1957 г. Январь *Т. LXI, вып. 1*

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

МЕТОД ФУНКЦИОНАЛОВ В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Ю. В. Новожилов, А. В. Тулуб)*

СОДЕРЖАНИЕ

I. МЕТОД ФУНКЦИОНАЛОВ В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Введение

В последние годы в квантовой теории поля широко применяются функциональные методы. Внимание, уделяемое этим методам, вызвано надеждой получить с их помощью точные решения некоторых задач или хотя бы найти некоторые точные соотношения в теории поля. До последнего времени почти все работы по квантовой теории поля выполнялись на основе теории возмущений.

В настоящее время большинство физиков разделяют убеждение в том, что даже в квантовой электродинамике, где постоянная взаимодействия мала, теория возмущений не может служить основой для исследования принципиальных вопросов, поскольку ряд приближений может расходиться. Методы решения уравнений квантовой теории поля в мезонной теории насущно необходимы, так как постоянную взаимодействия нуклонов с мезонным полем нельзя считать малой.

В отличие от других методов функциональные методы позволяют строго сформулировать уравнения для функций поля и дают возможность получить

---

*) § 3 и § 4.2 написаны А. В. Тулубом, остальные — Ю. В. Новожиловым.

формальное решение задачи о взаимодействующих полях. Эта особенность метода функционалов важна как для исследований принципиального характера, так и для разработки приближенных методов решения уравнений поля, отличных от теории возмущений.

К настоящему времени работы по методу функционалов можно подразделить (с точки зрения использования функционального аппарата) на две группы: работы по исследованию производящих функционалов и работы, связанные с использованием функционального интегрирования.

Идея метода производящего функционала была выдвинута акад. В. А. Фоком в 1928 г.[1] и подробно разработана в его работе 1934 г.[2]. Этот метод был использован в последующие годы для решения ряда задач[5–8], но широкое применение и развитие метод функционалов получил только в последние годы в связи с общим развитием квантовой теории поля, выдвинувшим на первый план требования релятивистской ковариантности уравнений поля и возможности их решения без теории возмущений. Наиболее важное развитие метода функционалов связано с введенными Швингером[9] функционалами внешних источников, являющимися производящими функционалами для релятивистских функций поля и эквивалентной лагранжевой формулировкой Фейнмана[10].

Некоторые работы по функциональным методам обсуждались в обзорах Берестецкого и Галанина[3], Силина и Фейнберга[4]. Поэтому затронутым в этих статьях вопросам мы уделяем сравнительно мало места.

В части I обзора мы подробно рассматриваем основы метода функционалов в квантовой теории поля и производящие функционалы для нерелятивистских функций.

Вопросы о производящих функционалах для релятивистских функций, функционалах в пространственно-временной трактовке и функциональном интегрировании по полю Ферми выделены в часть II обзора.

§ 1. Квантовая теория поля и функционалы

Как известно, с классической точки зрения поле характеризуется одной или несколькими функциями от координат $\varphi(\mathbf{x})$ — потенциалами поля, удовлетворяющими волновому уравнению. Поле можно рассматривать как механическую систему с бесконечно большим числом степеней свободы. Действительно, чтобы определить классическим образом состояние системы с конечным числом степеней свободы n, нужно задать n независимых координат q_l и n сопряженных импульсов p_l ($l=1, 2 \ldots n$). Состояние же поля, будет известно, если для каждой из точек $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_3 \ldots$ пространства нам известны потенциал φ и производная по времени $\partial\varphi/\partial t$, т. е. если известна бесконечная совокупность величин $\varphi(\mathbf{x}_1)$, $\frac{\partial\varphi(\mathbf{x}_1)}{\partial t}$; $\varphi(\mathbf{x}_2)$, $\frac{\partial\varphi(\mathbf{x}_2)}{\partial t}$;...

В случае системы с конечным числом степеней свободы приходится иметь дело с функциями $f(q_1 \ldots q_n\, p_1 \ldots p_n)$ от координат q_l и канонических импульсов p_l (энергия, количество движения и др.). В случае же поля энергия и другие величины поля будут зависеть от бесконечного числа «координат» $\varphi(\mathbf{x}_i)$, где $\mathbf{x}_i$ пробегает все точки пространства, и сопряженных «импульсов». Таким образом, в теории поля нужно рассматривать функции от бесконечного числа переменных $\varphi(\mathbf{x}_1), \ldots, \varphi(\mathbf{x}_i)$ или функции от функции $\varphi(\mathbf{x})$ — функционалы функции $\varphi(\mathbf{x})$.

Функциональная зависимость будет обозначаться фигурными скобками: $F\{\varphi(\mathbf{x})\}$ или $F\{\varphi\}$ есть функционал от $\varphi(\mathbf{x})$. Простейшим примером функционала является интеграл $F\{\varphi\} = \int f(x)\varphi(x)\,dx$.

Рассмотрим вариацию $\delta F\{\varphi\}$ произвольного функционала $F\{\varphi\}$, вызванную вариацией функции $\varphi(x)$ в точке x': $\delta F\{\varphi\} = F\{\varphi(x) + \lambda\delta(x-x')\} -$

$-F\{\varphi\}$. Функциональной производной $F\{\varphi\}$ по $\varphi(x')$ называется величина

$$\frac{\delta F\{\varphi\}}{\delta\varphi(x')}=\lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda}\delta F\{\varphi\}. \tag{1.1}$$

Вместо (1.1) можно также писать:

$$\delta F\{\varphi\}=\int\frac{\delta F\{\varphi\}}{\delta\varphi(x)}\delta\varphi(x)\,dx. \tag{1.2}$$

Отсюда находим, положив

$$F\{\varphi\}=\varphi(x)=\int\delta(x-x')\varphi(x')\,dx',$$

что

$$\frac{\delta\varphi(x)}{\delta\varphi(x')}=\delta(x-x'). \tag{1.3}$$

Если $F\{\varphi\}$ является функционалом функции $\varphi(x)$, которая в свою очередь представляет собой функционал функции $\gamma(x)$, то функциональная производная F по $\gamma(x')$ равна

$$\frac{\delta F\{\varphi\{\gamma\}\}}{\delta\gamma(x')}=\int\frac{\delta\varphi(x)}{\delta\gamma(x')}\,\frac{\delta F\{\varphi\{\gamma\}\}}{\delta\varphi(x)}\,dx. \tag{1.4}$$

Определение функционального интеграла мы рассмотрим позднее*).

Как хорошо известно, в квантовой механике системы с конечным числом степеней свободы n основное перестановочное соотношение между операторами координат $\hat{q}_l$ и импульсов $\hat{p}_{l'}$ имеет вид

$$[\hat{p}_{l'},\ \hat{q}_l]=\hat{p}_{l'}\hat{q}_l-\hat{q}_l\hat{p}_{l'}=-i\delta_{ll'}. \tag{1.5}$$

Поскольку все операторы координат $\hat{q}_l$ перестановочны между собой, мы можем описывать систему с помощью волновой функции $\Psi(q_1,\ldots,q_n)$, по отношению к которой $\hat{q}_l$ является числом (оператор $\hat{q}_l$ есть оператор умножения на q_l). Как хорошо известно, из (1.5) следует, что тогда $\hat{p}_l$ является дифференциальным оператором: $\hat{p}_l=-i\frac{\partial}{\partial q_l}$.

Если мы теперь перейдем к бесконечному числу степеней свободы, устремив n к бесконечности, то индекс l будет пробегать непрерывный ряд значений. Полученные таким образом бесконечные совокупности координат $\hat{q}_l$ и импульсов $\hat{p}_l$ могут рассматриваться как функции $q(l)$ и $p(l)$, зависящие от переменной l как от параметра. В этом предельном случае перестановку (1.5) следует писать в виде

$$[\hat{p}(l),\ \hat{q}(l')]=-i\delta(l-l'), \tag{1.6}$$

заменив в правой части $\delta_{ll'}$ на $\delta(l-l')$, поскольку l меняется непрерывно. Волновая функция Ψ будет зависеть от бесконечного числа координат q_l или от функции $q(l)$, т. е. Ψ будет функционалом $q(l)$: $\Psi=\Psi\{q(l)\}$.

В квантовой теории поля основное перестановочное соотношение для полей с целым спином имеет как раз вид (1.6). Оператор мезонного поля $\varphi(x)$ (мезонный «потенциал») зависит от пространственно-временной коорди-

*) Некоторые математические вопросы, связанные с функциональной формулировкой квантовой теории поля, рассмотрены в книге Фридрихса [11] и приложении к статье Симанчика [12].

наты x как от параметра. Если времена операторов $\varphi(x')$ и $\partial\varphi(x)/\partial x_0$ равны, то между ними имеет место перестановочное соотношение

$$\left[\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_0},\ \varphi(x')\right] = -i\delta^3(x-x'),\quad x_0 = x_0'. \tag{1.7}$$

Так как операторы $\varphi(x)$ и $\varphi(x')$ коммутируют друг с другом для разных точек x и x' при равных временах $x_0 = x_0'$, то мы можем выбрать $\varphi(x)$ (при фиксированном времени) в качестве координатной функции $\hat{q}(l)$, т. е. считать $\varphi(x)$ оператором умножения на функцию $\varphi'(x)$, и описывать поле с помощью функционала $\Omega\{\varphi'\}$ от пространственной функции $\varphi'(x)$. Тогда из перестановки (1.7) следует, что оператор $\partial\varphi/\partial x_0$ играет роль импульсной функции $\hat{p}(l)$. Соотношение (1.7) будет согласно (1.3) выполнено, если мы положим

$$\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_0}\,\Omega\{\varphi'\} = -i\,\frac{\delta}{\delta\varphi'(x)}\,\Omega\{\varphi'\}. \tag{1.8}$$

Таким образом, функциональная формулировка в квантовой теории поля является естественным следствием того, что поле обладает бесконечным числом степеней свободы.

Важное место в квантовой теории поля принадлежит понятию производящего функционала. Предположим, что функционал $F\{\varphi\}$ функции $\varphi(x)$ можно разложить в степенной функциональный ряд

$$F\{\varphi\} = \sum_n F_n\{\varphi\}; \tag{1.9}$$

$$F_n\{\varphi\} = (n!)^{-1/2}\int f_n(x_1\ldots x_n)\ \varphi(x_1)\ldots\varphi(x_n)\,dx_1\ldots dx_n. \tag{1.10}$$

Тогда $F\{\varphi\}$ есть производящий функционал для функций $f_n(x_1\ldots x_n)$ симметричных относительно переменных $x_1\ldots x_n$. Понятие производящего функционала является обобщением понятия производящей функции. В частном случае, когда переменная x может принимать только одно значение $x = a$, мы получаем из (1.10), положив $\varphi(x) = \zeta\delta(x-a)$:

$$F\{\varphi(a)\} \equiv F(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n!}}\,f_n\zeta^n$$

— производящую функцию для коэффициентов f_n.

Между функционалом $F_n\{\varphi\}$ и функцией $f_n(x_1\ldots x_n)$ имеется однозначное соответствие, что позволяет вместо функции f_n пользоваться функционалом $F_n\{\varphi\}$. Это значит, что вместо бесконечной совокупности функций $f_n(x_1\ldots x_n)$, $n = 0,1,2,\ldots$, содержащейся в (1.10), можно иметь дело с одной величиной — функционалом $F\{\varphi\}$.

Метод производящего функционала может быть обобщен на случай, когда функции $f_n(x_1\ldots x_n)$ антисимметричны относительно переменных $x_1\ldots x_n$. В этом случае содержащиеся в интеграле $F_n\{\varphi\}$ величины $\varphi(x)$ (формула (1.10)) не могут быть функциями. Действительно, если $\varphi(x)$ — функция, а $f_n(x_1\ldots x_n)$ антисимметрична относительно переменных $x_1\ldots x_n$, то интеграл F_n равен нулю. Чтобы интеграл F_n не изменялся при перестановке двух переменных x_i и x_k, величины $\varphi(x)$ должны антикоммутировать: $\varphi(x_i)\varphi(x_k) + \varphi(x_k)\varphi(x_i) = 0$. Смысл антикоммутирующих величин φ будет выяснен в § 2.

Метод производящего функционала тесно связан с корпускулярным аспектом в квантовой теории поля. Толкование переходов и состояний поля основывается на идее о корпускулярных проявлениях поля. Пока эта идея остается в силе, основными величинами, описывающими поле, следует считать волновые функции $f_n(x_1\ldots x_n)$, относящиеся к определенному числу

частиц n и обладающие нужными свойствами симметрии относительно переменных частиц $x_1 \ldots x_n$. Если число частиц может меняться, то в общем случае состояние или переходы поля должны описываться с помощью бесконечной совокупности функций $f_n(x_1 \ldots x_n)$[13], $n = 0, 1, 2, \ldots$:

$$\begin{array}{l} f_0, \\ f_1(x_1), \\ f_2(x_1, x_2), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n). \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Вместо совокупности функций $f_n(x_1 \ldots x_n)$ можно рассматривать производящий функционал типа (1.10).

Таким образом, функционал может описывать состояние поля или процессы перехода только тогда, когда он является производящим функционалом по отношению к каким-либо функциям $f_n(x_1 \ldots x_n)$. Простейшими функциями, зависящими от переменных n частиц, являются амплитуды вероятности $\Psi_n(x_1 \ldots x_n)$, квадрат абсолютной величины которых $|\Psi_n|^2$ дает плотность вероятности того, что частицы находятся в состояниях $x_1 \ldots x_n$. Производящий функционал для амплитуд вероятности есть «функционал Фока».

Помимо совокупности амплитуд вероятности $\Psi_n(x_1 \ldots x_n)$, сейчас известны и другие функции (четырехмерные волновые функции, функции Грина), с помощью которых можно описывать состояния поля и переходы между ними; трактовка с амплитудами вероятности близка к нерелятивистской квантовой механике, в то время как в определениях четырехмерных волновых функций и функций Грина в явной форме учитывается требование релятивистской инвариантности теории. Эти релятивистские функции связаны с функционалом внешних источников Швингера.

Четырехмерные волновые функции, функции Грина и другие релятивистские функции не имеют столь простого смысла, как амплитуды вероятности.

Метод функционалов будет изложен на примере нуклонного поля, взаимодействующего с нейтральным псевдоскалярным мезонным полем. Операторы свободного нуклонного поля обозначаются посредством $\psi_\alpha(x)$ и $\bar{\psi}_\beta(x)$ $(\bar{\psi} = \psi^* \gamma_4)$, $\varphi(x)$ — оператор свободного мезонного поля, спинорные переменные α, β будут обычно вместе с координатами обозначаться одной буквой, например $\psi(x)$, $\bar{\psi}(y)$. При этом интегрирование по координатам x, y будет включать и суммирование по остальным переменным.

Для дальнейшего необходимо ввести операторы рождения и поглощения. Если $f^{(k)}_{(x)}$ — система положительно-частотных решений уравнения Клейна — Фока $(\Box - \mu^2) f^{(k)}_{(x)} = 0$, ортогональных и нормированных в смысле

$$-i \int d\sigma_\mu f^{(j)}(x) \overleftrightarrow{\frac{\partial f^{(k)}_{(x)}}{\partial x_\mu}} = \delta_{jk} \tag{1.11}$$

($d\sigma_\mu$ — четырехмерный вектор элемента пространственноподобной гиперповерхности), то оператор поглощения c_k для мезонного поля $\varphi_{(x)}$ определяется формулой

$$c_k = \frac{1}{i} \int d\sigma_\mu \varphi(x) \overleftrightarrow{\frac{\partial f^{(k)}_{(x)}}{\partial x_\mu}}. \tag{1.12}$$

В (1.11) и (1.12) было использовано обозначение

$$A \overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial x_\mu}} B = A \frac{\partial B}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A}{\partial x_\mu} B. \tag{1.13}$$

Пусть $u^{(k)}$ и $\bar{v}^{(k)}$ — системы положительно-частотных решений уравнения Дирака ($u^{(k)}$) и сопряженного уравнения ($\bar{v}^{(k)}$), которые ортогональны и нормированы: ($\bar{v} = v^* \gamma_4$)

$$\left.\begin{aligned} &\int \bar{u}^{(k)} \gamma_\mu u^{(j)} d\sigma_\mu = \delta_{kj}, \\ &\int \bar{v}^{(k)} \gamma_\mu v^{(j)} d\sigma_\mu = \delta_{kj}; \quad \int \bar{u}^{(k)} \gamma_\mu v^{(j)} d\sigma_\mu = 0. \end{aligned}\right\} \tag{1.14}$$

Тогда операторы поглощения a_k и b_k для нуклонного поля определяются равенствами

$$\left.\begin{aligned} a_k &= \int \bar{u}^{(k)}_{(x)} \gamma_\mu \psi(x) d\sigma_\mu, \\ b_k &= \int \bar{\psi}(x) \gamma_\mu v^{(k)}(x) d\sigma_\mu. \end{aligned}\right\} \tag{1.15}$$

Операторы рождения a_k^+, b_k^+, c_k^+ эрмитово сопряжены к операторам поглощения a_k, b_k, c_k. Если поле рассматривается в некоторый момент времени x_0 и состояния частиц отличаются по значениям импульса, то определенные по формулам (1.12) и (1.15) операторы поглощения и операторы рождения являются коэффициентами в соответствующих разложениях Фурье:

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int (2k_0)^{-1/2} [c(\mathbf{k}) e^{ikx} + c^+(\mathbf{k}) e^{-ikx}] d^3 k, \tag{1.16}$$

$$\psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int [u(\mathbf{p}) a(\mathbf{p}) e^{ipx} + v(\mathbf{p}) b^+(\mathbf{p}) e^{-ipx}] d^3\mathbf{p}, \tag{1.17}$$

$$\bar{\psi}(x) = \frac{1}{2(\pi)^{3/2}} \int [\bar{u}(\mathbf{p}) a^+(\mathbf{p}) e^{-ipx} + \bar{v}(\mathbf{p}) b(\mathbf{p}) e^{ipx}] d^3 p, \tag{1.18}$$

где $kx = (\mathbf{k}, \mathbf{x}) - k_0 x_0$; u и v — дираковские спиноры; в (1.17) и (1.18) суммирование по поляризациям включено в интегрирование по p.

Перестановочные соотношения между операторами рождения a^+, b^+, c^+ и операторами поглощения a, b, c имеют вид

$$\{a^+(\mathbf{p}), a(\mathbf{p}')\} = \delta^3(p - p'), \tag{1.19}$$

$$\{b^+(\mathbf{p}), b(\mathbf{p}')\} = \delta^3(p - p'), \tag{1.20}$$

$$[c(\mathbf{p}), c^+(\mathbf{p}')] = \delta^3(p - p'). \tag{1.21}$$

§ 2. Метод функционалов Фока

1. Идея метода. Мы изложим сначала идею метода на простейшем примере, чтобы избежать усложнений, вносимых введением функционалов.

Итак, рассмотрим в методических целях случай, когда мезоны могут находиться только в одном (одинаковом для всех частиц) состоянии. Нуклонное поле временно не рассматриваем. Пусть Ψ_n — амплитуда вероятности наличия в поле n мезонов (которая зависит только от числа n). При неопределенном числе мезонов для полного описания поля необходимо знать весь набор величин Ψ_n, $n = 0, 1, 2, \ldots, \infty$.

В методе функционалов Фока вместо бесконечного набора Ψ_n состояние поля характеризуется одной величиной:

$$\omega(\bar{c}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n!}} \Psi_n \bar{c}^n = \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n, \tag{2.1}$$

где $\bar{c}$ — вспомогательная постоянная. Очевидно, что задание ω_n однозначно определяет Ψ_n и наоборот. Таким образом, в рассматриваемом простейшем

примере ω является функцией от $\bar{c}$ и производящей функцией для амплитуд вероятности Ψ_n.

Для того чтобы с помощью одной величины $\omega(\bar{c})$ можно было вычислять средние значения величин поля, чтобы написать уравнение для $\omega(\bar{c})$, необходимо определить, как действуют операторы поля на $\omega(\bar{c})$.

Операторы рождения c^+ и поглощения c в нашем примере удовлетворяют перестановочному соотношению

$$c c^+ - c^+ c = 1, \tag{2.2}$$

а оператор числа частиц $\hat{n}$ есть

$$\hat{n} = c^+ c. \tag{2.3}$$

Покажем, что $\omega(\bar{c})$ — это волновая функция поля в представлении, где c^+ является оператором умножения на $\bar{c}$:

$$c^+ \omega(\bar{c}) = \bar{c}\,\omega(\bar{c}). \tag{2.4}$$

Если выполняется (2.4), то из перестановочных соотношений (2.2) следует, что c — оператор дифференцирования по $\bar{c}$:

$$c\omega(\bar{c}) = \frac{d}{d\bar{c}}\,\omega(\bar{c}). \tag{2.5}$$

Уравнение для собственных функций λ_n оператора числа частиц $\hat{n}$ можно теперь записать в виде

$$\bar{c}\frac{d}{d\bar{c}}\lambda_n(\bar{c}) = n\lambda_n(\bar{c}), \tag{2.6}$$

где n (целое положительное число) — число частиц.

Решением (2.6) является степенная функция от $\bar{c}$:

$$\lambda_n = A_n \bar{c}^n, \tag{2.7}$$

где A_n — нормировочный множитель, определяемый из условия, чтобы скалярное произведение λ_n на самое себя равнялось единице: $(\lambda_n, \lambda_n) = \lambda_n^* \lambda_n = 1$. Отсюда мы сразу же находим, что $|A_0| = 1$ и, следовательно, в этом представлении нормированная функция состояния без частиц $\lambda_0 = 1$. Имея это в виду, мы можем также λ_n представить в виде

$$\lambda_n = A_n (c^+)^n \lambda_0.$$

Скалярное произведение собственных функций λ_n и λ_m будет равно

$$\begin{aligned}(\lambda_n, \lambda_m) &= A_n^* A_m ((c^+)^n \lambda_0, (c^+)^m \lambda_0) = \\ &= A_n^* A_m (\lambda_0, c^n (c^+)^m \lambda_0) = A_n^* A_m \left.\frac{d^n}{d\bar{c}^n}\bar{c}^m\right|_{\bar{c}=0} = \\ &= |A_n|^2 n!\,\delta_{nm}, \text{ или } A_n = (n!)^{-1/2},\end{aligned} \tag{2.8}$$

где были использованы (2.4), (2.5) и эрмитовская сопряженность операторов c и c^+.

Таким образом, ряд (2.1) представляет собой разложение функции $\omega(\bar{c})$ по собственным функциям $\lambda_n(\bar{c})$ оператора числа мезонов с коэффициентами Ψ_n. Поскольку смысл Ψ_n нам известен заранее (амплитуда вероятности наличия n мезонов в поле), $\omega(\bar{c})$ действительно является волновой функцией поля.

Скалярное произведение волновых функций ω и ω' согласно (2.1) и (2.8) равно

$$(\omega', \omega) = \sum_n \Psi_n'^* \Psi_n, \tag{2.9}$$

а для амплитуды вероятности Ψ_n можно написать выражение

$$\Psi_n = (n!)^{-1/2} (\lambda_0, c^n \omega), \tag{2.10}$$

или

$$\Psi_n = (n!)^{-1/2} \frac{d^n}{d\bar{c}^n} \omega(\bar{c}) \Big|_{\bar{c}=0}. \tag{2.11}$$

В силу (2.10) для производящего функционала $\tilde{\omega}$ для функций $\tilde{\Psi}_n = \sqrt{n!}\,\Psi_n$ будет выполняться равенство

$$\tilde{\omega}(\bar{c}') = (\lambda_0, e^{c\bar{c}'} \omega). \tag{2.12}$$

Для пояснения (2.12) заметим, что в представлении, где c^+ — оператор умножения, собственная функция $\omega_{c'}$ оператора поглощения c определяется из уравнения:

$$\frac{d}{d\bar{c}} \omega_{c'}(\bar{c}) = c'\omega(\bar{c}),$$

откуда

$$\omega_{c'} \sim \exp[c'c],$$

где c' — собственное значение оператора c.

2. Производящий функционал для амплитуд вероятности. Перейдем к реальному случаю. Состояние мезона мы будем отмечать по импульсу $\mathbf{p}$. Амплитуда вероятности наличия в поле n мезонов с импульсами $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \ldots \mathbf{p}_n$ теперь будет функцией $\Psi_n(\mathbf{p}_1 \ldots \mathbf{p}_n)$ от переменных мезонов. Состояние поля в общем случае по-прежнему будет полностью характеризоваться совокупностью бесконечного числа амплитуд $\Psi_n(\mathbf{p}_1 \ldots \mathbf{p}_n)$, $n = 0, 1, 2 \ldots \infty$, каждая из которых описывает систему n мезонов в импульсном конфигурационном пространстве. Функции $\Psi_n(\mathbf{p}_1 \ldots \mathbf{p}_n)$ симметричны относительно своих переменных.

Введем вспомогательную функцию от векторного аргумента $\bar{c}(\mathbf{p})$ и будем рассматривать вместо волновой функции $\Psi_n(\mathbf{p}_1 \ldots \mathbf{p}_n)$ функционал функции $\bar{c}(\mathbf{p})$:

$$\Omega_n\{\bar{c}\} = \frac{1}{\sqrt{n!}} \int \Psi_n(\mathbf{p}_1 \ldots \mathbf{p}_n)\, \bar{c}(\mathbf{p}_1) \ldots \bar{c}(\mathbf{p}_n)\, d^3\mathbf{p}_1 \ldots d^3\mathbf{p}_n. \tag{2.13}$$

Поскольку задание $\Omega_n\{\bar{c}\}$ однозначно определяет Ψ_n и наоборот, вместо совокупности амплитуд вероятности Ψ_n состояние поля можно описывать производящим функционалом:

$$\Omega\{\bar{c}\} = \sum_{n=0}^{\infty} \Omega_n\{\bar{c}\}. \tag{2.14}$$

Выясним смысл функционала $\Omega\{\bar{c}\}$. Мы увидим, что, как и в элементарном примере § 2, п. 1, $\Omega\{\bar{c}\}$ есть вектор состояния поля в представлении, где оператор рождения $c^+(\mathbf{p})$ есть оператор умножения. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим вектор состояния Φ в таком представлении. Так как теперь оператор $c^+(\mathbf{p})$ зависит от импульса мезона как от параметра, то результатом его действия на вектор состояния Φ является умножение Φ на функцию от $\mathbf{p}$. Положим

$$c^+(\mathbf{p})\Phi = \bar{c}(\mathbf{p})\Phi \tag{2.15}$$

где в правой части стоит та же вспомогательная функция $\bar{c}(\mathbf{p})$, что и в формуле (2.13). В § 1 при обсуждении формул (1.5) — (1.7) было выяснено, что из равенства вида (2.15) в соединении с перестановочным соотношением

$$[c(\mathbf{p}), c^+(\mathbf{p}')] = \delta^3(p - p') \tag{2.16}$$

следует, что Φ должно быть функционалом функции $\bar{c}(\mathbf{p})$. Кроме того, оператор $c(\mathbf{p})$ должен быть оператором функциональной производной по $\bar{c}(\mathbf{p})$. Иначе говоря, должно быть

$$c(\mathbf{p})\,\Phi\{\bar{c}\} = \frac{\delta}{\delta\bar{c}(p)}\,\Phi\{\bar{c}\} \tag{2.17}$$

Формулы (2.15) и (2.17) заменяют в общем случае формулы (2.4) и (2.5) элементарного случая, когда возможно только одно состояние для мезонов.

В рассматриваемом представлении оператор числа мезонов имеет вид

$$\hat{n} = \int c^+(\mathbf{p})\,c(\mathbf{p})\,d^3p = \int \bar{c}(\mathbf{p})\,\frac{\delta}{\delta\bar{c}(\mathbf{p})}\,d^3p. \tag{2.18}$$

Легко проверить, что собственными функциями $\hat{n}$ будут произведения функций $\bar{c}(p)$: функционал

$$\Lambda_n\{\bar{c}\} = A_n\bar{c}(\mathbf{p}_1)\,\bar{c}(\mathbf{p}_2)\ldots\bar{c}(\mathbf{p}_n) \tag{2.19}$$

(A_n — нормировочный множитель) принадлежит собственному значению n. В частном случае, когда импульсы всех мезонов равны $\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_2 \ldots = \mathbf{p}_n$, мы получаем формулу (2.7) элементарного примера. Особое значение имеет функционал вакуума Λ_0 (точнее, функционал свободного вакуума, поскольку мы пользуемся операторами невзаимодействующего мезонного поля). Согласно (2.19) нормированный функционал вакуума $\Lambda_0 = 1$ в рассматриваемом представлении. Поэтому (2.19) равносильно выражению

$$\Lambda_n = A_n\,c^+(\mathbf{p}_1)\,c^+(\mathbf{p}_2)\ldots c^+(\mathbf{p}_n)\,\Lambda_0. \tag{2.20}$$

По определению операторы $c^+(\mathbf{p})$ и $c(\mathbf{p})$ эрмитово сопряжены. Поэтому скалярное произведение $(\Omega_n, \Omega') \equiv \Omega_n^*\Omega'$ функционалов Ω_n (формула (2.13)) и произвольного функционала Ω' может быть записано в виде

$$(\Omega_n, \Omega') = \frac{1}{\sqrt{n!}}\left(\int \Psi_n(\mathbf{p}_1\ldots\mathbf{p}_n)\,c^+(\mathbf{p}_1)\ldots c^+(\mathbf{p}_n)\Lambda_0\,d^3p_1\ldots d^3p_n,\ \Omega'\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n!}}\int \Psi_n^*(\mathbf{p}_1\ldots\mathbf{p}_n)\,(\Lambda_0,\ c(\mathbf{p}_1)\ldots c(\mathbf{p}_n)\,\Omega')\,d^3p_1\ldots d^3p_n. \tag{2.21}$$

Если принять во внимание, что $c(\mathbf{p})\,\Lambda_0 = 0$ и $\Lambda_0^* c^+(\mathbf{p}) = 0$, то матричный элемент справа в (2.21) можно также представить в виде

$$(\Lambda_0, c(\mathbf{p}_1)\ldots c(\mathbf{p}_n)\,\Omega') = \left.\frac{\delta^n\,\Omega'}{\delta\bar{c}(\mathbf{p}_1)\ldots\delta\bar{c}(\mathbf{p}_n)}\right|_{\bar{c}(\mathbf{p})=0}, \tag{2.22}$$

где после выполнения функционального дифференцирования нужно положить $\bar{c}(p_i) = 0$. В частности, при $\Omega' = \Omega'_m$ мы находим $(\Omega_n, \Omega'_m) = \delta_{nm}(\Omega_n, \Omega'_n)$ или же в общем случае

$$(\Omega, \Omega') = \sum_n \int \Psi_n^*(\mathbf{p}_1\ldots\mathbf{p}_n)\,\Psi_n'(\mathbf{p}_1\ldots\mathbf{p}_n)\,d^3p_1\ldots d^3p_n. \tag{2.23}$$

Если же в формуле (2.22) положить $\Omega' = \Lambda_n$, то мы получаем для нормировочной постоянной A_n (формула (2.19)) значение $A_n = (n!)^{-1/2}$. Таким

образом, ряд (2.13) представляет собой разложение производящего функционала по собственным функционалам оператора числа частиц Λ_n. Так как коэффициентам разложения $\Psi_n(\mathbf{p}_1 \ldots \mathbf{p}_n)$ мы придаем смысл амплитуд вероятности, то, действительно, $\Omega\{\bar{c}\}$ совпадает с вектором состояния Φ в представлении, где $c^+(\mathbf{p})$ есть оператор умножения на $\bar{c}(\mathbf{p})$.

Амплитуду $\Psi(\mathbf{p}_1 \ldots \mathbf{p}_n)$ мы можем теперь определить как величину

$$\Psi_n(\mathbf{p}_1 \ldots \mathbf{p}_n) = \frac{1}{\sqrt{n!}} (\Lambda_0,\ c(\mathbf{p}_1) \ldots c(\mathbf{p}_n)\,\Omega) =$$

$$= \frac{\delta^n \Omega\{\bar{c}\}}{\delta\bar{c}(\mathbf{p}_1) \ldots \delta\bar{c}(\mathbf{p}_n)} \frac{1}{\sqrt{n!}} \Bigg|_{\bar{c}=0}. \tag{2.24}$$

Из (2.24) сразу же находятся соотношения между функциями Ψ_n и Ψ'_n в функционалах Ω и Ω', если $\Omega' = c^+(\mathbf{p})\,\Omega$. Подставив Ω' в (2.24) и пронеся налево через функциональные производные функцию $\bar{c}(p)$, мы имеем:

$$\Psi'_n(\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \ldots \mathbf{p}_n) = \frac{1}{\sqrt{n}} [\Psi_{n-1}(\mathbf{p}_2 \mathbf{p}_3 \ldots \mathbf{p}_n)\,\delta^3(p - p_1)]_p, \tag{2.25}$$

где $[\ \ ]_p$ означает симметризацию выражения внутри скобки относительно переменных $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p}_j$:

$$[F(\mathbf{p}_1 \ldots \mathbf{p}_n \mathbf{p})]_p = F(\mathbf{p}_1 \ldots \mathbf{p}_n \mathbf{p}) + F(\mathbf{p}_1 \ldots \mathbf{p}_{n-1} \mathbf{p}\mathbf{p}_n)^+ \ldots$$

Если $\Omega'' = c(\mathbf{p})\,\Omega$, то в (2.24) прибавится лишняя производная, и мы имеем:

$$\Psi''_n(\mathbf{p}_1 \ldots \mathbf{p}_n) = \sqrt{n+1}\,\Psi_{n+1}(\mathbf{p}\mathbf{p}_1 \ldots \mathbf{p}_n). \tag{2.26}$$

Найдем собственные функционалы оператора поглощения $c(\mathbf{p})$. Согласно (2.17) для собственного значения c'

$$c(\mathbf{p})\,F_{c'}\{\bar{c}\} = \frac{\delta}{\delta\bar{c}(\mathbf{p})} F_{c'}\{\bar{c}\} = c'(\mathbf{p})\,F_{c'}\{\bar{c}\},$$

или

$$F_{c'}\{\bar{c}\} \sim \exp\left[\int c'(\mathbf{p})\,\bar{c}(\mathbf{p})\,d^3p\right]. \tag{2.27}$$

Рассмотрим теперь

$$(\Lambda_0,\ \exp\left[\int c(\mathbf{p})\,\bar{c}'(\mathbf{p})\,d^3p\right]\Omega). \tag{2.28}$$

Разлагая экспоненту в ряд и вспоминая определение (2.24) амплитуды Ψ_n, можно убедиться, что (2.28) есть не что иное, как производящий функционал (от функции $\bar{c}'(\mathbf{p})$) для амплитуд $\tilde{\Psi}_n = \sqrt{n!}\,\Psi_n$.

3. Метод функционалов и статистика Ферми. Обобщение метода производящего функционала на случай полей, подчиняющихся статистике Ферми, встречается с трудностями. Перестановочные соотношения (1.19) — (1.20) для операторов рождения a^+, b^+ и поглощения a, b имеют знак плюс вместо минуса для операторов поля Бозе, а операторы a^+ и b^+ антикоммутируют:

$$\{a^+(\mathbf{p}),\ a^+(\mathbf{p}')\} = 0, \qquad \{a^+(\mathbf{p}),\ b^+(\mathbf{p}')\} = 0. \tag{2.29}$$

В этом случае нельзя ввести такое представление, в котором действие оператора $a^+(\mathbf{p})$ на функционал Ω сводилось бы к умножению на функцию $\bar{a}(\mathbf{p})$: если допустить, что выполняется равенство

$$a^+(\mathbf{p})\,\Omega = \bar{a}(\mathbf{p})\,\Omega,$$

то должно было бы также выполняться равенство

$$a^+(\mathbf{p})\,a^+(\mathbf{p}')\,\Omega = \bar{a}(\mathbf{p})\,\bar{a}(\mathbf{p}')\,\Omega = \bar{a}(\mathbf{p}')\,\bar{a}(\mathbf{p})\,\Omega,$$

противоречащее перестановочному соотношению (2.29), из которого, кроме того, следует, что $\bar{a}(\mathbf{p})^2 = 0$.

Один путь обобщения связан с формулой, аналогичной формуле (2.20). Согласно (2.20) разложение Ω в функциональный степенной ряд (1.15) равносильно разложению в ряд по произведениям операторов рождения, действующих на нормированный функционал вакуума Λ_0. Произведения

$$\left.\begin{aligned} &\Lambda_{nml} = (n!\,m!\,l!)^{-\frac{1}{2}}\,c^+(\mathbf{k}_1\ldots)c^+(\mathbf{k}_l)\,b^+(\mathbf{q}_m)\ldots b^+(\mathbf{q}_1)a^+(\mathbf{p}_n)\ldots a^+(\mathbf{p}_1)\Lambda_0,\\ &[a(\mathbf{p})\,\Lambda_0 = 0,\quad b(\mathbf{q})\,\Lambda_0 = 0,\quad c(\mathbf{k})\,\Lambda_0 = 0,\quad (\Lambda_0,\ \Lambda_0) = 1] \end{aligned}\right\} \tag{2.30}$$

являются собственными векторами операторов числа частиц $\int a^+(\mathbf{p})\,a(\mathbf{p})\,d^3p$ и $\int b^+(\mathbf{q})\,b(\mathbf{q})\,d^3q$ в случае статистики Ферми. Обозначим посредством $\Psi_{nml}(\mathbf{p}_1\ldots\mathbf{p}_n\,|\,\mathbf{q}_1\ldots\mathbf{q}_m\,|\,\mathbf{k}_1\ldots\mathbf{k}_l)$ отнесенную к моменту времени t амплитуду вероятности присутствия в поле n нуклонов с импульсами $\mathbf{p}_1\ldots\mathbf{p}_n$, m антинуклонов с импульсами $\mathbf{q}_1\ldots\mathbf{q}_m$ и l мезонов с импульсами $\mathbf{k}_1\ldots\mathbf{k}_l$. Функция Ψ_{nml} антисимметрична относительно переменных $\mathbf{p}_1\ldots\mathbf{p}_n$; $\mathbf{q}_1\ldots\mathbf{q}_m$ и симметрична относительно переменных $\mathbf{k}_1\ldots\mathbf{k}_l$. Вектор состояния Ω тогда равен

$$\Omega = \sum_{nml}^{\infty}\Omega_{nml} = \sum_{nml}(n!\,m!\,l!)^{-1/2}\int\Psi_{nml}(\mathbf{p}_1\ldots|\,\mathbf{q}_1\ldots|\,\mathbf{k}_1\ldots)\times$$
$$\times\,c^+(\mathbf{k}_1)\ldots c^+(\mathbf{k}_l)\,b^+(\mathbf{q}_m)\ldots b^+(\mathbf{q}_1)\,a^+(\mathbf{p}_n)\ldots a^+(\mathbf{p}_1)\,\Lambda_0. \tag{2.31}$$

Для величины Ψ_{nml} мы получаем:

$$\Psi_{nml}(\mathbf{p}_1\ldots\mathbf{p}_n\,|\,\mathbf{q}_1\ldots\mathbf{q}_m\,|\,\mathbf{k}_1\ldots\mathbf{k}_l) =$$
$$= (n!\ m!\ l!)^{-1/2}(\Lambda_0,\ a^+(\mathbf{p}_1)\ldots a^+(\mathbf{p}_n)\,b^+(\mathbf{q}_1)\ldots$$
$$\ldots b^+(\mathbf{q}_m)\,c^+(\mathbf{k}_1)\ldots c^+(\mathbf{k}_l)\,\Omega). \tag{2.32}$$

Из (1.4) легко найти результат действия операторов рождения a^+ и поглощения a на Ω. Если $\Omega' = a^+(\mathbf{p})\,\Omega$, то амплитуды Ψ'_{nml} в Ω' связаны с амплитудами Ψ_{nml} в Ω соотношением, которое получается подстановкой Ω вместо Ω в (2.32) и пронесением оператора $a^+(\mathbf{p})$ налево к Λ_0. Имея в виду, что $(\Lambda_0,\ a^+(\mathbf{p})\,\Omega) = 0$ для любого Ω, находим

$$\Psi'_{nml}(\mathbf{p}_1\ldots\mathbf{p}_n\,|\ldots|\ldots) = \frac{1}{\sqrt{n}}\{\delta^3(p-p_1)\,\Psi_{n-1\,ml}(\mathbf{p}_2\ldots\mathbf{p}_n\,|\ldots|\ldots) -$$
$$-\,\delta^3(p-p_2)\,\Psi_{n-1\,ml}(\mathbf{p}_1,\ \mathbf{p}_3\ldots\mathbf{p}_n\,|\ldots|\ldots) + \ldots$$
$$\ldots - (-1)^n\,\delta^3(p-p_n)\,\Psi_{n-1\,ml}(\mathbf{p}_1\ldots\mathbf{p}_{n-1}\,|\ldots|\ldots)\}. \tag{2.33}$$

Если $\Omega'' = a(\mathbf{p})\,\Omega$, то соответствующая амплитуда Ψ''_{nml} определяется прямо из (2.32):

$$\Psi''_{nml}(\mathbf{p}_1\ldots\mathbf{p}_n\,|\ldots|\ldots) = \sqrt{n+1}\,\Psi_{n+1\,ml}(\mathbf{p}\,\mathbf{p}_1\ldots\mathbf{p}_n\,|\ldots|\ldots). \tag{2.34}$$

Однако представление вектора состояния в виде (2.31) является, по существу, отходом от функционального метода и возвращение к операторному методу вторичного квантования. Чтобы в согласии с перестановочными соотношениями (2.29) развить метод функционалов для статистики Ферми, необходимо определить систему таких величин $\bar{a}(\mathbf{p})$ и $\bar{b}(\mathbf{q})$, зависящих от импульсов нуклона $\mathbf{p}$ и антинуклона $\mathbf{q}$, которые антикоммутируют между собой

$$\left.\begin{aligned} &\{\bar{a}(\mathbf{p}),\ \bar{a}(\mathbf{p}')\} = 0,\quad \{\bar{b}(\mathbf{q}),\ \bar{b}(\mathbf{q}')\} = 0,\\ &\{\bar{a}(\mathbf{p}),\ \bar{b}(\mathbf{q})\} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{2.35}$$

и с операторами нуклонного поля и в то же время пропорциональны единичной матрице в пространстве нуклонных, антинуклонных и мезонных чисел заполнения. Это можно сделать с помощью представления о внешних источниках нуклонного поля $\eta(x)$ и $\bar{\eta}(x)$, введенного Швингером[9]. Источники $\eta(x)$ и $\bar{\eta}(x)$ можно толковать как величины, относящиеся к какому-то другому заданному полю. Так как операторы различных спинорных полей антикоммутируют между собой, то источники η и $\bar{\eta}$ антикоммутируют с операторами Ψ и $\bar{\Psi}$. Кроме того, $\{\eta, \bar{\eta}\} = 0$, поскольку спинорное поле η, $\bar{\eta}$ предполагается заданным. Величины $\bar{a}(k)$ и $\bar{b}(q)$ со свойствами (2.35) можно отождествить с компонентами разложения отрицательно частотных частей внешних источников в трехмерный интеграл Фурье:

$$\left.\begin{aligned} \bar{\eta}^{(-)}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \bar{a}(\mathbf{p})\, \bar{U}(\mathbf{p})\, e^{-ipx} d^3p, \\ \eta^{(-)}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \bar{b}(\mathbf{p})\, \bar{V}(\mathbf{p})\, e^{-ipx} d^3p, \end{aligned}\right\} \tag{2.36}$$

где $V(\mathbf{p})$ и $U(\mathbf{p})$ — дираковские спиноры для заданного внешнего поля, аналогичные спинорам $v(\mathbf{p})$ и $u(\mathbf{p})$ в формулах (1.17) — (1.18).

Теперь можно перейти к представлению, где $a^+(\mathbf{p})$ и $b^+(\mathbf{q})$, — это операторы умножения:

$$a^+(\mathbf{p})\,\Omega = \bar{a}(\mathbf{p})\,\Omega; \quad b^+(\mathbf{p})\,\Omega = \bar{b}(\mathbf{p})\,\Omega. \tag{2.37}$$

В связи с антикоммутативностью $\bar{a}$ и $\bar{b}$ при определении функциональных производных по $\bar{a}$ и $\bar{b}$ оказывается существенным порядок множителей. По определению

$$\left.\begin{aligned} \delta\Omega\{\bar{a}\} &= \int \delta\bar{a}(\mathbf{p}) \frac{\delta\Omega}{\delta\bar{a}(\mathbf{p})} d^3p, \\ \delta\Omega\{\bar{b}\} &= \int \frac{\delta\Omega}{\delta\bar{b}(\mathbf{p})} \delta\bar{b}(\mathbf{p})\, d^3p. \end{aligned}\right\} \tag{2.38}$$

Операторы функциональных производных по $\bar{a}$ и $\bar{b}$ антикоммутируют:

$$\left\{\frac{\delta}{\delta\bar{a}(\mathbf{p})}, \frac{\delta}{\delta\bar{b}(\mathbf{q})}\right\} = 0, \quad \left\{\frac{\delta}{\delta\bar{a}(\mathbf{p})}, \frac{\delta}{\delta\bar{a}(\mathbf{p}')}\right\} = 0.$$

Из определения (2.38) вытекает, что

$$\left\{\frac{\delta}{\delta\bar{a}(\mathbf{p})}, \bar{a}(\mathbf{p}')\right\} = \delta^3(p - p'), \quad \left\{\frac{\delta}{\delta\bar{b}(\mathbf{p})}, \bar{b}(\mathbf{p}')\right\} = \delta^3(p - p').$$

Отсюда вытекает, что в полном соответствии с методом функционалов для статистики Бозе можно положить

$$a(\mathbf{p}) = \frac{\delta}{\delta\bar{a}(\mathbf{p})}\,\Omega; \quad b(\mathbf{p}) = \frac{\delta}{\delta\bar{b}(\mathbf{p})}\,\Omega. \tag{2.39}$$

По аналогии со случаем статистики Бозе можно заключить, что в общем случае взаимодействующих нуклонного и мезонного полей разложение вектора состояния как функционала от $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$, отличается от (2.31) заменой произведений $c^+(\mathbf{k}_1)\ldots c^+(\mathbf{k}_e)\, b^+(\mathbf{q}_m)\ldots b^+(\mathbf{q}_1)\, a^+(\mathbf{p}_n)\ldots a^+(\mathbf{p}_1)\,\Lambda_0$ на $c(\bar{\mathbf{k}}_1)\ldots$ $\ldots\bar{c}(\mathbf{k}_e)\,\bar{b}(\mathbf{q}_m)\ldots\bar{b}(\mathbf{q}_1)\,\bar{a}(\mathbf{p}_n)\ldots\bar{a}(\mathbf{p}_1)$.

Рассмотрим оператор

$$R\{\bar{a}', \bar{b}'\} = \exp\left\{\int [\bar{a}'(\mathbf{p})\, a(\mathbf{p}) + \bar{b}(\mathbf{p})\, \bar{b}'(\mathbf{p})]\, d^3p\right\}, \tag{2.40}$$

являющийся функционалом от $\bar{a}'(p)$ и $\bar{b}'(p)$. Мы имеем:

$$\frac{\delta}{\delta\bar{a}'(\mathbf{p})}R = Ra(\mathbf{p}), \qquad \frac{\delta^n R}{\delta\bar{a}'(\mathbf{p}_1)\ldots\delta\bar{a}'(\mathbf{p}_n)} = Ra(\mathbf{p}_n)\ldots a(\mathbf{p}_1)$$

и аналогичные формулы для функциональных производных по $\bar{b}(\mathbf{q})$. Сравнивая эти формулы с выражением (2.32) для амплитуды вероятности, можно придти к выводу, что производящий функционал $\tilde{\Omega}$ для амплитуд $\tilde{\Psi}_{nml} = \sqrt{n!m!l!}\Psi_{nml}$ можно представить в виде

$$\tilde{\Omega}\{\bar{a}', \bar{b}', \bar{c}'\} = \left(\Lambda_0,\ Re^{\int \bar{c}'(\mathbf{k})c(\mathbf{k})\,d^3k}\Omega\right). \tag{2.41}$$

Вместо формулы (2.32) для амплитуд вероятности Ψ_{nml} можно тогда писать:

$$\Psi_{nml}(\mathbf{p}_1\ldots\mathbf{p}_n\,|\,\mathbf{q}_1\ldots\mathbf{q}_m\,|\,\mathbf{k}_1\ldots\mathbf{k}_l) = \\ = \frac{1}{\sqrt{n!m!l!}}\,\frac{\delta^{n+m+l}\Omega}{\delta\bar{a}(\mathbf{p}_1)\ldots\delta\bar{a}(\mathbf{p}_n)\delta\bar{b}(\mathbf{q}_1)\ldots\delta\bar{b}(\mathbf{q}_m)\delta\bar{c}(\mathbf{k}_1)\ldots\delta\bar{c}(\mathbf{k}_l)}\Big|_{\bar{a}=\bar{b}=\bar{c}=0}. \tag{2.42}$$

Так же как и при выводе формулы (2.23) можно показать, что из условия эрмитовой сопряженности операторов a и a^+, b и b^+ вытекает определение скалярного произведения двух функционалов Ω и Ω':

$$(\Omega', \Omega) = \\ = \sum_{nml}\int \psi^*_{nml}(\mathbf{p}_1\ldots\mathbf{p}_n\,|\,\mathbf{q}_1\ldots\mathbf{q}_m\,|\,\mathbf{k}_1\ldots\mathbf{k}_l)\psi_{nml}(\mathbf{p}_1\ldots\mathbf{p}_n\,|\,\mathbf{q}_1\ldots\mathbf{q}_m\,|\,\mathbf{k}_1\ldots\mathbf{k}_l)\times \\ \times d^3p_1\ldots d^3p_n d^3q_1\ldots d^3q_m d^3k_1\ldots d^3k_l. \tag{2.43}$$

4. Уравнения для функционала состояния. Для вывода уравнения, которому удовлетворяет рассмотренный в § 2 функционал состояния, необходимо выразить оператор энергии H через операторы рождения $a^+(\mathbf{p})$, $b^+(\mathbf{q})$, $c^+(\mathbf{k})$ и операторы поглощения $a(\mathbf{p})$, $b(\mathbf{q})$, $c(\mathbf{k})$ различных частиц:

$$H = H(a,\ b,\ c,\ a^+,\ b^+,\ c^+). \tag{2.44}$$

В методе функционалов, как это было выяснено в § 2, можно ввести такое представление, в котором операторы рождения являются операторами умножения на вспомогательные величины $\bar{a}(\mathbf{p})$, $\bar{b}(\mathbf{q})$, $\bar{c}(\mathbf{k})$. Тогда в этом представлении действие операторов поглощения сводится к составлению функциональной производной от вектора состояния Ω по этим вспомогательным величинам. Поэтому для получения уравнения движения для функционала Ω необходимо в выражении (2.44) сделать замену:

$$\left.\begin{aligned} &a^+(\mathbf{p}) \to \bar{a}(\mathbf{p}),\ b^+(\mathbf{q}) \to \bar{b}(\mathbf{q}),\ c^+(\mathbf{k}) \to \bar{c}(\mathbf{k}) \\ &a(\mathbf{p}) \to \delta/\delta\bar{a}(\mathbf{p}),\ b(\mathbf{q}) \to \delta/\delta\bar{b}(\mathbf{q}),\ c(\mathbf{k}) \to \delta/\delta\bar{c}(\mathbf{k}), \end{aligned}\right\} \tag{2.45}$$

после чего уравнение Шредингера может быть записано в виде

$$H(\bar{a},\ \bar{b},\ \bar{c},\ \delta/\delta\bar{a},\ \delta/\delta\bar{b},\ \delta/\delta c) = i\partial\Omega/\partial t. \tag{2.46}$$

Из функционального уравнения (2.46) можно получить уравнение для амплитуд вероятностей Ψ_{nml} (2.32).

В рассматриваемой задаче взаимодействия нейтрального псевдоскалярного мезонного поля с нуклонным полем оператор энергии H имеет в случае

псевдоскалярной связи следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} H &= H_1 + H_2 + H_{12}, \\ H_1 &= \tfrac{1}{2}\int d^3x\,(\pi^2 + (\nabla\varphi)^2 + \mu^2\varphi^2), \\ H_2 &= \int d^3x\,(\bar{\psi}(\gamma\nabla)\psi + m\bar{\psi}\psi), \\ H_{12} &= ig\int d^3x\bar{\psi}\gamma_5\psi\varphi. \end{aligned}\right\} \tag{2.47}$$

Используя Фурье-разложение операторов поля (1.16) — (1.18), получим с учетом (2.45) для H_1 и H_2 следующие выражения:

$$H_1 = \int d^3k k_0 \bar{c}(\mathbf{k})\,\delta/\delta\bar{c}(\mathbf{k}),$$

$$H_2 = \sum_{i=1}^{2}\int d^3pE(p)\,\{\bar{a}_i(\mathbf{p})\,\delta/\delta\bar{a}_i(\mathbf{p}) + \bar{b}_i(\mathbf{p})\,\delta/\delta\bar{b}_i(\mathbf{p})\},$$

$$k_0 = +\sqrt{\mu^2 + \mathbf{k}^2}, \quad p_0 = E(p) = \sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}.$$

Для H_{12} получается довольно громоздкое выражение, состоящее из восьми членов, соответствующих различным комбинациям операторов рождения и поглощения мезонного и нуклонного полей. Уравнения для амплитуд вероятностей (2.32) можно получить, если воспользоваться разложением (2.31) для функционала состояния Ω и приравнять в уравнении (2.46) члены, содержащие одинаковое число вспомогательных величин $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$. Поясним сказанное на более простом примере, когда оператор взаимодействия мезонного и нуклонного полей имеет вид:

$$H_{12} = ig\gamma_5\varphi(x).$$

В этом случае не учитываются замкнутые петли, соответствующие рождению виртуальных пар нуклон-антинуклон.

Уравнение для волнового функционала примет более простой вид:

$$(\gamma_\mu\partial/\partial x_\mu + m)\,\Omega(x) = -ig\gamma_5\varphi(x)\,\Omega(x), \tag{2.48}$$

причем, оператор $\varphi(x)$ можно записать в виде

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\frac{d^3k}{\sqrt{2k_0}}\left(e^{ik_\mu x_\mu}\delta/\delta\bar{c}(\mathbf{k}) + e^{-ik_\mu x_\mu}\bar{c}(\mathbf{k})\right). \tag{2.49}$$

Из (2.48) и (2.49) следует

$$(\gamma_\mu\partial/\partial x_\mu + m)\,\Omega = \int d^3k\,\{G^+(k)\,\delta\Omega/\delta\bar{c}(\mathbf{k}) - G(k)\,\bar{c}(k)\,\Omega\}, \tag{2.50}$$

где

$$G(k) = \frac{i}{(2\pi)^{3/2}}\,g\,\frac{e^{-ik_\mu x_\mu}}{\sqrt{2k_0}}\,\gamma_5. \tag{2.51}$$

В уравнении (2.50) коэффициенты $G(k)$ и $G^+(k)$ явно зависят от времени. Эта зависимость может быть исключена, если перейти к шредингеровскому представлению:

$$L_0 = \exp(-iH_1t)\,L\exp(iH_1t), \quad \Omega = \exp(+iH_1t)\,\Omega_0. \tag{2.52}$$

При этом операторы $\delta/\delta\bar{c}(\mathbf{k})$, $\bar{c}(\mathbf{k})$ преобразуются согласно:

$$\left.\begin{aligned}\exp(-iH_1t)\,\delta/\delta\bar{c}(k)\exp(iH_1t) &= \exp(ik_0t)\,\delta/\delta\bar{c}(k),\\ \exp(-iH_1t)\,\bar{c}(k)\exp(iH_1t) &= \exp(-ik_0t)\,\bar{c}(k).\end{aligned}\right\} \tag{2.53}$$

В результате для функционала Ω получается следующее уравнение*):

$$(\gamma_\mu\partial/\partial x_\mu + m + \gamma_4\int k_0\bar{c}(k)\,\delta/\delta\bar{c}(k))\,\Omega =$$
$$= \int d^3k\,\{G_0^+(k)\,\delta\Omega/\delta\bar{c}(\mathbf{k}) - G_0(k)\,\bar{c}(\mathbf{k})\,\Omega\}. \tag{2.54}$$

Из уравнения (2.54) на основании (2.13) и (2.14) получается следующее уравнение для амплитуды вероятности:

$$\left(\gamma_\mu\partial/\partial x_\mu + m + \gamma_4\sum_k N_k k_0\right)\psi_n(x,\ k_1\ldots\ k_n) =$$
$$= \sqrt{n+1}\int d^3k G_0^+(k)\,\psi_{n+1}(x,\ k,\ k_1\ldots\ k_n) -$$
$$- \frac{1}{\sqrt{n}}\,\{G_0(k)\,\psi_{n-1}(x,\ k_2\ldots\ k_n)\}_{\text{sym}}. \tag{2.55}$$

Уравнение (2.55) связывает амплитуду ψ_n с амплитудами ψ_{n+1} и ψ_{n-1}, для которых в свою очередь могут быть написаны аналогичные уравнения. В итоге получается бесконечная система «зацепляющихся» уравнений. В одномезонном приближении, например, получим:

$$\left.\begin{aligned}(\gamma_\mu\partial/\partial x_\mu + m)\,\psi_0(x) &= \int d^3k G_0^+(k)\,\psi_1(k,x),\\ (\gamma_\mu\partial/\partial x_\mu + m + \gamma_4 k_0)\,\psi_1 &= -G_0(k)\,\psi_0(x).\end{aligned}\right\} \tag{2.56}$$

Уравнения (2.55) могут быть также выведены и непосредственно из выражения (2.32) для амплитуд вероятностей, если воспользоваться соотношением**).

$$i\partial\psi_n/\partial t = (\Lambda_0,\ c^+(k_1)\ldots c^+(k_n)H_{int}\Omega). \tag{2.57}$$

Правая часть (2.57) может быть легко вычислена на основании (2.45) и (2.47). Аналогичным путем могут быть получены уравнения для амплитуд вероятностей, содержащих операторы Ферми-поля.

Система зацепляющихся уравнений (2.55) была получена В. А. Фоком в 1934 г.[2] Из этих уравнений в приближении (2.56) были получены формула Брейта, формула Мёллера и был рассмотрен вопрос об естественной ширине спектральных линий. В дальнейшем эти уравнения были применены А. А. Смирновым[5] и А. Г. Власовым[6] для исследования взаимодействия электрона с электромагнитным полем. Теория естественной ширины спектральных линий в двухфотонном приближении рассматривалась в работе[7]. Особенно большое практическое значение приобрел метод зацепляющихся уравнений в мезонной теории, поскольку в последней теория возмущений становится непригодной. В мезонной теории независимо от предшествующих работ в области квантовой электродинамики уравнения (2.55) были получены и применены для исследования проблемы ядерных сил И. Е. Таммом[14] и С. М. Данковым[15].

Система уравнений (2.55) может быть решена по методу теории возмущений и методом усеченных уравнений. Последний известен в литературе под названием метода Тамма — Данкова и заключается в следующем.

---

*) Функционал состояния по-прежнему обозначается буквой Ω вместо Ω_0.
**) Используется представление взаимодействия.

Предполагается, что при решении системы уравнений типа (2.55) можно пренебречь всеми амплитудами, которые описывают такие состояния поля, в которых имеется $N+1$, $N+2$ и т. д. мезонов. Иными словами, в разложении $\Omega=\sum_{n=0}^{\infty}\Omega_n$ удерживают в этом приближении $N+1$ подчлен, а остальные полагают равными нулю. В результате получается «усеченная» система уравнений, которая затем должна быть решена точно (например, численным интегрированием) с определенными граничными условиями. В одномезонном приближении (2.56) можно исключить амплитуду ψ_1 из второго уравнения и подставить в первое, в результате получается одно интегральное уравнение. В более высоких приближениях такая процедура может быть проведена лишь в предположении, что амплитуда вероятности, соответствующая минимально возможному числу частиц в данной задаче, является главной, а остальные играют роль поправки*). Тогда для главной амплитуды можно получить одно интегральное уравнение. Однако такой метод является переупрощением задачи, так как при этом ядро будет представлено в виде ряда по константе g^2, при этом отдельные члены ряда сравнимы по своей величине и поэтому такое разложение непригодно для исследования и в ассимптотическом смысле.

При решении системы уравнений (2.55) по методу теории возмущений[25] надо отметить, что каждое из этих уравнений является неоднородным уравнением Дирака типа

$$D(x)\psi=i(\gamma_\mu\partial/\partial x_\mu+m)\psi(x)=L(x). \tag{2.58}$$

Общее решение этого уравнения можно представить в виде

$$\left.\begin{aligned}\psi(x)=\varphi(x)+\int K(x,x')\,L(x')\,d^4x',\\ D(x)\varphi(x)=0\,.\end{aligned}\right\} \tag{2.59}$$

Функция Грина $K(x,x')$ должна быть выбрана в соответствии с теорией позитрона. Взаимодействие, описываемое членом $L(x)$, должно адиабатически вводиться при $t=-\infty$ и выводиться при $t=+\infty$, достигая полной величины во все конечные времена. Последовательным исключением амплитуд можно придти к одному интегральному уравнению, которое соответствует интегральному уравнению в теории Фейнмана. Перенормировка при таком способе решения производится так же, так и в теории возмущений.

Наряду с амплитудами вероятности, которые определены в пространстве импульсов, можно также рассмотреть амплитуды вероятностей в координатном пространстве[13, 20, 24]. Последние могут быть использованы для выяснения возможности перенормировки в рамках метода усеченных уравнений[4, 16] и для сравнения амплитуд вероятности с релятивистскими волновыми функциями, которые будут рассмотрены в § 4. Для введения амплитуд вероятностей в координатном пространстве представим операторы невзаимодействующих полей $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ в виде суммы членов, содержащих только положительные и только отрицательные частоты:

$$\varphi(x)=\varphi^{(+)}(x)+\varphi^{(-)}(x),\quad \psi(x)=\psi^{(+)}(x)+\psi^{(-)}(x), \tag{2.60}$$

где

$$\varphi^{(\pm)}(x)=\int d\sigma_\mu(x')\left\{\Delta^{(\pm)}(x-x')\overleftrightarrow{\partial/\partial x^1_\mu}\varphi(x')\right\}, \tag{2.61a}$$

$$\psi^{(\pm)}(x)=\int d\sigma_\mu(x')\,S^{(\pm)}(x-x')\,\gamma_\mu\psi(x'). \tag{2.61b}$$

---

*) Метод Леви — Клейна[17, 18], см. также[7].

Операторы $\varphi^{(\pm)}(x)$, $\psi^{(\pm)}(x)$ удовлетворяют следующим перестановочным соотношениям:

$$[\varphi^{(+)}(x), \varphi^{(-)}(x')] = i\,\Delta^{+}(x-x') = -i\Delta^{(-)}(x-x'), \tag{2.62}$$

$$\left\{\psi_{\lambda}^{(+)}(x), \overline{\psi_{\mu}^{(+)}}(x')\right\} = -iS_{\lambda\mu}^{(+)}(x-x'), \tag{2.63}$$

$$\Delta^{\pm}(x) = \mp i/(2\pi)^3 \int \frac{d^3k}{2k_0} \exp(\pm i x_\mu x_\mu), \tag{2.64}$$

$$S^{(\pm)}(x) = (\gamma_\mu \partial/\partial x_\mu - m)\Delta^{(\pm)}(x). \tag{2.65}$$

Операторы поглощения $a(\mathbf{p})$, $b(\mathbf{q})$ и $c(\mathbf{k})$ выражаются через операторы поля $\psi(x)$, $\overline{\psi}(x)$, $\varphi(x)$ согласно формулам (1.12) и (1.15). В этих выражениях только положительно-частотные части операторов дают вклад в соответствующие интегралы, поэтому необходимые нам операторы рождения $a^{+}(\mathbf{p})$, $b^{+}(\mathbf{q})$, $c^{+}(\mathbf{k})$ могут быть представлены следующими формулами *):

$$\left.\begin{aligned} a^{+}(\mathbf{p}) &= \int d\sigma_\mu\, \overline{\psi}^{(-)}(x)\gamma_\mu u^{(p)}(x), \\ b^{+}(\mathbf{q}) &= \int d\sigma_\mu\, \overline{v}^{(q)}(x)\gamma_\mu \psi^{(-)}(x), \end{aligned}\right\} \tag{2.66}$$

$$c^{+}(\mathbf{k}) = -i\int d\sigma_\mu\, \varphi^{(-)}(x)\overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial x_\mu}} f^{(k)}(x). \tag{2.67}$$

Преобразуем теперь с помощью (2.67) выражение (2.31) для функционала Ω к координатному пространству. Для краткости письма проделаем это преобразование лишь для амплитуд нейтрального Бозе-поля **). Функционал $\Omega_1 = \int d^3k\, \psi(k)\, c^{+}(k)\, \Lambda_0$ с помощью (2.67) преобразуется к следующему виду:

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= -i\iint d^3k\, d\sigma_\mu\, \Psi_1(k)\, \varphi^{(-)}(x)\overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial x_\mu}} f^{(k)}(x) = \\ &= -i\int d\sigma_\mu\, (\varphi)^{-}(x)\overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial x_\mu}} \Psi_1(x)\, \Lambda_0, \end{aligned} \tag{2.68}$$

где $\psi_1(x) = \int \psi_1(k)\, f^{(k)}(x)\, d^3k$.

Аналогично

$$\left.\begin{aligned} \Omega_n &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n!}} \int d\sigma_{\mu_1}(x_1) \ldots d\sigma_{\mu_n}(x_n) \prod_j \varphi^{(-)}(x_j) \overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial x_{\mu_j}}} \times \\ &\qquad \times \psi_n(x_1 \ldots x_n, \sigma)\, \Lambda_0, \\ \psi_n(x_1 \ldots x_n, \sigma) &= \int \psi(k_1 \ldots k_n) f^{(k_1)}(x_1) \ldots f^{(k_n)}(x_n)\, d^3x_1 \ldots d^3x_n. \end{aligned}\right\} \tag{2.69}$$

Амплитуда $\psi_n(x_1 \ldots x_n)$ симметрична относительно своих аргументов и удовлетворяет следующему соотношению:

$$\psi_n(x_1 \ldots x_n \sigma) = \int d\sigma_\mu(x_j')\left(\Delta^{(+)}(x_j - x_j')\overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial x_j'}}\right) \times$$
$$\times \psi_n(x_1 \ldots x_j' \ldots x_n, \sigma), \tag{2.70}$$

справедливость которого следует из независимости выражения (2.70) от

*) См. формулы (1.16)—(1.18).

**) Аналогичные преобразования для заряженного Бозе-поля и для Ферми-полей можно найти в работе [24]

выбора поверхности $\sigma(x)$ и из того обстоятельства, что функция $\Delta^{(+)}(x-x')$ является положительно-частотным решением уравнения Клейна—Фока.

Операторы $\varphi^{(+)}(x)$ и $\varphi^{(-)}(x)$ имеют следующее представление. Если мы обозначим, так же как и в § 2, $\Omega'' = \varphi^{(+)}(x)\Omega$, то функции

$$\psi''_n(x_1 \ldots x_n, \sigma) \text{ и } \psi_n(x, x_1 \ldots x_n, \sigma)$$

будут связаны следующим образом:

$$\psi''_n(x_1 \ldots x_n, \sigma) = (n+1)^{1/2} \int d\sigma_\mu(x') \Delta^{(+)}(x-x') \frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial x'_\mu} \Psi_n \times$$

$$\times (x', x_1 \ldots x_n, \sigma) = (n+1)^{1/2} \psi_{n+1}(x, x_1 \ldots x_n, \sigma). \quad (2.71)$$

Аналогично, исходя из соотношения $\varphi^{(-)}(x)\Omega = \Omega'$, получаем:

$$\Psi'_n(x_1 \ldots x_n) = \frac{i}{\sqrt{n!}} \left\{ \Delta^{(+)}(x-x_1) \psi_{n-1}(x_2 \ldots x_n) \right\}_{\text{sym}}. \quad (2.72)$$

В координатном пространстве базисными векторами будут следующие выражения:

$$\Lambda_n = \frac{1}{\sqrt{n!}} \varphi^{(-)}(x_1) \ldots \varphi^{(-)}(x_n) \Lambda_0. \quad (2.73)$$

Оператор же числа частиц может быть записан в виде:

$$N = i^{-1} \int d\sigma_\mu \left(\varphi^{(-)}(x) \frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial x_\mu} \varphi^{(+)}(x) \right). \quad (2.74)$$

Легко видеть, что $N\Lambda_n = n\Lambda_n$. Таким образом разложение функционала Ω по функционалам Ω_n и есть разложение по собственным функционалам оператора числа частиц. «Коэффициенты» этого разложения являются амплитудами вероятности для обнаружения n частиц в координатном пространстве. Функционалы Ω_n и $\Omega_{n'}$ с различными значками взаимно ортогональны, причем, как это нетрудно убедиться, справедливо следующее соотношение:

$$(\Omega, \Omega) = (\Lambda_0, \Lambda_0) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \int d\sigma_{\mu_1}(x_1) \ldots d\sigma_{\mu_n}(x_n) \times$$

$$\times \psi^*_n(x_1 \ldots x_n, \sigma) \prod_j \frac{\overleftrightarrow{\partial}}{(\partial x_j)_{\mu_j}} \psi_n(x_1 \ldots x_n, \sigma). \quad (2.75)$$

С помощью формул (2.71) и (2.72) можно показать, что

$$(\Omega_n, \varphi^{(+)}(x)\Omega_{n+1}) = (\varphi^{(-)}(x)\Omega_n, \Omega_{n+1}),$$

т. е. что $\varphi^{(+)}(x)$ и $\varphi^{(-)}(x)$ эрмитово сопряжены.

Из выражения (2.72) следует

$$\psi_n(x_1 \ldots x_n) = \frac{1}{\sqrt{n!}} (\Lambda_0, \varphi^{(+)}(x_1) \ldots \varphi^{(+)}(x_n) \Omega\{\sigma\}). \quad (2.76)$$

В общем случае выражение для амплитуды вероятности в координатном пространстве, описывающей систему из l нуклонов, m антинуклонов и n мезонов, может быть записано (опуская численный коэффициент) в виде

$$\psi_{lmn} = (x_1 \ldots x_l \mid y_1 \ldots y_m \mid z_1 \ldots z_n) =$$

$$= (\Lambda_0, \bar{\psi}^{(+)}(x_1) \ldots \bar{\psi}^{(+)}(x_l); \psi^{(+)}(y_1) \ldots \psi^{(+)}(y_m); \varphi^{(+)}(z_1) \ldots \varphi^{(+)}(z_n) \Omega\{\sigma\}). \quad (2.77)$$

В дальнейшем будем считать, что в выражении (2.77) вектор состояния Ω взят в представлении взаимодействия:

$$\frac{i\delta\Omega\{\sigma\}}{\delta\sigma(x)} = H_{int}(x)\,\Omega\{\sigma\}. \tag{2.78}$$

Тогда уравнение для амплитуд в координатном представлении можно получить тем же самым путем, что и уравнение для амплитуды (2.32):

$$\frac{i\delta}{\delta\sigma(x)}\psi(x_1\ldots x_l\,|\,y_1\ldots y_m\,|\,z_1\ldots z_n) = \\ = (\Lambda_0,\ \overline{\psi}^{(+)}(x_1)\ \ldots\ \psi^{(+)}(y_1)\ \ldots\ \varphi^{(+)}(z_1)\ \ldots\ H_{int}\Omega). \tag{2.79}$$

При этом правая часть уравнения должна быть представлена с помощью соотношений (2.63) в виде N произведений, тем самым рассматриваемая амплитуда ψ_{lmn} будет связана с другими амплитудами, для которых можно написать аналогичные уравнения. Например, для одномезонной амплитуды получим с учетом $H_{int} = ig\gamma_5\varphi$:

$$\frac{i\delta}{\delta\sigma(x)}(\Lambda_0,\ \varphi^{(+)}(x_1)\,\Omega) = -\,g\,(\gamma_5)_{\alpha\beta}\,\{\Delta^+(x_1 - x)\times \\ \times(\Lambda_0,\ \overline{\psi}_\alpha^{(+)}\psi_\beta^{(+)}(x)\,\Omega) - i\,(\Lambda_0,\ \overline{\psi}_\alpha^{(+)}(x)\,\psi_\beta^{(+)}(x)\,\varphi^{(+)}(x_1)\,\varphi^{(+)}(x)\,\Omega). \tag{2.80}$$

Для однонуклонной амплитуды

$$\frac{i\delta}{\delta\sigma(x)}(\Lambda_0,\ \psi_\lambda^{(+)}(x_1)\,\Omega) = g\,(\gamma_5)_{\alpha\beta}\,\{S_{\lambda\alpha}^{(+)}(x_1 - x)\times \\ \times(\Lambda_0,\ \psi_\beta^{(+)}(x)\,\varphi^{(+)}(x)\,\Omega) - i\,(\Lambda_0,\ \overline{\psi}_\alpha^{(+)}(x)\,\psi_\lambda^{(+)}(x_1)\,\psi_\beta^{(+)}(x)\,\varphi^{(+)}(x)\,\Omega). \tag{2.81}$$

Амплитуды (2.77) были рассмотрены Чини[16] для исследования возможности перенормировки в методе усеченных уравнений. Критику метода Чини и подробное исследование уравнений (2.55) можно найти в работе[4].

Перейдем к вопросу о производящем функционале для амплитуд

$$\tilde{\psi}_{lmn} = \sqrt{l!m!n!}\,\psi_{lmn}.$$

Последний может быть записан в виде (см. также (2.41))

$$F = (\Lambda_0,\ \exp\left\{\int d^3x\,\left(\eta(x)\,\psi^{(+)}(x) + \psi^{(-)}(x)\,\eta^*(x) + c(x)\,\varphi^{(+)}(x)\right\}\Omega) = \\ = \sum_{l,\,m,\,n}\frac{1}{m!n!l!}\,F_{mnl}\,\Lambda_0 \equiv (\Lambda_0,\ M\Omega), \tag{2.82}$$

где

$$F_{lmn}\{\eta,\ \eta^*,\ c\,|\,\} = \int\psi(x_1\ldots x_l\,|\,y_1\ldots y_m\,|\,z_1\ \ldots\ z_n)\times \\ \times\eta^*(x_1)\ldots\eta(y)\ldots c(z)\ldots d^3x\ldots d^3y\ldots d^3z\ldots \tag{2.83}$$

F_{lmn} является функционалом по отношению к функциям $\overline{c}(z)$ и величинам $\eta^*(x)$ и $\eta(y)$, которые антикоммутируют между собой. Уравнение движения для производящего функционала можно записать в виде

$$\frac{i\delta F}{\delta\sigma(x)} = (\Lambda_0,\ MH_{int}\,\Omega\{\sigma\}). \tag{2.84}$$

Рассматриваемый метод усеченных уравнений трехмерной формулировке обладает рядом преимуществ по сравнению с более последовательным четырехмерным формализмом, который будет рассмотрен в § 3, 4, 5. Так, например, граничные условия имеют простой физический смысл, расчеты менее сложны, в некоторых задачах можно произвести отделение угловых переменных.

Однако наряду с упомянутыми выше преимуществами имеется ряд серьезных трудностей, связанных с неперенормируемостью членов типа собственная энергия мезона, нуклона вследствие нековариантности этих выражений. Кроме того, в методе Тамма—Данкова возникают трудности при рассмотрении членов, описывающих поляризацию вакуума. Последние возникают в связи с тем, что оператор энергии взаимодействия (2.47) содержит произведения трех операторов поля, поэтому возможны процессы, при которых происходит одновременное рождение или уничтожение трех частиц. При практическом вычислении сечения рассеяния π мезонов собственно энергетические члены вообще опускались[21, 4], так как методы последовательного учета этих выражений неизвестны. Хотя полученные при этом значения фазовых сдвигов для состояний с изотопическим спином $T = {}^3/_2$ находятся в хорошем согласии с экспериментом, тем не менее такое простое вычеркивание ряда членов является необоснованным с теоретической точки зрения. Надо также отметить, что если бы даже и удалось перенормировать ядро интегрального уравнения для рассеяния, то все равно трудности, связанные с собственной энергией нуклона, возникли бы, если учесть, что испущенный «конечный» мезон в действительности может быть снова поглощен нуклоном, если рассматривать состояния с $T = {}^1/_2$, $j = {}^1/_2$, и при решении интегрального уравнения необходимо будет проинтегрировать по импульсу этого мезона.

В методе усеченных уравнений, кроме того, возникают дополнительные расходимости при переходе к импульсному представлению[19], причем получающиеся бесконечные выражения не могут быть устранены перенормировкой. Возникновение этих бесконечностей связано с тем, что при переходе от дифференциальных уравнений (2.55) к интегральным один из пределов интегрирования остается конечным в отличие от матрицы рассеяния, в которой интегрирование производится в бесконечных пределах. Вообще вычисление математического ожидания операторов поля приводит к бесконечным значениям при попытке строго фиксировать временные границы. Для устранения этих новых бесконечностей Штюкельберг предложил вводить «диффузную» границу интегрирования при помощи замены разрывных функций на сглаженные. Однако этот прием не является логическим следствием теории.

Метод усеченных уравнений был в значительной степени в дальнейшем усовершенствован Дайсоном. Этот метод, к рассмотрению которого мы сейчас переходим, носит название нового метода Тамма—Данкова.

§ 3. Производящий функционал для амплитуд нового метода Тамма—Данкова

Как мы видели в § 1, последовательность амплитуд вероятности (2.32) дает полное описание квантовых свойств поля. Эти амплитуды определяются через операторы невзаимодействующих полей, с одной стороны, и вакуум невзаимодействующих полей*) — с другой. Понятие математического вакуума как состояния без частиц не соответствует реально существующему вакууму, так как в последнем вследствие взаимодействия

*) Математический вакуум.

полей между собой происходит непрерывное рождение и поглощение виртуальных квантов, которые находятся в «динамическом равновесии» с фоном. Дайсоном была предложена такая модификация теории, в которой состояние системы определяется по отношению к реальному физическому вакууму, а не по отношению к математическому [22]. Операторы же рождения и поглощения по-прежнему связаны с невзаимодействующими полями. Таким образом, вакуумное состояние является физическим, в то время как операторы продолжают оставаться «математическими».

Последовательное обобщение теории состояло бы в введении операторов поля, подчиненных неоднородным уравнениям движения, но при этом уже невозможно ковариантным образом ввести операторы рождения и поглощения, через которые должна определяться амплитуда вероятности.

Поскольку применение оператора поглощения к состоянию физического вакуума дает отличный от нуля результат, в теории неизбежно появляются амплитуды, содержащие наряду с операторами поглощения операторы рождения. Эти амплитуды называются «амплитудами» нового метода Тамма—Данкова и вводятся следующим образом:

$$a(N,\ N') = \frac{1}{\sqrt{\Pi(N)\,\Pi(N')}}\left(\Omega_0^{\text{ф}},\ C(N)\,A(N')\,\Omega\right). \tag{3.1}$$

В выражении (3.1) введены, следуя Дайсону [22], следующие обозначения: произведение всех операторов поглощения обозначены одной буквой $A(N')$, произведение всех операторов рождения — $C(N)$, причем N и N' заменяют тройку числами m, n, l и m', n', l'. $\Omega_0^{\text{ф}}$ — состояние физического вакуума; Ω — вектор данного состояния; $\Pi(N) = N!$ В этих обозначениях формулы (2.30) и (2.32) символически запишутся следующим образом:

$$\psi(N) = \frac{1}{\sqrt{\Pi(N)}}\left(\Lambda_0,\ A(N)\,\Omega\right),\quad \Lambda(N) = \frac{1}{\sqrt{\Pi(N)}}\,A(N)\,\Lambda_0. \tag{3.2}$$

Рассмотрим систему, состоящую из одной частицы и физического вакуума. Как упоминалось выше, эта система имеет неопределенное число частиц (неопределенное число виртуальных квантов) и поэтому не может быть описана одной какой-либо амплитудой вероятности; она должна описываться совокупностью различных амплитуд. Это обстоятельство отражено в том, что амплитуды нового метода могут быть представлены в виде линейной комбинации амплитуд старого метода.

Рассмотрим конкретный вид отдельных амплитуд Дайсона (3.1). С этой целью перепишем Фурье-разложение операторов поля (1.17) и (1.18) в несколько иной форме:

$$\left.\begin{aligned} \psi_\alpha(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sum_u \int d^3k\, u_\alpha\, b_{ku} \exp(ik_\mu x_\mu), \\ \bar{\psi}_\alpha(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sum_u \int d^3k\, \bar{u}_\alpha\, \bar{b}_{ku} \exp(-ik_\mu x_\mu). \end{aligned}\right\} \tag{3.3}$$

В новом методе Тамма—Данкова однонуклонная амплитуда определяется согласно

$$\left(\Omega_0^{\text{ф}},\ b_{ku}\,\Omega\right) = a_1(ku). \tag{3.4}$$

В зависимости от того, какому знаку энергии соответствует спинорный значок u, положительному или отрицательному, величина b_{ku} будет либо оператором поглощения, либо оператором рождения; тем самым выражение (3.4) для $a_1(ku)$ будет соответствовать либо однопротонной амплитуде, либо так

называемой «минус одной антипротонной амплитуде». Под «минус частицей» понимают частицу, которая отсутствует в рассматриваемом состоянии, но присутствует в состоянии физического вакуума. Минус частица является своего рода «дыркой» в вакууме взаимодействующих полей. Двухнуклонная амплитуда в новом методе будет иметь вид

$$\left(\Omega_0^{\text{ф}},\ Nb_{pu}\,d_{qv}\,\Omega\right), \tag{3.5}$$

где знак N означает нормальное произведение операторов. Аналогичным образом составляются и другие амплитуды.

Уравнение для амплитуд (3.1) можно получить следующим путем. Обозначим через E и E_0 энергию данного состояния и физического вакуума:

$$(H_0+H_1)\,\Omega = E\Omega;\quad (H_0+H_1)\,\Omega_0^{\text{ф}} = E_0\,\Omega_0^{\text{ф}}, \tag{3.6}$$

где H_1 — оператор взаимодействия. Имеем:

$$(\Omega_0^{\text{ф}}, C(N)\,A(N')\,(H_0+H_1)\,\Omega) = E\,(\Omega_0^{\text{ф}}, C(N)\,A(N')\,\Omega) =$$
$$= (\Omega_0^{\text{ф}}, (H_0+H_1)\,C(N)\,A(N')\,\Omega) + (\Omega_0^{\text{ф}}, [C(N)\,A(N'), H_0+H_1]\,\Omega).$$

Коммутатор $[C(N)\,A(N')\,H_0]$ может быть легко вычислен, если воспользоваться соотношением

$$[c(\mathbf{k}), H_0] = E(k)\,c(\mathbf{k}),$$
$$[c^+(\mathbf{k}), H_0] = -E(k)\,c^+(\mathbf{k}).$$

Обозначая $\sum^{N} E(k) = E_N$, $\sum^{N'} E(k) = E_{N'}$, имеем:

$$(\varepsilon + E_N - E_{N'})\,a(N, N') = \frac{1}{\sqrt{\Pi(N)\,\Pi(N')}}\,(\Omega_0^{\text{ф}}, [C(N)\,A(N'), H_1]\,\Omega). \tag{3.7}$$

Величина ε, равная $\varepsilon \equiv E - E_0$, является уже конечной величиной, хотя E и E_0 сами по себе бесконечны. Это обстоятельство является положительной стороной теории. Благодаря тому, что в правой части уравнения (3.7) имеется коммутатор, число операторов справа отличается от числа операторов слева на единицу. Тем самым амплитуда $a(N, N')$ «зацепляется» с амплитудами, в которых число частиц больше или меньше на единицу. Для этих амплитуд могут быть написаны подобные же уравнения, в результате чего возникает бесконечная система «зацепляющихся уравнений».

Вакуумные петли в новом методе отсутствуют, так как одновременное рождение или уничтожение трех частиц в этом методе невозможно[4,23]. В координатном пространстве амплитуды нового метода могут быть записаны в виде

$$\left(\Omega_0^{\text{ф}},\ N\psi(x_1)\ \ldots\ \psi(x_l), \bar{\psi}(y_1)\ \ldots\ \bar{\psi}(y_m)\,\varphi(x_1)\ \ldots\ \varphi(x_n)\,\Omega\,\{\sigma\}\right). \tag{3.8}$$

Состояние системы в (3.8) можно задать на гиперповерхности $\sigma(x)$. Уравнения для амплитуд (3.8) можно легко получить, если воспользоваться уравнением Томонага—Швингера для вектора состояния Ω.

В новом методе Тамма—Данкова переномировка в задаче о взаимодействии двух нуклонов в низшем приближении может быть произведена вполне последовательно, в задаче же о рассеянии имеются затруднения, хотя выражение для собственной энергии нуклона имеет ковариантный вид в отличие от старого метода. Надо также отметить, что в теории возникают трудности, связанные с появлением «ложных полюсов» в функции Грина, что, по-видимому, является общим недостатком квантовой теории поля.

Описание квантовых свойств поля в новом методе Тамма—Данкова можно получить, так же как и в старом, введением производящего функционала для амплитуд (3.1). Последний можно записать в виде

$$F\{\bar{c}^*c\} = \left(\Omega_0^{\Phi},\ R^+ \exp\left(\int c^*(\mathbf{k})\, c^+(\mathbf{k})\, d^3k\right) R \exp\left(\int \bar{c}(\mathbf{k})\, c(\mathbf{k})\, d^3k\right)\Omega\right), \qquad (3.9)$$

где R определено согласно (2.40).

Установим связь между производящими функционалами нового (3.9) и старого (2.41) методов. Для краткости письма рассмотрим лишь Бозе поле. Выражение (3.9) можно представить в виде

$$F\{\bar{c}^*\bar{c}\} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\Omega_0^{\Phi},\ \exp\left(\int c^*(\mathbf{k})\, c^+(\mathbf{k})\, d^3k\right)\Lambda_n\right)\times$$
$$\times\left(\Lambda_n,\ \exp\left(\int \bar{c}(\mathbf{k})\, c(\mathbf{k})\, d^3k\right)\Omega\right), \qquad (3.10)$$

где Λ_n — величины, определенные согласно (2.20), представляют полную ортонормированную систему функций. Второй сомножитель в (3.10) можно записать следующим образом:

$$\left(\Lambda_n,\ \exp\left(\int c(\mathbf{k})\, c(\mathbf{k})\, d^3k\right)\Omega\right) = \frac{\delta^n}{\delta \bar{c}^n(\mathbf{k})}\,\frac{1}{\sqrt{n!}}\times$$
$$\times\left(\Lambda_0,\ \exp\left(\int \bar{c}(\mathbf{k})\, c(\mathbf{k})\, d^3k\right)\Omega\right). \qquad (3.11)$$

Из (3.11) следует

$$F = \left(\Omega_0^{\Phi},\ \exp\left(\int\left(\bar{c}^*(\mathbf{k}) + \delta/\delta\bar{c}(\mathbf{k})\right) c^+(\mathbf{k})\, d^3k\right)\Lambda_0\right)\times$$
$$\times\left(\Lambda_0,\ \exp\left(\int c(\mathbf{k})\, c(k)\, d^3k\right)\Omega\right) =$$
$$= \left(\Omega_0^{\Phi},\ \exp\left(\int\left(\bar{c}^*(\mathbf{k}) + \delta/\delta\bar{c}(\mathbf{k})\right) c^+(\mathbf{k})\, d^3k\right)\Lambda_0\right)\tilde{\Omega}(\bar{c}). \qquad (3.12)$$

Выражение (3.12) и устанавливает связь между упомянутыми функционалами[12]. Здесь $\tilde{\Omega}(\bar{c})$ дается формулой (2.41).

II. ПРОИЗВОДЯЩИЕ ФУНКЦИОНАЛЫ ДЛЯ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ФУНКЦИЙ И ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Метод функционалов Фока представляет собой одну из возможных строгих функциональных формулировок квантовой теории поля.

В своем методе Фок развил основную идею о производящем функционале, выбрав в качестве основных функций, описывающих поле, бесконечную последовательность амплитуд вероятности в конфигурационном пространстве. Ясно, что другую строгую функциональную формулировку квантовой теории поля мы получим, если ту же самую идею о производящем функционале разовьем на основе полной последовательности каких-то других функций,

зависящих от переменных определенного числа частиц. В этом мы могли уже убедиться, рассмотрев в § 3 производящий функционал для дайсоновских амплитуд (амплитуд нового метода Тамма—Данкова). Как для функционала Фока, так и для функционала в новом методе Тамма—Данкова характерно то, что они зависят от функций векторного аргумента или в общем случае от функций пространственно-временной точки, лежащей на пространственноподобной поверхности.

В § 4 мы рассмотрим развитие идеи о производящем функционале в случае, когда поле описывается набором релятивистских функций: либо T-функциями, либо фейнмановскими амплитудами, либо функциями ρ.

В релятивистских функциях пространственно-временные переменные частиц могут быть произвольными, и потому производящие функционалы в этом случае будут функционалами от функций пространственно-временной точки, которые имеют смысл внешних источников полей. Функционалы внешних источников были введены Швингером[27]. Уравнения для швингеровского производящего функционала и перечисленных выше функций выводятся просто из уравнений для операторов поля в гейзенберговском представлении. Уравнения для фейнмановских амплитуд можно рассматривать[28] как четырехмерное обобщение уравнений Фока для амплитуд вероятности.

Фейнмановские амплитуды и T-функции связаны непосредственным образом с амплитудой перехода между состояниями при $t = \pm\infty$. Описание поля с помощью этих функций означает пространственно-временный подход к теории поля. Пространственно-временная трактовка теории поля (выдвинутая впервые Фейнманом[29]), по-видимому, сохранится и в будущей теории, свободной от противоречий[30] современной теории. Действительно, поскольку в будущей теории будет сохранен корпускулярный аспект, то основными величинами, характеризующими состояние поля, явятся по-прежнему релятивистские функции типа фейнмановских амплитуд[31] или производящий функционал для них. Кроме того, ряд соображений[32, 33] говорит в пользу того, что в пространственно-временной трактовке, где не рассматривается развитие во времени и отсутствует канонический формализм, будет легче сформулировать теорию, не использующую понятия о «голых» частицах. По этим причинам в некоторых работах[34, 35] было предпринято последовательное построение «четырехмерного» формализма с самого начала, минуя «трехмерную» трактовку. Пространственно-временной трактовке посвящен § 5 настоящего обзора. В этом же параграфе рассматривается функциональное преобразование Фурье и с его помощью находится общее решение задачи о взаимодействующих полях в виде континуального интеграла по полям Бозе и Ферми.

Интегрирование по полю Ферми, т. е. по антикоммутирующим функциям, требует большой осторожности. Способ интегрирования по полю Ферми был указан Мэтьюсом и Саламом[36]. В § 6 обзора, следуя идее этих авторов, мы выражаем вариацию оператора поля Ферми через вариации обычных чисел. Благодаря этому уравнения для четырехмерного вектора состояния можно представить в виде, где нет антикоммутирующих функциональных производных.

Приближенные методы функционального интегрирования и проблемы перенормировки не обсуждаются.

§ 4. Производящие функционалы для релятивистских функций

1. Т-функция и производящий функционал. Амплитуды вероятности Ψ_{nml} в координатном пространстве

$$\Psi_{nml}(x\ldots|y\ldots|z\ldots) = \left(\Lambda_0, \psi_0^{(+)} x \ldots \bar{\psi}_0^{(+)}(y)\ldots\varphi_0^{(+)}(z)\ldots\Omega(\sigma)\right) \quad (4.1)$$

не являются «четырехмерными» функциями, так как координаты $x \ldots y \ldots z \ldots$ в (4.1) должны лежать на некоторой пространственно-подобной поверхности σ. Кроме того, как было выяснено в § 2,4, вычисления с амплитудами вероятности Ψ_{nml} встречаются с рядом трудностей, связанных в конце концов с тем, что амплитуды Ψ_{nml} представляют собой коэффициенты разложения вектора состояния $\Omega(\sigma)$ по собственным функционалам операторов числа частиц для невзаимодействующих полей. Вычисления с амплитудами дайсоновского типа (§ 3) имеет также свои особые трудности, вытекающие из их определения, являющегося непоследовательным, поскольку в нем операторы невзаимодействующих полей действуют на вакуум взаимодействующих полей.

Для определения релятивистских волновых функций удобно воспользоваться гейзенберговским представлением. В гейзенберговском представлении операторы поля $\psi(x)$, $\bar{\psi}(x)$ и $\varphi(x)$ удовлетворяют уравнениям:

$$D(x)\psi(x) - g\gamma_5\varphi(x)\psi(x) = 0, \tag{4.2}$$

$$D(-\bar{x})\psi(x) - g\gamma_5(x)\varphi(\bar{x})\psi(x) = 0, \tag{4.3}$$

$$K(x)\varphi(x) - g\frac{1}{2}[\bar{\psi}(x), \gamma_5\psi(x)] = 0, \tag{4.4}$$

где $D(x) = i\left(\gamma_\lambda(x)\frac{\partial}{\partial x_\lambda} + m\right)$, $K(x) = i(\Box_x - \mu^2)$, причем $\gamma_\lambda(x)$ означает, что матрица γ_λ умножается на спинор, зависящий от x: $\gamma_\lambda(x)\bar{\psi}(x) = \bar{\psi}(x)\gamma_5$, $\gamma_\lambda(x)\bar{\psi}(y)\ldots\psi(x) = \psi(y)\ldots\gamma_\lambda\bar{\psi}(x)$.

В гейзенберговском представлении нельзя ввести амплитуды по формуле типа (4.1), но с гейзенберговскими операторами и векторами состояния, поскольку гейзенберговские операторы ψ, $\bar{\psi}$ и φ нельзя релятивистски инвариантным образом подразделить на положительно- и отрицательно-частотные части. Релятивистскими функциями, построение которых наиболее просто, являются матричные элементы от хронологических T-произведений самих операторов поля*):

$$T_{nml}(x_1\ldots x_n \mid y_1\ldots y_m \mid z_1\ldots z_l) = \\ = (\Psi_0, T[\psi(x_1)\ldots\psi(x_n)\bar{\psi}(y_1)\ \ldots\ \bar{\psi}(y_m)\varphi(z_1)\ldots\varphi(z_l)]\Psi), \tag{4.5}$$

где Ψ — вектор состояния в гейзенберговском представлении, Ψ_0 относится к физическому вакууму; функции $T_{nml}(x\ldots|y\ldots|z\ldots)$ симметричны относительно переменных z и антисимметричны относительно переменных $x\ldots y\ldots$

В функциях $T_{nml}(x\ldots|y\ldots|z\ldots)$ координаты и времена точек $x\ldots y\ldots z\ldots$ не ограничены требованием, чтобы они находились на некоторой пространственноподобной поверхности.

С помощью функций T_{nml} можно найти энергию стационарных состояний и матричные элементы переходов. Пусть Ψ_a описывает состояние, принадлежащее собственному значению $p_\mu^{(a)}$ оператора энергии-импульса P_μ взаимодействующих полей:

$$P_\mu\Psi_a = p_\mu^{(a)}\Psi_a. \tag{4.6}$$

---

* В хронологическом произведении порядок операторов таков, что времена операторов возрастают справа налево. T-произведение отличается от хронологического множителем $(-1)^n$, где n — число перестановок операторов поля Ферми, необходимое для хронологизации произведения[41].

Тогда собственные значения $p_\mu^{(a)}$ можно определить из уравнения

$$p_\mu^{(a)} T_{nml}(x\ldots|y\ldots|z\ldots) = (\Psi_0, T[\psi(x)\ldots\bar{\psi}(y)\ldots\varphi(z)\ldots]P_\mu\Psi_a) =$$

$$= \left(\Psi_0, T\left[-i\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_\mu}\ldots\bar{\psi}(y)\ldots\varphi(z)\right]\Psi_a\right) + \ldots$$

$$\ldots + \left(\Psi_0, T\left[\psi(x)\ldots - i\frac{\partial\bar{\psi}(y)}{\partial y_\mu}\ldots\varphi(z)\right]\Psi_a\right) + \ldots$$

$$\ldots + \left(\Psi_0, T\left[\psi(x)\ldots\bar{\psi}(y)\ldots - i\frac{\partial\varphi(z)}{\partial z_\mu}\right]\Psi_a\right) =$$

$$= -i\sum_{nml}\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} + \ldots + \frac{\partial}{\partial y_\mu} + \ldots + \frac{\partial}{\partial z_\mu}\right) T_{nml}(x\ldots|y\ldots|z\ldots). \quad (4.7)$$

Рассмотрим связь функций $T_{nml}(x\ldots|y\ldots|z\ldots)$ с амплитудами перехода в случае, когда нет связанных состояний и при $t = \pm\infty$ имеются только свободные частицы. Тогда при $t \to -\infty$ операторы поля ψ, $\bar{\psi}$ асимптотически переходят в операторы ψ_{in}, $\bar{\psi}_{in}$, а при $t \to +\infty$ в операторы ψ_{out}, $\bar{\psi}_{out}$, описывающие свободные частицы. Если Ψ_α^{in} и $\Psi_{\alpha'}^{out}$ — векторы состояния в гейзенберговском представлении, определенные с помощью «*in*» и «*out*» операторов поля, то амплитуда перехода $U_{\alpha\alpha'}$ связана с матричным элементом S-матрицы соотношением

$$U_{\alpha\alpha'} = (\Psi_{\alpha'}^{out}, \Psi_\alpha^{in}) = (\Psi_{\alpha'}^{in}, S\Psi_\alpha^{in}). \quad (4.8)$$

Так как $\Psi_{\alpha'}^{out}$ и Ψ_α^{in} описывают состояние поля со свободными частицами, то для представления Ψ_α^{in} можно использовать формулу (2.30), написав ее в виде

$$\Psi_{nml}^{in} = (n!\,m!\,l!)^{-1/2} a_{in}^+(\mathbf{p}_1)\ldots a_{in}^+(\mathbf{p}_n)\, b_{in}^+(\mathbf{q}_1)\ldots b_{in}^+(\mathbf{q}_m)\, c_{in}^+(\mathbf{k}_1)\ldots c_{in}^+(\mathbf{k}_b)\,\Psi_0 \quad (4.9)$$

и аналогичным образом для Ψ_{nml}^{out}. Разберем для примера рассеяние мезона на нуклоне. Тогда

$$\Psi_\alpha^{in} = \Psi_{101}^{in} = a_{in}^+(\mathbf{p})\, c_{in}^+(\mathbf{k})\Psi_0,\quad \Psi_{\alpha'}^{out} = \Psi_{101}^{out} = a_{out}^+(\mathbf{p}')\, c_{out}^+(\mathbf{k}')\,\Psi_0.$$

Подставив в (4.8) те выражения для операторов рождения a^+ и c^+, которые получаются из (1.13). и (1.14), находим:

$$U(\mathbf{pk};\ \mathbf{p'k'}) =$$

$$= \int f_{p'k'}(xz')\, i\frac{\partial}{\partial z_0'}\, d^3z'\gamma_4(x)\, d^3x\,(\Psi_0, \varphi(z')\psi(x)\bar{\psi}(y)\varphi(z)\Psi_0)\times$$

$$\times i\frac{\partial}{\partial z_0}\, d^3z\gamma_4(y)\, f_{pk}(yz), \quad (4.10)$$

$$x_0, z_0' \to +\infty;\quad y_0, z_0 \to -\infty,$$

где $f_{pk}(yz)$ и $f_{p'k'}(xz')$ — волновые функции падающих и рассеянных частиц, которые мы будем предполагать ортогональными. Среднее вакуумное значение операторов поля в (4.10) можно выразить через вакуумную функцию $\overset{\circ}{T}_{112} \equiv \overset{\circ}{\tau}_{112}$:

$$(\Psi_0, \varphi(z')\psi(x)\bar{\psi}(y)\varphi(z)\Psi_0) = \overset{\circ}{T}_{112}(x\,|\,y\,|\,z'z) \equiv \overset{\circ}{\tau}_{112}(x\,|\,y\,|\,zz'), \quad (4.11)$$

так как в (4.10) $x_0, z_0' \to +\infty$; $y_0, z_0 \to -\infty$. Трехмерные интегралы в (4.10) можно преобразовать в четырехмерные, если в (4.10) ввести функцию $\overset{\circ}{\tau}_{112}$ из (4.11), поскольку тогда при $x_0, z_0' \to -\infty$ или $y_0, z_0 \to +\infty$ величина $U(\mathbf{pk};\ \mathbf{p'k'})$ исчезает в силу определения вакуума. После преобразования

выражение (4.10) равно

$$U(p,k;\,p'k') = \int \bar{f}_{p'k'}(xz')\,\{K(z')\,K(z)\,D(-y)\,D(x)\,\tau_{112}(x\,|\,y\,|\,zz')\}\times$$
$$\times f_{pk}(yz)\,d^4x d^4y d^4z d^4z'.$$

В общем случае мы получаем для различных состояний $\Psi^{out}_{\alpha'}$ и Ψ^{in}_{α}:

$$U_{\alpha\alpha'} = (-1)^{\alpha+\alpha'}\int \bar{f}_{\alpha'}(y'\ldots|\,x'\ldots|\,z'\ldots)\,\{D(-y')\ldots D(+x')\ldots K(z')\ldots$$
$$\ldots D(x)\ldots D(-y)\ldots K(z)\ldots\times\tau_{\alpha+\alpha'}(x'\ldots x\ldots|\,y'\ldots y\ldots|\,z'\ldots z\ldots)\}\times$$
$$\times f_{\alpha}(x\ldots|\,y\ldots|\,z\ldots)\,d^4x\ldots d^4x'\ldots d^4y\ldots d^4y'\ldots d^4z\ldots d^4z'\ldots, \qquad (4.12)$$

где f_α и $f_{\alpha'}$ — волновые функции падающих и рассеянных частиц. Таким образом, для вычисления амплитуд перехода достаточно знать только вакуумные функции $\tau(x\ldots|\,y\ldots|\,z\ldots)$ [32, 39, 40].

Чтобы описать поле, нужно в общем случае знать всю совокупность функций $T_{nml}(x\ldots|\,y\ldots|\,z\ldots)$; $n,\ m,\ l = 0,\ 1,\ 2,\ldots,\infty$. Подобно тому как вместо совокупности амплитуд вероятности $\Psi_{nml}(\mathbf{p}\ldots|\,\mathbf{q}\ldots|\,\mathbf{k}\ldots)$ можно рассматривать производящий функционал $\Omega\,\{\bar{a},\ \bar{b},\ \bar{c}\}$ (§ 2, п. 3), так и вместо совокупности функций T_{nml} можно рассматривать соответствующий производящий функционал [32, 47, 50]. Так как функции $T_{nml}(x\ldots|\,y\ldots|\,z\ldots)$ зависят от пространственно-временных координат, то для построения производящего функционала необходимо ввести вспомогательные величины $\eta(x)$, $\bar{\eta}(y)$ и функцию $I(z)$, также зависящие от пространственно-временных координат и пропорциональные единичной матрице в пространстве чисел заполнения для нуклонного и мезонного полей. Этот функционал $Z\,\{\eta,\ \bar{\eta},\ I\}$ удобно записать в виде

$$\left.\begin{aligned}
&Z\,\{\eta,\ \bar{\eta},\ I\} = \sum_{nml}^{\infty}\frac{i^{n+m+l}}{n!\ m!\ l!}\,Z_{nml}\,\{\eta,\ \bar{\eta},\ I\},\\
&Z_{nml}\,\{\eta,\ \bar{\eta},\ I\} =\\
&= \int \bar{\eta}(x_n)\ldots\bar{\eta}(x_1)\,T_{nml}(x_1\ldots x_n\,|\,y_1\ldots y_m\,|\,z_1\ldots z_l)\times\\
&\times\eta(y_m)\ldots\eta(y_1)\,I(z_1)\ldots I(z_l)\,d^4x_1\ldots d^4x_n\times\\
&\times d^4y_1\ldots d^4y_m d^4z_1\ldots d^4z_l.
\end{aligned}\right\} \qquad (4.13)$$

Из антисимметрии $T_{nml}(x\ldots|\,y\ldots|\,z\ldots)$ относительно переменных $x\ldots$, $y\ldots$ вытекает, что величины $\eta(y)$, $\bar{\eta}(x)$, кроме того, должны антикоммутировать между собой

$$\left.\begin{aligned}
&\{\eta(x),\ \eta(x')\} = 0, \quad \{\eta(x),\ \bar{\eta}(y)\} = 0,\\
&\{\eta(y),\ \bar{\eta}(y')\} = 0, \quad [\eta(x),\ I(x')] = 0,
\end{aligned}\right\} \qquad (4.14)$$

откуда следует, что η и $\bar{\eta}$ пропорциональны внешним источникам нуклонного поля (см. п. 3, § 2). Множители в разложении (4.13) подобраны так, чтобы η, $\bar{\eta}$ и I имели смысл внешних источников. Действительно, из определения (4.5) для функций T_{nml} явствует, что (4.13) можно символически представить как разложение в ряд величины:

$$Z\,\{\eta,\ \bar{\eta},\ I\} = (\Psi^{*}_{0},\ \tau\,\{\eta,\ \bar{\eta},\ I\}\,\Psi^{*}), \qquad (4.15)$$

где оператор $\tau\{\eta, \bar{\eta}, I\}$ есть

$$\tau\{\eta, \bar{\eta}, I\} = T\exp\left\{i\int[\bar{\eta}(x)\psi(x) + \bar{\psi}(x)\eta(x) + I(x)\varphi(x)]\,d^4x\right\} =$$

$$= T\exp\left[-i\int_{-\infty} H'(t)\,dt\right]$$

и где $H'(t)$ представляет собой часть оператора энергии взаимодействия, зависящую от внешних источников. Если рассматривать $\tau\{\eta, \bar{\eta}, I\}$ как предел при $t \to +\infty$ оператора

$$\tau\{\eta, \bar{\eta}, I;\ t\} = T\exp\left[-i\int_{-\infty}^{t} H'(t')\,dt'\right], \tag{4.16}$$

то вектор состояния $\Psi' = \tau\{\eta, \bar{\eta}, I;\ t\}\Psi$ будет изменяться со временем благодаря взаимодействию с внешними источниками:

$$i\frac{\partial\Psi'}{\partial t} = H'\Psi'. \tag{4.17}$$

Во всех формулах здесь считается, что операторы ψ, $\bar{\psi}$ и φ не зависят от внешних источников (см. уравнения (4.2) — (4.4)).

Если функционал $Z\{\eta, \bar{\eta}, I\}$ известен, то тогда функция

$$T_{nml}(x\ldots|y\ldots|z\ldots)$$

выражается через $(n+m+l)$-кратную функциональную производную от $Z\{\eta, \bar{\eta}, I\}$:

$$T_{nml}(x_1\ldots x_n|y_1\ldots y_m|z_1\ldots z_l) =$$

$$= (-i)^{n+m+l}\left.\frac{\delta^{n+m+l}Z\{\eta, \bar{\eta}, I\}}{\delta\bar{\eta}(x_1)\ldots\delta\bar{\eta}(x_n)\,\delta\eta(y_1)\ldots\delta\eta(y_m)\,\delta I(z_1)\ldots\delta I(z_l)}\right|_{\eta=\bar{\eta}=I=0}, \tag{4.18}$$

где после вычисления следует положить $\eta = 0$, $\bar{\eta} = 0$ и $I = 0$. С помощью (4.18) можно получить следующие полезные соотношения. Если $Z'\{\eta, \bar{\eta}, I\} = \eta(\xi)\,Z\{\eta, \bar{\eta}, I\}$, то для соответствующих функций T'_{nml} и T_{mnl} имеет место равенство

$$T'_{nml}(x_1\ldots|y_1\ldots y_m|z\ldots) = -i\sum^{m}\delta^4(\xi - y_1)\,T_{nm-1l}(x\ldots|y_2\ldots y_m|z\ldots), \tag{4.19}$$

правая часть которого антисимметризована относительно переменных y. Если $Z''\{\eta, \bar{\eta}, I\} = \frac{\delta}{\delta\bar{\eta}(\xi)}Z\{\eta, \bar{\eta}, I\}$, то функции T''_{nml} и T_{nml} связаны соотношением

$$T''_{nml}(x_1\ldots x_n|y\ldots|z\ldots) = iT_{n+1\,ml}(\xi x_1\ldots x_n|y\ldots|z\ldots)\,(-1)^{n+m}. \tag{4.20}$$

Если $Z'''\{\eta, \bar{\eta}, I\} = \frac{\delta}{\delta J(z)}Z\{\eta, \bar{\eta}, I\}$, то для функций T'''_{nml} и T_{nml} мы получаем равенство

$$T'''_{nml}(x\ldots|y\ldots|z_1\ldots z_l) = iT_{nml+1}(x\ldots|y\ldots|zz_1\ldots z_l) \text{ и т. д.} \tag{4.21}$$

Уравнения для производящего функционала $Z\{\eta, \bar{\eta}, I\}$ можно получить из уравнений для функций $T_{nml}(x\ldots|y\ldots|z\ldots)$. В простейшем случае функции $T_{110}(x|y|-) = (\Psi_0, T[\psi(x)\psi(y)]\Psi)$ мы находим из уравнения (4.2) для

оператора $\Psi(x)$ и определения T-произведения:

$$D(x)\,T_{110}(x\,|\,y\,|\,-) = D(x)\left(\Psi_0, \frac{1}{2}[\psi(x), \overline{\psi}(y)]\,\Psi\right) +$$

$$+ D(x)\,\varepsilon(x, y)\left(\Psi_0, \frac{1}{2}\{\psi(x), \overline{\psi}(y)\}\,\Psi\right) =$$

$$= g\gamma_5(x)\left(\Psi_0, T\,[\psi(x)\overline{\psi}(y)\,\varphi(x)]\,\Psi\right) + \delta^4(x-y),$$

так как $\partial\varepsilon(x)/\partial x_0 = 2\delta(x_0)$, и при совпадающих временах $x_0 = y_0$ перестановка $\{\psi(x), \overline{\psi}(y)\} = \gamma_4\delta^3(x-y)$. Таким образом, $T_{110}(x\,|\,y\,|\,-)$ удовлетворяет уравнению

$$D(x)\,T_{110}(x\,|\,y\,|\,-) = g\,\gamma_5(x)\,T(x\,|\,y\,|\,x) + \delta^4(x-y).$$

В общем случае хронологическое произведение оператора $\psi(x)$ и n других операторов $A(x_1)\ldots A(x_n)$ (A может быть равно как ψ, $\overline{\psi}$, так и φ) можно представить в виде

$$T\,[\psi(x), A(x_1), \ldots, A(x_n)] = \Sigma\,(-1)^P\,\psi(x)\,T\,[A(x_1), \ldots, A(x_n)] \times$$
$$\times\,\theta(x-x_1), \ldots, \theta(x-x_n), \quad (4.22)$$

где суммируется по всем перестановкам x и x_k; P равно числу перестановок $\psi(x)$ с операторами $\psi(x_k)$ и $\overline{\psi}(x_l)$; $\theta(x) = \frac{1}{2}[1+\varepsilon(x)]$. Так как при равных временах $x_0 = y_0$ будет $\{\psi(x), \overline{\psi}(y)\} = [\psi(x), \varphi(y)] = 0$, то согласно (4.2) и (4.22) функция $T_{nml}(x\ldots|y\ldots|z\ldots)$ должна удовлетворять следующему уравнению относительно координаты x_1:

$$D(x_1)\,T_{nml}(x_1\ldots|y_1\ldots|z_1\ldots) = g\gamma_5(x_1)\,T_{nml+1}(x_1\ldots|y_1\ldots|x_1z_1\ldots) +$$
$$+ \sum_i^m \delta^4(x_1-y_i)\,T_{n-1m-1l}(x_2\ldots|y_2\ldots|z_1\ldots). \quad (4.23)$$

Из выражения (4.18) для функций T_{nml} и формул (4.19) — (4.21) вытекает, что уравнение (4.23) можно также записать в виде

$$\left\{D(x)\frac{\delta}{\delta\overline{\eta}(x_1)} - ig\gamma_5\frac{\delta}{\delta\overline{\eta}(x_1)}\frac{\delta}{\delta I(x_1)} + \eta(x_1)\right\} \times$$
$$\times\frac{\delta^{n+m+l-1}Z\{\eta, \overline{\eta}, I\}}{\delta\overline{\eta}(x_1)\ldots\delta\eta(y_1)\ldots\delta I(z_1)\ldots} = 0 \quad (4.24)$$

при $\eta = \overline{\eta} = I = 0$.

Ввиду произвольности чисел n, m, l это уравнение будет выполняться, если $Z\{\eta, \overline{\eta}, I\}$ удовлетворяет уравнению

$$\left\{D(x)\frac{\delta}{\delta\overline{\eta}(x)} - ig\gamma_5\frac{\delta}{\delta\overline{\eta}(x)}\frac{\delta}{\delta I(x)}\right\} Z\{\eta, \overline{\eta}, I\} = -\eta(x)\,Z\{\eta, \overline{\eta}, I\}. \quad (4.25)$$

Это — первое вариационное уравнение Швингера для производящего функционала $Z\{\eta, \overline{\eta}, I\}$. Два других вариационных уравнения можно получить таким же путем из уравнений для $T_{nml}(x\ldots|y\ldots|z\ldots)$ относительно переменных $y\ldots$ и $z\ldots$, которые в свою очередь эквивалентны операторным уравнениям (4.3) и (4.4). Мы имеем:

$$\left\{D(-y) - ig\gamma_5(y)\frac{\delta}{\delta I(y)}\right\}\frac{\delta}{\delta\eta(y)}\,Z\{\eta, \overline{\eta}, I\} = \overline{\eta}(y)\,Z\{\eta, \overline{\eta}, I\} \quad (4.26)$$

и

$$K(z)\frac{\delta Z\{\eta, \overline{\eta}, I\}}{\delta I(z)} = \left\{I(z) + ig\frac{\delta}{\delta\eta(z)}\gamma_5\frac{\delta}{\delta\overline{\eta}(z)}\right\} Z\{\eta, \overline{\eta}, I\}. \quad (4.27)$$

К системе уравнений (4.25), (4.26), (4.27) необходимо добавить граничные условия. Если, например, $\Psi = \Psi_a$ относится к состоянию со значением энергии импульса $p_\mu^{(a)}$, $a \neq 0$, то при $\eta = \bar{\eta} = I = 0$ одно из условий имеет вид

$$Z\{0,\ 0,\ 0\} = 0; \tag{4.28а}$$

если же $\Psi = \Psi_0$, то согласно (4.15) должно быть

$$Z\{0,\ 0,\ 0\} = 1. \tag{4.28б}$$

Остальные условия также определяются смыслом состояния Ψ; если, например, $\Psi = \Psi_0$ есть физический вакуум, то должно быть при $\eta = \bar{\eta} = I = 0$

$$\frac{\delta Z}{\delta \eta} = \frac{\delta Z}{\delta \bar{\eta}} = \frac{\delta Z}{\delta I} = 0. \tag{4.29}$$

Уравнения с функциональными производными (4.26), (4.27) и (4.28) для $Z\{\eta, \bar{\eta}, I\}$ могут быть решены в общем виде[42–46]. В этом заключается преимущество функционального метода, поскольку последовательное применение остальных методов так или иначе связано с использованием теории возмущений.

Решение уравнений для $Z\{\eta, \bar{\eta}, I\}$ и связанные с этим вопросы будут обсуждены в § 5 и 6.

2. Фейнмановские амплитуды и производящий функционал. Рассмотрим вопрос о построении релятивистских волновых функций, являющихся четырехмерным аналогом обычных волновых функций системы частиц (амплитуд вероятности) в конфигурационном пространстве $\psi_{nml}(x\ldots\ldots|y\ldots|z\ldots)$ (формула (4.1)). Непосредственное обобщение определения (4.1) на случай гейзенберговских операторов невозможно, поскольку, как уже отмечалось в § 4, 1 гейзенберговские операторы нельзя инвариантным образом подразделить на положительно- и отрицательно-частотные части. Во всяком случае четырехмерные волновые функции $f_{nml}(x\ldots|y\ldots|z\ldots)$ должны обладать следующими свойствами:

а) Функции $f(x\ldots|y\ldots|z\ldots)$ должны быть антисимметричны относительно нуклонных и антинуклонных переменных $x\ldots$, $y\ldots$ и симметричны относительно мезонных переменных $z\ldots$

б) Уравнения для функции $f_{nml}(x\ldots|y\ldots|z\ldots)$ не должны иметь особенностей при совпадающих переменных (или хотя бы при совпадающих временах) любых двух частиц. При этом интервал между двумя точками x и y может быть произвольным.

в) В отсутствии взаимодействия функция $f_{nml}(x\ldots|y\ldots|z\ldots)$ с точностью до постоянного множителя должна быть равна амплитуде вероятности $\psi_{nml}(x\ldots|y\ldots|z\ldots)$.

г) Для стационарных состояний должно выполняться соотношение

$$-i\sum^{n,\,m,\,l}\left\{\frac{\partial}{\partial x_\mu}+\ldots+\frac{\partial}{\partial y_\mu}+\ldots+\frac{\partial}{\partial z_\mu}+\ldots\right\}f_{nml}(x\ldots|y\ldots|z\ldots)= \\ = p_\mu^{(a)} f_{nml}(x\ldots|y\ldots|z\ldots), \tag{4.30}$$

где $p_\mu^{(a)}$ — собственное значение вектора энергии-импульса в стационарном состоянии.

Как видно из определения (4.5) и уравнения (4.23), функции $T_{nml}(x\ldots|y\ldots|z\ldots)$ не обладают свойствами б) и в) и потому не могут служить четырехмерными волновыми функциями.

Если нет взаимодействия, то связь между амплитудами Ψ_{nml} и функциями T_{nml} легко находится с помощью формулы Вика для T-произведений

и N-произведений (см., например,[41]), поскольку амплитуда вероятности Ψ_{nml} есть не что иное, как матричный элемент от N-произведения:

$$\Psi_{nml}(x\ldots|y\ldots|z\ldots)=(\Lambda_0, N[\psi(x)\ldots\overline{\psi}(y)\ldots\varphi(z)\ldots]\Phi), \qquad (4.1'),$$

и в отсутствии взаимодействия интервалы между точками $x\ldots$, $y\ldots$, $z\ldots$ могут быть произвольными. Имея в виду определения (4.1′) и (4.5) для функций Ψ_{nml} и T_{nml} и формулу Вика, мы находим, что в отсутствии взаимодействия

$$T^0_{nml}(x\ldots|y\ldots|z\ldots)=\Psi_{nml}(x\ldots|y\ldots|z\ldots)+$$
$$+\Sigma\Delta_F(z_i-z_n)\Psi_{nml-2}(x\ldots|y\ldots|zz_i^{-1}z_k^{-1})-$$
$$-\Sigma S_F(x_i-y_k)\Psi_{n-1m-1l}(x\ldots x_i^{-1}|y\ldots y_k^{-1}\ldots|z\ldots)+\ldots, \qquad (4.31)$$

где x_i^{-1} обозначает, что $\Psi_{n-1ml}(x\ldots x_i^{-1}|y\ldots|z\ldots)$ не зависит от переменной x_i; Δ_F и S_F — фейнмановские функции Грина для свободных полей*), T^0_{nml} есть функция T_{nml} в отсутствии взаимодействия.

Из (4.31) видно, что особенности функций $T^0_{nml}(x\ldots|y\ldots|z\ldots)$ имеют тот же характер, что и особенности гриновских функций Δ_F и S_F.

В случае, когда T_{nml} определено с помощью операторов взаимодействующих полей, формулу (4.31) можно использовать как указание на характер связи между T_{nml} и f_{nml}. Условия а), б), в) и г) не определяют эту связь однозначно, поскольку вычитание особенностей можно производить различными способами.

Если считать, что при наличии взаимодействия особенности функций $T_{nml}(x\ldots|y\ldots|z\ldots)$ имеют тот же характер, что и в отсутствии взаимодействия, то тогда для взаимодействующих полей функции $f(x\ldots|y\ldots|z\ldots)$ можно определить, заменив в формуле (4.31) функции Ψ_{nml} и T^0_{nml} для свободных полей функциями f_{nml} и T_{nml}:

$$T_{nml}(x\ldots|y\ldots|z\ldots)=f_{nml}(x\ldots|y\ldots|z\ldots)+$$
$$+\Sigma\Delta_F(z_i-z_k)f_{nml-2}(x\ldots|y\ldots|z\ldots z_i^{-1}z_k^{-1}\ldots)-$$
$$-\Sigma S_F(x_i-y_k)f_{n-1m-1l}(x\ldots x_i^{-1}\ldots|y\ldots y_k^{-1}\ldots|z\ldots)+\ldots, \qquad (4.32)$$

или, решая (4.32) относительно f_{nml}:

$$f_{nml}(x\ldots|y\ldots|z\ldots)=T_{nml}(x\ldots|y\ldots|z\ldots)-$$
$$-\Sigma\Delta_F(z_i-z_k)T_{nml-2}(x\ldots|y\ldots|z\ldots z_i^{-1}\ldots z_k^{-1})+$$
$$+\Sigma S_F(x_i-y_k)T_{n-1m-1l}(x\ldots x_i^{-1}\ldots|y\ldots y_k^{-1}|z\ldots)+\ldots \qquad (4.33)$$

Определение (4.33) удовлетворяет условиям а), б), в), г). Таким образом, функции $f(x\ldots|y\ldots|z\ldots)$ определены в работах[28, 40, 49]. Однако, как показал Леман[23], особенности функций Грина Δ'_F и S'_F для взаимодействующих полей не могут быть меньше, чем особенности Δ_F и S_F. Такое же заключение можно сделать и относительно характера особенностей функций T_{nml} по сравнению с особенностями функций T^0_{nml}. Поэтому, вообще говоря, определение (4.33) может не обеспечить выполнения условия б). С этой точки

*) Функции Грина $S_F(x-y)=(\Lambda_0, T[\psi(x)\overline{\psi}(y)]\Lambda_0)$ и $\Delta_F(x-y)=(\Lambda_0, T[\varphi(x)\varphi(y)]\Lambda_0)$ удовлетворяют уравнениям $D(x)S_F(x-y)=\delta^4(x-y)$, $K(x)\Delta_F(x-y)=-\delta^4(x-y)$.

зрения целесообразно вместо Δ_F и S_F определить функции $f'(x\ldots|y\ldots|z\ldots)$ с помощью функций Δ'_F и S'_F:

$$f'_{nml}(x\ldots|y\ldots|z\ldots)=T_{nml}(x\ldots|y\ldots|z\ldots)-$$
$$-\Sigma\Delta'_F(z_i-z_k)\,T_{nml-2}(x\ldots|y\ldots|z\ldots z_i^{-1}\ldots z_k^{-1})+$$
$$+\Sigma S_F(x_i-y_k)\,T_{n-1m-1l}(x\ldots x_i^{-1}\ldots|y\ldots y_k^{-1}\ldots|z\ldots)-\ldots, \qquad (4.34)$$

что, однако, приводит к более громоздким уравнениям для f'_{nml}. Развитие во времени функций T_{nml}, Δ_F, S_F, Δ'_F, S'_F происходит «фейнмановским» образом: вперед во времени распространяются волны с положительной энергией и назад во времени — волны с отрицательной энергией. Из определений (4.32) — (4.34) для функций $f_{nml}(x\ldots|y\ldots|z\ldots)$ следует, что эти функции развиваются во времени таким же образом. Функции $f_{nml}(x\ldots|y\ldots|z\ldots)$ иногда называют фейнмановскими амплитудами.

Производящий функционал $S\{\eta,\bar\eta,I\}$ для четырехмерных волновых функций f_{nml}:

$$\left.\begin{aligned}
&S\{\eta,\bar\eta,I\}=\sum_{nml}^{\infty}\frac{i^{n+m+l}}{n!\,m!\,l!}S_{nml}\{\eta,\bar\eta,I\},\\
&S_{nml}\{\eta,\bar\eta,I\}=\int\bar\eta(x_n)\ldots\bar\eta(x_1)\,f_{nml}(x_1\ldots x_n|y_1\ldots y_m\times\\
&\times|z_1,\ldots z_l)\,\eta(x)\ldots\eta(x)\,I(z_1)\ldots I(z_l)\,d^4x_1\ldots d^4y_1\ldots d^4z,
\end{aligned}\right\} \qquad (4.35)$$

связан с функционалом внешних источников $Z\{\eta,\bar\eta,I\}$ преобразованием

$$S\{\eta,\bar\eta,I\}=e^{\frac{1}{2}I\Delta_F I+\bar\eta S_F\eta}Z\{\eta,\bar\eta,I\}, \qquad (4.36)$$

где введено обозначение

$$\left.\begin{aligned}
I\Delta_F I&=\int d^4x d^4y I(x)\,\Delta_f(x-y)\,I(y),\\
\bar\eta\,S_F\eta&=\int d^4x d^4y\bar\eta(x)\,S_F(x-y)\,\eta(y).
\end{aligned}\right| \qquad (4.37)$$

Чтобы убедиться в справедливости формулы (4.35), нужно разложить обе части формулы (4.36) в функциональные степенные ряды по η, $\bar\eta$ и I и затем воспользоваться определениями производящих функционалов $Z\{\eta,\bar\eta,I\}$ и $S\{\eta,\bar\eta,I\}$.

При преобразовании (4.36) операторы функциональных производных преобразуются следующим образом:

$$e^{\bar\eta S_F\eta}\frac{\delta}{\delta\bar\eta(x)}e^{-\bar\eta S_F\eta}=\frac{\delta}{\delta\bar\eta(x)}-\int S_F(x-y)\,\eta(y)\,d^4y\equiv i\chi(x), \qquad (4.38)$$

$$e^{\eta S_F\eta}\frac{\delta}{\delta\eta(x)}e^{-\bar\eta S_F\eta}=\frac{\delta}{\delta\eta(x)}+\int\bar\eta(y)\,S_F(y-x)\,d^4y\equiv\frac{1}{i}\bar\chi(x), \qquad (4.39)$$

$$e^{\frac{1}{2}I\Delta_F I}\frac{\delta}{\delta I(x)}e^{-\frac{1}{2}I\Delta_F I}=\frac{\delta}{\delta I(x)}-\int\Delta_F(x-y)\,I(y)\,d^4y\equiv\frac{1}{i}\Phi(x). \qquad (4.40)$$

Уравнения для функционала $S\{\eta,\bar\eta,I\}$ находятся из уравнений (4.25), (4.26) и (4.27) для функционала $Z\{\eta,\bar\eta,I\}$. Подставив в уравнение (4.25) выражение (4.36) для $Z\{\eta,\bar\eta,I\}$ и воспользовавшись формулами (4.38) и

(4.40) для преобразования функциональных производных, получаем уравнение для $S\{\eta, \bar{\eta}, I\}$:

$$\{D(x) - g\gamma_5(x)\Phi(x)\}\chi(x)S\{\eta, \bar{\eta}, I\} = +i\eta(x)S\{\eta, \bar{\eta}, I\}. \quad (4.41)$$

Аналогичным образом выводятся остальные уравнения для $S\{\eta, \bar{\eta}, I\}$

$$\{D(-x) - g\gamma_5(x)\Phi(x)\}\bar{\chi}(x)S\{\eta, \bar{\eta}, I\} = i\bar{\eta}(x)S\{\eta, \bar{\eta}, I\}, \quad (4.42)$$

$$\{K(x)\Phi(x) + g[\bar{\chi}(x)\gamma_5\chi(x)]\}S\{\eta, \bar{\eta}, I\} = iI(x)S\{\eta, \bar{\eta}, I\}. \quad (4.43)$$

Граничные условия для функционала $S\{\eta, \bar{\eta}, I\}$ можно найти из условий для $Z\{\eta, \bar{\eta}, I\}$. Согласно формуле (4.28) при $I = \eta = \bar{\eta} = 0$ должно быть для стационарного состояния a:

$$S^{(a)}\{0, 0, 0\} = \delta_{(a)(0)}. \quad (4.44а)$$

Для производящего функционала $S^{(0)}\{\eta, \bar{\eta}, I\}$ вакуумных функций условию (4.29) соответствует

$$\frac{\delta}{\delta\eta}S = 0; \quad \frac{\delta}{\delta\bar{\eta}}S = 0; \quad \frac{\delta}{\delta I}S = 0 \quad (4.44б)$$

при $\eta = \bar{\eta} = I = 0$.

Амплитуду перехода $U_{\alpha\alpha'}$ можно вычислить с помощью фейнмановских амплитуд $f_{nml}(x\ldots|y\ldots|z\ldots)$ по формуле (4.12), если в ней заменить функцию τ_{nml} на функцию f_{nml}, так как добавочные члены, которые появляются при этом, не вносят вклада в $U_{\alpha\alpha'}$.

В предельном случае, когда все времена $x_0 \ldots y_0 \ldots z_0 \ldots$ равны и стремятся к $+\infty$ (тогда поля ψ, $\bar{\psi}$ и φ равны свободным полям ψ_{out}, $\bar{\psi}_{out}$ и φ_{out}), фейнмановская амплитуда $f_{nml}(x\ldots|y\ldots|z\ldots)$ согласно (4.31) равна амплитуде вероятности $\Psi_{nml}(x\ldots|y\ldots|z\ldots)$.

3. Функции ρ[51]. Введем новый функционал $R\{\eta, \bar{\eta}, I\}$, представив функционал Z^0 в виде

$$Z^0\{\eta, \bar{\eta}, I\} = \exp R\{\eta, \bar{\eta}, I\}. \quad (4.45)$$

Функционал $R\{\eta, \bar{\eta}, I\}$ будет производящим функционалом для функций $\rho_{nml}(x\ldots|y\ldots|z\ldots)$:

$$R = \sum i^{n+m+l}(n!\,m!\,l!)^{-1}\int \rho_{nml}(x\ldots|y\ldots|z\ldots)\times$$
$$\times\bar{\eta}(x)\ldots\eta(y)\ldots I(z)\ldots d^4x\,d^4y\,d^4z. \quad (4.46)$$

Связь между функциями ρ_{nml} и функциями τ_{nml} можно установить, разложив правую часть (4.45) в ряд и воспользовавшись определениями (4.13) и (4.46). Для первых функций ρ и τ соотношения имеют вид

$$\left.\begin{aligned}
\tau_{200}(x_1x_2|-|-) &= \rho_{100}(x_1|-|-)\,\rho_{100}(x_2|-|-) + \\
&\quad + \rho_{200}(x_1x_2|-|-), \\
\tau_{011}(-|y|z) &= \rho_{011}(-|y|z), \\
\tau_{111}(x|y|z) &= \rho_{100}(x|-|-)\,\rho_{011}(-|y|z) + \rho_{111}(x|y|z), \\
\tau_{211}(x_1x_2|y|z) &= \rho_{100}(x_1|-|-)\,\rho_{100}(x_2|-|-)\,\rho_{011}(-|y|z) + \\
&\quad + \rho_{100}(x_1|-|-)\,\rho_{111}(x_2|y|z) + \rho_{100}(x_2|-|-)\,\rho_{111}(x_1|y|z) + \\
&\quad + \rho_{200}(x_1x_2|-|-)\,\rho_{011}(-|y|z) + \rho_{211}(x_1x_2|y|z).
\end{aligned}\right\} \quad (4.47)$$

Из формул (4.47) видно, что функции ρ равны нулю, если значения координат $x \ldots y \ldots z \ldots$ позволяют представить соответствующую функцию τ в виде произведения τ-функций с меньшим числом переменных. Функция τ распадается на произведения функций низшего порядка в том случае, когда координаты определенной группы переменных в τ-функции разделены большим пространственно- или временноподобным интервалом (например, $|x_\nu x_\nu| \gg \left(\frac{h}{mc}\right)^2$. Это значит, что функция ρ будет велика лишь, если малы интервалы между всеми координатами в ней. Это свойство функций ρ может быть полезно для рассмотрения рассеяния при малых энергиях или больших угловых моментах. Уравнения для функционала $R\{\eta, \bar{\eta}, I\}$ получаем, подставив в (4.25) — (4.27) выражение (4.45) для $Z^0\{\eta, \bar{\eta}, I\}$:

$$\left.\begin{aligned} &\left\{D(x) - ig\gamma_5 \frac{\delta}{\delta I(x)}\right\} \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}(x)} R = -\eta(x) + ig\gamma_5 \frac{\delta R}{\delta I(x)} \frac{\delta R}{\delta \bar{\eta}(x)}, \\ &\left\{K(x) \frac{\delta}{\delta I(x)} - ig \frac{\delta}{\delta \eta(x)} \gamma_5 \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}(x)}\right\} R = I(x) + ig \frac{\delta R}{\delta \eta(x)} \gamma_5 \frac{\delta R}{\delta \bar{\eta}(x)}. \end{aligned}\right\} \quad (4.48)$$

Таким образом, уравнения (4.48) для $R\{\eta, \bar{\eta}, I\}$ нелинейны. Из уравнений (4.48) вытекает система «зацепляющихся» уравнений для функций ρ. При этом в отличие от системы уравнений для функций τ δ-функция имеется только в уравнениях для функций ρ с двумя координатами.

§ 5. Пространственно-временная трактовка квантовой теории поля и функционалы

1. Основные уравнения для четырехмерного вектора состояния. Пространственно-временное описание обладает некоторыми существенными особенностями по сравнению с обычным «трехмерным» описанием, которые могут оказаться важными для дальнейшего развития квантовой теории поля. Можно полагать, что пространственно-временная трактовка послужит формальной основой для идей будущей теории поля. Поэтому мы рассмотрим здесь подробно аппарат такой трактовки в связи с методом функционалов [26, 33–35, 37].

Обычная «трехмерная» формулировка квантовой теории поля опирается на уравнения для операторов поля и канонические перестановочные соотношения. Решение уравнений поля приводит к бесконечным выражениям, которые устраняются в процессе вычислений введением перенормировочных констант. При этом в обычной формулировке приходится использовать понятие о массах и зарядах «голых» частиц и лишь в конце вычислений после устранения расходимостей в формулах присутствуют только экспериментальные массы и заряды. Иначе говоря, пользуясь уравнениями и перестановочными соотношениями для операторов поля, невозможно избежать расходимостей и введения понятия «голой» частицы.

Пространственно-временное описание не связано с каноническим формализмом; в нем нет канонических перестановочных соотношений и уравнений для операторов поля. Это позволяет надеяться, что на основе пространственно-временной трактовки удастся построить теорию, не содержащую расходимостей и использующую только понятия физической массы и физического заряда.

Этот вывод можно пояснить с помощью наглядного представления об элементарной частице как системе из «голой» частицы, окруженной «облаком» других частиц. Общие масса, заряд и спин этой системы должны быть равны экспериментальным значениям массы, заряда и спина элементарной частицы. Но одни и те же значения этих величин могут быть получены при разных «облаках» вокруг «голой» частицы. Если мы рассматриваем развитие во времени, то, вообще говоря (в зависимости от взаимодействия), «облака»

в элементарной частице могут быть различны для разных моментов времени и, следовательно, в разные времена элементарной частице будут приписываться различные облака. Поэтому в трехмерной трактовке нельзя для всех времен определить «облако» вокруг частицы. В четырехмерной же трактовке развитие во времени не рассматривается и, следовательно, такой проблемы вообще не возникает.

Как мы увидим ниже, функционалы в пространственно-временной трактовке не отличаются от функционалов внешних источников, рассмотренных в § 4. Отличие четырехмерной трактовки от теории с внешними источниками заключается в подходе к описанию поля. Теория с внешними источниками развивается на основе обычного «трехмерного» аппарата квантовой теории поля; внешние источники в ней являются вспомогательными величинами. Пространственно-временная трактовка может быть развита независимо от обычного аппарата теории поля без использования операторов и векторов состояния «трехмерной» теории [34, 35, 26]. В пространственно-временной трактовке можно с самого начала ввести четырехмерные векторы состояния и свои операторы. Внешние источники в ней служат для представления этих операторов подобно тому, как в методе функционалов Фока (§ 2) величины $\bar{a}(k)$, $\bar{b}(q)$, $\bar{c}(p)$ служат для представления операторов ψ, $\bar{\psi}$, φ. С этой точки зрения внешние источники в пространственно-временной трактовке можно не рассматривать как вспомогательные величины.

Перейдем к построению аппарата пространственно-временной трактовки теории поля в связи с методом функционалов. В «трехмерной» трактовке вектор состояния определяется на пространственно-подобной гиперповерхности; в пространственно-временной трактовке вектор состояния Ω нужно определить во всем четырехмерном объеме. Это можно сделать, если в качестве основных операторов поля выбрать не обычные операторы ψ, $\bar{\psi}$, φ, а другие операторы $\chi(x)$, $\bar{\chi}(y)$ (нуклонное поле) и $\Phi(z)$ (мезонное поле), которые антикоммутируют или коммутируют при любых интервалах между точками x, y, z *):

$$\left.\begin{aligned} &\{\chi(x), \bar{\chi}(y)\} = 0, \quad [\Phi(z), \Phi(z')] = 0, \\ &\{\chi(x), \chi(y)\} = 0, \quad [\chi(x), \Phi(z)] = 0 \text{ и т. д.} \end{aligned}\right\} \tag{5.1}$$

Операторы χ, $\bar{\chi}$ и Φ предлагалось называть причинными операторами [35].

Вследствие соотношений (5.1) с помощью операторов χ, $\bar{\chi}$ и Φ можно построить полную систему взаимнокоммутирующих операторов $\hat{\xi}$, относящихся к четырехмерному объему. Тогда в качестве базисных векторов можно выбрать собственные векторы $\Omega(\xi)$ операторов $\hat{\xi}$. Четырехмерный вектор состояния

$$\Omega = \int C(\xi)\,\Omega(\xi)\,d\xi \tag{5.2}$$

будет определен, если известны коэффициенты разложения $C(\xi) = (\Omega(\xi), \Omega)$. Уравнения для коэффициентов $C(\xi)$ вытекают из принципа действия **).

Принцип действия в квантовой теории был подробно разработан Фейнманом и Швингером [27, 28]. Применительно к рассматриваемой здесь пространственно-временной трактовке принцип действия может быть выражен формулой

$$\delta C(\xi) = i\,(\Omega(\xi),\ \delta W \cdot \Omega), \tag{5.3}$$

*) Операторы χ и $\bar{\chi}$ не являются сопряженными, хотя, как мы увидим ниже (§ 6), операторам χ и $\bar{\chi}$ в трехмерной трактовке можно сопоставить операторы ψ и $\bar{\psi}$.

**) Попытка получить уравнения, не опираясь на лагранжев формализм, была предпринята в работе [32].

где $\delta C(\xi)$ — бесконечное малое изменение $C(\xi)$, вызванное вариацией ξ в четырехмерном объеме; W — оператор действия. Так как $\delta C(\xi) = (\delta\Omega(\xi), \Omega)$, то, введя операторы бесконечно малого преобразования G_ξ с помощью соотношения

$$(\delta\Omega(\xi), \Omega) = (\Omega(\xi), G_\xi \Omega),$$

можно принцип действия (5.3) представить в виде

$$\delta\Omega = G_\xi \Omega = i\delta W \cdot \Omega. \tag{5.4}$$

Вариация $\delta\Omega$ в (5.4) вызвана вариацией коэффициентов $C(\xi)$.

Будем считать, что действие W имеет тот же вид, что и в обычной «трехмерной» трактовке, но составлено из операторов χ, $\bar{\chi}$ и Φ. Тогда уравнение (5.4) может быть легко решено в символическом виде в представлении, где операторы χ, $\bar{\chi}$ и Φ являются операторами умножения на величины χ', $\bar{\chi}'$ и функцию Φ', а четырехмерный вектор состояния Ω является функционалом от $\bar{\chi}'$, χ' и Φ'. В этом представлении оператор W будет составлен только из операторов умножения, и следовательно, уравнение (5.4) имеет решение

$$\Omega\{\chi', \bar{\chi}', \Phi'\} = e^{iW'} \cdot \frac{1}{N}, \tag{5.5}$$

где W' составлено из χ', $\bar{\chi}'$ и Φ', а постоянная N^{-1} есть Ω при $\chi' = \bar{\chi}' = \Phi' = 0$.

Действие W удобно представить в виде

$$W = \int L(x, y)\, d^4x d^4y,$$

$$L(x, y) = \frac{1}{2} i\delta^4(x-y)\{\bar{\chi}(y)[D(x) - g\Phi(x)\gamma_5]\chi(x) -$$
$$- \chi(y)[D(-x) - g\Phi(x)\gamma_5(x)]\bar{\chi}(x) - \Phi(x)K(y)\Phi(y)\}. \tag{5.6}$$

Из (5.5) можно получить символические решения для других представлений.

Если операторы $\hat{\xi}$ построены из операторов χ, $\bar{\chi}$ и Φ, то мы можем вариации $\delta\hat{\xi}$ выразить формально через $\delta\chi$, $\delta\bar{\chi}$ и $\delta\Phi$ (смысл вариации операторов поля Ферми χ и $\bar{\chi}$ мы рассмотрим в § 6). Вариации $\delta\chi$, $\delta\bar{\chi}$ и $\delta\Phi$ удовлетворяют тем же перестановочным соотношениям (5.1), что и операторы χ, $\bar{\chi}$, Φ. Для построения оператора бесконечно малого преобразования G_ξ введем операторы π, $\bar{\pi}$ и Π, которые определим с помощью перестановочных соотношений:

$$\left.\begin{aligned} &\{\pi(x), \chi(y)\} = -i\delta^4(x-y), \quad [\Pi(x), \Phi(y)] = -i\delta^4(x-y), \\ &\{\bar{\pi}(x), \bar{\chi}(y)\} = i\delta^4(x-y). \end{aligned}\right\} \tag{5.7}$$

Операторы π, $\bar{\pi}$ и Π являются четырехмерными аналогами канонически сопряженных импульсов «трехмерной» теории. В представлении с функционалом $\Omega\{\chi', \bar{\chi}', \Phi'\}$ (формула (5.5)) π, $\bar{\pi}$ и Π являются операторами функциональных производных.

Основное уравнение (5.4) тогда можно записать в виде

$$[G_\chi + G_{\bar{\chi}} + G_\Phi]\,\Omega = -i(\delta_\chi W + \delta_{\bar{\chi}} W + \delta_\Phi W)\,\Omega, \tag{5.8}$$

где операторы G_χ, $G_{\bar{\chi}}$ и G_Φ обладают свойствами

$$[G_\chi, \chi] = \delta\chi; \quad [G_{\bar{\chi}}, \bar{\chi}] = \delta\bar{\chi}; \quad [G_\Phi, \Phi] = \delta\Phi,$$

а $\delta_\chi W = [G_\chi, W]$ и т. д. Операторы бесконечно малого преобразования G_χ, $G_{\bar\chi}$ и G_Φ имеют вид

$$\left.\begin{aligned} G_\chi &= i\int \delta\chi(x)\,\pi(x)\,d^4x, \\ G_{\bar\chi} &= -i\int \delta\bar\chi(x)\,\bar\pi(x)\,d^4x, \end{aligned}\quad G_\Phi = i\int \delta\Phi(x)\,\Pi(x)\,d^4x.\right\} \tag{5.9}$$

Вследствие независимости вариаций $\delta\chi$, $\delta\bar\chi$ и $\delta\bar\Phi$ из формулы (5.8) мы получаем три уравнения:

$$\left.\begin{aligned} \{D(x) - g\gamma_5\Phi(x)\}\,\chi(x)\,\Omega &= i\pi(x)\,\Omega; \\ \{D(-x) - g\gamma_5(x)\,\Phi(x)\}\,\bar\chi(x)\,\Omega &= i\bar\pi(x)\,\Omega; \\ \{K(x)\,\Phi(x) + g\bar\chi(x)\,\gamma_5\chi(x)\}\,\Omega &= i\Pi(x)\,\Omega. \end{aligned}\right\} \tag{5.10}$$

Отметим, что уравнения (5.10) получены здесь без обращения к обычному «трехмерному» аппарату теории поля. Рассмотрим теперь представление, где операторы π, $\bar\pi$ и Π являются операторами умножения, при этом χ, $\bar\chi$ и Φ согласно (5.6) будут операторами функциональных производных. Тогда, сравнив (5.10) с (4.25) — (4.27), нетрудно установить, что уравнения (5.10) представляют собой не что иное, как уравнения для функционала внешних источников $Z\{\eta, \bar\eta, I\}$.

Таким образом, мы нашли соответствие между пространственно-временной и обычной трехмерной трактовками: «четырехмерный» вектор состояния Ω в представлении, где операторам π, $\bar\pi$ и Π соответствует умножение на функции внешних источников (здесь $\bar\eta = \eta^*\gamma_4$):

$$\pi(x)\,\Omega = \eta(x)\,\Omega; \quad \bar\pi(x)\,\Omega = \bar\eta(x)\,\Omega; \quad \Pi(x)\,\Omega = I(x)\,\Omega, \tag{5.11}$$

пропорционален швингеровскому функционалу внешних источников $Z\{\eta, \bar\eta, I\}$.

Причины такого соответствия можно понять, рассмотрев опять принцип действия (5.4) или (5.3). Принцип действия в этой форме предполагает, что вариации величин поля (например, вариации $\delta\chi$, $\delta\bar\chi$ и $\delta\Phi$) в любой точке четырехмерного объема могут влиять на вектор состояния Ω. Иначе говоря, в пространственно-временной трактовке отрицается принцип стационарности действия, из которого в обычной «трехмерной» трактовке следуют уравнения для операторов поля. Следствием этого, в частности, является отсутствие уравнений движения для операторов χ, $\bar\chi$ и Φ (есть только условие, определяющее возможные функционалы, — уравнение (5.4)). Поскольку в четырехмерной трактовке отрицается принцип стационарного действия, т. е. допускаются вариации величин поля, нарушающие принцип стационарности действия, то аппарат четырехмерной трактовки эквивалентен такому аппарату обычной «трехмерной» теории, в которой также рассматриваются вариации, нарушающие принцип стационарного действия. Подобными вариациями являются вариации величин поля, вызванные вариациями внешних источников или внешних параметров. Поэтому пространственно-временной трактовке соответствует «трехмерная» трактовка с внешними источниками.

2. Обобщенный функционал Фока. Соответствие между четырехмерным формализмом и аппаратом обычной «трехмерной» теории можно представить в более удобном и наглядном виде, если перейти к другому представлению, где четырехмерным вектором состояния будет обобщенный функционал Фока. Напомним, что функционал Фока является производящим функционалом для амплитуд вероятности и одновременно вектором состояния в таком представлении, где операторы рождения $a^+(p)$, $b^+(q)$ и $c^+(k)$ — это операторы умножения.

Для построения обобщенного функционала Фока в пространственно-временной трактовке введем «четырехмерные» операторы рождения $a_\rho^+(x)$, $b_\lambda^+(y)$ (для нуклонного поля) и $c(z)$ (для мезонного поля). (λ, ρ — спинорные значки.) В отличие от обычных перестановочных соотношений перестановка между «четырехмерными» операторами рождения и эрмитово сопряженными операторами поглощения $a_{\rho'}(x)$, $b_{\lambda'}(y)$, $c(z)$ в правой части содержит четырехмерную δ-функцию

$$\left.\begin{aligned} \{a_\rho(x),\ a_\sigma^+(y)\} &= \delta_{\rho\sigma}\delta^4(x-y), \\ \{b_\rho(x),\ b_\lambda^+(y)\} &= \delta_{\rho\lambda}\delta^4(x-y), \end{aligned} \quad [c(z),\ c^+(z')] = \delta^4(z-z'). \right\} \tag{5.12}$$

Опираясь на определение «четырехмерных» операторов рождения и поглощения (5.12), мы можем перенести в пространственно-временную теорию формально все математические результаты метода функционалов Фока (§ 2). Мы выбираем представление, где $a^+(x)$, $b^+(y)$, $c^+(z)$ — это операторы умножения на антикоммутирующие величины $\bar{a}(x)$, $\bar{b}(y)$ и функцию $\bar{c}(z)$. Четырехмерный вектор состояния $F\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$, который является функционалом от $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, тогда можно представить в виде разложения по собственным функционалам операторов «числа» нуклонов $\int a^+(x)\,a(x)\,d^4x$, «числа» антинуклонов $\int b^+(x)\,b(x)\,d^4x$ и мезонов $\int c^+(x)\,c(x)\,d^4x$:

$$F = \sum F_{nml} = \sum_{nml} (n!\,m!\,l!)^{-1} \int \bar{a}(x_n)\ldots f_{nml}(x_1\ldots x_n|\,y_1\ldots y_m|\,z_1\ldots z_l) \times$$
$$\times\, \bar{b}(y_m)\ldots \bar{c}(z_1)\ldots d^4x_1\ldots d^4y_1\ldots d^4z_1\ldots \tag{5.13}$$

Операторы a, b, c по отношению к функционалу (5.13) являются операторами функциональных производных:

$$a(x) = \frac{\delta}{\delta\bar{a}(x)}; \quad b(y) = \frac{\delta}{\delta\bar{b}(y)}; \quad c(z) = \frac{\delta}{\delta\bar{c}(z)}. \tag{5.14}$$

Функции f_{nml}, для которых обобщенный функционал Фока является производящим, можно считать четырехмерными аналогами амплитуд вероятности. Как мы увидим ниже, f_{nml} есть фейнмановская амплитуда. Функционал (5.13) был введен Кёстером [37].

Рассмотрим вектор энергии-импульса. В обычной «трехмерной» трактовке вектор энергии-импульса может быть найден, если известна функция Лагранжа, а свойства вектора энергии-импульса как оператора смещения являются следствием перестановочных соотношений. В «четырехмерной» трактовке теории поля нет вариационного принципа, вследствие чего нет канонических перестановочных соотношений и уравнений для операторов поля. Поэтому мы определим вектор энергии-импульса P_μ ($iP_0 = P_4$) как величину, обладающую свойствами оператора смещения:

$$-i\,[P_\mu,\ a(x)] = \frac{\partial a(x)}{\partial x_\mu} \text{ и т. д.} \tag{5.15}$$

со взаимнокоммутирующими составляющими: $[P_\mu,\ P_\nu] = 0$.

Выражение для P_μ имеет вид

$$P_\mu = -i\int \left\{a^+(x)\frac{\partial a(x)}{\partial x_\mu} + b^+(x)\frac{\partial b(x)}{\partial x_\mu} + c^+(x)\frac{\partial c(x)}{\partial x_\mu}\right\} d^4x. \tag{5.16}$$

Применение оператора P_μ к вектору состояния (5.13) равносильно дифференцированию амплитуд $f(x\ldots|\,y\ldots|\,z\ldots)$: если $P_\mu F = F'$ и

$f'_{nml}(x\ldots|y\ldots|z\ldots)$ — амплитуды в функционале F', то

$$f'_{nml}(x\ldots|y\ldots|z\ldots)=$$

$$=-i\sum\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu}+\ldots+\frac{\partial}{\partial y_\mu}+\ldots+\frac{\partial}{\partial z_\mu}+\ldots\right)f_{nml}(x\ldots|y\ldots|z\ldots). \quad (5.17)$$

Определим вектор «вакуумного» состояния F_0. В полной аналогии с трехмерной трактовкой полагаем

$$a(x)F_0=0;\quad b(x)F_0=0;\quad c(z)F_0=0;\quad (F_0,\ F_0)=1. \quad (5.18)$$

Очевидно, что $P_\mu F_0=0$, причем состояние F_0 будет обладать наименьшей энергией, если все амплитуды $f_{nml}(x\ldots|y\ldots|z\ldots)$ содержат только положительные частоты.

До сих пор для построения обобщенного функционала Фока были использованы только перестановочные соотношения (5.24). Чтобы установить соответствие с функционалом Ω (см. § 5, 1), нужно выразить причинные операторы χ, $\bar\chi$ и Φ через операторы рождения a^+, b^+, c^+ и поглощения a, b, c. Для этого необходимо предположить, что в представлении с вектором состояния (5.13) операторы поля χ, $\bar\chi$ и Φ можно подразделить на рождающие и поглощающие части, причем все рождающие части и все поглощающие части в отдельности коммутируют или антикоммутируют. Формулы (5.1) и (5.12) будут выполнены только тогда, когда перестановки между рождающими χ^c, $\bar\chi^c$, Φ^c и поглощающими частями χ^a, $\bar\chi^a$, Φ^a равны некоторым функциям σ_F и d_F:

$$\left.\begin{aligned}&\{\chi^a(x),\ \bar\chi^c(y)\}=\sigma_F(x,\ y);\\&\{\bar\chi^a(x),\ \chi^c(y)\}=-\sigma_F(y,\ x);\end{aligned}\quad [\Phi^a(x),\ \Phi^c(y)]=d_F(x,\ y)=d_F(y,\ x).\right\} \quad (5.19)$$

Это значит, что по отношению к обобщенному функционалу Фока F операторы χ, $\bar\chi$ и Φ можно представить в виде

$$\left.\begin{aligned}\chi(x)&=a(x)-\int\sigma_F(x,\ y)\,b^+(y)\,d^4y,\\\bar\chi(x)&=b(x)+\int a^+(y)\,\sigma_F(y,\ x)\,d^4y,\\\Phi(x)&=c(x)+\int d_F(x,\ y)\,c^+(y)\,d^4y.\end{aligned}\right\} \quad (5.20)$$

Теперь можно установить связь обобщенного функционала Фока F с функционалом внешних источников Ω (см. формулы (5.10) и (5.11)), относительно которого операторы χ, $\bar\chi$ и Φ являются операторами функциональных производных. Функционалы F и Ω связаны преобразованием

$$F=R\Omega, \quad (5.21а)$$

где

$$R=\exp\left\{\int\left[a^+(x)\,\sigma_F(x,\ y)\,b^+(y)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{2}c^+(x)\,d_F(x,\ y)\,c^+(y)\right]d^4xd^4y\right\}, \quad (5.21б)$$

причем $\pi=-ia^+$; $\bar\pi=ib^+$; $\Pi=ic^+$.

Преобразование (5.21) соответствует преобразованию (4.36) от производящего функционала для T-функций к производящему функционалу для фейнмановских амплитуд, если σ_F и d_F — фейнмановские функции Грина S_F и Δ_F, что, впрочем, следует и из (5.19).

Соответствие между четырехмерным формализмом и аппаратом обычной теории может быть теперь выражено равенством [37]

$$T_{nml}(x_1 \ldots x_n \mid y_1 \ldots y_m \mid z_1 \ldots z_l) \equiv$$
$$\equiv (\Psi_0, T[\psi(x_1) \ldots \psi(x_n) \bar{\psi}(y_1) \ldots \bar{\psi}(y_m) \varphi(z_1) \ldots \varphi(z_l)] \Psi) =$$
$$= (F_0, \chi(x_1) \ldots \chi(x_n) \bar{\chi}(y_1) \ldots \bar{\chi}(y_m) \Phi(z_1) \ldots, \Phi(z_l) F\{\bar{a}, \bar{b}, c\}), \quad (5.22)$$

где Ψ_0, Ψ — векторы состояния, а ψ, $\bar{\psi}$ и φ — операторы поля в гейзенберговском представлении; в правой части стоит матричный элемент «четырехмерной» теории. Если воспользоваться преобразованием (5.21), то мы найдем другую формулу, связывающую матричные элементы четырехмерной и трехмерной трактовок:

$$(\Psi_0, T[\psi(x_1) \ldots \psi(x_n) \bar{\psi}(y_1) \ldots \bar{\psi}(y_m) \varphi(z_1) \ldots \varphi(z_l)] \Psi) =$$
$$= (F_0, \chi(x_1) \ldots \chi(x_n) \bar{\chi}(y_1) \ldots \bar{\chi}(y_m) \Phi(z_1) \ldots \Phi(z_l) \Omega\{\eta, \bar{\eta}, I\}). \quad (5.23)$$

В (5.22) операторы χ, $\bar{\chi}$, Φ должны быть представлены в виде (5.20); в (5.23) действие χ, $\bar{\chi}$ и Φ на Ω и F_0 определяется формулами (5.7), (5.11) и (5.21б).

3. Функциональное преобразование Фурье. В п. 1 § 5 было найдено выражение (5.5) для вектора состояния $\Omega\{\chi', \bar{\chi}' \Phi'\}$ в случае, когда операторы χ, $\bar{\chi}$ и Φ являются функциями, а π, $\bar{\pi}$ и Π — операторы функциональных производных. Реальному же случаю, как было установлено там же, однако, соответствует представление, где χ, $\bar{\chi}$ и Φ — не функции, а операторы функциональных производных; операторами же умножения здесь являются π, $\bar{\pi}$ и Π (формула (5.11)). Поэтому общее решение задачи о взаимодействующих полях, т. е. решение уравнения (5.10) с условием (5.11), можно получить с помощью функционального преобразования Фурье из найденного ранее функционала (5.5).

Пусть $F\{I\}$ есть функционал функции $I(x)$, зависящей от пространственно-временной переменной x. Разобьем все пространство и время на n ячеек одинакового объема и вместо функции $I(x)$ будем рассматривать систему ее средних значений $I_1, \ldots I_k, \ldots I_n$ в ячейках (k — номер ячейки). Тогда функционал $F\{I\}$ будет функцией $F(I_1 \ldots I_n)$ от значений $I_1 \ldots I_n$. Преобразование Фурье для $F(I_1 \ldots I_n)$ будет иметь вид

$$F(I_1 \ldots I_n) = \int e^{-i \sum I_k \Phi'_k} F(\Phi'_1 \ldots \Phi'_n) \frac{d\Phi'_1}{\sqrt{2\pi}} \ldots \frac{d\Phi'_n}{\sqrt{2\pi}},$$

где Φ'_k относится также к k-й ячейке. Переходя к пределу, когда каждая ячейка содержит только одну пространственно-временную точку, мы получаем для $F\{I\}$ представление посредством континуального интеграла

$$F\{I\} = \int e^{-i \int I(x) \Phi'(x) d^4 x} F\{\Phi'\} d(\Phi'), \quad (5.24)$$

где в $d(\Phi') = \prod_k \frac{d\Phi'_k}{\sqrt{2\pi}}$ индекс k пробегает все точки пространства — времени.

Применение оператора

$$\Phi(x) = i \frac{\delta}{\delta I(x)}$$

к функционалу F приводит к появлению множителя Φ' под интегралом. Мы

можем говорить, что $F\{\Phi'\}$ есть функционал в представлении, где оператором умножения является $\Phi(x)$, а $F\{I\}$ связан с представлением, где Φ — оператор функциональной производной по I.

Аналогично для функционала $\Omega\{\eta, \bar{\eta}, I\}$ Фурье-образом будет функционал $\Omega\{\chi', \bar{\chi}', \Phi'\}$, являющийся четырехмерным вектором состояния в представлении, где χ, $\bar{\chi}$ и Φ — операторы умножения. Поэтому общее решение уравнений (5.10) для функционала $\Omega\{\eta, \bar{\eta}, I\}$ можно представить в виде следующего континуального интеграла:

$$\Omega\{\eta, \bar{\eta}, I\} = \int e^{-i\int(\eta\bar{\chi}' + \chi\bar{\eta} + \Phi' I)\, d^4x}\, \Omega\{\chi', \bar{\chi}', \Phi'\}\, d(\chi')\, d(\bar{\chi}')\, d(\Phi'). \qquad (5.25)$$

Подставляя для $\Omega\{\chi', \bar{\chi}', \Phi'\}$ выражение (5.5), находим, что

$$\Omega\{\eta, \bar{\eta}, I\} = \frac{1}{N}\int e^{-i\int(\eta\bar{\chi}' + \chi\bar{\eta} + \Phi' I)\, d^4x}\, e^{iW'}\, d(\chi')\, d(\chi')\, d(\Phi'), \qquad (5.26)$$

где постоянная N^{-1}, равная $\Omega\{\chi', \bar{\chi}', \Phi'\}$ при

$$\chi' = \bar{\chi}' = \Phi' = 0$$

(см. (5.5)), определяется из нормировочного условия.

Нас интересует производящий функционал для вакуумных T-функций. Если обозначить соответствующий четырехмерный вектор сссстояния посредством Ω^0, то из формул соответствия (5.23) мы находим условие нормировки для Ω^0:

$$(F_0, \Omega^0\{\eta, \bar{\eta}, I\}) = 1. \qquad (5.27а)$$

Имея в виду определение (5.18) вектора «вакуумного» состояния F_0, которое в силу (5.21б) и (5.11) равносильно равенствам $(F_0, \pi(x)\Omega') = (F_0, \bar{\eta}(x)\Omega') = 0$ и т. д. при произвольном функционале Ω', мы можем нормировочное условие (5.27а) записать в том же виде, что и граничное условие для функционала $Z\{\eta, \bar{\eta}, I\}$ (см. § 4, 1):

$$\Omega^0\{0, 0, 0\} = 1. \qquad (5.27б)$$

Это значит, что функционал Ω^0 совпадает с Z.

Из условия (5.27б) находим нормировочную постоянную:

$$N = \int e^{iW}\, d(\chi')\, d(\bar{\chi}')\, d(\Phi'). \qquad (5.28)$$

Для T-функций мы получаем тогда из (5.23) и (5.25) выражение в виде континуального интеграла:

$$T(x\ldots|y\ldots|z\ldots) = (F_0, \chi(x)\ldots\bar{\chi}(y)\ldots\Phi(z)\ldots\Omega\{\eta, \bar{\eta}, I\}) =$$
$$= \frac{1}{N}\int \chi'(x)\ldots\bar{\chi}'(y)\ldots\Phi'(z)\ldots e^{iW}\, d(\chi')\, d(\bar{\chi}')\, d(\Phi'), \qquad (5.29)$$

которое можно толковать как усредненное по полям Ферми и Бозе произведение $[\chi'(x)\ldots\bar{\chi}'(y)\ldots\Phi'(z)\ldots]$. Экспонента с действием играет при этом роль весовой функции.

В формулах типа (5.28) и (5.29) можно легко провести либо интегрирование по полю Ферми, либо интегрирование по полю Бозе.

Если функция T не зависит от мезонных координат, то, введя вместо Φ' новую переменную Φ_1, по формуле

$$\Phi'(x) = \Phi_1(x) + \frac{g}{2}\int \Delta_F(x-y)\,\bar{\chi}(y)\,\gamma_5\chi(y)\, d^4y, \qquad (5.30)$$

находим:

$$T(x\ldots|y|\ldots|-)=\frac{1}{N}\int \chi'(x)\ldots\bar{\chi}'(y)\ldots e^{iW_1}d(\chi')\,d(\bar{\chi}'), \qquad (5.31)$$

где

$$W_1=i\int\bar{\chi}(x)D(x)\chi(x)\,d^4x-\frac{ig^2}{2}\int\bar{\chi}(x)\gamma_5\chi(x)\times$$
$$\times\Delta_F(x-y)\bar{\chi}(y)\gamma_5\chi(y)\,d^4x\,d^4y.$$

Вывод формул (5.29) и (5.33) не опирался на теорию возмущений и потому их применимость не связана с величиной постоянной взаимодействия. В этом заключается ценность формул аналогичного типа. Подобные формулы могут быть использованы в качестве исходных при попытках развития метода приближений, отличного от обычного метода возмущений *).

При этом, однако, следует иметь в виду, что интегралы по полю Ферми χ' и $\bar{\chi}'$ имеют здесь символический характер, так как χ' и $\bar{\chi}'$ —антикоммутирующие функции. Поэтому вопрос об интегрировании по полю Ферми требует специального исследования, которое будет проведено в § 6.

§ 6. Вариация оператора и функциональное интегрирование в случае поля Ферми

Символический характер интегрирования по полю Ферми в решении (5.25) тесно связан с символическим характером уравнений (5.10), содержащих вариационные производные по антикоммутирующим функциям. Ниже будет рассмотрено, каким образом интегрирование по полю Ферми можно свести к обычному функциональному интегрированию и как уравнения (5.10) записать без производных по антикоммутирующим функциям. Для выяснения этих вопросов нужно рассмотреть вариацию оператора поля Ферми.

В случае поля Бозе определение вариации оператора поля не вызывает затруднений, поскольку существует представление, в котором оператор поля есть оператор умножения на некоторую (вспомогательную) функцию. В случае поля Бозе вариацию поля $\delta\Phi'$ можно представить, например, следующим образом: если мы разложим поле Бозе $\Phi'(x)$ в ряд по системе базисных функций φ_n [53]:

$$\Phi'(x)=\sum_n\gamma_n\varphi_n(x),$$

то тогда

$$\delta\Phi'(x)=\sum_n\delta\gamma_n\varphi_n(x),$$

а интегрирование по $\Phi'(x)$ будет, таким образом, заменено интегрированием по γ_n.

В случае же поля Ферми возникает затруднение, так как вариация оператора здесь должна антикоммутировать с самим оператором. Поэтому аналогичным путем в случае поля Ферми можно действовать только, если можно определить полную систему антикоммутирующих (базисных) функций $\chi_n(x)$, $\bar{\chi}_n(x)$. Тогда для произвольного поля Ферми χ и $\bar{\chi}$ будет иметь место разложение

$$\chi(x)=\sum_n\alpha_n\chi_n(x);\qquad \bar{\chi}(x)=\sum_n\beta_n\chi_n(x) \qquad (6.1)$$

*) Возможно, что в современной квантовой теории поля вообще не существует области решений для мезонного поля [20].

($\bar{\chi}_n(x)$, вообще говоря, не сопряжено $\chi_n(x)$; см. сноску к формуле (5.1)). Если возможно представление (6.1) для χ и $\bar{\chi}$, то вариации $\delta\chi$ и $\delta\bar{\chi}$ выражаются через вариации чисел α_n и β_n:

$$\delta\chi(x) = \sum \delta\alpha_n \chi_n(x); \qquad \delta\bar{\chi}(x) = \sum \delta\beta_n \bar{\chi}_n(x), \tag{6.2}$$

а функциональное интегрирование по антикоммутирующим величинам $\chi(x)$ и $\bar{\chi}(x)$ сводится к интегрированию по числам α_n и β_n. Таким образом, вопрос сводится к определению базисных антикоммутирующих функций $\chi_n(x)$ и $\bar{\chi}_n(x)$.

Введем полную систему ортогональных функций $\Psi_n(x)$, нормированных согласно условию

$$\int \bar{\Psi}_n(x) Z(x, y) \Psi_m(y) d^4x d^4y = \delta_{nm} \tag{6.3}$$

(здесь $\bar{\Psi}_n = \Psi_n^+ \gamma_4$). В качестве $Z(x, y)$ мы будем использовать либо оператор Дирака $-i\delta^4(x-y) D(y)$, либо оператор Дирака с внешним мезонным полем

$$D(x, y, \Phi) = -i\delta^4(x-y)[D(y) - g\gamma_5 \Phi(y)],$$

так как нас интересует тот случай, когда действие для нуклонного поля отлично от нуля. Кроме того, введем антикоммутирующие операторы A_n и B_n

$$A_n = a_n + b_n^+; \qquad B_m = b_m - a_m^+, \tag{6.4}$$

где a_n^+, b_n^+ — операторы «рождения», а a_n и b_n — («четырехмерные») операторы поглощения:

$$\{a_n, a_m^+\} = \{b_n, b_m^+\} = \delta_{nm},$$

так что

$$a_n F_0 = b_n F_0 = 0$$

(F_0 — «вакуумный функционал», см. (5.18)). Составим операторы

$$\chi_n(x) = A_n \Psi_n(x); \qquad \bar{\chi}_n(x) = B_n \bar{\Psi}_n(x), \tag{6.5}$$

которые, как мы увидим ниже, можно будет использовать в качестве базисных антикоммутирующих функций. Чтобы χ_n и $\bar{\chi}_n$ можно было считать базисными функциями и было верно разложение (6.1), величины χ_n и $\bar{\chi}_n$ (или A_n и B_n) должны быть связаны нормировочным условием, что возможно только, если мы можем ограничиться рассмотрением лишь некоторого класса матричных элементов от операторов χ_n и $\bar{\chi}_n$.

Чтобы выяснить вопрос о нормировке для χ_n и $\bar{\chi}_n$ (или для A_n и B_n), покажем, что произвольный функционал F может быть выражен через функционал F^0, который определяется уравнениями движения (с учетом взаимодействия) и условиями $(F_0, F^0) = 1$, $(F_0, a(x) F^0) = (F_0, b(x) F^0) = (F_0, c(x) F^0) = 0$. Уравнения (5.10) имеют формальное решение в виде

$$\Omega(g) = S\Omega(0),$$

где функционал для невзаимодействующих полей $\Omega(0)$ удовлетворяет (5.10) при $g = 0$, а оператор S является аналогом матрицы рассеяния

$$S = S_0 \exp\left\{g \int N[\bar{\chi}(x) \gamma_5 \chi(x)] \Phi(x) d^4x\right\}, \tag{6.6}$$

где S_0 — нормировочная постоянная. Так как $F(g)$ связано с $\Omega(g)$ преобразованием (5.21), $F=R\Omega$, то обобщенный функционал Фока $F(g)$ выражается через функционал $F(0)$ в отсутствии взаимодействия по формуле [37, 35, 38]

$$F(g)=RSR^{-1}F(0)\equiv S'F(0). \tag{6.7}$$

При этом из (5.21) и (5.10) вытекает, что уравнения для $F(0)$ имеют вид

$$\left.\begin{aligned} D(x)\chi(x)F(0)&=-b^+(x)F(0),\\ D(-x)\bar{\chi}(x)F(0)&=a^+(x)F(0),\\ K(x)\Phi(x)F(0)&=-c^+(x)F(0),\end{aligned}\right\} \tag{6.8}$$

т. е. амплитуды $f^0(x\ldots|y\ldots|z\ldots)$ в $F(0)$ удовлетворяют уравнениям для свободных полей. В частности, производящий функционал $F^0(g)$ для вакуумных фейнмановских амплитуд есть

$$F^0(g)=S'F^0(0)=S'F_0. \tag{6.9}$$

Рассмотрим теперь в качестве примера $F(g)=S'F_{110}(0)$, где

$$F_{110}(0)=\int f_0(x\,|\,y\,|-)\,a^+(x)\,b^+(y)\,d^4x\,d^4y\,F_0.$$

Тогда из (6.8), (6.9) и перестановочности S' с $\bar{\chi}$ и χ следует, что
$F(g)=S'F_{110}(0)=$

$$=-\int f^0(x\,|\,y\,|-)\,D(-x)\bar{\chi}(x)=D(y)\chi(y)\,d^4x\,d^4y\,F^0(g). \tag{6.10}$$

Обобщение (6.10) не представляет трудностей. Формулы типа (6.10) приводят задачу о матричных элементах $\big(F_0,\chi(x)\ldots\chi(y)\ldots\Phi(z)\ldots F(g)\big)$ для произвольного $F(g)$ к задаче о матричных элементах между состояниями F_0 и $F^0(g)$. Так как $F^0(g)$ есть результат применения к «вакуумному» функционалу $F_0=F^0(0)$ оператора S', зависящего от χ, $\bar{\chi}$, Φ, то, следовательно, все разнообразие матричных элементов от χ_n, $\bar{\chi}_m$, появляющихся при вычислениях T-функций или функционалов F и Ω, можно свести к вакуумным матричным элементам от произведений операторов χ_n и $\bar{\chi}_m$:

$$\langle\bar{\chi}_{m_1}(y_1)\,\bar{\chi}_{m_2}(y_2)\ldots\chi_{n_2}(x_2)\,\chi_{n_1}(x_1)\rangle_0,$$

или же

$$\langle B_{m_1}B_{m_2}\ \ldots\ A_{n_2}A_{n_1}\rangle_0,$$

если обозначить

$$\langle M\rangle_0=(F_0,MF_0).$$

Вакуумное среднее от произведений операторов B_m и A_n можно представить в виде определителя, составленного из $\langle B_m A_n\rangle_0$:

$$\langle B_{m_1}\ldots B_{m_r}A_{n_r}\ldots A_{n_1}\rangle_0=\begin{vmatrix}\langle B_{m_1}A_{n_1}\rangle_0 & \langle B_{m_1}A_{n_2}\rangle_0 & \ldots & \langle B_{m_1}A_{n_r}\rangle_0\\ \langle B_{m_2}A_{n_1}\rangle_0 & \langle B_{m_2}A_{n_2}\rangle_0 & \ldots & \langle B_{m_2}A_{n_r}\rangle_0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \langle B_{m_r}A_{n_1}\rangle_0 & \langle B_{m_r}A_{n_2}\rangle_0 & \ldots & \langle B_{m_r}A_{n_r}\rangle_0\end{vmatrix} \tag{6.11}$$

Так как $\langle B_m A_n\rangle_0=\delta_{nm}$, т. е. при вычислении среднего по вакууму оператор $B_n A_n$ может быть заменен на единичный оператор, то результат (6.11) можно также получить с помощью правила, что в *в средних по вакууму* от произведе-

ний операторов $B_{m_1}B_{m_2}\ldots A_{n_1}A_{n_2}\ldots$

$$B_nA_n = -A_nB_n \to 1 \tag{6.12}$$

— произведение двух антикоммутирующих операторов B_n и A_n с одинаковыми значками n эквивалентно единичному оператору.

Формулу (6.12) можно назвать нормировочным условием для операторов A_n и B_n, поскольку (6.3) можно теперь записать в виде

$$\int \bar{\chi}_n(x)\, Z(x, y)\, \chi_m(y)\, d^4x d^4y \to \delta_{nm}. \tag{6.13}$$

Нормировочное условие (6.13) было предложено Мэтьюсом и Саламом[36]. Это условие также следует понимать не буквально, а в том же смысле, что и (6.12).

Теперь для вывода уравнений типа (5.10) не нужно вводить антикоммутирующие функциональные производные. Составим операторы бесконечно малых преобразований G_χ и $G_{\bar{\chi}}$ (см. § 5.1, формула (5.9)). Если рассматриваются только функции от χ, $\bar{\chi}$ и Φ, то G_χ и $G_{\bar{\chi}}$ можно представить в виде

$$\left.\begin{aligned} G_\chi &= \sum \delta\alpha_n \frac{\partial}{\partial\alpha_n}; \\ G_{\bar{\chi}} &= \sum \delta\beta_n \frac{\partial}{\partial\beta_n}, \end{aligned}\right\} \tag{6.14}$$

куда входят только производные по числам. Из принципа действия (5.8) мы получаем тогда вместо первых двух уравнений (5.10) уравнения с обычными производными:

$$\left.\begin{aligned} i\frac{\partial}{\partial\alpha_n}\Omega &= \sum_m \beta_m Q_{mn}\Omega, \\ i\frac{\partial}{\partial\beta_n}\Omega &= \sum_m \alpha_m Q_{nm}\Omega, \end{aligned}\right\} \tag{6.15}$$

где

$$Q_{nm} = \int \bar{\chi}_n(x)\, D(x, y, \Phi')\, \chi_m(y)\, d^4x d^4y. \tag{6.16}$$

Решением уравнений (6.15) и третьего (мезонного) уравнения (5.10) является функционал

$$\Omega\{\alpha, \beta, \Phi'\} = \frac{1}{N}\exp\left\{-i\sum_{nm}\beta_m Q_{mn}\alpha_n + iW_M\right\}, \tag{6.17}$$

где W_M — действие для мезонного поля; N — нормировочная постоянная. Функционал $\Omega\{\alpha, \beta, \Phi'\}$ соответствует вектору состояния $\Omega\{\chi', \bar{\chi}', \Phi'\}$ (формула (5.5)) в представлении, где χ, $\bar{\chi}$, Φ — операторы умножения, ибо α и β считаются числами. Формальное решение задачи о взаимодействующих полях, § 5, 3 было получено с помощью преобразования Фурье для функционала $\Omega\{\chi', \bar{\chi}', \Phi'\}$, зависящего от антикоммутирующих функций $\chi'(x)$, $\bar{\chi}'(x)$ и функции $I(x)$. Теперь для решения этой же задачи необходимо произвести преобразование Фурье для функционала $\Omega\{\alpha, \beta, \Phi'\}$, зависящего от чисел α_n, β_n и функции $\Phi'(x)$. Так как величину Q_{nm} согласно (6.13) можно считать вещественной, то преобразование Фурье для $\Omega\{\alpha, \beta, I\}$ будет возможно, если

$$\alpha_n = \beta_n^* \tag{6.18}$$

и предполагается, что в операторах $D(x)$ и $K(x)$ массы m и μ^2 заменены на $m - i\varepsilon$ и $\mu^2 - i\varepsilon$, поскольку только тогда будут сходиться функциональные интегралы по α, β $I(x)$.

В результате вместо функционала $\Omega\{\eta, \bar{\eta}, I\}$ от антикоммутирующих функций $\eta(x)$ и $\bar{\eta}(x)$ мы находим теперь функционал, зависящий от функции $I(x)$ и чисел ζ_n, ζ_n^*:

$$\omega\{\zeta^*, \zeta, I\} = \int e^{-i\sum(\zeta_n^* \beta_n^* + \zeta_n \beta_n) - i\int I(x)\Phi(x)d^4x} \Omega\{\beta^*, \beta, \Phi\} d(\beta) d(\Phi), \quad (6.19)$$

$$\Omega\{\beta^*, \beta, \Phi\} = \frac{1}{N} \exp\left[-i\sum_{nm} Q_{nm}\beta_n\beta_m^* + iW_M\right], \quad (6.20)$$

который отличается от (5.25) тем, что в (6.19) интегрируется по комплексным числам β_n:

$$d(\beta) = \prod_n \frac{d\beta_n}{\sqrt{2\pi}} \frac{d\beta_n^*}{\sqrt{2\pi}}.$$

Нормировочное условие (5.27б) для вакуумного функционала Ω^0 требует, чтобы $\omega^0\{\zeta^*, \zeta, I\} = 1$ при $\zeta^* = \zeta = I = 0$. Отсюда

$$N = \int \exp\left[-i\sum_{nm}\beta_n Q_{nm}\beta_m^* + iW_M\right] d(\beta) d(\Phi). \quad (6.21)$$

Теперь вычисление интегралов по полю Ферми, т. е. по β_n^* и β_n не представляет каких-либо особых трудностей по сравнению с интегралами по полю Бозе. Переход от (6.17) к (6.19) отличается от функционального преобразования Фурье от (5.5) к (5.25) тем, что в (6.19) не было произведено операторного преобразования Фурье для поля Ферми*).

Операторы χ, $\bar{\chi}$ по отношению к функционалу (6.19) будут иметь вид

$$\left.\begin{aligned} \chi(x) &= \sum_n \chi_n(x)\left(i\frac{\partial}{\partial\zeta_n^*}\right); \\ \bar{\chi}(x) &= \sum_n \bar{\chi}_n(x)\left(i\frac{\partial}{\partial\zeta_n}\right). \end{aligned}\right\} \quad (6.22)$$

Применение операторов χ и $\bar{\chi}$ к функционалу (6.17) согласно (6.22) вводит под интеграл дополнительные множители β_n^* и β_m. Из вида $\Omega\{\beta^*, \beta, \Phi'\}$ вытекает, что при $\zeta = \zeta^* = 0$ интегралы по β_n^* и β_m от произведений коэффициентов β_n^* и β_m на $\Omega\{\beta^*, \beta, \Phi'\}$ будут отличны от нуля только в случае, если эти коэффициенты входят парами $\beta_n\beta_n^*$. Это соответствует тому, что в T-функции (5.22) каждый оператор χ должен входить только вместе с $\bar{\chi}$.

Пользуясь условием (6.12) (или (6.13)), мы можем теперь не писать вакуумный функционал F_0 в определении T-функций:

$$T(x\ldots|y\ldots|z\ldots) = [\chi(x)\ldots\bar{\chi}(y)\ldots\Phi(z)\ldots]\,\omega\{\zeta^*, \zeta, I\}, \quad (6.23)$$

где

$$\Phi(z) = i\frac{\delta}{\delta I(z)},$$

*) Подробные вычисления $\Omega\{\eta, \bar{\eta}, I\}$ с помощью такого операторного преобразования имеются в работе[38].

$\chi(x)$ и $\bar{\chi}(y)$ определяются формулами (6.22), а после дифференцирования в (6.23) нужно положить $\zeta = \zeta^* = I = 0$. Формулы (6.19)—(6.23) и условие (6.13) являются исходными для вычислений T-функций.

Рассмотрим интегрирование по полю Ферми. В качестве примера вычислим точную нуклонную функцию Грина, которая согласно (6.23) равна

$$S'_F(x, y) = \chi(x)\chi(y)\,\omega\{\zeta^*, \zeta, 0\}\,|_{\zeta=\zeta^*=0}. \tag{6.24}$$

Введем обозначение

$$N(\Phi') = N\int \Omega\{\beta^*, \beta, \Phi'\}\,d(\beta); \quad \int N(\Phi')\,d(\Phi') = N. \tag{6.25}$$

Тогда выражение для S'_F можно представить в виде

$$S'_F(x, y) = \frac{1}{N}\int S_F(x, y, \Phi')\,N(\Phi')\,d(\Phi'), \tag{6.26}$$

где, как мы убедимся ниже, $S_F(x, y, \Phi')$ — функция Грина для нуклона во внешнем мезонном поле Φ'. Действительно, для $S_F(x, y, \Phi')$ из формул (6.22) и (6.26) вытекает выражение

$$S_F(x, y, \Phi') = \sum_{l,m} \Psi_l(x)\overline{\Psi}_m(y)\,A_l B_m \int \beta_l^*\,\beta_m \exp\left[-i\sum_n \beta_n\beta_n^*\right]\times$$

$$\times\prod_n \frac{d\beta_n\,d\beta_n^*}{2\pi} = -i\sum_n \chi_n(x)\bar{\chi}_n(y) = -iD^{-1}(x, y, \Phi'), \tag{6.27}$$

где при интегрировании мы положили $Q_{nm} = \delta_{nm}$.

Таким образом, точная нуклонная функция Грина получается из функции Грина во внешнем поле $S_F(x, y, \Phi')$ путем усреднения по всем внешним полям с весовой функцией $N(\Phi')$.

Величина $N(\Phi')$ также преобразуется сравнительно просто с помощью разобранной выше методики. Согласно (6.25)

$$N(\Phi') = \int \exp\left[-i\sum_{nm} Q_{nm}\beta_n\beta_m^* + iW_M\right] d(\beta). \tag{6.28}$$

Выбрав в нормировочном условии (6.13) в качестве $Z(x, y)$ оператор Дирака $-i\delta^4(x-y)\,D(y)$ без внешнего поля, мы находим, что

$$Q_{nm} = -i\int \bar{\chi}_n(x)\,[D(x) - g\gamma_5\Phi'(x)]\,\chi_m(x)\,d^4x =$$

$$= \delta_{nm} + ig\int \bar{\chi}_n(x)\,\gamma_5\Phi'(x)\,\chi_m(x)\,d^4x \equiv \delta_{nm} + igq_{nm}B_nA_m. \tag{6.29}$$

Если бы B_n и A_m были не антикоммутирующими операторами, а числами, т. е. если бы операторы χ и $\bar{\chi}$ относились к полю Бозе, то мы получили бы, что

$$N_B^0(\Phi') = e^{iW_M}N(\Phi) = \int \exp\left[-i\sum_{nm}\beta_n\beta_m^*(\delta_{nm} + igq_{nm})\right] d(\beta) =$$

$$= \int e^{-i\sum_n \lambda_n\lambda_n^*}\,\frac{\partial(\beta, \beta^*)}{\partial(\lambda, \lambda^*)}\,d(\lambda). \tag{6.30}$$

Преобразование от переменных β, β^* к переменным λ, λ^* — это преобразование, диагонализующее квадратичную форму $\Sigma \beta_n \beta_n^* (\delta_{nm} + igq_{nm})$. Якобиан этого преобразования равен обратному детерминанту, составленному из коэффициентов этой квадратичной формы,

$$\frac{\partial(\beta, \beta^*)}{\partial(\lambda, \lambda^*)} = ||\delta_{nm} + igq_{nm}||^{-1} \tag{6.31}$$

и не зависит от λ, λ^*; следовательно,

$$N_B^0 = ||\delta_{nm} + igq_{nm}||^{-1}.$$

В случае, когда χ и $\bar{\chi}$ относятся к полю Ферми, нужно диагонализовать форму $\Sigma \beta_n \beta_m^* (\delta_{nm} + igq_{nm} B_n A_m)$, и мы получаем аналогичным образом, что

$$N^0(\Phi') = ||\delta_{nm} + igq_{nm} B_n A_m||^{-1}.$$

В случае бесконечных детерминантов фредгольмовского типа обратное значение детерминанта $||\delta_{nm} + gG_{nm}||$ равно перманенту формы $(\delta_{nm} - gG_{nm})$, т. е. величине, которая вычисляется по тем же правилам, что и детерминант, но без изменения знаков — только с положительными знаками:

$$N^0(\Phi') = \mathrm{Perm}\,(\delta_{nm} - igq_{nm} B_n A_m).$$

Если теперь в разложении для Perm переставить операторы B_n и A_m так, чтобы воспользоваться формулой $B_n A_n \to 1$, то это приведет к изменению знаков, которое как раз скомпенсирует изменение знаков при переходе от перманента к детерминанту[45]

$$N^0(\Phi') = ||\delta_{nm} + igq_{nm}||. \tag{6.32}$$

Этот же результат можно получить непосредственно из формулы (6.28) после подстановки Q_{nm} из (6.29), разложения $\exp\left[-g \sum_{nm} q_{nm} \beta_n \beta_m^* B_n A_m\right]$ в ряд и почленного интегрирования с использованием равенства $B_n A_n = 1$.

Смысл (6.32) легко выяснить, если привести матрицу q_{nm} к диагональному виду, где

$$q_{nm} = \delta_{nm} q_n;$$

$$N^0 = \prod_n (1 + ig\hat{q}_n),$$

или

$$\ln N^0 = \mathrm{Sp} \ln (1 + ig\hat{q}).$$

Так как

$$q_{nm} = \int \bar{\psi}_n(x) \gamma_5 \Phi'(x) \psi_m(x) d^4x$$

и в силу (6.13) $\Sigma \Psi_n(x) \bar{\Psi}_n(y) = -iS_F(x - y)$, то $\ln N^0(\Phi')$ можно также представить в виде

$$\ln N^0(\Phi') = \mathrm{Sp} \ln (1 - gS_F \gamma_5 \Phi), \tag{6.33}$$

если рассматривать $S_F(x, y)$ как матричные элементы оператора S_F. Дальней-

шее преобразование (6.33) приводит (см., например, [3]) к выражению

$$N^0(\Phi')\exp\left\{-g\,\mathrm{Sp}\,\gamma_5\int_0^1 d\lambda\int S_F(x,x,\lambda\Phi')\,\Phi'(x)\,d^4x\right\}. \qquad (6.34)$$

Формула (6.26) для S'_F, так же как и формула (6.34), выводилась различными способами [43, 44, 45]. Приведенный вывод иллюстрирует способ прямого интегрирования по полю Ферми. Обычно интегрирование по полю Ферми проводится в первую очередь, а приближенные методы функционального интегрирования связываются с исследованием интегралов по полю Бозе [45]. Возможность сведения интегралов по антикоммутирующим функциям к интегралам по обычным числам позволяет обращаться с этими интегралами на равных правах с интегралами по полю Бозе, что, возможно, окажется удобным при исследовании трудностей современной теории.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Фок, Zeit. f. Phys. **49**, 339 (1928).
2. В. А. Фок, Phys. Zs. d. Sow. Union **6**, 425 (1934); Вестник ЛГУ **3**, 108 (1937).
3. В. Б. Берестецкий, А. Д. Галанин, реферативный сборник «Проблемы современной физики» **3** (1955).
4. В. П. Силин, Е. Я. Фейнберг, УФН **56**, вып. 4 (1955).
5. А. А. Смирнов, ЖЭТФ **5**, 687 (1935).
6. А. Г. Власов, ЖЭТФ **10**, 1151 (1940).
7. Ф. И. Федоров, Ученые записки ЛГУ, № 146, вып. 8, серия физ. наук (1942).
8. P. A. M. Dirac, Proc. Irish. Roy. Soc.
9. J. Schwinger, Proc. Nat. Acad. Sci. **37**, 452, 455 (1951); см. также «Проблемы современной физики», № 3, 1955.
10. Feynman, Rev. Mod. Phys. **20**, 367 (1948).
11. Friedrichs, Mathematical aspects of the Quantum Theory of Fields. Inter. Pub., New York, 1953.
12. K. Symanzik, Zs. f. Naturforschung **9a**, № 10 (1954).
13. В. А. Фок, Zs. f. Phys. **75**, 622 (1932).
14. И. Е. Тамм, Journ. of Phys. **9**, 445 (1945).
15. S. M. Dankoff, Phys. Rev. **78**, 382 (1950).
16. M. Cini, Nuovo Cimento **10**, 526, 614 (1953).
17. M. Levy, Phys. Rev. **88**, 72, 725 (1952).
18. A. Klein, Phys. Rev. **90**, 1101 (1953).
19. H. Lehman, Zeits. f. Nat. **8a**, 579 (1953).
20. I. Pirenne, Physica XV, № 11—12, 1023 (1949).
21. F. Dyson, M. Ross, E. E. Salpeter, S. S. Schweber, M. K. Sundaregan, W. M. Visscher, H. A. Bethe, Phys. Rev. **95**, 1644 (1954).
22. F. Dyson, Phys. Rev. **91**, 1543 (1953).
23. R. H. Dalitz, F. I. Dyson, Phys. Rev. **99**, 301 (1955).
24. A. S. Wightman, S. S. Schweber, Phys. Rev. **98**, 812 (1955).
25. 26. Ю. В. Новожилов, ЖЭТФ **22**, № 3 (1952); ДАН **83**, № 2.
27. J. Schwinger, Phys. Rev. **91**, 713 (1953); **91**, 728 (1953); **92**, 1283 (1953); **93**, 615 (1954); **94**, 1362 (1954).
28. P. T. Matthews, A. Salam, Proc. Roy. Soc. **A221**, 128 (1954).
29. R. P. Feynman, Phys. Rev. **80**, 440 (1950); **84**, 108 (1951).
30. Л. Д. Ландау, И. Я. Померанчук, ДАН СССР **102**, 489 (1955); Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков, ДАН **115**, № 4 (1955).
31. W. Heisenberg, Nachr. d. Gött. Akad. d. Wissensch., № 8 (1953).
32. H. Lehmann, K. Symanzik, W. Zimmerman, Nuovo Cimento **1**, № 1 (1955).
33. Y. Katayama, Z. Tokuoka, K. Yamazaki, Nuovo Cimento **2**, 728 (1955).
34. J. Valatine, Proc. Roy. Soc. **A229**, № 1177 (1955).
35. Ю. В. Новожилов, ДАН **104**, 47 (1955); ЖЭТФ **31**, 493 (1956).
36. P. T. Matthews, A. Salam, Nuovo Cimento **2**, 120 (1955).
37. F. Coester, Phys. Rev. **95**, 1318 (1954).

38. Ю. А. Гольфанд, ЖЭТФ **28**, 140 (1955).
39. E. Freese, Zeits. f. Naturf. **8a**, 776 (1953); Nuovo Cimento **11**, 312 (1954).
40. K. Nishijima, Prog. Theor. Phys. **10**, 549 (1953); **12**, № 3 (1954).
41. А. Ахиезер и В. Б. Берестецкий, Квантовая электродинамика, Гостехиздат, 1954.
42. И. Н. Гельфанд, Р. А. Минлос, ДАН СССР **97**, 209 (1954).
43. Е. С. Фрадкин, ДАН СССР **98**, 47 (1954); ЖЭТФ **29**, 121 (1955).
44. Н. Н. Боголюбов, ДАН СССР **99**, 225 (1954).
45. S. F. Edwards, Proc. Roy. Soc. **232A**, 371, 377 (1955).
46. Н. П. Клепиков, ДАН СССР **98**, № 6 (1954).
47. Б. Л. Иоффе, ДАН СССР **95**, 761 (1954); А. Д. Галанин, Б. Л. Иоффе, И. Я. Померанчук, ДАН СССР **98**, 361 (1954).
48. H. Lehmann, Nuovo Cimento **11**, 342 (1954).
49. W. Zimmermann, Suppl. Nuovo Cimento **11**, 43 (1954).
50. K. Symanzik, Zeits. f. Nat. **9a**, 809 (1954).
51. E. Freese, Nuovo Cimento **2**, 50 (1955).
52. I. Watanabe, Prog. Theor. Phys. **10**, 371 (1953).
53. S. F. Edwards, Phil. Mag. **47**, 758 (1954).