left(-\frac{l^2}{2s} \right) \right\}. \quad (11,3)$$

Обращение $F_I(x, s)$ по Ганкелю и Лапласу можно совершить, разлагая $\exp(\mu_0 x) F_I(x, s)$ по степеням глубины проникновения x .

Приведем результат в случае постоянного коэффициента поглощения^{8, 48, 59}.

$$N(x, \theta, \lambda) = \frac{1}{2\pi} e^{-\mu_0 x} \left\{ \delta(\lambda - \lambda_0) \delta\left(\frac{\theta^2}{2}\right) + \frac{\rho^2}{4(\lambda - \lambda_0)} \delta\left(\lambda - \lambda_0 - \frac{\theta^2}{2}\right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{(\lambda - \lambda_0)^2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{(n!)^2} \left(\frac{\rho}{2}\right)^{2n} \left(1 - \frac{\theta^2}{2n(\lambda - \lambda_0)}\right)^{n-2} u\left(\lambda - \lambda_0 - \frac{\theta^2}{2n}\right) \right\}, \quad (11,4)$$

где

$$\rho = 2\sqrt{Cx(\lambda - \lambda_0)}, \quad (11,5)$$

$u(x)$ — единичный скачок

$$u(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases} \quad (11,6)$$

Полученное решение имеет вид степенного ряда относительно глубины проникновения гамма-излучения внутрь вещества, умноженного на экспоненту $\exp(-\mu_0 x)$, описывающую поглощение нерассеянного излучения. Каждый член этого ряда имеет простой физический смысл. Первый член описывает не подвергшееся рассеянию излучение. Второй член представляет собой однократно рассеянное излучение. Следующие члены, как это видно из корреляции между углом и длиной волны, представляют доли гамма-излучения, испытавшие комптоновское рассеяние 2, 3, ... раз.

Как и следовало ожидать, максимальный угол отклонения для двукратно рассеянного излучения $\theta_{\max}^{(2)} = \sqrt{4(\lambda - \lambda_0)}$, для n -кратно рассеянного излучения $\theta_{\max}^{(n)} = \sqrt{2n(\lambda - \lambda_0)}$.

Интенсивность нерассеянного излучения описывается произведением двух δ -функций, однократно рассеянного — одной δ -функцией, интенсивность двукратно рассеянного излучения терпит разрыв при $\theta = \theta_{\max}^{(2)}$, интенсивность трехкратно рассеянного излучения непрерывна, но имеет разрыв в первой производной, интенсивность n -кратно рассеянного излучения содержит разрыв в $(n-2)$ -й производной. Кривая, изображающая интенсивность n -кратно рассеянного излучения, с ростом n сглаживается, что естественно. Угловое распределение гамма-излучения, рассеянного два и более раз, имеет поэтому характерный ступенчатый вид.

Эти соображения о непрерывности интенсивностей кратно рассеянных излучений справедливы и при произвольном коэффициенте поглощения.

С ростом глубины проникновения высшие порядки рассеяния начинают играть основную роль, угловое распределение сглаживается и стремится к гауссовскому $\exp[-\theta^2/2(\lambda - \lambda_0)]$.

Выражение типа (11,4), только более громоздкое, может быть получено и для линейно, и для квадратично зависящего от длины волны коэффициента поглощения⁴⁸. Для энергетического спектра $N_0(x, \lambda)$ можно из формул (11,2) и (11,3) найти замкнутые выражения:

для случая $\mu(\lambda) = \mu_0$

$$N_0(x, \lambda) = e^{-\mu_0 x} \left\{ \delta(\lambda - \lambda_0) + \frac{\rho}{2(\lambda - \lambda_0)} J_1(\rho) \right\}, \quad (11,7)$$

для случая $\mu(\lambda) = \mu_0 + \mu_0(\lambda - \lambda_0)$

$$N_0(x, \lambda) = e^{-\mu_0 x} \left\{ \delta(\lambda - \lambda_0) + Cx_1 F_1\left(1 - \frac{C}{\mu_0}; 2; -\mu_0(\lambda - \lambda_0)x\right) \right\}, \quad (11,8)$$

где $J_1(\rho)$ — бесселева функция от мнимого аргумента первого порядка, ${}_1F_1(a; \beta; x)$ — вырожденная гипергеометрическая функция. Энергетический

спектр (11,8) впервые был найден в работе Бете, Фано и Карра⁵⁵. В этих случаях в замкнутом виде, годном для любых глубин проникновения, из (11,2)

и (11,3) могут быть получены и угловые моменты $\overline{\theta^{2n}} = 2\pi \int_0^\infty \theta^{2n} N(x, \theta, \lambda) \times \theta d\theta$, выражающиеся в случае постоянного коэффициента поглощения через функции Бесселя от мнимого аргумента, а в случае линейного коэффициента поглощения через вырожденные гипергеометрические функции⁴⁹.

§ 12. Эволюция углового распределения с ростом глубины проникновения

Выше отмечалось, что при увеличении глубины проникновения угловое распределение рассеянного гамма-излучения стремится к гауссовскому. Зная моменты этого распределения⁴⁹, можно при помощи метода Фано и Спенсера¹⁸ полиномиальных разложений с весом $\exp\left[-\frac{\theta^2}{2(\lambda-\lambda_0)}\right]$ найти угловое распределение гамма-лучей на больших глубинах. Именно⁴⁹ для случая постоянного коэффициента поглощения

$$N(x, \theta, \lambda) = \frac{4C^2x^2}{\pi} \exp(-\mu_0 x) \exp\left[-\frac{\theta^2}{2(\lambda-\lambda_0)}\right] \left\{ \frac{1}{\rho^3} J_1(\rho) - \frac{2}{\rho^4} \left[J_0(\rho) - \frac{2}{\rho} J_1(\rho) \right] L_2\left[\frac{\theta^2}{2(\lambda-\lambda_0)}\right] - \frac{16}{\rho^5} \left[J_1(\rho) - \frac{4}{\rho} J_0(\rho) + \frac{8}{\rho^2} J_1(\rho) \right] L_3\left[\frac{\theta^2}{2(\lambda-\lambda_0)}\right] + \dots \right\}, \quad (12,1)$$

где $L_n(x)$ — полиномы Чебышева — Лагерра.

На рис. 26 показана эволюция углового распределения многократно рассеянного гамма-излучения. Кривые для $\rho=1, 4$ и 6 вычислены из формулы

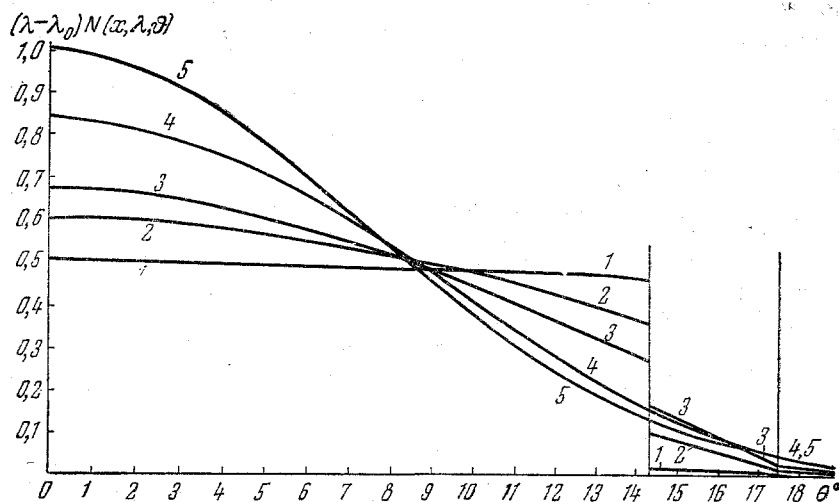


Рис. 26. Эволюция углового распределения гамма-лучей при росте глубины проникновения. Нормированное угловое распределение излучения энергии 9 Мэв, рассеянного два и более раз. $E_0 = 12,5$ Мэв, 1) $\rho = 1$, 2) $\rho = 4$, 3) $\rho = 6$, 4) $\rho = 16$, 5) $\exp\left[-\frac{\theta^2}{2(\lambda-\lambda_0)}\right]$.

(11,4), кривая для $\rho = 16$ — методом полиномиальных разложений (12,1). Для сравнения приведено и гауссово распределение.

§ 13. Состояние ограниченного радиационного равновесия

В этом и последующих параграфах главы будут кратко приведены результаты работ группы Фано и Спенсера^{7, 17, 55, 58}, посвященных исследованию гамма-излучения на больших глубинах проникновения в вещество. Начнем с качественного описания. С ростом глубины проникновения в вещество доля вторичного, рассеянного излучения возрастает. Можно ожидать, что на достаточно больших глубинах будет иметь место стремление к распределению, которое можно в известном смысле назвать состоянием радиационного равновесия.

Под истинным состоянием радиационного равновесия понимают состояние, характеризующееся следующими свойствами: 1) отношение интенсивности вторичного к интенсивности первичного излучения стремится при возрастании глубины проникновения к определенной максимальной величине, 2) качество вторичного излучения перестает зависеть от глубины проникновения, 3) изменение интенсивности всего проникающего излучения определяется ослаблением интенсивности первичного излучения, то есть следует экспоненциальному закону. Наличие такого состояния значительно упрощает исследование проблемы распространения излучения.

К сожалению, при распространении гамма-излучения условия истинного радиационного равновесия не удовлетворяются. Действительно, при комптоновском рассеянии некоторые гамма-кванты будут обладать почти той же энергией, почти тем же направлением, почти тем же коэффициентом ослабления, что и перед рассеянием. Благодаря этому, свойства 1) и 3) отсутствуют: отношение интенсивности вторичных гамма-лучей к интенсивности первичных беспредельно возрастает. Вместе с тем свойство 2), касающееся качества вторичного излучения, обладающего значительно отличающимся от максимального коэффициентом поглощения, сохраняется. Такое состояние Фано называет состоянием ограниченного равновесия. В состоянии истинного радиационного равновесия поток излучения на больших глубинах описывается произведением экспоненциальной функции глубины проникновения на функцию энергии и направления вторичного излучения. В интересующем нас состоянии ограниченного равновесия функция глубины теряет экспоненциальный характер, но гамма-излучение на больших глубинах с энергией, значительно отличающейся от первичной, можно описывать формулой вида

$$N(x, \lambda, \theta) \sim N_x(x) \cdot N_{\lambda\theta}(\lambda, \theta). \quad (13.1)$$

Отношение N_x к экспоненте $\exp(-\mu_m x)$, описывающей проникновение наиболее жесткого излучения, Фано называет «фактором возрастания», определение которого является целью ряда работ^{7, 17, 55, 58}.

§ 14. Энергетический спектр гамма-излучения на больших глубинах проникновения в приближении малых углов

Рассмотрим сначала в приближении малых углов случай плоского направленного монохроматического источника. Если первичное излучение является наиболее проникающим, то коэффициент поглощения можно аппроксимировать выражением $\mu(\lambda) = \mu_0 + \mu_0(\lambda - \lambda_0)$; энергетический спектр для этого случая был получен в § 12. Используя асимптотическую формулу для входящей в (11,8) вырожденной гипергеометрической функции при больших значениях аргумента, найдем выражение для фактора возрастания $B(x)$

в виде ⁵⁵

$$B(x) = x^K; \quad K = \frac{C}{\mu_0}, \quad (14,1)$$

$$N_x(x) = x^K \exp(-\mu_0 x). \quad (14,2)$$

Исследование несколько сложнее, если первичная энергия фотона выше энергии, соответствующей минимуму коэффициента поглощения. В этом случае может быть принята параболическая аппроксимация коэффициента поглощения вида $\mu(\lambda) = \mu_m + \mu_m(\lambda - \lambda_0)^2/2$. Уравнение для энергетического спектра может быть получено из общего уравнения переноса (10,6) приравниванием l нулю:

$$\frac{\partial N_0(x, \lambda)}{\partial x} = -\mu(\lambda) N_0(x, \lambda) + \int_{\lambda_0}^{\lambda} K(\lambda', \lambda) N_0(x, \lambda') d\lambda' + \delta(x) \delta(\lambda - \lambda_0). \quad (14,3)$$

Полагая $K(\lambda', \lambda) = C$ и применяя двухстороннее преобразование Лапласа

$$\left. \begin{aligned} y_0(p, \lambda) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{px} N_0(x, \lambda) dx, \\ N_0(x, \lambda) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-px} y_0(p, \lambda) dp \end{aligned} \right\} \quad (14,4)$$

для $y_0(p, \lambda)$, Фано нашел выражение ^{7, 58}

$$\begin{aligned} y_0(p, \lambda) &= C (\mu(\lambda) - p)^{-1} \exp \left\{ \int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{C d\lambda'}{\mu(\lambda') - p} \right\} = \\ &= C [\mu(\lambda) - p]^{-1} \exp \left\{ 2\pi C / [2\mu_m(\mu_m - p)]^{\frac{1}{2}} \right\}. \end{aligned} \quad (14,5)$$

Обращение выражения (14,5) по Лапласу методом перевала приводит к фактору возрастания

$$B(x) \sim x^{-\frac{5}{6}} \exp \left(bx^{\frac{1}{3}} \right), \quad (14,6)$$

где

$$b = \frac{3\pi^2 C^2}{2\mu_m}.$$

§ 15. Учет угловых отклонений

Новое освещение вопроса об асимптотических законах распределения интенсивности излучения на больших глубинах дается в обширном исследовании Фано ⁷. Мы останавливаемся в настоящем параграфе прежде всего на этой работе, тесно связанной с работой Спенсера ¹⁷, в которой развит фактически применяемый теперь метод расчета плотности излучения на больших глубинах. Основные идеи метода Спенсера и достигнутые с его помощью результаты приводятся в следующем параграфе.

Наше изложение будет ограничиваться случаем плоского источника, расположенного на плоскости $x=0$, с длиной волны $\lambda=\lambda_0$. Для исследования

уравнения переноса (3,6) Фано применяет преобразование Лапласа

$$y(p, u_x, \lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{px} N(x, u_x, \lambda) dx, \quad (15,1)$$

$$N(x, u_x, \lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{-px} y(p, u_x, \lambda) dp. \quad (15,2)$$

Уравнение, определяющее угловое и пространственное распределения для каждой величины p , выводится из уравнения (3,6) с помощью преобразования (15,2). В результате получается уравнение

$$[\mu(\lambda) - pu_x] y(p, u_x, \lambda) = \int_{\lambda_0}^{\lambda} d\lambda' K(\lambda', \lambda) \int_{4\pi} du' (2\pi)^{-1} (1 - uu' - \lambda + \lambda') \times \\ \times y(p, u'_x, \lambda') + \delta(\lambda - \lambda_0) \delta(x). \quad (15,3)$$

Из-за наличия множителя $\mu(\lambda) - pu_x$ слева в уравнении (15,3) $y(p, u_x, \lambda)$ обращается в бесконечность, когда $\mu(\lambda) = pu_x$. Это имеет место лишь для действительных положительных значений p , больших, чем $\mu(\lambda)$, или для действительных отрицательных величин, меньших, чем $-\mu(\lambda)$. Поэтому сингулярность уравнения (15,3) связывается со значениями комплексной переменной p , которые ограничиваются отрезками действительной оси справа от μ_s и слева от $-\mu_s$, где μ_s — наименьшая величина $\mu(\lambda)$ в области длин волн от λ_0 до λ .

Далее, исследование подынтегрального выражения (15,3) показывает, что оно имеет, с одной стороны, минимум при приближении к точке $p = \mu_s$ вдоль действительной оси и максимум, с другой стороны, при приближении к ней вдоль мнимой оси, то есть точка $p = \mu_s$ является точкой перевала. В окрестности точки перевала интеграл (15,2) может быть вычислен методом перевала. Имея в виду отмеченное обстоятельство, мы будем интересоваться ниже лишь поведением $y(p, u_x, \lambda)$ вблизи точки $p = \mu_s$, что соответствует отысканию приближенных аналитических решений уравнения (15,3), действительных для $\lambda \sim \lambda_s$.

Разлагая $y(p, u_x, \lambda)$ по полиномам Лежандра, приведем уравнение (15,3) к системе уравнений

$$\mu(\lambda) y_l(p, \lambda) - p(2l+1)^{-1} [(l+1) y_{l+1}(p, \lambda) + l y_{l-1}(p, \lambda)] = \\ = \int_{\lambda_0}^{\lambda} K(\lambda', \lambda) P_l(1 - \lambda + \lambda') y_l(p, \lambda') d\lambda' + I_l \delta(\lambda - \lambda_0). \quad (15,4)$$

Первое уравнение этой системы имеет тот же вид, что и в приближении малых углов, за исключением того, что в левой части вместо y_0 стоит y_1 . Удобно, следуя Спенсеру¹⁷, использовать параметр

$$g_1(p, \lambda) = \int_{4\pi} du (1 - u_x) y(p, u_x, \lambda) / \int_{4\pi} y(p, u_x, \lambda) du, \quad (15,5)$$

который представляет первый момент углового распределения. Если мы положим в (15,4) $y_1 = (1 - g_1) y_0$, то первое уравнение запишется так:

$$[\mu(\lambda) - p + pg_1(p, \lambda)] y_0(p, \lambda) = \int_{\lambda_0}^{\lambda} K(\lambda', \lambda) y_0(p, \lambda') d\lambda' + I_0 \delta(\lambda - \lambda_0). \quad (15,6)$$

В области длин волн $\lambda \sim \lambda_s$ решение уравнения (15,6) можно представить в виде

$$y_0(p, \lambda) = \frac{C [\mu(\lambda) - p]^{-1}}{1 + \frac{pg_1(p, \lambda)}{\mu(\lambda) - p}} \exp \left\{ \int \frac{C}{1 + \frac{pg_1(\lambda, p)}{\mu(\lambda) - p}} \frac{d\lambda'}{[\mu(\lambda') - p]} \right\}. \quad (15,7)$$

Это выражение отличается от полученного в приближении малых углов выражения (14,5) только лишь заменой C на

$$C \left[1 + \frac{pg_1(p, \lambda)}{\mu(\lambda) - p} \right]^{-1}. \quad (15,8)$$

В своей работе¹⁸, усовершенствовав методику Вика⁶⁹ и в значительной мере опираясь на работу Спенсера¹⁷, Фано показал, что множитель, стоящий в знаменателе, стремится к константе, когда p приближается к сингулярной точке $p = \mu_s$. Фано доказал, следовательно, очень важный результат: учет угловых отклонений не меняет вида формул для факторов возрастания, а лишь уточняет входящие в эти формулы константы.

Таблица I

Величины $\frac{\mu_s}{\mu_s}$ и $\frac{C}{\mu_s}$, для различных веществ и энергий

Энергия источ- ника (Мэв)	H ₂ O		Al		Fe		Pb	
	$\frac{\mu_s}{\mu_s}$	$\frac{C}{\mu_s}$	$\frac{\mu_s}{\mu_s}$	$\frac{C}{\mu_s}$	$\frac{\mu_s}{\mu_s}$	$\frac{C}{\mu_s}$	$\frac{\mu_s}{\mu_s}$	$\frac{C}{\mu_s}$
	$\frac{\mu_s}{\mu_s}$	$\frac{C}{\mu_s}$	$\frac{\mu_s}{\mu_s}$	$\frac{C}{\mu_s}$	$\frac{\mu_s}{\mu_s}$	$\frac{C}{\mu_s}$	$\frac{\mu_s}{\mu_s}$	$\frac{C}{\mu_s}$
10	7,5	7,54	4,1	6,21	—	—	—	—
8	6,6	6,87	4,0	5,91	0,48	4,64	—	—
6	5,5	5,96	3,8	5,43	1,2	4,56	—	—
4	4,0	4,91	3,3	4,68	2,0	4,25	—	—
3	3,1	4,22	2,7	4,10	2,1	3,89	0,33	2,88
2	—	—	—	—	—	—	1,7	2,65
1	0,96	2,37	0,96	2,37	0,89	2,36	1,7	1,75
0,8	0,73	2,12	0,73	2,12	0,72	2,11	1,6	1,43
0,6	0,52	1,86	0,52	1,86	0,54	1,84	1,5	1,033
0,4	0,32	1,58	0,32	1,57	0,37	1,52	1,35	0,579
0,3	0,22	1,41	0,22	1,40	0,32	1,32	1,2	0,333
0,2	0,13	1,23	0,155	1,21	0,31	1,01	0,95	0,133
0,15	0,086	1,12	0,148	1,09	0,33	0,767	0,77	0,0647

Для факторов возрастания можно пользоваться, таким образом, и в общем случае выражениями

$$B(x) \sim x^K, \quad (15,9)$$

если первичная энергия фотона E_0 ниже соответствующей минимуму коэффициента поглощения E_m и

$$B(x) \sim x^{-\frac{5}{6}} \exp [H(\mu_m x)]^{\frac{1}{3}}, \quad (15,10)$$

если $E_0 > E_m$. В формулах (15,9) и (15,10)

$$K = \frac{\bar{C}}{\mu_s}, \quad H = 3 \cdot 2^{-\frac{2}{3}} D^{\frac{1}{3}} = 3 \left(\frac{\pi^2 \bar{C}^2}{2\mu_m \mu_m} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (15,11)$$

Значения этих констант для различных материалов и энергий приведены в таблицах I—III, заимствованных из приложения (C) к работе Фано⁷. Результаты Уайта³⁵ ($\mu_m x \leq 15$) согласуются с теорией Фано⁷.

Таблица II

Величины $K = \frac{\bar{C}}{\mu_s}$ для различных комбинаций параметров $\frac{\mu_s}{\mu_s}$ и $\frac{C}{\mu_s}$

$\frac{\mu_s}{\mu_s}$	$\frac{C}{\mu_s} = 0,02$	0,05	0,1	0,25	0,5	1	2	4	6	8
0,02	0,0200	0,0516	0,1095	0,374	2,63	13,00	42,3	113,0	189,5	272
0,05	0,01939	0,0494	0,1052	0,332	1,328	5,49	17,21	45,5	76,5	108,9
0,1	0,01846	0,0473	0,0988	0,293	0,871	2,98	8,84	23,0	38,5	54,7
0,25	0,01617	0,0411	0,0844	0,231	0,547	1,439	3,81	9,48	15,69	22,2
0,5	0,01341	0,0338	0,0687	0,1798	0,388	0,887	2,11	4,96	8,16	11,32
1	0,01003	0,0252	0,0506	0,1289	0,265	0,559	1,211	2,67	4,24	5,87
2	—	—	0,0335	0,0841	0,1696	0,345	0,709	1,477	2,28	3,11
4	—	—	—	—	—	—	—	0,821	1,173	1,674
6	—	—	—	—	—	—	—	0,577	0,870	1,165
8	—	—	—	—	—	—	—	0,447	0,671	0,897

Таблица III

Величины μ_m , H , $D = \frac{4H^3}{27}$ и \bar{C} для различных веществ

Вещество	μ_m см ² /г	H	D	\bar{C} (см ² /г на комптоновскую единицу длины волны)
H ₂ O	0,0167	2,0	1,3	0,118
Al	0,0216	2,1	1,4	0,0942
Fe	0,0300	2,8	3,4	0,0826
Sn	0,0351	2,6	2,7	0,0689
W	0,0391	2,5	2,4	0,0619
Pb	0,0410	2,3	1,8	0,0594
U	0,0425	2,1	1,4	0,0565

§ 16. Полуасимптотический метод Спенсера

Остановимся теперь на второй основной работе по большим глубинам (Спенсер¹⁷), единственной работе, дающей численный метод расчета излучения на больших глубинах.

Спенсер отмечает, что на больших глубинах проникновения угловое распределение должно обладать резко выраженной направленностью вперед. Такое распределение требует для своего описания очень большого количества сферических гармоник. Поэтому для характеристики углового распределения гамма-лучей на больших глубинах проникновения Спенсер предлагает пользоваться «угловыми моментами»

$$y_n(p, \lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{4\pi} d\Omega (1 - u_x)^n y(p, u_x, \lambda). \quad (16,1)$$

Уравнение для угловых моментов для случая источника с плоской симметрией получается из уравнения (15,3) умножением его на $\frac{1}{2\pi} (1 - u_x)^n$ и интегриро-

ванием по всем направлениям

$$\begin{aligned} & [\mu(\lambda) - p] y_n(p, \lambda) + p y_{n+1}(p, \lambda) = \\ & = \int_{\lambda_0}^{\lambda} d\lambda' K(\lambda', \lambda) \sum_{n'=0}^n (\lambda - \lambda')^n S_n^{n-n'} (\lambda - \lambda') y_n(p, \lambda') + Q_n \delta(\lambda - \lambda_0), \quad (16,2) \end{aligned}$$

где

$$(-1)^{n'} [2^n - n' n'! (n - n')!] S_n^{n'}(z) = \frac{d^n}{dz^n} [z^{n-n'} (2-z)^n],$$

$$Q_n = \frac{1}{2\pi} \int_{4\pi} du (1 - u_x)^n f(u_x).$$

В отличие от сферических гармоник, резко направленное вперед угловое распределение можно характеризовать малым количеством моментов $y_n(p, \lambda)$. Спенсер пришел к выводу, что два, максимум четыре, первых уравнения системы (16,2) дают достаточную точность. Для решения этих уравнений Спенсер развил полуасимптотический метод, за подробностями которого отсылаем к его

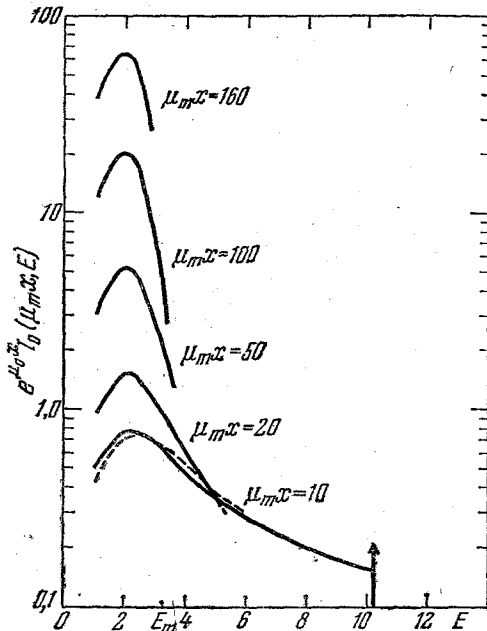


Рис. 27. Дифференциальный спектр интенсивности излучения плоского направленного источника. $E_0 = 10,22$ Мэв, свинец.

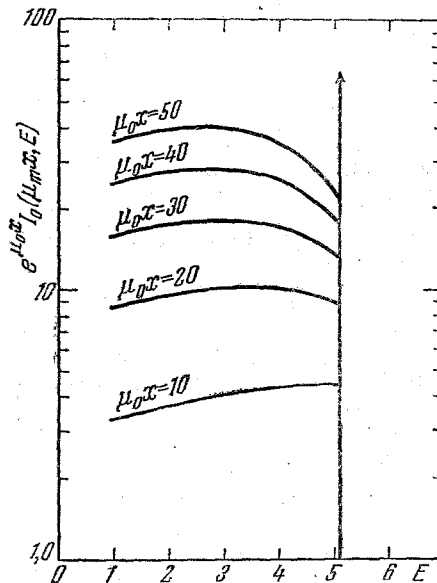


Рис. 28. Дифференциальный спектр интенсивности излучения плоского направленного источника. $E_0 = 5,11$ Мэв, железо.

работе¹⁷. Укажем только, что входящие в правую часть (16,2) интегралы заменяются, следуя Чандрасекару⁵², квадратурными формулами. Некоторые результаты работы Спенсера¹⁷ приводятся на рис. 27 и 28. Рис. 27 относится к плоскому направленному источнику энергии 10,22 Мэв в свинце и дает дифференциальный спектр интенсивности излучения для проникновения до глубины $\mu_m x = 160$. По оси ординат нанесена величина $I_0(\mu_m x, E) e^{\mu_m x}$ в единицах

$$\frac{\text{Мэв}}{\text{см}^2 \text{сек}} \frac{1}{\text{Мэв}} = \text{см}^{-2} \text{сек}^{-1}.$$

Интенсивность источника считается равной $10,22 \text{ Мэв/см}^2 \text{ сек}$, а коэффициент ослабления самой проникающей компоненты равен $0,466 \text{ см}^{-1}$. Для сопоставления с полиномиальным методом¹⁸ на этом же рисунке при $\mu_0 x = 10$ приводится пунктирная кривая, вычисленная этим методом.

Рис. 28 соответствует аналогичным вычислениям для плоского направленного источника энергии $5,11 \text{ Мэв}$ в железе. Интенсивность источника в этом случае равна $5,11 \text{ Мэв/см}^2 \text{ сек}$, а коэффициент ослабления железа, отвечающий энергии $5,11 \text{ Мэв}$, равен $0,246 \text{ см}^{-1}$. По оси ординат на рис. 28 нанесена величина $I_0(\mu_0 x, E)e^{\mu_0 x}$ в тех же самых единицах, как и на рис. 27. Вычисления в этом случае доведены лишь до значения $\mu_0 x = 50$.

Таковы основные результаты теоретических работ по исследованию прохождения излучения на большие глубины.

V. ДРУГИЕ ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ МНОГОКРАТНОГО РАССЕЯНИЯ

§ 17. Метод Монте-Карло

Под этим названием находит за последние годы широкое применение прямой стохастический метод расчета числа рассеянных квантов. Он основан на непосредственном вычислении большого числа траекторий квантов, при котором последовательные акты рассеяния рассматриваются как последовательность случайных процессов (цепь Маркова), вероятность каждого из которых определяется известными формулами § 1. Траектории квантов по виду напоминают траектории броуновских частиц. Искомая интенсивность излучения измеряется числом траекторий, проходящих через данную точку пространства и представляющих кванты данной энергии и направления*).

Для иллюстрации метода рассмотрим простейшую схему вычислений прохождения гамма-лучей через плоский поглощающий слой толщины d , расположенный перпендикулярно к оси x . Источник находится на поверхности $x = 0$. Расчет ведется по следующим этапам:

1) Из заданного распределения испускаемых источником квантов по углам ψ_0 и (в случае немонаохроматического источника) по энергии α_0 выбирается случайный квант (α_0, ψ_0) . (Выбор случайной величины из заданного распределения производится счетной машиной по отдельной программе, см., например,^{2, 3}.)

2) Точка первого взаимодействия кванта с атомом поглотителя x_1 выбирается случайно в соответствии с распределением

$$h(x_1) \approx \frac{\mu(\alpha_0)}{\cos \psi_0} \exp \left(-\frac{\mu(\alpha_0) x_1}{\cos \psi_0} \right).$$

*) Многократное рассеяние гамма-лучей является лишь одной из многих задач, для решения которых применяется метод Монте-Карло. Этим методом выполнено большое количество расчетов по рассеянию нейтронов⁶³. Применение стохастических методов при исследовании рассеяния заряженных частиц подробно рассмотрел Чавчакидзе⁵¹. Общим вопросам исследования стохастических процессов посвящена монография Чандрасекара⁵³. Схема вычисления в случае рассеяния гамма-квантов приведена в работе Бергера². Отсылая читателя к этим источникам, отметим лишь, что при современном широком распространении электронных вычислительных машин метод Монте-Карло является весьма перспективным, особенно при решении задач со сложными граничными условиями. Конкретный вид вычислительной схемы зависит в значительной степени от особенностей имеющейся счетной машины, и желательна постройка специальных машин для проведения вычислений методом Монте-Карло⁵⁴.

3) В случае поглотителя сложного химического состава выбирается случайно (в соответствии с относительной концентрацией элементов) атомный номер атома, с которым квант взаимодействует.

4) В соответствии с их относительной вероятностью определяется тип взаимодействия (поглощение или рассеяние). В случае поглощения траектория обрывается в этой точке и вычисление следующей траектории возобновляется с операции 1.

5) В случае рассеяния определяется угол рассеяния θ_1 (вероятность различных значений θ_1 определяется формулой (1,6)) и азимут φ_1 . По θ_1 и φ_1 определяется энергия α_1 рассеянного кванта (по формуле (1,4)) и угол с нормалью ψ_1 (по известной формуле сферической тригонометрии (18,2)). Повторяются операции 2—5, пока не произойдет одно из следующих событий: а) поглощение кванта, б) уменьшение энергии ниже заданного предела α_{\min} , за которым по условиям задачи вид спектра интереса не представляет, в) выход кванта через плоскость $x = d$ (прохождение), г) выход кванта через плоскость $x = 0$ (обратное рассеяние). Отношение числа траекторий N , закончившихся по способу в), к полному числу N_0 просчитанных траекторий дает вероятность прохождения кванта

$$P = \frac{N}{N_0}.$$

Поскольку число N прошедших квантов быстро убывает с толщиной поглотителя d , для вычисления P при больших d требуется рассчитать очень большое число N_0 траекторий, из которых лишь малая часть N доходит до плоскости $x = d$.

Вероятная абсолютная ошибка при определении вероятности прохождения P равна

$$r = 0,6745 \sqrt{\frac{P(1-P)}{N_0}}.$$

Так как ослабления до $P = 10^{-6}$ представляют нередко практический интерес, то для получения точности порядка 10% требуется вычислить $N_0 \sim 10^8$ траекторий. Эта задача слишком громоздкая даже при наличии электронных счетных машин.

По этой причине метод Монте-Карло более пригоден для задач, в которых общее ослабление излучения не очень значительно, но которые из-за сложных граничных условий или по другим причинам не могут быть решены другими методами.

Приведем теперь некоторые результаты, полученные методом Монте-Карло.

Хэйуорд и Хэббелл⁹ рассмотрели точечный направленный источник квантов с энергией 1 Мэв и построили по нескольким десяткам траекторий, вычисленных при помощи настольных счетных машин, альбедо плоской стенки как функцию атомного номера и угла падения ψ_0 . Для вычисления каждой траектории требовался один человеко-день. Альбедо по энергии представлено на рис. 29. Полученные результаты согласуются с экспериментальными данными авторов²⁸ по отражению

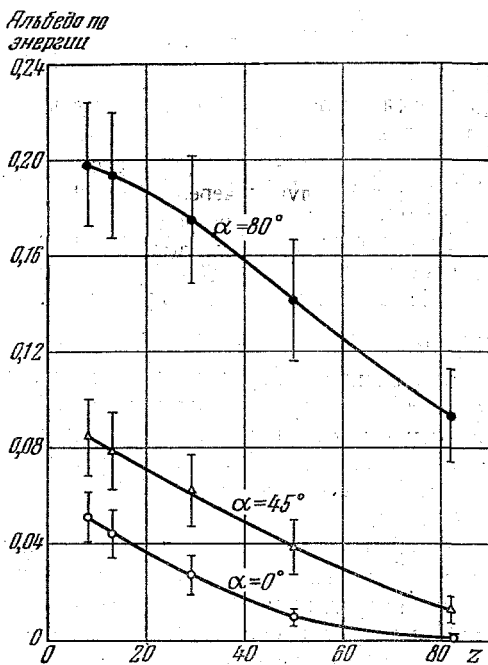


Рис. 29. Альбедо по энергии как функция z при разных углах падения.

гамма-лучей Co^{60} от стенок из дерева и прессованных мотков стальной проволоки равной плотности *).

Для определения энергетического спектра отраженных квантов требуется вычислить значительно больше траекторий. Некоторые результаты подобных вычислений Перкинса¹⁴, выполненных на электронной счетной машине, приведены на рис. 30. Максимум в мягкой области спектра около $\alpha = 0,4$ характерен не только для отраженного, но и для прошедшего через поглотитель рассеянного излучения (ср., например, рис. 13), а второй максимум в жесткой части связан, по-видимому, с однократно рассеянными

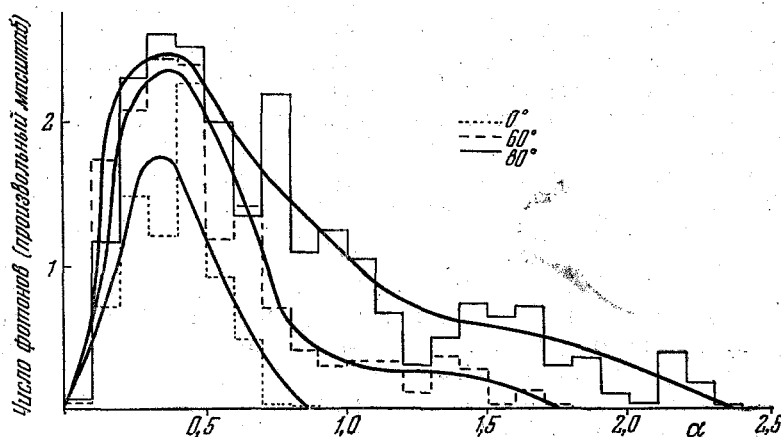


Рис. 30. Энергетический спектр отраженных фотонов при различных углах падения первичных от источника Co^{60} .

квантами. Этот максимум наблюдался экспериментально на различных материалах^{28, 29}.

Вычисления энергетического спектра рассеянных фотонов при падении плоскопараллельного пучка квантов с энергией $0,66 \text{ Мэв}$ под углом $\psi_0 = 0^\circ$ и 60° на поверхность воды провел Бергер². Рассчитаны случаи, когда толщина поглотителя по ходу первичных лучей $D' = \frac{\mu_0 d}{\cos \psi_0} = 1, 2, 4$ и ∞ и приведены графики спектров отраженного и прошедшего излучения. При $\alpha > 0,4$ спектры отраженного излучения при разных D' мало отличаются, а при $\alpha < 0,4$ полубесконечный поглотитель дает в 2—3 раза больше мягких квантов, чем слой толщины $D' = 2$. В угловом распределении отраженного излучения при $D' = \infty$ вблизи $\cos \psi_0 = -1$ число квантов вдвое больше, чем при $D' = 2$.

В случае значительного ослабления излучения удастся, не увеличивая ошибки r , уменьшить число N_0 различными искусственными приемами, например путем введения весовых множителей, выделяющих семейства таких траекторий, которые с большой вероятностью доходят до точки, где требуется рассчитать интенсивность, либо путем комбинирования метода Монте-Карло с аналитическими.

Один из таких приемов был использован¹⁵ при расчете интенсивности излучения, прошедшего через слои H_2O , Al , Fe , Sn и Pb толщиной до $\mu_0 x = 12$ при нормальном и наклонном падении плоскопараллельного пучка гамма-

*) Гражданкина и Факидов⁴³ определяли фотографическим методом зависимость интенсивностей I' отраженного излучения от плотности ρ материала рассеивающей стенки и нашли, что I' имеет максимум вблизи $\rho = 2$.

лучей Cs^{137} и Co^{60} . Для некоторых значений параметров вычислен энергетический спектр и угловое распределение прошедшего излучения. Сравнение с данными Гольдштейна и Уилкинса⁶² для бесконечного полупространства, вычисленными методом полиномиальных разложений¹⁸, показывает, что фактор возрастания B в случае поглотителя конечной толщины растет медленнее с $\mu_0 x$, чем для полубесконечного. Приведены кривые углового распределения излучения, прошедшего через алюминий. С ростом толщины x это распределение приближается к изотропному.

Большое количество результатов получили Бергер и Доггетт⁴, комбинируя метод Монте-Карло с аналитическими расчетами. В этой работе все траектории с одинаковой последовательностью значений энергии E_n и угла θ_n (n — номер акта рассеяния) объединяются в E, θ — семейства. Вероятность осуществления различных E, θ -траекторий находится путем умножения вероятностей (1,6) элементарных актов рассеяния. Для каждого набора E, θ решается уравнение переноса для вероятности P прохождения кванта через плоскость $x = t$ после n -го рассеяния.

Результаты этих вычислений выражены через факторы возрастания B_{tt} , $B_{t\infty}$ и B_{0t} . Первый относится к излучению, прошедшему слой конечной толщины t , второй — к излучению на глубине t в полубесконечном поглотителе. Третий определяется как отношение плотности потока квантов (или соответственно энергии) вблизи обращенной к источнику поверхности рассеивающего объекта к плотности потока в той же точке, если рассеиватель убрать.

Среднее по всем рассчитанным i траекториям значение B обозначим через \bar{B} . Точность расчета при данном i определяется дисперсией

$$\sigma = \left[\frac{1}{i} \sum_{j=1}^i (B_j - \bar{B})^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Рассмотрим отношение

$$q = \frac{(\bar{B}_{tt} - 1)}{(\bar{B}_{t\infty} - 1)}$$

числа рассеянных квантов на выходе из слоя толщины t к числу рассеянных квантов на той же глубине t в полубесконечном поглотителе. Оно характеризует влияние более глубоко расположенных слоев поглотителя на количество квантов на данной глубине. Оказывается, что благодаря сильной корреляции \bar{B}_{tt} и $\bar{B}_{t\infty}$ дисперсия q , обозначаемая через σ_q , очень мала и при толщине $\mu_0 t > 4$ практически не зависит от t . Поскольку для средних и больших t величина $\bar{B}_{t\infty}$ практически равна $\bar{B}_{\infty\infty}$, которая вычисляется точно аналитическими методами (см. главу III), то малость σ_q позволяет по известному $\bar{B}_{\infty\infty}$ находить \bar{B}_{tt} со значительно меньшей затратой труда (с меньшим числом i), чем путем прямого расчета.

Вычисленные авторами значения фактора возрастания по энергии B_E приведены в табл. IV, а значения q — в табл. V. Как видно, чем больше Z и E , тем меньше глубина, начиная с которой q перестает возрастать. В свинце уже при $\mu_0 t = 1$ практически $B_{tt} = B_{t\infty}$. Точность экспериментальных данных обычно такова, что незначительные отклонения q от 1 не могут быть замечены, и поэтому при не очень точных оценках можно при $\mu_0 t > 2$ считать $B_{tt} = B_{t\infty}$. Влияние ниже лежащих слоев поглотителя на вид спектра на глубине $\mu_0 t = 4$ и 8 в воде при $E_0 = 0,66 \text{ Мэв}$

Таблица IV

Фактор возрастания B_E

Материал	Энергия	$\mu_0 t$					
		0,5	1,0	2,0	4,0	8,0	16,0
Вода	0,66	1,49	1,96	3,10	5,99	13,3	39,4
	1	1,40	1,80	2,72	5,01	10,5	25,7
	4	1,22	1,42	1,83	2,60	4,21	7,20
Железо	1	1,40	1,72	2,43	4,07	7,80	17,8
	4	1,20	1,36	1,72	2,50	4,17	7,45
	10	1,07	1,16	1,35	1,75	2,80	5,85
Олово	1	1,29	1,56	2,10	3,15	5,31	10,2
	4	1,16	1,31	1,63	2,35	4,12	9,41
	10	1,06	1,12	1,26	1,59	2,75	8,22
Свинец	1	1,20	1,35	1,63	2,09	2,87	4,24
	4	1,11	1,23	1,44	1,98	3,28	7,46
	10	1,03	1,08	1,17	1,40	2,17	6,47

Таблица V

Коэффициент корреляции η

Материал	Энергия	$\mu_0 t$					
		0,5	1,0	2,0	4,0	8,0	16,0
Вода	0,66	0,601	0,663	0,713	0,783	0,785	0,784
	1	661	720	754	821	828	830
	4	849	885	912	920	926	933
Железо	1	790	798	851	890	895	894
	4	890	910	923	936	932	949
	10	941	959	972	974	978	977
Олово	1	889	911	924	935	938	946
	4	941	926	955	967	974	978
	10	951	960	962	973	971	969
Свинец	1	939	951	969	975	979	982
	4	941	977	982	990	992	994
	10	986	990	995	992	994	995
Оцененная точность в % . .	—	$\pm 5,0$	$\pm 2,0$	$\pm 1,5$	$\pm 1,5$	$\pm 2,0$	$\pm 2,5$

представлено на рис. 31. Незаштрихованная площадь представляет спектр на выходе из слоя толщины t , а заштрихованная — мягкое излучение, рассеянное назад более глубокими слоями в полубесконечном поглотителе. Соответствующие графики угловой зависимости потока энергии на глубине $\mu_0 t = 4$ и 8 показывают, что при $t = \infty$ излучение, распространяющееся под углами $\theta > \frac{\pi}{2}$, составляет около 20% всего потока энергии на глубине $\mu x = 4$ и 8 независимо от величины $\mu_0 t$, а увеличение потока в направлении $\theta < \frac{\pi}{2}$ за счет увеличения d очень мало.

Вычислено также спектральное и угловое распределение отраженного от полубесконечного водяного поглотителя излучения ($E_0 = 0,66$ Мэв).

В обоих распределениях имеется по два максимума. Это подтверждает данные Перкинса¹⁴, а также результаты Боппа⁵, полученные с учетом только двукратно рассеянного излучения. Первый максимум при энергии, близкой к $\alpha = \frac{\alpha_0}{1 + \alpha_0}$, соответствует первому рассеянию на угол, близкий к 90° , с последующим отклонением квантов на углы, близкие к 0° . Соответствующий

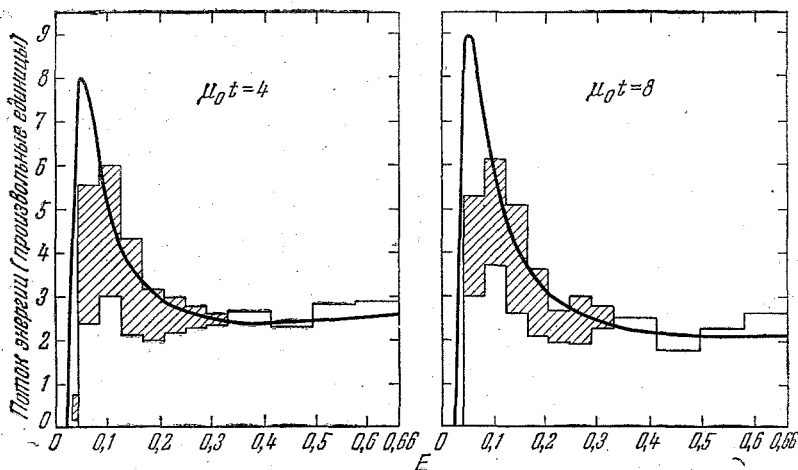


Рис. 31. Спектр рассеянного излучения, прошедшего слой воды толщины $X=4$ и $X=8$ при нормальном падении первичных квантов с энергией $0,66$ Мэв. Гладкие кривые вычислены методом моментов для полубесконечного поглотителя.

максимум в угловом распределении лежит вблизи $\theta = 90^\circ$. Второй максимум при $\alpha = \frac{\alpha_0}{2 + \alpha_0}$ обусловлен одним отклонением на угол, близкий к 180° , причем при остальных столкновениях направление квантов заметно не изменяется. В угловом распределении при этом получается максимум вблизи $\theta = 180^\circ$.

§ 18. Приближенные прямые методы

В большинстве приближенных методов расчета рассеянного излучения полная плотность квантов N (или интенсивность I) представляется в виде суммы плотностей N_i i -кратно рассеянных квантов

$$N = \sum_{i=0}^{\infty} N_i(\mathbf{r}, \mathbf{u}, \lambda). \quad (18, 1)$$

Плотность первичных N_0 и однократно рассеянных N_1 квантов находится без труда. Вычисление N_2 обычно также не является чрезмерно громоздким. Для оценки N_i при $i > 2$ применяются различные приближенные методы, которые рассмотрены ниже.

Однако ряд особенностей рассеянного излучения выявляется уже при рассмотрении только слагаемых N_1 и N_2 , которое мы проведем на примере плоской задачи.

Рассмотрим однородный слой материала, содержащего n электронов в 1 см^3 , толщиной $d = \frac{X}{\mu_0}$ в x -направлении и бесконечный в y - и z -направ-

лениях (рис. 32). Пусть гамма-квант с энергией α_0 входит по направлению, составляющему угол ψ_0 с нормалью к поверхности слоя, проходит расстояние s_0 внутри слоя до первого столкновения, рассеивается в направлении, составляющем угол θ_1 с первоначальным направлением луча и угол ψ_1 с нормалью к поверхности слоя, проходит расстояние s_1 до второго столкновения, рассеивается в направлении, характеризуемом углами θ_2 и ψ_2 и т. д. Кроме углов θ_k и ψ_k направление луча характеризуется еще азимутальным углом φ_k ; эти углы связаны соотношением

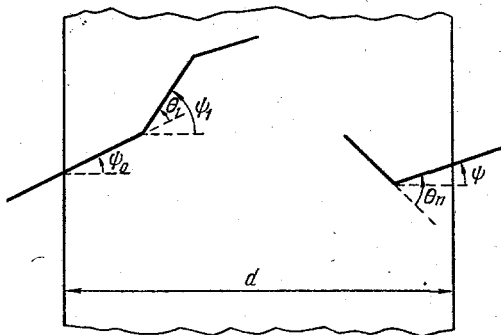


Рис. 32. Схема многократного рассеяния в плоском поглотителе.

$$\cos \psi_{k+1} = \cos \psi_k \cos \theta_{k+1} + \sin \psi_k \sin \theta_{k+1} \cos \varphi_{k+1}. \quad (18,2)$$

Энергия гамма-кванта между k -м и $(k+1)$ -ым столкновениями равна

на α_k ; полный коэффициент поглощения материала слоя для этой энергии обозначим через $\mu_k = \mu(\alpha_k)$.

Вероятность того, что фотон пройдет слой по любому возможному пути, испытав i столкновений, равна числу N_i прошедших фотонов, отнесенных к одному падающему, и выражается интегралом¹³.

$$N_i = \iiint \dots \int e^{-\mu_i s_i} \prod_{k=0}^{i-1} e^{-\mu_k s_k} \bar{K}_{k+1} \sin \theta_{k+1} d\theta_{k+1} ds_k d\varphi_{k+1}, \quad (18,3)$$

где \bar{K}_{k+1} определяется формулой (1,8) с подстановкой $\theta = \theta_{k+1}$. Границы интегрирования в (18,3) определяются соотношениями

$$0 \leq \varphi_k \leq 2\pi, \quad 0 \leq \theta_k \leq \pi, \quad (18,4)$$

$$0 \leq s_{k-1} \gamma_{k-1} \leq a - \sum_{i=0}^{k-2} s_i \gamma_i, \quad \text{если } 0 \leq \psi_{k-1} \leq \frac{\pi}{2}, \quad (18,5)$$

$$0 \geq s_{k-1} \gamma_{k-1} \geq - \sum_{i=0}^{k-2} s_i \gamma_i, \quad \text{если } \frac{\pi}{2} < \psi_{k-1} \leq \pi, \quad (18,6)$$

где $\gamma_i = \cos \psi_i$. Если после последнего перед выходом из слоя столкновения $\gamma_i > 0$, то квант пройдет сквозь слой. Если $\gamma_i < 0$, он выйдет с той же стороны,

с которой вошел, то есть отразится от слоя. При $k = 1$ выражение $\sum_{i=0}^{k-2} s_i \gamma_i$ заменяется нулем.

В выражении (18,3) интегрирование по s_k легко выполнить, в то время как интегрирование по угловым переменным можно провести только численно.

Вводя обозначение $v_i = \frac{\mu_i a}{\gamma_i}$ и $d\Omega_i = \sin \theta_i d\theta_i d\varphi_i$, имеем для $i = 1$ и $i = 2$ после

интегрирования по s_0 и s_1^*):

$$N_1^+ = a e^{-v_0} \int \frac{1 - e^{-(v_1 - v_0)}}{(v_1 - v_0) \gamma_0} \bar{K}_1 d\Omega_1, \quad (18,7)$$

$$N_1^- = a \int \frac{1 - e^{-(v_0 - v_1)}}{(v_0 - v_1) \gamma_0} \bar{K}_1 d\Omega_1, \quad (18,8)$$

$$N_2^{++} = a^2 e^{-v_0} \int \frac{(1 - e^{-(v_2 - v_0)})}{(v_2 - v_0) \gamma_0} - \frac{(1 - e^{-(v_1 - v_0)})}{(v_1 - v_0) \gamma_0} \frac{1}{(v_1 - v_2) \gamma_1} \bar{K}_1 \bar{K}_2 d\Omega_1 d\Omega_2, \quad (18,9)$$

$$N_2^{-+} = a^2 e^{-v_0} \int \frac{(1 - e^{-(v_2 - v_1)})}{(v_2 - v_1) \gamma_0} - \frac{(1 - e^{-(v_2 - v_0)})}{(v_2 - v_0) \gamma_0} \frac{1}{(v_0 - v_1) \gamma_1} \bar{K}_1 \bar{K}_2 d\Omega_1 d\Omega_2, \quad (18,10)$$

$$N_2^{+-} = a^2 \int \frac{(1 - e^{-(v_1 - v_2)})}{(v_1 - v_2) \gamma_0} - \frac{(1 - e^{-(v_0 - v_2)})}{(v_0 - v_2) \gamma_0} \frac{1}{(v_0 - v_1) \gamma_1} \bar{K}_1 \bar{K}_2 d\Omega_1 d\Omega_2, \quad (18,11)$$

$$N_2^{--} = a^2 \int \frac{(1 - e^{-(v_0 - v_2)})}{(v_0 - v_2) \gamma_0} - \frac{(1 - e^{-(v_0 - v_1)})}{(v_0 - v_1) \gamma_0} \frac{1}{(v_1 - v_2) \gamma_1} \bar{K}_1 \bar{K}_2 d\Omega_1 d\Omega_2. \quad (18,12)$$

Здесь индексами $+$ и $-$ обозначены соответственно рассеяния под углами $0 < \psi_k \leq \frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2} < \psi_k \leq \pi$ (рис. 33). Первый знак у N_2 относится к γ_1 , второй к γ_2 .

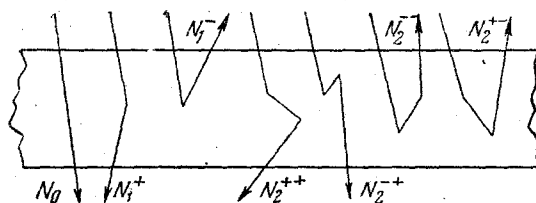


Рис. 33. Траектории квантов при однократном и двукратном рассеянии в плоском поглотителе.

Для нахождения энергии, которая переносится фотонами, испытавшими i столкновений, нужно умножить подынтегральное выражение в (18,3) на

$$\alpha_i = \frac{\alpha_0}{\prod_{k=0}^{i-1} [1 - \alpha_0 (1 - \cos \theta_{k+1})]}.$$

В табл. VI приведены численные значения N_0 , N_1 , N_2 для гамма-лучей с энергией $\alpha_0 = 0,2 \div 5$, нормально падающих на слой вещества толщиной X . Предполагается, что поглощение происходит только путем комптон-эффекта, так что результаты справедливы для любого поглотителя.

*) В этих формулах в оригинале работы¹³ допущены опечатки.

Таблица V

α_0	X	N_0	N_1^+	N_1^-	N_2^{++}	N_2^{+-}	N_2^{--}	N_2^{+-}
5	0,5	0,6065	0,167	0,0264	0,0407	0,0054	0,011	0,0093
	1	0,3679	0,174	0,0292	0,0672	0,0034	0,015	0,012
	2	0,1353	0,103	0,0294	0,0613	0,00085	0,016	0,012
	4	0,0183	0,0210	0,0294	0,0167	0,00012	0,016	0,012
2,5	0,5	0,6065	0,169	0,0405	0,0385	0,0078	0,015	0,013
	1	0,3679	0,180	0,0458	0,0659	0,0066	0,020	0,017
	2	0,1353	0,110	0,0462	0,0616	0,0018	0,022	0,018
	4	0,0183	0,0229	0,0462	0,0179	0,00022	0,022	0,018
1,0	0,5	0,6065	0,160	0,0606	0,0374	0,010	0,018	0,017
	1	0,3679	0,172	0,0720	0,0645	0,012	0,028	0,024
	2	0,1353	0,104	0,0744	0,0609	0,0052	0,032	0,027
	4	0,0133	0,0215	0,0745	0,0181	0,00055	0,032	0,027
0,2	0,5	0,6065	0,133	0,0996	0,0278	0,013	0,021	0,023
	1	0,3679	0,144	0,119	0,0531	0,020	0,033	0,036
	2	0,1353	0,0886	0,128	0,0516	0,013	0,039	0,044
	4	0,0183	0,0179	0,130	0,0153	0,0022	0,040	0,045

Анализ табл. VI приводит к следующим выводам:

1) Число прошедших фотонов $N_1^+ + N_2^{++} + N_2^{+-}$ возрастает по мере увеличения энергии α_0 и уменьшения толщины X . Доля рассеянных назад фотонов N_2^{--} значительно меньше каждого из двух других слагаемых, особенно при больших α_0 . Доля дважды рассеянных фотонов $N_2^{+-} + N_2^{--}$ возрастает с X до $X=1$ и слабо зависит от α_0 .

2) Число отраженных фотонов $N_1^- + N_2^{+-} + N_2^{--}$ с увеличением толщины стремится к некоторому предельному значению N_∞^- , которое достигается в случае $\alpha_0=5$ при $X=1$, а в случае $\alpha_0=0,2$ около $X=4$. С увеличением α_0 уменьшается как абсолютное значение числа отраженных фотонов, так и отношение числа отраженных к числу прошедших фотонов. С увеличением энергии возрастает доля двукратно рассеянных фотонов $N_2^{+-} + N_2^{--}$ в общей сумме отраженных $N_1^- + N_2^{+-} + N_2^{--}$.

Сопоставление различных слагаемых прошедшей и отраженной энергии E приводит в основном к таким же выводам, как в случае N . Следует лишь отметить, что при больших энергиях ($\alpha_0=5$ и 2,5) из всех слагаемых, описывающих двукратное рассеяние, наибольшим является E^{+-} . Остальные значительно меньше.

Из этих выводов следует, в частности, что при вычислении числа прошедших квантов $N^+ + N^{++} + N^-$ можно пренебречь рассеянными назад квантами N^{--} . То же относится в еще большей мере к доле энергии E^{--} , которая значительно меньше $E^{+-} + E^{++}$.

Однако в случае малых X ($X \sim 1$) и при небольших энергиях ($\alpha_0 \leq 1$) обратное рассеяние $N_2^{--} + N_2^{+-}$ вносит заметный вклад в общую энергию рассеянных фотонов. Поэтому при вычислении вероятности прохождения гамма-лучей с небольшой энергией через тонкий слой вещества важнее учитывать обратное рассеяние, чем фотоэлектрический эффект.

Вычисление энергии E_i и вероятности прохождения N_i при больших i очень сложно. Между тем, как указано выше, квант с энергией в несколько Мэв может претерпеть до 10—15 столкновений до того как он поглотится путем фотоэффекта*).

*) Это дает основание рассматривать распространение гамма-квантов как своеобразный процесс диффузии⁴⁵.

Обычно уже после первых 2—3 актов рассеяния энергия кванта падает до нескольких десятых *Мэв*. (Исключение составляет рассеяние на малые углы, но при этом формулы упрощаются и возможно вычислить рассеяние кратности больше чем 2.) Поэтому важно выяснить, какова доля квантов, рассеянных 0, 1, 2... раз в энергии прошедшего или отраженного излучения. Сравнение¹¹ полученных по формулам (18,7) — (18,12) значений N_1 и N_2 с N_i ($i > 2$), оцененными путем экстраполяции, показывает, что, например, в случае свинца при энергии $\alpha_0 = 5$ и нормальном падении ($\gamma_0 = 1$) кванты, рассеянные многократно, не вносят существенного вклада в выходящие из слоя излучения. Будем для краткости называть порядком фотона k число столкновений, которые он испытал до выхода из слоя. Тогда можно сказать, что при уменьшении толщины слоя уменьшается порядок k_{\max} тех фотонов, которые еще вносят заметный вклад в энергию проходящего излучения: при $X = 20$ $k_{\max} = 8$, при $X = 4$ $k_{\max} = 5$. Существенно при этом, что при толщине слоя $X = 1$ достаточно учитывать только первые два рассеяния (однократное и двукратное).

Таким образом, для вычисления полной вероятности прохождения гамма-лучей через толстый слой тяжелого материала ($x < 20$) требуется найти вероятности прохождения фотонов, порядок которых не выше 5—6. При этом, как показывают приведенные оценки, ошибка при вычислении не будет превышать 20%. Для более легких поглотителей порядок фотонов, прохождение которых надо учитывать, будет выше.

Обширный материал по результатам расчетов, проведенных изложенным прямым методом для различных поглотителей и геометрических условий, приведен в работах¹¹ и ¹².

Формулы (18,7) — (18,12) нетрудно обобщить на случай плоского поглотителя, состоящего из нескольких слоев разнородных материалов. Задачу о прохождении гамма-лучей через двухслойный поглотитель с учетом только однократно рассеянного излучения рассмотрели Орлов и Федоров³² с целью выяснить, при каком порядке расположения поглотителей получается наибольшее ослабление интенсивности. Оказалось, что если энергия падающих квантов меньше энергии, соответствующей минимуму на кривой $\mu(\alpha)$, то интенсивность ослабляется больше, когда тяжелый поглотитель стоит позади легкого. Если же большая доля в спектре падающего излучения приходится на область, где существенно образование пар, то ослабление больше, когда тяжелый поглотитель стоит впереди. Эти выводы качественно подтверждаются опытами Цыпина, Кухтович и Казанского³⁸ с гамма-лучами Co^{60} (случай малых энергий) и Орлова и Федорова³² с тормозными излучениями бетатрона (случай больших энергий).

Рассмотрим теперь кратко некоторые приближенные методы вычисления слагаемых (18,1) с $i > 2$. Один из них¹⁰ основан на предположении, что энергия α_i всех i -кратно рассеянных квантов одна и та же. Следовательно, и угол рассеяния θ_i у них одинаковый. В этом предположении удастся для всех слагаемых суммы $I = \sum_{(i)} I_i$ выписать и последовательно решить уравнение

переноса. В случае плоской задачи¹⁰ в коэффициенты этих уравнений входят средние значения $\cos \psi_i$ (ψ_i — угол с нормалью i -кратно рассеянных квантов), которые находятся приближенным способом, тем более точным, чем меньше углы рассеяния θ_i . Этим методом получен ряд результатов для поглощения в свинце, железе, воде и бетоне при толщине поглотителя $D = 1, 2, 5, 10$ и 20 и $\alpha_0 = 2, 6, 10$. Некоторые из этих результатов приведены в монографии Горшкова⁴² и в книге Румянцева и Григоровича⁵⁰.

Указанный метод применим также в случаях непрерывно распределенного²⁵ и точечного изотропного^{24, 31} источников.

Другой прием оценки слагаемых (18,1) с большим i использован в серии работ⁶, в которых вычисляется непосредственно мощность дозы внутри или за поглотителем. Прием сводится к тому, чтобы вычислить мощность дозы M двумя способами, с недостатком (M^-) и с избытком (M^+). Если представить аналогично (18,1) $M = \sum_i M_i$, то в качестве M^- можно взять $M_0 + M_1 + M_2$.

Для вычисления M^+ используются различные приближения. В частности, выбираются такие средние значения энергии α' и косинуса γ' угла падения прошедших через поглотитель рассеянных квантов, при которых M максимальна. Истинное значение M лежит между M^- и M^+ . Этот метод обладает небольшой точностью, но вполне пригоден для оценки мощности дозы от рассеянного излучения в промышленной радиографии при энергиях до 2—3 Мэв, при расчете защиты и т. п. Он, как правило, неприменим к задачам с более сложной геометрией, в частности, к многослойным поглотителям, а также в тех случаях, когда помимо мощности дозы требуется определить спектр рассеянного излучения.

§ 19. Метод последовательного прохождения через тонкие слои¹³

Сущность этого метода состоит в том, что прохождение гамма-лучей через толстый слой вещества рассматривается как последовательное прохождение через ряд тонких элементарных слоев толщиной не больше длины свободного пробега фотона. При вычислении прохождения и отражения гамма-

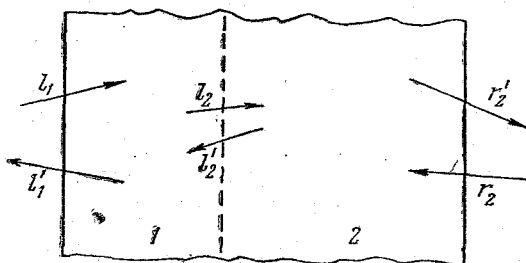


Рис. 34.

лучей от такого слоя в сумме (18,1) достаточно ограничиться слагаемыми с $i = 0, 1, 2$. Это сокращает вычисления и уменьшает ошибку при расчете. Обозначим через ψ — угол с нормалью к слою, $\cos \psi = \gamma$. Если речь идет о плотности фотонов N у левой границы элементарного слоя с номером i , будем плотность обозначать через $l_i(\lambda, \gamma)$, а для правой границы через $r_i(\lambda, \gamma)$ (рис. 34).

Функции l и r представляют распределения фотонов по энергии и углам и будут для краткости называться распределениями.

Пусть \hat{O} — оператор, который преобразует распределение гамма-фотонов, падающих на слой, в распределение фотонов, прошедших через него, и пусть \hat{S} есть оператор, преобразующий падающее распределение в распределение, отраженное от слоя. Очевидно, что для любых распределений l и r должны быть справедливы выражения:

$$\hat{O}(l+r) = \hat{O}l + \hat{O}r, \quad \hat{O}l + \hat{S}l = (\hat{O} + \hat{S})l, \quad \hat{O}(\hat{S}l) = \hat{O}\hat{S}l.$$

Рассмотрим два соприкасающихся слоя (рис. 34) и пусть l_1 есть распределение, входящее в левую плоскость первого слоя, l'_1 — распределение, отраженное от обоих слоев. Пусть далее l_2 и r_2 — распределения, входящие во второй слой, а l'_2 и r'_2 — распределения, выходящие из этого слоя. Наконец, пусть \hat{O}_1, \hat{S}_1 и \hat{O}_2, \hat{S}_2 — операторы прохождения и отражения соответственно для первого и второго слоев. Распределения l и r , как легко видеть, связаны между собой

следующими соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} l_2 &= \hat{O}_1 l_1 + \hat{S}_1 l'_2, & l'_1 &= \hat{O}_1 l'_2 + \hat{S}_1 l_1, \\ l'_2 &= \hat{O}_2 r_2 + \hat{S}_2 l'_1, & r'_2 &= \hat{O}_2 l_2 + \hat{S}_2 r_2. \end{aligned} \right\} \quad (19,1)$$

Подставляя l'_2 из второго уравнения в первое, имеем

$$l_2 = \hat{O}_1 l_1 + \hat{S}_1 \hat{O}_2 r_2 + \hat{S}_1 \hat{S}_2 l_2.$$

Применяя это соотношение повторно к l_2 , получим

$$l_2 = (\hat{O}_1 + \hat{S}_1 \hat{S}_2 \hat{O}_1) l_1 + (\hat{S}_1 \hat{O}_2 + \hat{S}_1 \hat{S}_2 \hat{S}_1 \hat{O}_2) r_2 + (\hat{S}_1 \hat{S}_2)^2 l_2$$

и, повторяя этот процесс k раз, будем иметь

$$\begin{aligned} l_2 &= [\hat{O}_1 + \hat{S}_1 \hat{S}_2 \hat{O}_1 + (\hat{S}_1 \hat{S}_2)^2 \hat{O}_1 + \dots + (\hat{S}_1 \hat{S}_2)^k \hat{O}_1] l_1 + \\ &+ [\hat{S}_1 \hat{O}_2 + \hat{S}_1 \hat{S}_2 \hat{S}_1 \hat{O}_2 + (\hat{S}_1 \hat{S}_2)^2 \hat{S}_1 \hat{O}_2 + \dots + (\hat{S}_1 \hat{S}_2)^k \hat{S}_1 \hat{O}_2] r_2 + \\ &+ (\hat{S}_1 \hat{S}_2)^{k+1} l_2. \end{aligned} \quad (19,2)$$

Подставляя l_2 из первого уравнения (19,1) во второе и выполняя такие же выкладки, находим

$$\begin{aligned} l'_2 &= [\hat{S}_2 \hat{O}_1 + \hat{S}_2 \hat{S}_1 \hat{S}_2 \hat{O}_1 + (\hat{S}_2 \hat{S}_1)^2 \hat{S}_2 \hat{O}_1 + \dots + (\hat{S}_2 \hat{S}_1)^k \hat{S}_2 \hat{O}_1] l_1 + \\ &+ [\hat{O}_2 + \hat{S}_2 \hat{S}_1 \hat{O}_2 + \dots + (\hat{S}_2 \hat{S}_1)^k \hat{O}_2] r_2 + (\hat{S}_2 \hat{S}_1)^{k+1} l'_2. \end{aligned} \quad (19,3)$$

Величины $(\hat{S}_1 \hat{S}_2)^{k+1} l_2$ и $(\hat{S}_2 \hat{S}_1)^{k+1} l'_2$ представляют собой распределения тех фотонов, которые отражаются многократно между слоями $k+1$ раз. При достаточно большом k этими членами можно пренебречь, поскольку вероятность такого рассеяния ничтожно мала.

Подставляя выражения (19,2) и (19,3) в третье и четвертое уравнения (19,1), получим:

$$\begin{aligned} l'_1 &= [\hat{S}_1 + \hat{O}_1 \hat{S}_2 \hat{O}_1 + \hat{O}_1 \hat{S}_2 \hat{S}_1 \hat{S}_2 \hat{O}_1 + \hat{O}_1 (\hat{S}_2 \hat{S}_1)^2 \hat{S}_2 \hat{O}_1 + \dots] l_1 + \\ &+ [\hat{O}_1 \hat{O}_2 + \hat{O}_1 \hat{S}_2 \hat{S}_1 \hat{O}_2 + \hat{O}_1 (\hat{S}_2 \hat{S}_1)^2 \hat{O}_2 + \dots] r_2, \end{aligned} \quad (19,4)$$

$$\begin{aligned} r'_2 &= [\hat{O}_2 \hat{O}_1 + \hat{O}_2 \hat{S}_1 \hat{S}_2 \hat{O}_1 + \hat{O}_2 (\hat{S}_1 \hat{S}_2)^2 \hat{O}_1 + \dots] l_1 + \\ &+ [\hat{S}_2 + \hat{O}_2 \hat{S}_1 \hat{O}_2 + \hat{O}_2 \hat{S}_1 \hat{S}_2 \hat{S}_1 \hat{O}_2 + \hat{O}_2 (\hat{S}_1 \hat{S}_2)^2 \hat{S}_1 \hat{O}_2 + \dots] r_2. \end{aligned} \quad (19,5)$$

Выражения (19,4) и (19,5) дают распределения фотонов, выходящих из внешних плоскостей двух соприкасающихся слоев, выраженные через падающие на эти слои распределения. Коэффициенты при l_1 и r_2 дают выражения операторов \hat{O} и \hat{S} для двойного слоя. В зависимости от требуемой точности расчета нужно брать то или иное число членов в ряде $1 + \hat{S}_1 \hat{S}_2 + (\hat{S}_1 \hat{S}_2)^2 + \dots$. Каждый из членов в выражении для \hat{S} и \hat{O} двойного слоя имеет простой физический смысл. Так, например, член $\hat{O}_2 \hat{O}_1$ представляет собой оператор для прямого прохождения через два слоя; $\hat{O}_2 \hat{S}_1 \hat{S}_2 \hat{O}_1$ представляет собой оператор,

описывающий прохождение через первый слой, отражение от второго слоя, отражение от первого слоя и, наконец, прохождение через второй слой. Коэффициенты при l_1 и r_2 представляют собой все возможные последовательные прохождения и отражения внутри двойного слоя, которые заканчиваются соответственно прохождением или отражением. Ясно, что рассмотренный выше процесс для нахождения операторов двойного слоя можно применить для нахождения операторов \hat{S} и \hat{O} для тройного слоя, четвертого слоя и т. д.

Операторы \hat{O} и \hat{S} для элементарного слоя, в свою очередь, выражаются через $e^{-\tau_0}$ и интегралы вида (18,7) — (18,12).

В работах ^{11, 12} приведены результаты расчетов по прохождению гамма-излучения через железо и свинец, выполненные этим методом. Для сокращения расчетов обратное рассеяние не учитывалось. Результаты показывают, что метод может быть применен для энергии гамма-квантов в интервале 1—20 Мэв и для глубин, не превышающих $X=20$. Ошибка в числе квантов N , связанная с пренебрежением трехкратным, четырехкратным и т. д. рассеянием, в случае железа может достигать 30%. Ошибка в энергии прошедших гамма-квантов при этом не будет превышать нескольких процентов. Это связано с тем, что кванты, рассеянные больше двух раз, имеют в среднем небольшую энергию. Если начальная энергия гамма-квантов меньше 1 Мэв, уже нельзя пренебрегать рассеянием с кратностью $i > 2$. В этом случае для вычисления энергии прошедшего излучения лучше применять прямые методы, изложенные в предыдущем параграфе, если нежелательно уменьшить толщину элементарного слоя.

Прямые методы и метод последовательных прохождений через тонкие слои дают сходные результаты в той области энергий и глубин, где применим метод последовательных прохождений. Метод последовательных прохождений допускает очевидное обобщение на случай многослойных поглотителей.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотренные в этом обзоре методы расчета позволяют выяснить общие закономерности распространения гамма-лучей в толстых поглотителях и вычислить с достаточной степенью точности пространственное распределение и энергетический спектр рассеянных гамма-лучей во всех практически встречающихся задачах. Для исследования наиболее общих особенностей спектра на больших расстояниях от источника пригодны аналитические методы, изложенные в главе IV. Для точных численных расчетов в случае простых геометрических условий и не очень больших глубин проникновения (соответствующих ослаблению интенсивности до 10^6 — 10^8 раз) следует пользоваться методом полиномиальных разложений (глава III). В большинстве практических задач (расчет защитных устройств, оценка рассеянного излучения в гамма-дефектоскопии и т. д.) выгоднее применять один из рассмотренных в главе V приближенных методов.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

I. Теоретические работы, содержащие численные данные в виде таблиц или графиков. (Указана энергия квантов в Мэв и геометрия источника, материал и толщина поглотителя, т. — точечный источник, п. — плоский.)

1. M. J. Berger, J. Appl. Phys. **26**, 1504 (1955), 2 Мэв, т., изотр., вода, μx до 7.
2. M. J. Berger, J. Res. Nat. Bur. Stand. **55**, 343 (1955), Cs¹³⁷, п., накл., вода, μx до 4.
3. M. J. Berger, J. Res. Nat. Bur. Stand. **56**, 111 (1956), Cs¹³⁷, п., накл., вода, μx до 8.
4. M. J. Berger, J. Dogget, J. Res. Nat. Bur. Stand. **56**, 89 (1956); 0, 66; 1, 4, 10 Мэв, п., накл., вода, Fe, Sn, Pb, μx до 16.
5. F. Vorr, Ann. der Phys. **30**, 35 (1937), 2,6 Мэв, т., Pb 0,2 см, Al 0,4 см.

6. L. Cave, J. Corner, R. H. A. Liston, Proc. Roy. Soc. A **204**, 223 (1950), J. Corner, R. H. A. Liston, там же **204**, 323 (1950), J. Corner, F. A. G. Day, там же **204**, 329 (1950), до 5 Мэв, т., п., любой ат. номер, μx до 16.
7. U. Fano, J. Res. Nat. Bur. Stand. **51**, 95 (1953), Co⁶⁰, п., вода; 10 Мэв, п., Fe, $\mu x = 10 - 50$.
8. L. L. Foldy, R. K. Osborn, Phys. Rev. **81**, 400 (1951), 17 Мэв, п., вода до 450 см.
9. E. Hayward, J. Hubbell, Phys. Rev. **93**, 955 (1954), 1 Мэв, т., напр., Al, Cu, Sn, Pb, вода — альbedo.
10. J. O. Hirschfelder, J. L. Magee, M. H. Hull, Phys. Rev. **73**, 852 (1948), J. O. Hirschfelder, E. N. Adams, там же **73**, 863 (1948), 2, 3, 5 Мэв, п., Fe, Pb, бетон, $\mu x = 1, 2, 5, 10, 20$.
11. G. H. Peebles, J. Appl. Phys. **24**, 1272 (1953), 0,5—10 Мэв, т., Fe, Pb, воздух и др., μx до 20.
12. G. H. Peebles, J. Appl. Phys. **24**, 1437 (1953), 0,5—10 Мэв, т., Fe, Pb, воздух и др., μx до 20.
13. G. N. Peebles, M. S. Plesset, Phys. Rev. **81**, 430 (1951), 5 Мэв, п., Pb, U, μx до 35.
14. J. F. Perkins, J. Appl. Phys. **26**, 655 (1955), до 6 Мэв, п., накл., Al, бетон, μx до 4.
15. J. F. Perkins, J. Appl. Phys. **26**, 1372 (1955), Co⁶⁰, Cs¹³⁷, п., накл., Al, Fe, Sn, Pb, μx до 12.
16. M. S. Plesset, S. T. Coher, J. Appl. Phys. **22**, 350 (1951), 0,5—5 Мэв, т., воздух 10—140 м.
17. L. V. Spencer, Phys. Rev. **88**, 793 (1952), — 10 Мэв, п., изотр., Pb μx до 160.
18. L. V. Spencer, U. Fano, J. Res. Nat. Bur. Stand. **46**, 446 (1951), краткое содержание в Phys. Rev. **81**, 464 (1951), до 10 Мэв, п. т., Pb μx до 8.
19. L. V. Spencer, F. A. Stinson, Phys. Rev. **85**, 662 (1952), Co⁶⁰ п., т., вода, μx до 9.

II. Экспериментальные работы (звездочкой отмечены работы, содержащие также теоретические результаты).

20. L. A. Beach, R. B. Theus, W. H. Faust, Phys. Rev. **92**, 355 (1953), Na²⁴, Co⁶⁰, Cs¹³⁷, п., Fe 13 см.
21. J. Clay, C. Wandsdronek, T. J. Dekker, Physica **18**, 582 (1952), Na²⁴, RaC, п., Pb до 30 см.
22. W. R. Dixon, Phys. Rev. **85**, 498 (1952), Co⁶⁰, п., Pb, бетон, μx до 15.
- 23*. J. O. Elliot, R. T. Farrak, R. D. Myers, C. F. Ravillions, Phys. Rev. **85**, 1048 (1952), Co⁶⁰, т., Pb μx до 17.
- 24*. W. R. Faust, Phys. Rev. **77**, 227 (1950), Co⁶⁰, т., вода до 90 см.
- 25*. W. R. Faust, M. H. Johnson, Phys. Rev. **75**, 467 (1949), Co⁶⁰, непрерывно распределенный в воде.
26. G. Garrett, G. N. Whyte, Phys. Rev. **95**, 889 (1954), Co⁶⁰, т., Pb, Fe μx до 16.
27. E. Hayward, Phys. Rev. **86**, 493 (1952), Amer. J. Roentgenology **71**, 333 (1954), Co⁶⁰, т., вода до 160 см.
28. E. Hayward, J. H. Hubbell, J. Appl. Phys. **25**, 506 (1954), Co⁶⁰, т., дерево, Fe — альbedo.
29. G. J. Hine, R. C. McCall, Nucleonics **12**, № 4, 27 (1954), Co⁶⁰, Hg²⁰³, Cs¹³⁷, т., Pb, Fe, Al, дерево, вода, спектр отраженного излучения.
30. F. S. Kirn, R. J. Kennedy, H. O. Wyckoff, Radiology **63**, 94 (1954), Co⁶⁰, Cs¹³⁷, Au¹⁹⁸, т., направленный наклонно, бетон 90 см, Pb 12 см.
- 31*. P. Maignan, Ann. de phys. **8**, 202 (1953), RdTh т., вода 50—200 см.
- 32*. А. Н. Орлов, Г. В. Федоров, ЖТФ **23**, 1991 (1956), до 20 Мэв, п., 66 см воды + 11 см Fe.
33. P. A. Roys, K. Shure, J. J. Taylor, Phys. Rev. **95**, 911 (1954), N¹⁶, п., вода до 190 см.
34. M. H. Weiss, M. Bernstein, Phys. Rev. **92**, 1264 (1953), Co⁶⁰, т., вода до 200 см.
35. G. H. White, Phys. Rev. **80**, 154 (1950), Co⁶⁰, т., вода 30—250 см.
36. G. N. Whyte, Canad. J. Phys. **33**, 96 (1955), Co⁶⁰, т. внутри бетона, μx до 10.
37. H. O. Wyckoff, R. J. Kennedy, W. R. Bradford, J. Res. Nat. Bur. Stand. **41**, 223 (1948), до 1,5 Мэв, п., бетон 60 см, Pb 9 см.
38. С. Г. Цыпин, В. И. Кухтевич, Ю. А. Казанский, Атомная энергия № 2, 71 (1956), Na²⁴, Au¹⁹⁸, т., вода 190 см, Pb, Fe 15 см.

III. Прочие цитированные работы

39. С. З. Белецкий, Лавинные процессы в космических лучах, Гостехиздат (1948).
40. Г. А. Бете, Ю. Ашкин, Статья в кн. Экспериментальная ядерная физика, том 1, под ред. Э. Сегре, ИИЛ (1955).
41. В. Гайтлер, Квантовая теория излучения, Гостехиздат (1940).
42. Г. В. Горшков, Гамма-излучение радиоактивных тел, Изд. Ленинградского университета (1956).
43. Н. П. Гражданкина, И. Г. Факидов, Сб. Гамма-дефектоскопия металлов, Изд. АН СССР, стр. 61 (1955).
44. А. И. Губанов, ЖЭТФ 15, 336 (1945).
45. И. Г. Дядькин, Изв. АН СССР, сер. геофизич. № 4,323 (1955).
46. А. С. Компанеев, ЖЭТФ 15, 235 (1945).
47. Л. В. Курносова, УФН 52, 603 (1954).
48. В. И. Огневский, ЖЭТФ 29, 454 (1955).
49. В. И. Огневский, ЖЭТФ 29, 464 (1955).
50. С. В. Румянцев, Ю. А. Григорович, Контроль качества металлов гамма-лучами, Металлургиздат (1954).
51. В. В. Чавчанидзе, Труды Инст. физики АН Груз. ССР 2, 119 (1954).
52. С. Чандрасекар, Перенос лучистой энергии, ИИЛ (1953).
53. С. Чандрасекар, Стохастические процессы в физике и астрономии, ИИЛ (1947).
54. Ю. А. Шрейдер, Конференция «Пути развития советского математического машиностроения и приборостроения», тезисы докладов, стр. 56, доклад 44, Москва (1956).
55. H. A. Bethe, U. Fano, P. R. Karr, Phys. Rev. 76, 538 (1949).
56. C. M. Davisson, E. D. Evans, Rev. Mod. Phys. 24, 79 (1952).
57. U. Fano, Nucleonics 11, № 8, 8 (1953); 11, № 9, 55 (1953).
58. U. Fano, Phys. Rev. 76, 739 (1949).
59. L. L. Foldy, Phys. Rev. 81, 395 (1951).
60. L. L. Foldy, Phys. Rev. 82, 927 (1951).
61. H. Goldstein, J. E. Wilkins, L. V. Spencer, Phys. Rev. 89, 1150 (1953).
62. H. Goldstein, J. E. Wilkins, Calculations of the penetration of gamma-rays. NDA 15c—41. Nuclear Development Associates, Inc., White Plains, New York (1954).
63. H. Kahn, Nucleonics 6, № 5, 27; № 6, 61 (1950).
64. P. R. Karr, J. C. Lamkin, Phys. Rev. 76, 1843 (1949).
65. R. E. Marshak, Rev. Mod. Phys. 19, 185 (1947).
66. N. Marty, J. Phys. Rad. 13, 401 (1952).
67. L. V. Spencer, F. Jenkins, Phys. Rev. 76, 1885 (1949).
68. M. Verde, G. C. Wick, Phys. Rev. 71, 852 (1947).
69. G. C. Wick, Phys. Rev. 75, 738 (1949).
70. Monte Carlo Method, Nat. Bur. Stand., Applied Mathematic Series 12, June 11 (1951).
71. Symposium on Monte Carlo Method, Editor H. A. Meyer, New York John Wiley and Sons, Inc., Copyright (1956).