

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

ГИДРОДИНАМИКА ГЕЛИЯ II *)

И. М. Халатников

I. ГИДРОДИНАМИКА ГЕЛИЯ II

1. Уравнения гидродинамики гелия II	70
2. Диссипативная функция для жидкого гелия II	77
3. Звук в гелии II:	80
4. Поглощение звука в гелии II	84
5. Об аномальном поглощении звука вблизи λ -точки	99

II. ГИДРОДИНАМИКА РАСТВОРОВ

6. Уравнения гидродинамики растворов посторонних частиц в гелии II	103
7. Диссипативные процессы в растворах	112
8. Звук в растворах посторонних частиц в гелии II	116
9. Гидродинамика растворов двух сверхтекучих жидкостей	118

III. РАЗРЫВЫ И ЗВУК БОЛЬШОЙ АМПЛИТУДЫ В ГЕЛИИ II

10. Разрывы в гелии II	125
11. Звук большой амплитуды в гелии II	130
12. О распространении звука в движущемся гелии II и о влиянии теплового потока на распространение второго звука	135

IV. ТЕПЛООБМЕН МЕЖДУ ТВЁРДЫМ ТЕЛОМ И ГЕЛИЕМ II

13. Квантование упругих волн	139
14. Излучение энергии колеблющейся поверхностью твёрдого тела	143
15. Обмен энергией при соударениях ротонов и фононов с твёрдой стенкой	145
16. Теплообмен между твёрдым телом и жидким гелием II	152
17. Прохождение второго звука через металлические пластины. Поглощение второго звука на стенах цилиндрического сосуда	155

*) Первая статья автора опубликована в УФН, 59, вып. 4 (1956).

I. ГИДРОДИНАМИКА ГЕЛИЯ II

1. Уравнения гидродинамики гелия II

Гидродинамика сверхтекучей жидкости может быть построена, исходя из основных законов сохранения. Таким путём уравнения гидродинамики гелия II были выведены впервые Л. Ландау. Правда, в опубликованной работе¹ приводились лишь уравнения, справедливые при малых значениях скоростей нормального и сверхтекущего движений. Позднее было опубликовано несколько работ, в которых содержался вывод уравнений гидродинамики, справедливых для случая малых скоростей v_n и v_s . Однако эти выводы, в отличие от вывода Л. Ландау, страдали рядом недостатков. Так, Цилсель² дал вывод уравнений гидродинамики гелия II при помощи вариационного метода. Автору, повидимому, не был известен факт неприменимости стандартного вариационного метода к выводу даже уравнений гидродинамики обычных жидкостей. Применение такого стандартного метода позволяет лишь получить уравнения потенциального движения для обычных жидкостей. Неудивительно поэтому, что из вариационных уравнений в выводе Цилселя следует условие

$$\text{rot} \left[\frac{(v_n - v_s) \rho_n}{\rho S} \right] = 0,$$

не имеющее какого-либо физического смысла. Последнего обстоятельства автор не заметил.

Накаджима, Томита и Усуи³ использовали законы сохранения для получения уравнений гидродинамики гелия II. Выбранное ими выражение для энергии единицы объёма гелия II пригодно только для малых значений разности скоростей $v_n - v_s$. Кроме того, авторы этой работы игнорировали при выводе условие потенциальности сверхтекущего движения, без которого уравнения движения вообще не могут однозначно определяться.

Мы начнём с вывода уравнений гидродинамики гелия II, справедливых при любых (не малых) значениях скоростей движения. При этом мы не будем учитывать пока диссипативных процессов⁴.

Рассмотрим жидкий гелий II, в котором одновременно происходят два движения: потенциальное сверхтекущее со скоростью v_s и нормальное со скоростью v_n .

Поскольку импульс и масса всей жидкости сохраняются, можно утверждать, что уравнения, определяющие изменение плотности ρ и импульса \mathbf{j} , должны иметь вид уравнений непрерывности

$$\dot{\rho} + \text{div } \mathbf{j} = 0, \quad (1, 1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} j_i + \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} = 0. \quad (1, 2)$$

Выразим импульс единицы объёма жидкости \mathbf{j} и тензор потока импульса Π_{ik} через их значения в системе отсчёта, в которой отсутствует сверхтекущее движение. При помощи известных формул преобразования находим*)

$$\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}_s + \mathbf{p}, \quad (1,3)$$

$$\Pi_{ik} = \rho v_{si} v_{sk} + p_i v_{sk} + p_k v_{si} + \pi_{ik}. \quad (1,4)$$

Здесь \mathbf{p} — импульс единицы объёма жидкости в системе отсчёта, движущейся со скоростью \mathbf{v}_s ; π_{ik} — симметричный тензор потока импульса в той же системе отсчёта. Вид тензора π_{ik} выяснится в дальнейшем.

Кроме массы и импульса жидкости, сохраняющимися величинами являются полная энергия и полная энтропия. Поэтому можно написать

$$\dot{S} + \operatorname{div} \mathbf{F} = 0, \quad (1,5)$$

$$\dot{E} + \operatorname{div} \mathbf{Q} = 0. \quad (1,6)$$

Здесь S — энтропия, E — энергия, \mathbf{F} — поток энтропии, \mathbf{Q} — поток энергии; все величины взяты для единицы объёма жидкости.

Поток энтропии представим в виде

$$\mathbf{F} = S \mathbf{v}_s + \mathbf{f}. \quad (1,7)$$

Подобно (1, 4) можно написать соотношение, связывающее энергию E с энергией единицы объёма жидкости ε в системе отсчёта, движущейся со скоростью \mathbf{v}_s ,

$$E = \rho \frac{\mathbf{v}_s^2}{2} + \rho \mathbf{v}_s + \varepsilon. \quad (1,8)$$

*) Соотношение, связывающее значения тензора потока импульса в неподвижной системе отсчёта (Π_{ik}) и в системе, движущейся с некоторой скоростью \mathbf{v} (π_{ik}), может быть легко получено в случае классической гидродинамики, где вид тензора Π_{ik} известен. Этот тензор в классической гидродинамике записывается в виде

$$\Pi_{ik} = \rho u_i u_k + p \delta_{ik}$$

(\mathbf{u} — скорость жидкости, p — давление). Выразим скорость жидкости в неподвижной системе отсчёта через скорость жидкости \mathbf{u} в системе отсчёта, движущейся со скоростью \mathbf{v} :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}' + \mathbf{v}.$$

После подстановки этого выражения для \mathbf{u} в приведённую выше формулу для Π_{ik} получаем

$$\Pi_{ik} = \rho v_i v_k + \rho u'_i v_k + \rho u'_k v_i + (\rho u'_i u'_k + p \delta_{ik}).$$

Обозначив импульс единицы объёма жидкости в движущейся системе отсчёта буквой \mathbf{p} , окончательно находим искомое соотношение

$$\Pi_{ik} = \rho v_i v_k + p_i v_k + p_k v_i + \pi_{ik}.$$

Естественно, что полученная формула преобразования тензора сохраняет свой вид и в гидродинамике гелия II.

Для энергии ϵ имеет место термодинамическое тождество

$$d\epsilon = \mu d\rho + T dS + (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s, d\mathbf{p}), \quad (1,9)$$

в котором температура T и химический потенциал μ зависят от всех независимых переменных (ρ , S и \mathbf{p}). Третий член в (1,9) можно рассматривать как определение скорости \mathbf{v}_n , впервые здесь появившейся в наших формулах. Поток энергии \mathbf{Q} выразим через его значение \mathbf{q} в системе отсчёта, движущейся со скоростью \mathbf{v}_s :

$$\mathbf{Q} = \left(\frac{\rho v_s^2}{2} + \mathbf{p} \mathbf{v}_s + \epsilon \right) \mathbf{v}_s + \frac{v_s^2}{2} \mathbf{p} + \pi \mathbf{v}_s + \mathbf{q} \quad (1,10)$$

$$((\pi \mathbf{v}_s)_i = \pi_{ik} v_{sk}).$$

Вид вектора \mathbf{q} будет выяснен в дальнейшем.

Уравнение сверхтекущего движения выбираем таким образом, чтобы было соблюдено условие $\operatorname{rot} \mathbf{v}_s = 0$

$$\dot{\mathbf{v}}_s + \nabla \left(\frac{v_s^2}{2} + \varphi \right) = 0 *). \quad (1,11)$$

Уравнения (1,1), (1,2), (1,5) и (1,11) после того как в них будут в явном виде представлены функции π_{ik} , \mathbf{q} , \mathbf{f} и φ , дадут нам иско-мую систему гидродинамических уравнений гелия II. Уравнение (1,6), выражающее закон сохранения энергии, мы используем для определения вида неизвестных функций π_{ik} , \mathbf{f} , \mathbf{q} и φ . Для этого вычислим производную по времени \dot{E} , выразив в ней производные по времени от термодинамических переменных и скоростей при помощи указанных уравнений. Согласно (1,8) и (1,9), имеем

$$\begin{aligned} \dot{E} &= \left(\frac{v_s^2}{2} + \mu \right) \dot{\rho} + (\rho \mathbf{v}_s + \mathbf{p}) \dot{\mathbf{v}}_s + \mathbf{v}_n \dot{\mathbf{p}} + T \dot{S} = \\ &= - \left(\frac{v_s^2}{2} + \mu \right) \operatorname{div} (\rho \mathbf{v}_s + \mathbf{p}) - \mathbf{v}_n \mathbf{p} \operatorname{div} \mathbf{v}_s - \\ &- (\mathbf{p} + \rho \mathbf{v}_s - \rho \mathbf{v}_n) \nabla \varphi - T \operatorname{div} (S \mathbf{v}_s + \mathbf{f}) - (\rho \mathbf{v}_s + \mathbf{p}) (\mathbf{v}_s \nabla) \mathbf{v}_s - \\ &- \mathbf{v}_n (\mathbf{p} \nabla) \mathbf{v}_s - \mathbf{v}_n (\mathbf{v}_s \nabla) \mathbf{p} - \mathbf{v}_n (\nabla \pi). \end{aligned} \quad (1,12)$$

Далее вычислим $-\operatorname{div} \mathbf{Q}$; согласно (1,10) имеем

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} \mathbf{Q} &= - \left\{ \frac{v_s^2}{2} \operatorname{div} (\rho \mathbf{v}_s + \mathbf{p}) + (\epsilon + \rho \mathbf{v}_s) \operatorname{div} \mathbf{v}_s + \right. \\ &+ \mathbf{v}_s (\rho \mathbf{v}_s + \mathbf{p}, \nabla) \mathbf{v}_s + \mathbf{p} (\mathbf{v}_s \nabla) \mathbf{v}_s + \mathbf{v}_n (\mathbf{v}_s \nabla) \mathbf{p} + \\ &\left. + (\mathbf{v}_s \nabla \rho) \mu + (\mathbf{v}_s \nabla S) T + \operatorname{div} (\pi \mathbf{v}_s) + \operatorname{div} \mathbf{q} \right\}. \end{aligned} \quad (1,13)$$

*) Точнее говоря, из уравнения (1,11) следует $\operatorname{rot} \mathbf{v}_s = \text{const.}$

Приравняв выражение (1,12) для \dot{E} выражению (1,13) для $-\operatorname{div} \mathbf{Q}$, после значительных сокращений находим

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{q} = & -(\pi \nabla) \mathbf{v}_s + (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s) (\nabla \pi) - \\ & - [\varepsilon - TS - \mu \rho - (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s, \mathbf{p})] \operatorname{div} \mathbf{v}_s + [\mathbf{p} - \rho (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)] \nabla \varphi + \\ & + T \operatorname{div} \mathbf{f} + \mu \operatorname{div} \mathbf{p} + \mathbf{v}_n (\mathbf{p} \nabla) \mathbf{v}_s - \mathbf{p} (\mathbf{v}_s \nabla) \mathbf{v}_s. \end{aligned} \quad (1,14)$$

Выражение (1,14) заметным образом упрощается, если задать тензор π_{ik} в виде:

$$\pi_{ik} = -[\varepsilon - TS - \mu \rho - (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s, \mathbf{p})] \delta_{ik} + m_{ik}, \quad (1,15)$$

где m_{ik} — искомый тензор. Подставив это выражение для π_{ik} в (1,14), находим

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{q} = & -(m \nabla) \mathbf{v}_s + (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s) (\nabla m) + \mathbf{p} (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s, \nabla) (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s) + \\ & + \mathbf{v}_n (\mathbf{p} \nabla) \mathbf{v}_s - \mathbf{p} (\mathbf{v}_s \nabla) \mathbf{v}_s + [\mathbf{p} - \rho (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)] \nabla (\varphi - \mu) - \\ & - \nabla T [\mathbf{f} - S (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)] + \operatorname{div} (T \mathbf{f} + \mathbf{p} \mu). \end{aligned} \quad (1,16)$$

При отсутствии диссипации энергии величины m_{ik} , \mathbf{q} , \mathbf{f} и φ являются функциями термодинамических переменных и скоростей и не зависят от их производных по времени и координатам. Это обстоятельство позволяет из (1,16) однозначным образом получить соотношения *):

$$\left. \begin{aligned} m_{ik} &= p_i (v_{nk} - v_{sk}), \quad \mathbf{f} = S (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s), \quad \varphi = \mu, \\ \mathbf{q} &= T \mathbf{f} + \mu \mathbf{p} - (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s, \mathbf{v}_s) \mathbf{p} + (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s) (\mathbf{v}_n \mathbf{p}). \end{aligned} \right\} \quad (1,17)$$

Далее, при помощи (1,15) и (1,17) окончательно получаем

$$\mathbf{F} = \mathbf{f} + S \mathbf{v}_s = S \mathbf{v}_n, \quad (1,18)$$

$$\Pi_{ik} = \rho v_{si} v_{sk} + v_{si} p_k + v_{nk} p_i - [\varepsilon - TS - \mu \rho - (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s, \mathbf{p})] \delta_{ik} \quad (\text{поток импульса}); \quad (1,19)$$

$$\mathbf{Q} = \left(\mu + \frac{v_s^2}{2} \right) (\mathbf{p} + \rho \mathbf{v}_s) + ST \mathbf{v}_n + \mathbf{v}_n (\mathbf{v}_n \mathbf{p}) \quad (\text{поток энергии}). \quad (1,20)$$

Выражение, стоящее в квадратной скобке (1,19), представляет собой не что иное, как полное давление **):

$$p = -\varepsilon + TS + \mu \rho + (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s, \mathbf{p}). \quad (1,21)$$

*) При этом следует помнить, что благодаря условию $\operatorname{rot} \mathbf{v}_s = 0$ имеет место соотношение $\mathbf{v}_n (\mathbf{p} \nabla) \mathbf{v}_s = \mathbf{p} (\mathbf{v}_n \nabla) \mathbf{v}_s$.

**) Давление по определению равно производной от полной энергии жидкости по объёму при постоянных значениях массы ρV , полной энтропии SV и полного импульса ρV . Согласно (1,9), имеем

$$p = -\frac{\partial(\varepsilon V)}{\partial V} = -\varepsilon + TS + \mu \rho + (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s, \mathbf{p}).$$

После подстановки выражений (1,18), (1,19) и (1,20) в соответствующие уравнения полная система гидродинамических уравнений представится в следующем виде:

$$\rho + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \quad (1,22)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{j} + \mathbf{v}_s \operatorname{div} \mathbf{j} + (\mathbf{j} \nabla) \mathbf{v}_s + \mathbf{p} \operatorname{div} \mathbf{v}_n + (\mathbf{v}_n \nabla) \mathbf{p} + \nabla p = 0, \quad (1,23)$$

$$\dot{S} + \operatorname{div} S \mathbf{v}_n = 0, \quad (1,24)$$

$$\dot{\mathbf{v}}_s + \nabla \left(\frac{v_s^2}{2} + \mu \right) = 0. \quad (1,25)$$

Исключив из уравнений (1,25) и (1,23) величину \mathbf{v}_s , получаем уравнение, заменяющее одно из них:

$$\dot{\rho} + \mathbf{p} \operatorname{div} \mathbf{v}_n + (\mathbf{p} \nabla) \mathbf{v}_n + (\mathbf{v}_n \nabla) \mathbf{p} + [\mathbf{p} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{v}_n] + S \nabla T = 0. \quad (1,26)$$

Из соображений симметрии следует, что направление импульса \mathbf{p} совпадает с направлением разности $\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s$. Запишем импульс \mathbf{p} в виде

$$\mathbf{p} = \rho_n (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s) \quad (1,27)$$

ρ_n — плотность жидкости, связанная с нормальным движением. Плотность нормальной части жидкости ρ_n является функцией термодинамических переменных (ρ и s) и разности скоростей $\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s$. При малых значениях разности скоростей $\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s$ зависимость ρ_n от этой разности можно пренебречь.

Согласно (1,3) и (1,27), для полного импульса \mathbf{j} имеем соотношение

$$\mathbf{j} = \mathbf{p} + \rho \mathbf{v}_s = \rho_n \mathbf{v}_n + \rho_s \mathbf{v}_s; \quad (1,28)$$

ρ_s — плотность жидкости, связанная со сверхтекущим движением:

$$\rho_s = \rho - \rho_n. \quad (1,29)$$

Тензор потока импульса Π_{ik} с учётом (1,28) можно переписать в виде

$$\Pi_{ik} = \rho_n v_{ni} v_{nk} + \rho_s v_{si} v_{sk} + p \delta_{ik}. \quad (1,30)$$

Химический потенциал μ наиболее просто выражается в переменных p и T . Согласно (1,21), имеем

$$pd\mu = - SdT + dp - \mathbf{p}d(\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s). \quad (1,31)$$

В случае малых значений разности скоростей $(\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)$ выражение для потенциала μ можно разложить в ряд по указанной разности и ограничиться первым неисчезающим членом. В согласии с (1,31) таким путём находим

$$\mu = \mu_0(p, T) - \frac{\rho_n}{2\rho} (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)^2. \quad (1,32)$$

Функция μ_0 зависит от давления и температуры и удовлетворяет термодинамическому тождеству

$$\rho d\mu_0 = -SdT + dp. \quad (1,33)$$

Остановимся теперь кратко на выводе уравнений гидродинамики гелия II вариационным методом. Для того чтобы сделать подобный вывод непротиворечивым и избежать лишних условий, которые возникли у Цилселя², мы применим несколько видоизменённый метод Клебша⁵. Исходим при этом из функции Лагранжа, которую согласно (1,8) можно записать в виде

$$L = \int \left(\frac{1}{2} \rho \mathbf{v}_s^2 + \rho \mathbf{v}_s - \varepsilon' \right) d\mathbf{v} dt. \quad (1,34)$$

Внутреннюю энергию ε' мы здесь будем считать функцией плотности, энтропии и относительной скорости $\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s$. Наша функция ε' не совпадает с внутренней энергией (1,9) и отличается от неё на полный дифференциал. Подобное преобразование, как хорошо известно, допускается для функции Лагранжа.

Для того чтобы получить полную систему гидродинамических уравнений сверхтекучей жидкости, необходимо варьировать функцию Лагранжа (1,34) с дополнительными условиями. Двумя естественными условиями являются уравнения непрерывности для плотности ρ и энтропии S

$$\dot{\rho} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \quad (1,35)$$

$$\dot{S} + \operatorname{div} S \mathbf{v}_n = 0, \quad (1,36)$$

Мы, таким образом, здесь в этих дополнительных условиях предполагаем, что вся энтропия заключена в нормальной части жидкости и переносится нормальным движением со скоростью \mathbf{v}_n . Однако этих условий недостаточно. Следуя⁵, мы их дополним ещё одним условием непрерывности для некоторой функции f

$$\dot{f} + \operatorname{div} f \mathbf{v}_n = 0. \quad (1,37)$$

В окончательные уравнения функция f не войдёт. Введение её в промежуточные этапы вывода позволяет избежать неразумных следствий для величин, имеющих физический смысл.

Найдём условия экстремума интеграла (1,34) с дополнительными условиями (1,35)–(1,37). Для этого образуем сумму

$$\begin{aligned} & \int \left\{ \left(\frac{1}{2} \rho \mathbf{v}_s^2 + \rho \mathbf{v}_s - \varepsilon' \right) + \alpha (\dot{\rho} + \operatorname{div} \mathbf{j}) + \right. \\ & \quad \left. + \beta (\dot{S} + \operatorname{div} S \mathbf{v}_n) + \gamma (\dot{f} + \operatorname{div} f \mathbf{v}_n) \right\} d\mathbf{v} dt \end{aligned}$$

(α , β , γ – некоторые функции координат и времени).

Варьируем полученный интеграл по переменным ρ , S , \mathbf{j} , \mathbf{v}_s , \mathbf{v}_n и f и результат приравниваем нулю

$$\left\{ \left(-\frac{v_s^2}{2} - \mu - \dot{\alpha} \right) \delta\rho + \left(\mathbf{j} - \rho \mathbf{v}_s - \frac{\partial \epsilon}{\partial \mathbf{v}_s} \right) \delta \mathbf{v}_s + \right. \\ \left. + \left(-S \nabla \beta - f \nabla \gamma - \frac{\partial \epsilon}{\partial \mathbf{v}_n} \right) \delta \mathbf{v}_n + (\mathbf{v}_s - \nabla \alpha) \delta \mathbf{j} + \right. \\ \left. + \delta S (-T - \dot{\beta} - \mathbf{v}_n \nabla \beta) + \delta f (-\dot{\gamma} - \mathbf{v}_n \nabla \gamma) \right\} d\mathbf{v} dt = 0. \quad (1,38)$$

Все полные производные по времени и по пространству мы опускаем. Из (1,38) вытекают следующие шесть условий:

$$\frac{v_s^2}{2} + \mu + \dot{\alpha} = 0, \quad (1,39)$$

$$\mathbf{j} - \rho \mathbf{v}_s - \frac{\partial \epsilon}{\partial \mathbf{v}_s} = 0, \quad (1,40)$$

$$S \nabla \beta + f \nabla \gamma + \frac{\partial \epsilon}{\partial \mathbf{v}_n} = 0, \quad (1,41)$$

$$\mathbf{v}_s - \nabla \alpha = 0, \quad (1,42)$$

$$T + \dot{\beta} + \mathbf{v}_n \nabla \beta = 0, \quad (1,43)$$

$$\dot{\gamma} + \mathbf{v}_n \nabla \gamma = 0. \quad (1,44)$$

Условие (1,42), эквивалентное условию $\text{rot } \mathbf{v}_s = 0$, означает потенциальность сверхтекущего движения. Легко видеть, что оно возникает только в том случае, когда в условиях (1,36) и (1,37) под знаком div находится скорость \mathbf{v}_n . Это условие нарушилось бы, если бы в потоке энтропии имелся член, зависящий от \mathbf{v}_s . Таким образом, условие (1,12) тесно связано с определением потока энтропии в виде $S \mathbf{v}_n$.

Исключая параметр α из уравнений (1,42) и (1,39), получаем уравнение сверхтекущего движения

$$\dot{\mathbf{v}}_s = -\nabla \left(\mu + \frac{v_s^2}{2} \right). \quad (1,45)$$

Далее, согласно нашему определению функции ϵ' ,

$$\frac{\partial \epsilon'}{\partial \mathbf{v}_n} = -\frac{\partial \epsilon'}{\partial \mathbf{v}_s}.$$

Воспользовавшись этим соотношением, исключим из условий (1,40)–(1,44) параметры β , γ и функцию f . Таким путём получаем уравнение движения

$$\dot{\mathbf{p}} + \mathbf{p} \text{ div } \mathbf{v}_n + \nabla (\mathbf{p} \mathbf{v}_n) - [\mathbf{v}_n \text{ rot } \mathbf{p}] + S \nabla T = 0, \quad (1,46)$$

совпадающее с уравнением (1,26). Уравнения (1,35), (1,36), (1,45) и (1,46) представляют собой полную систему гидродинамических уравнений гелия II, справедливую для любых значений скоростей \mathbf{v}_n и \mathbf{v}_s .

2. ДИССИПАТИВНАЯ ФУНКЦИЯ ДЛЯ ЖИДКОГО ГЕЛИЯ II⁶

Система уравнения (1,22) — (1,25) описывает движение жидкого гелия II при отсутствии диссипации энергии. Выясним вид, который приобретают указанные уравнения при наличии диссипативных процессов. Естественно, что неравновесность приводит к появлению дополнительных членов во всех уравнениях, за исключением уравнения непрерывности. Это объясняется тем, что в отсутствии равновесия понятие потока вещества неопределённо, поэтому возникающая в связи с этим свобода позволяет выбрать вектор \mathbf{j} таким же, как и в случае наличия равновесия. В результате уравнение непрерывности сохраняет свой обычный вид

$$\dot{\rho} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0. \quad (2,1)$$

В остальные гидродинамические уравнения (кроме уравнения непрерывности) добавим некоторые дополнительные члены, учитывающие диссипативные процессы, и постараемся выяснить их конкретный вид

$$\frac{\partial}{\partial t} j_i + \frac{\partial}{\partial x_k} (\Pi_{ik} + \tau_{ik}) = 0, \quad (2,2)$$

$$\dot{\mathbf{v}}_s + \nabla \left(\mu + \frac{v_s^2}{2} + h \right) = 0. \quad (2,3)$$

Дополнительные члены τ_{ik} и h включены в уравнения таким образом, что уравнения (2,2) и (2,3) попрежнему сохраняют вид уравнений непрерывности и, кроме того, выполняется условие $\operatorname{rot} \mathbf{v}_s = 0$. Что касается уравнения для энтропии, то оно при наличии диссипации уже не имеет вида уравнения непрерывности. Полная энтропия в этом случае не сокращается, а возрастает. Скорость возрастания энтропии определяется диссипативной функцией. Вид этой функции мы также определим. Будем исходить из того, что полная энергия системы

$$\int E dv = \int \left(\frac{1}{2} \rho \mathbf{v}_s^2 + \mathbf{v}_s \mathbf{p} + \varepsilon \right) dv, \quad \mathbf{p} = \mathbf{j} - \rho \mathbf{v}_s \quad (2,4)$$

сохраняется. Поэтому производная по времени от энергии единицы объёма жидкости E должна равняться дивергенции некоторого вектора \mathbf{Q}' (потока энергии, который, естественно, теперь уже не равен \mathbf{Q} (1,29)).

Внутренняя энергия определяется тождеством (1,3). Дифференцируя выражения (2,4) по времени, получаем

$$\dot{E} = \dot{\rho} \left(\mu + \frac{v_s^2}{2} \right) + (\dot{\mathbf{v}}_s \mathbf{j}) + (\mathbf{v}_n \dot{\mathbf{p}}) + T \dot{S}. \quad (2,5)$$

Далее выразим временные производные при помощи уравнений (2,1) — (2,3); в результате несложных преобразований получаем

$$\begin{aligned} \dot{E} = -\operatorname{div} \left\{ \mathbf{j} \left(\mu + \frac{v_s^2}{2} \right) + ST \mathbf{v}_n + (\mathbf{v}_n \mathbf{p}) \mathbf{v}_n + \right. \\ \left. + h(\mathbf{j} - \rho \mathbf{v}_n) + \tau \mathbf{v}_n \right\} - \frac{\partial}{\partial x_k} (v_{ni} \mu_{ik}) + T (\dot{S} + \operatorname{div} S \mathbf{v}_n) + \\ + h \operatorname{div} (\mathbf{j} - \rho \mathbf{v}_n) + \tau \operatorname{div} \mathbf{v}_n + \frac{1}{2} \mu_{ik} \times \\ \times \left(\frac{\partial v_{ni}}{\partial x_k} + \frac{\partial v_{nk}}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_{nl}}{\partial x_l} \right). \quad (2,6) \end{aligned}$$

Симметричный тензор τ_{ik} мы выбрали в виде

$$\tau_{ik} = \tau \delta_{ik} + \mu_{ik}, \quad (2,7)$$

где μ_{ik} — симметричный тензор с равным нулю следом. В неравновесных условиях в выражении для потока энергии появляется дополнительный член \mathbf{q} , вид которого мы выясним. Прибавим и вычтем в правой части (2,6) выражение $\operatorname{div} \mathbf{q}$. Таким путём находим

$$\begin{aligned} \dot{E} = -\operatorname{div} \left\{ \mathbf{j} \left(\mu + \frac{v_s^2}{2} \right) + ST \mathbf{v}_n + (\mathbf{v}_n \mathbf{p}) \mathbf{v}_n + h(\mathbf{j} - \rho \mathbf{v}_n) + \right. \\ \left. + \tau \mathbf{v}_n + \mathbf{q} + \mathbf{v} \right\} + T \left[\dot{S} + \operatorname{div} \left(S \mathbf{v}_n + \frac{\mathbf{q}}{T} \right) \right] + h \operatorname{div} (\mathbf{j} - \rho \mathbf{v}_n) + \\ + \tau \operatorname{div} \mathbf{v}_n + \frac{\mathbf{q} \nabla T}{T} + \frac{1}{2} \mu_{ik} \left(\frac{\partial v_{ni}}{\partial x_k} + \frac{\partial v_{nk}}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_{nl}}{\partial x_l} \right) \\ (v_k = v_{ni} \mu_{ik}). \quad (2,8) \end{aligned}$$

Из соотношения (2,8) однозначно следует выражение для потока энергии

$$\begin{aligned} Q' = \mathbf{j} \left(\mu + \frac{v_s^2}{2} \right) + ST \mathbf{v}_n + (\mathbf{v}_n \mathbf{p}) \mathbf{v}_n + \\ + h(\mathbf{j} - \rho \mathbf{v}_n) + \tau \mathbf{v}_n + \mathbf{q} + \mathbf{v} \quad (2,9) \end{aligned}$$

и уравнение, определяющее скорость изменения энтропии

$$T \left\{ \dot{S} + \operatorname{div} \left(S \mathbf{v}_n + \frac{\mathbf{q}}{T} \right) \right\} = - \left\{ h \operatorname{div} (\mathbf{j} - \rho \mathbf{v}_n) + \tau \operatorname{div} \mathbf{v}_n + \right. \\ \left. + \frac{\mathbf{q} \nabla T}{T} + \frac{1}{2} \mu_{ik} \left(\frac{\partial v_{ni}}{\partial x_k} + \frac{\partial v_{nk}}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_{nl}}{\partial x_l} \right) \right\}. \quad (2,10)$$

Стоящее в правой части уравнения (2,10) выражение представляет

собой диссипативную функцию для гелия II:

$$R = - \left\{ h \operatorname{div} (\mathbf{j} - \rho \mathbf{v}_n) + \tau \operatorname{div} \mathbf{v}_n + \frac{\mathbf{q} \nabla T}{T} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \mu_{ik} \left(\frac{\partial v_{ni}}{\partial x_k} + \frac{\partial v_{nk}}{\partial x_l} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_{nl}}{\partial x_l} \right) \right\}. \quad (2,11)$$

Если пространственные производные от скоростей и термодинамических переменных невелики, то в первом приближении все добавки в уравнении (τ , μ_{ik} , h , \mathbf{q}) являются линейными функциями от указанных производных. Диссипативная функция в таком случае, как известно, является существенно положительной квадратичной формой от тех же производных. Чтобы это требование было удовлетворено, коэффициенты τ , h , μ_{ik} и \mathbf{q} должны иметь следующий вид:

$$\left. \begin{array}{l} \tau = -\zeta_1 \operatorname{div} (\mathbf{j} - \rho \mathbf{v}_n) - \zeta_2 \operatorname{div} \mathbf{v}_n, \\ h = -\zeta_3 \operatorname{div} (\mathbf{j} - \rho \mathbf{v}_n) - \zeta_4 \operatorname{div} \mathbf{v}_n, \\ \mu_{ik} = -\eta \left(\frac{\partial v_{ni}}{\partial x_k} + \frac{\partial v_{nk}}{\partial x_l} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_{nl}}{\partial x_l} \right), \\ \mathbf{q} = -\kappa \nabla T. \end{array} \right\} \quad (2,12)$$

В силу принципа симметрии Онзагера для кинетических коэффициентов имеет место соотношение

$$\zeta_1 = \zeta_4. \quad (2,13)$$

Коэффициенты ζ_1 , ζ_2 , ζ_3 , ζ_4 имеют смысл коэффициентов второй вязкости. Всего таким образом имеется три независимых коэффициента второй вязкости. Коэффициент η имеет смысл коэффициента первой вязкости, κ есть коэффициент теплопроводности гелия II. Запишем теперь в окончательном виде уравнения гидродинамики гелия II с учётом диссипативных членов

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} j_i + \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \eta \left(\frac{\partial v_{ni}}{\partial x_k} + \frac{\partial v_{nk}}{\partial x_l} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_{nl}}{\partial x_l} \right) \right\} + \\ + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \zeta_1 \operatorname{div} (\mathbf{j} - \rho \mathbf{v}_n) + \zeta_2 \operatorname{div} \mathbf{v}_n \right\}, \\ \dot{\mathbf{v}}_s + \nabla \left(\mu + \frac{v_s^2}{2} \right) = \nabla \left\{ \zeta_3 \operatorname{div} (\mathbf{j} - \rho \mathbf{v}_n) + \zeta_4 \operatorname{div} \mathbf{v}_n \right\}, \\ \dot{\rho} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \quad \dot{S} + \operatorname{div} \left(S \mathbf{v}_n + \frac{\mathbf{q}}{T} \right) = \frac{1}{T} R. \end{array} \right\} \quad (2,14)$$

Диссипативная функция R равна

$$R = \zeta_2 (\operatorname{div} \mathbf{v}_n)^2 + \zeta_3 (\operatorname{div} (\mathbf{j} - \rho \mathbf{v}_n))^2 + 2 \zeta_1 \operatorname{div} (\mathbf{j} - \rho \mathbf{v}_n) \operatorname{div} \mathbf{v}_n + \\ + \kappa \frac{(\nabla T)^2}{T} + \frac{1}{2} \eta \left(\frac{\partial v_{ni}}{\partial x_k} + \frac{\partial v_{nk}}{\partial x_l} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_{nl}}{\partial x_l} \right)^2. \quad (2,15)$$

Из положительности функции R следует, что коэффициенты вязкости η и теплопроводности χ являются существенно положительными величинами. Кроме того, коэффициенты ζ_2 и ζ_3 также должны быть положительными. Что же касается коэффициента ζ_1 , то его знак не определён; величина же коэффициента ζ_1 должна удовлетворить неравенству

$$\zeta_1^2 \leq \zeta_2 \zeta_3. \quad (2,16)$$

3. Звук в гелии II

В звуковой волне скорости \mathbf{v}_n и \mathbf{v}_s предполагаются малыми*), а термодинамические величины почти равными равновесным значениям. Распространение звука в гелии II описывается системой гидродинамических уравнений (1,22) — (1,25), которая в данном случае может быть линеаризована. После линеаризации указанные уравнения приобретают вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \quad (3,1)$$

$$\frac{\partial \rho \sigma}{\partial t} + \rho \sigma \operatorname{div} \mathbf{v}_n = 0 \quad (\sigma \rho = S), \quad (3,2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} + \nabla p = 0, \quad (3,3)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} + \nabla \mu = 0. \quad (3,4)$$

Исключим из уравнений (3,1) и (3,3) импульс \mathbf{j} , в результате получим

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = \Delta p. \quad (3,5)$$

Далее из трёх уравнений (3,2), (3,3) и (3,4) исключим скорости \mathbf{v}_n и \mathbf{v}_s . Для этого продифференцируем по времени уравнение (3,2), а к уравнениям (3,3) и (3,4) применим операцию div . Исключив из полученных таким образом уравнений члены $\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{v}_n$ и $\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{v}_s$, получаем

$$\rho_s \Delta \mu - \Delta p + \frac{\rho_n}{\rho \sigma} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho \sigma) = 0. \quad (3,6)$$

Выразим в этом уравнении производную $\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2}$ с помощью уравнения (3,5) и воспользуемся термодинамическим тождеством (1,31). В итоге находим

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} = \frac{\rho_s}{\rho_n} \sigma^2 \Delta T. \quad (3,7)$$

*.) Имеется в виду малость скоростей \mathbf{v}_n и \mathbf{v}_s по сравнению со скоростью звука.

Уравнения (3,6) и (3,7) определяют изменение термодинамических величин в звуковой волне.

Перейдём в указанных уравнениях к независимым переменным p и T , которые представим в виде $p = p_0 + p'$, $T = T_0 + T'$. Величины с индексом нуль есть равновесные значения, а со штрихом — их изменения в звуковой волне. Уравнения (3,6) и (3,7) в результате приобретают вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial p} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \Delta p' + \frac{\partial \rho}{\partial T} \frac{\partial^2 T'}{\partial t^2} = 0, \quad (3,8)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial p} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} + \frac{\partial \sigma}{\partial T} \frac{\partial^2 T'}{\partial t^2} - \frac{\sigma^2 \rho_s}{\rho_n} \Delta T' = 0. \quad (3,9)$$

Ищем решение системы (3,8) — (3,9), представляющее бегущую в некотором направлении плоскую волну. В такой волне величины p' и T' изменяются по закону $e^{i\omega(t - \frac{x}{u})}$ (ось x выбираем в направлении распространения волны, ω — частота, u — скорость звука). При таком законе изменения величин p' и T' система уравнений (3,8) — (3,9) переходит в

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial p} u^2 - 1 \right) p' + \frac{\partial \rho}{\partial T} u^2 T' = 0, \quad (3,10)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial p} u^2 p' + \left(\frac{\partial \sigma}{\partial T} u^2 - \frac{\sigma^2 \rho_s}{\rho_n} \right) T' = 0. \quad (3,11)$$

Условием совместности этих уравнений является равенство нулю их определителя. Раскрывая указанный определитель, получаем биквадратное уравнение

$$u^4 \frac{\partial(\sigma, \rho)}{\partial(T, p)} - u^2 \left(\frac{\partial \sigma}{\partial T} + \sigma^2 \frac{\rho_s}{\rho_n} \frac{\partial \rho}{\partial p} \right) + \frac{\rho_s}{\rho_n} \sigma^2 = 0, \quad (3,12)$$

которое после несложных преобразований присобретает вид

$$u^4 - u^2 \left[\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_\sigma + \frac{\rho_s}{\rho_n} \sigma^2 \left(\frac{\partial T}{\partial \sigma} \right)_p \right] + \frac{\rho_s}{\rho_n} \sigma^2 \left(\frac{\partial T}{\partial \sigma} \right)_p \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_T = 0. \quad (3,13)$$

Уравнение (3,13) определяет две возможные скорости звука в гелии II. Коэффициент теплового расширения $\left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p$ практически оказывается у всех тел очень малым. У гелия II же величина этого коэффициента аномально мала. Поэтому согласно известным термодинамическим соотношениям теплосёмкости c_p и c_v в гелии II практически можно считать равными. Но в таком случае производные $\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_T$ и $\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_\sigma$, связанные соотношением $\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_\sigma = \frac{c_p}{c_v} \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_T$, с большой степенью точности также можно считать равными. Это обстоятельство значительно упрощает уравнение (3,13), его корни

в этом случае равны

$$u_1 = c = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_\sigma}, \quad (3,14)$$

$$u_2 = \sqrt{\frac{\sigma^2 \rho_s}{\rho_n \left(\frac{\partial \sigma}{\partial T}\right)}}. \quad (3,15)$$

Первый корень определяет скорость обычного (первого) звука в гелии II. С такой скоростью, согласно уравнению (3,5), распространяются в гелии II колебания давления (плотности). Второй корень u_2 определяет скорость так называемого второго звука. Согласно уравнению (3,7) с такой скоростью в гелии II распространяются колебания температуры (энтропии). Возможность распространения назатухающих температурных волн является специфическим свойством гелия II. Температурная зависимость скорости второго звука, вычисленная по формуле (3,15), графически изображена на рис. 1. В λ -точке $\rho_s = 0$ и скорость u_2 также обращается в нуль. При достаточно низких температурах (ниже $0,5^\circ\text{K}$), когда все термодинамические величины определяются только фононами, величина скорости u_2 стремится к пределу $c/\sqrt{3}$. Экспериментально второй звук в гелии II был открыт В. Пешковым⁷. Экспериментальные значения скорости второго звука для различных температур, полученные В. Пешковым⁷, приведены на рис. 1. Там же для сравнения приведены наиболее поздние данные Морера и Герлина⁸, производивших измерения скорости второго звука импульсным методом до температуры $0,86^\circ\text{K}$. Как видно из указанного рисунка, теоретические и экспериментальные значения скорости второго звука находятся в хорошем согласии. Проведённые Аткинсоном и Осборном⁹ измерения скорости второго звука вплоть до температуры $0,2^\circ\text{K}$ дали также хорошее совпадение с теоретическими предсказаниями, авторы утверждают, что при температуре $0,2^\circ\text{K}$ скорость второго звука действительно оказалась равной $c/\sqrt{3}$. Однако указанную работу вряд ли можно считать достоверной. При столь низких температурах длина свободного пробега фононов (в этой области температур ротонов практически нет) заметно превосходит длины звуковых волн и поэтому распространение звуковых колебаний невозможно. Более убедительными кажутся результаты Крамерса, ван-ден Берга и Гортера¹⁰, которые для скорости фронта волны второго звука вблизи $0,1^\circ\text{K}$ получили значение, равное 230 м/сек , т. е. скорость, близкую к скорости обычного звука. При столь низких температурах фононы, излученные нагревателем, достигают детектирующего термометра практически без соударений, а скорость фононов, как известно, равна скорости обычного звука c .

Как известно, существование второго звука в гелии II следует не только из теории Ландау, но также и из теории Тиссы¹¹. При

температурах выше 1°K обе теории дают одинаковую температурную зависимость для скорости второго звука. Это совпадение объясняется тем, что в сущности неверные уравнения Тиссы в первом приближении при надлежащем выборе произвольных констант

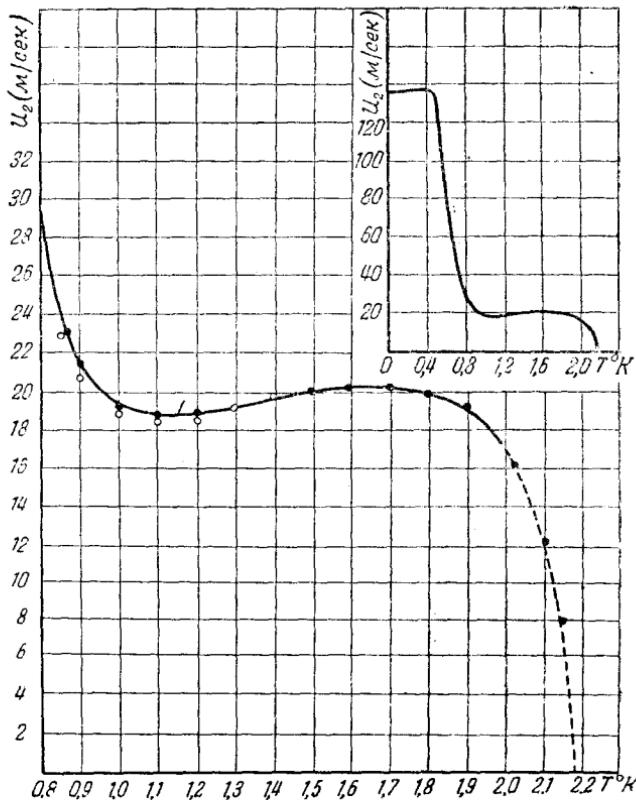


Рис. 1. Температурная зависимость скорости второго звука: ● — Пешков⁷, ○ — Морер и Герлин⁸, — теоретические значения.

оказываются совпадающими с уравнениями Ландау. В области температур, лежащих ниже 1°K , обе теории расходятся в своих предсказаниях относительно хода кривой скорости второго звука: согласно теории Ландау вблизи 1°K имеет место минимум, а при дальнейшем понижении температуры скорость u_2 растёт; согласно же Тиссе скорость звука u_2 , начиная с 1.6°K , при понижении температуры должна монотонно падать. Все данные о скорости второго звука полностью подтверждают наличие минимума на кривой температурной зависимости и тем самым опровергают теорию Тиссы.

4. Поглощение звука в гелии II^{12, 13}

Времена релаксации, характеризующие рождение возбуждений в гелии II. При быстром изменении состояния тела, например при повышении или понижении температуры, в нём нарушается термодинамическое равновесие. Внутренние процессы, возникающие в связи с этим, стремятся восстановить равновесие. Если время релаксации этих процессов достаточно мало (т. е. процессы происходят быстро), то равновесие восстанавливается столь быстро, что оно успевает следовать за изменением состояния. В случае наличия процессов с большими временами релаксации установление равновесия происходит сравнительно медленно и не успевает за изменением состояния. Поскольку процессы установления равновесия являются необратимыми, то, следовательно, они сопровождаются диссипацией энергии. В гелии II имеют место медленные процессы рождения и поглощения элементарных возбуждений (фононов и ротонов). Здесь мы выясним влияние этих процессов на распространение звука в гелии II. Распространение звука в гелии II описывается линеаризованной системой гидродинамических уравнений (3,1) — (3,4). В состоянии равновесия все термодинамические функции в уравнениях (3,1) — (3,4) зависят только от двух переменных, в качестве которых мы выбираем ρ и S . В этом случае, когда в гелии II распространяются звуковые колебания небольшой частоты, можно считать, что установление равновесия успевает следовать за изменением состояния. Следовательно, в каждый момент времени состояние определяется равновесными термодинамическими функциями. Иная картина имеет место при распространении звуковых волн столь большой частоты, что равновесие не успевает устанавливаться и следовать за изменением состояния. В этом случае число фононов и ротонов в каждый момент времени не равно их равновесным значениям, и, следовательно, необходимо учитывать зависимость термодинамических функций не только от ρ и S , но и от числа фононов и ротонов (или соответствующих химических потенциалов). Система уравнений (3,1) — (3,4) не является теперь полной. Её необходимо дополнить уравнениями (см. (15,5,1), (15,6,1)^{*})

$$\left. \begin{aligned} \dot{N}_p + \operatorname{div} N_p \mathbf{v}_n &= -\gamma_{pp} \mu_p + \gamma_{p\phi} \mu_\phi, \\ \dot{N}_\phi + \operatorname{div} N_\phi \mathbf{v}_n &= \gamma_{\phi p} \mu_p - \gamma_{\phi\phi} \mu_\phi, \end{aligned} \right\} \quad (4,1)$$

описывающими изменение числа фононов и ротонов. Исключим из уравнений (3,1) — (3,4), (4,1) скорости \mathbf{v}_n и \mathbf{v}_s , в результате получаем

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = \Delta \rho, \quad (4,2)$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = \frac{S}{\rho_n} (\Delta \rho - \rho_s \Delta \mu), \quad (4,3)$$

^{*} Ссылки на первую статью автора в УФН, 59, вып. 4 отмечены цифрой I.

и, кроме того,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N_p}{\partial t} - \frac{N_p}{S} \frac{\partial S}{\partial t} &= -\gamma_{pp} \mu_p + \gamma_{\phi p} \mu_\phi, \\ \frac{\partial N_\phi}{\partial t} - \frac{N_\phi}{S} \frac{\partial S}{\partial t} &= \gamma_{\phi p} \mu_p - \gamma_{\phi \phi} \mu_\phi. \end{aligned} \right\} \quad (4,4)$$

В системе (4,2) — (4,4) все термодинамические функции можно выразить через четыре переменные p , S , μ_p и μ_ϕ . Энтропию S и плотность p можно представить в виде сумм постоянных равновесных значений и малых добавок, обусловленных звуковой волной, которые мы обозначим теми же буквами, но со штрихом (S' и p'). Решение системы следует искать в виде плоской волны, в которой S' , p' , μ_p и μ_ϕ пропорциональны множителю $e^{i\omega(t-x/u)}$ (u — скорость звука). Условие разрешимости нашей системы запишется тогда в виде равенства нулю некоторого определителя четвёртого порядка, решение которого даёт нам значения скорости звука *).

Для того чтобы не оперировать с определителем четвёртого порядка, мы поступим несколько иначе. Именно, выразим все функции в уравнениях (4,2) и (4,3) через энтропию S и плотность p . При этом во всех операциях дифференцирования следует учитывать зависимость функций от переменных μ_p и μ_ϕ . Таким образом, частная производная некоторой термодинамической функции f по p или S раскрывается следующим образом:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial p} \right)_S = \left(\frac{\partial f}{\partial p} \right)_{S, \mu_p, \mu_\phi} + \frac{\partial f}{\partial \mu_p} \frac{\partial \mu_p}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial \mu_\phi} \frac{\partial \mu_\phi}{\partial p}, \quad (4,5)$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial S} \right)_p = \left(\frac{\partial f}{\partial S} \right)_{p, \mu_p, \mu_\phi} + \frac{\partial f}{\partial \mu_p} \frac{\partial \mu_p}{\partial S} + \frac{\partial f}{\partial \mu_\phi} \frac{\partial \mu_\phi}{\partial S}. \quad (4,6)$$

Производные, взятые при постоянных (равных нулю) значениях химических потенциалов, являются равновесными значениями соответствующих производных. Входящие же в выражения (4,5) и (4,6) производные от химических потенциалов μ_p и μ_ϕ по p и S мы найдём с помощью уравнений (4,3) и (4,4), которые устанавливают связь между μ_p и μ_ϕ , с одной стороны, и малыми изменениями плотности p и энтропии S в плоской волне, с другой стороны.

Выражая, как уже указывалось, малые изменения p и S в звуковой волне в виде, пропорциональном множителю $e^{i\omega(t-x/u)}$, полу-

*). Обращаем внимание на то обстоятельство, что хотя система (4,2) — (4,4) приводит к определителю четвёртого порядка, тем не менее соответствующее уравнение, определяющее значения скорости, оказывается биквадратным (квадратным относительно u^2). Это связано с тем, что пара уравнений (4,4), учитывающая изменение числа элементарных возбуждений, не содержит дифференцирования переменных по координатам, и поэтому при подстановке решений в виде, пропорциональном $\exp[i\omega(t-x/u)]$, скорость в этих уравнениях не появляется. Таким образом квадрат скорости встречается только в первых двух строках получающегося определителя четвёртого порядка, и соответствующее характеристическое уравнение относительно u^2 оказывается квадратным.

чим в качестве условия разрешимости соответствующей (4,2) и (4,3) пары уравнений равенство нулю следующего определителя второго порядка:

$$\begin{vmatrix} u^2 - \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_S & \left(\frac{\partial p}{\partial S} \right)_\rho \\ u^2 - p_s \left(\frac{\partial \chi}{\partial \rho} \right)_S & \frac{\rho_n}{S} u^2 + p_s \left(\frac{\partial p}{\partial S} \right)_\rho \end{vmatrix} = 0. \quad (4,7)$$

Получающееся из (4,7) квадратное уравнение содержит члены различных порядков. Все члены, содержащие производную $\frac{\partial p}{\partial S}$, оказываются малыми. Это связано с тем, что у гелия II теплопроводности c_p и c_v при всех температурах близки друг к другу, производная же $\left(\frac{\partial p}{\partial S} \right)_\rho$ согласно известным термодинамическим соотношениям пропорциональна $V c_p - c_v$. Указанное обстоятельство позволяет записать корни уравнения (4,7) в весьма компактном виде

$$u_1^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_S + \left(\frac{\partial p}{\partial S} \right)_\rho \frac{S}{\rho}, \quad (4,8)$$

$$u_2^2 = \frac{\rho_s}{\rho_n} S \left[\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial S} \right)_\rho - \left(\frac{\partial \chi}{\partial S} \right)_\rho \right]. \quad (4,9)$$

Из уравнения (4,4) можно выразить химические потенциалы μ_p и μ_Φ через малые изменения энтропии S' и плотности ρ' . Для определения μ_p и μ_Φ получаем из (4,4) пару уравнений

$$\left(i\omega \frac{\partial N_p}{\partial \mu_p} + \gamma_{pp} \right) \mu_p - \gamma_{p\Phi} \mu_\Phi = -i\omega \left(\frac{\partial N_p}{\partial \rho} \rho' + \frac{\partial N_p}{\partial S} S' - \frac{N_p}{S} S' \right),$$

$$-\gamma_{\Phi p} \mu_p + \left(i\omega \frac{\partial N_\Phi}{\partial \mu_\Phi} + \gamma_{\Phi\Phi} \right) \mu_\Phi = -i\omega \left(\frac{\partial N_\Phi}{\partial \rho} \rho' + \frac{\partial N_\Phi}{\partial S} S' - \frac{N_\Phi}{S} S' \right).$$

Отсюда легко находим

$$\begin{aligned} \mu_p = \frac{i\omega}{D(\omega)} & \left\{ \left(i\omega \frac{\partial N_\Phi}{\partial \mu_\Phi} + \gamma_{\Phi\Phi} \right) \left(\frac{N_p}{S} S' - \frac{\partial N_p}{\partial S} S' - \frac{\partial N_p}{\partial \rho} \rho' \right) + \right. \\ & \left. + \gamma_{\Phi p} \left(\frac{N_\Phi}{S} S' - \frac{\partial N_\Phi}{\partial S} S' - \frac{\partial N_\Phi}{\partial \rho} \rho' \right) \right\}, \end{aligned} \quad (4,10)$$

$$\begin{aligned} \mu_\Phi = \frac{i\omega}{D(\omega)} & \left\{ \left(i\omega \frac{\partial N_p}{\partial \mu_p} + \gamma_{pp} \right) \left(\frac{N_\Phi}{S} S' - \frac{\partial N_\Phi}{\partial S} S' - \frac{\partial N_\Phi}{\partial \rho} \rho' \right) + \right. \\ & \left. + \gamma_{p\Phi} \left(\frac{N_p}{S} S' - \frac{\partial N_p}{\partial S} S' - \frac{\partial N_p}{\partial \rho} \rho' \right) \right\}, \end{aligned} \quad (4,11)$$

где

$$D(\omega) = \left(i\omega \frac{\partial N_p}{\partial \mu_p} + \gamma_{pp} \right) \left(i\omega \frac{\partial N_\Phi}{\partial \mu_\Phi} + \gamma_{\Phi\Phi} \right) - \gamma_{p\Phi} \gamma_{\Phi p}.$$

Производные от химических потенциалов по ρ и S , от которых согласно (4,5) и (4,6) зависят выражения для скоростей u_1 и u_2 , вычисляются с помощью соотношений (4,10) и (4,11)

$$\left(\frac{\partial \mu_p}{\partial \rho} \right)_S = \frac{i\omega}{D(\omega)} \left\{ - \left(i\omega \frac{\partial N_\Phi}{\partial \mu_\Phi} + \gamma_{\Phi\Phi} \right) \left(\frac{\partial N_p}{\partial \rho} \right)_S + \right. \\ \left. + \gamma_{p\Phi} \left(\frac{\partial N_\Phi}{\partial \rho} \right)_S \right\}, \quad (4,12)$$

$$\left(\frac{\partial \mu_\Phi}{\partial \rho} \right)_S = \frac{i\omega}{D(\omega)} \left\{ - \left(i\omega \frac{\partial N_p}{\partial \mu_p} + \gamma_{pp} \right) \left(\frac{\partial N_\Phi}{\partial \rho} \right)_S + \right. \\ \left. + \gamma_{\Phi p} \left(\frac{\partial N_p}{\partial \rho} \right)_S \right\}, \quad (4,12)$$

$$\left(\frac{\partial \mu_p}{\partial S} \right)_\rho = \frac{i\omega}{D(\omega)} \left\{ \left(i\omega \frac{\partial N_\Phi}{\partial \mu_\Phi} + \gamma_{\Phi\Phi} \right) \left(\frac{N_p}{S} - \frac{\partial N_p}{\partial S} \right) - \right. \\ \left. - \gamma_{p\Phi} \left(\frac{N_\Phi}{S} - \frac{\partial N_\Phi}{\partial S} \right) \right\}, \quad (4,13)$$

$$\left(\frac{\partial \mu_\Phi}{\partial S} \right)_\rho = \frac{i\omega}{D(\omega)} \left\{ \left(i\omega \frac{\partial N_p}{\partial \mu_p} + \gamma_{pp} \right) \left(\frac{N_\Phi}{S} - \frac{\partial N_\Phi}{\partial S} \right) - \right. \\ \left. - \gamma_{\Phi p} \left(\frac{N_p}{S} - \frac{\partial N_p}{\partial S} \right) \right\}. \quad (4,13)$$

После того как получены выражения (4,12) — (4,13) для производных от термодинамических величин, вычисление скоростей u_1 и u_2 уже не представляет труда. Согласно (4,8), (4,9), (4,12) и (4,13) имеем

$$u_1^2 = \left[\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_S + \frac{S}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial S} \right)_\rho \right]_{\mu_p=\mu_\Phi} + \frac{i\omega}{D(\omega)} \left[\left(i\omega \frac{\partial N_\Phi}{\partial \mu_\Phi} + \right. \right. \\ \left. \left. + \gamma_{\Phi\Phi} \right) \left(\frac{\partial p}{\partial \mu_p} \right)^2 + 2\gamma_{p\Phi} \frac{\partial p}{\partial \mu_p} \frac{\partial p}{\partial \mu_\Phi} + \left(i\omega \frac{\partial N_p}{\partial \mu_p} + \gamma_{pp} \right) \left(\frac{\partial p}{\partial \mu_\Phi} \right)^2 \right], \quad (4,14)$$

$$u_2^2 = \frac{\rho_s}{\rho_n} S \left[\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial S} \right)_\rho - \left(\frac{\partial \mu}{\partial S} \right)_p \right]_{\mu_p=\mu_\Phi=0} + \\ + \frac{i\omega}{D(\omega)} \left[\left(i\omega \frac{\partial N_\Phi}{\partial \mu_\Phi} + \gamma_{\Phi\Phi} \right) \left(\frac{\partial p}{\partial \mu_p} - \rho \frac{\partial \mu}{\partial \mu_p} \right)^2 + \right. \\ \left. + 2\gamma_{p\Phi} \left(\frac{\partial p}{\partial \mu_p} - \rho \frac{\partial \mu}{\partial \mu_p} \right) \left(\frac{\partial p}{\partial \mu_\Phi} - \rho \frac{\partial \mu}{\partial \mu_\Phi} \right) + \right. \\ \left. + \left(i\omega \frac{\partial N_p}{\partial \mu_p} + \gamma_{pp} \right) \left(\frac{\partial p}{\partial \mu_\Phi} - \rho \frac{\partial \mu}{\partial \mu_\Phi} \right)^2 \right]. \quad (4,15)$$

Значения скоростей первого и второго звука при равных нулю химических потенциалах суть равновесные значения, соответствую-

щие распространению в гелии II звука с частотой, близкой к нулю. Обозначая указанные значения дополнительным индексом нуль, из (4,14) и (4,15) получим

$$u_{10}^2 = \left[\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_S + \frac{S}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial S} \right)_P \right] = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_S, \quad (4,16)$$

$$u_{20}^2 = \frac{\rho_s}{\rho_n} S \left[\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial S} \right)_P - \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \rho} \right)_P \right] = \frac{\rho_s}{\rho \rho_n} S^2 \left(\frac{\partial T}{\partial S} \right)_P \quad (4,17)$$

(где $\sigma = S/\rho$). Выражения (4,16) и (4,17) совпадают с полученными равновесными значениями. Из выражения (4,14) и (4,15) следует, что скорости u_1 и u_2 являются комплексными величинами. Следовательно, волновые векторы, связанные с частотой соотношением $k = \omega/u$, будут также комплексными величинами. Комплексность волнового вектора, как известно, есть формальное выражение того факта, что имеет место поглощение звука. Действительная часть волнового вектора определяет изменение фазы колебаний с расстоянием, а мнимая часть есть просто коэффициент поглощения.

В случае больших частот значения u_1^2 и u_2^2 согласно (4,14) и (4,15) стремятся к некоторым значениям, соответственно равным

$$u_{1\infty}^2 = u_{10}^2 + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\left(\frac{\partial p}{\partial \lambda_p} \right)^2}{\left(\frac{\partial N_p}{\partial \lambda_p} \right)} + \frac{\left(\frac{\partial p}{\partial \lambda_\Phi} \right)^2}{\left(\frac{\partial N_\Phi}{\partial \lambda_\Phi} \right)} \right]_{\rho, S}, \quad (4,18)$$

$$u_{2\infty}^2 = u_{20}^2 + \frac{\rho_s}{\rho \rho_n} \left[\frac{\left(\frac{\partial p}{\partial \lambda_p} - \rho \frac{\partial \lambda}{\partial \lambda_p} \right)^2}{\left(\frac{\partial N_p}{\partial \lambda_p} \right)} + \frac{\left(\frac{\partial p}{\partial \lambda_\Phi} - \rho \frac{\partial \lambda}{\partial \lambda_\Phi} \right)^2}{\left(\frac{\partial N_\Phi}{\partial \lambda_\Phi} \right)} \right]_{\rho, S}. \quad (4,19)$$

Со скоростями, определяемыми выражениями (4,18) и (4,19), распространялся бы звук столь большой частоты, что количество фононов и ротонов не успевало бы изменяться и, следовательно, было бы постоянным. Встречающиеся в уравнениях настоящего параграфа кинетические коэффициенты γ выражаются через коэффициенты Γ (соотношения 15,13,I))

$$\gamma_{pp} = \Gamma_p + \Gamma_{fp}, \quad \gamma_{p\phi} = \gamma_{\phi p} = \Gamma_{fp}, \quad \gamma_{\phi\phi} = \Gamma_\phi + \Gamma_{f\phi}.$$

В дальнейшем более удобно пользоваться вместо кинетических коэффициентов γ и Γ временами релаксации, которые определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\theta_p} &= \Gamma_p \left(\frac{\partial \lambda_p}{\partial N_p} \right)_{\rho, S}, \quad \frac{1}{\theta_{p\phi}} = \Gamma_{fp} \left(\frac{\partial \lambda_p}{\partial N_p} + \frac{\partial \lambda_\phi}{\partial N_\phi} \right)_{\rho, S}, \\ \frac{1}{\theta_\phi} &= \Gamma_\phi \left(\frac{\partial \lambda_\phi}{\partial N_\phi} \right)_{\rho, S}. \end{aligned} \quad (4,20)$$

С учётом (4,20) выражения (4,14) и (4,15) могут быть переписаны в виде

$$u_1^2 = u_{10}^2 + \frac{i\omega}{\rho} \frac{A_1(\omega)}{D(\omega)},$$

$$A_1(\omega) = \left\{ \frac{\left(i\omega + \frac{1}{\theta_\Phi}\right) \left(\frac{\partial p}{\partial_{\text{r},p}}\right)^2}{\frac{\partial N_p}{\partial_{\text{r},p}}} + \frac{1}{\theta_{p\Phi}} \frac{\left(\frac{\partial p}{\partial_{\text{r},p}} + \frac{\partial p}{\partial_{\text{r},\Phi}}\right)^2}{\frac{\partial N_p}{\partial_{\text{r},p}} + \frac{\partial N_\Phi}{\partial_{\text{r},p}}} + \right.$$

$$\left. + \frac{\left(i\omega + \frac{1}{\theta_p}\right) \left(\frac{\partial p}{\partial_{\text{r},\Phi}}\right)^2}{\frac{\partial N_\Phi}{\partial_{\text{r},\Phi}}} \right\}_{\rho, S}, \quad (4,21)$$

$$D(\omega) = \left\{ \left(i\omega + \frac{1}{\theta_p}\right) \left(i\omega + \frac{1}{\theta_\Phi}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\theta_{p\Phi}} \left[i\omega + \frac{\frac{1}{\theta_p} \frac{\partial N_p}{\partial_{\text{r},p}} + \frac{1}{\theta_\Phi} \frac{\partial N_\Phi}{\partial_{\text{r},\Phi}}}{\frac{\partial N_p}{\partial_{\text{r},p}} + \frac{\partial N_\Phi}{\partial_{\text{r},p}}} \right] \right\}_{\rho, S}.$$

$$u_2^2 = u_{20}^2 + \frac{i\omega}{\rho} \frac{A_2(\omega)}{D(\omega)},$$

$$A_2(\omega) = \left\{ \frac{\left(i\omega + \frac{1}{\theta_\Phi}\right) \left(\frac{\partial p}{\partial_{\text{r},p}} - \rho \frac{\partial \lambda}{\partial_{\text{r},p}}\right)}{\frac{\partial N_p}{\partial_{\text{r},p}}} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\theta_{p\Phi}} \frac{\left(\frac{\partial p}{\partial_{\text{r},p}} + \frac{\partial p}{\partial_{\text{r},\Phi}} - \rho \frac{\partial \lambda}{\partial_{\text{r},p}} - \rho \frac{\partial \lambda}{\partial_{\text{r},\Phi}}\right)^2}{\frac{\partial N_p}{\partial_{\text{r},p}} + \frac{\partial N_\Phi}{\partial_{\text{r},p}}} + \right.$$

$$\left. + \frac{\left(i\omega + \frac{1}{\theta_p}\right) \left(\frac{\partial p}{\partial_{\text{r},\Phi}} - \rho \frac{\partial \lambda}{\partial_{\text{r},\Phi}}\right)^2}{\frac{\partial N_\Phi}{\partial_{\text{r},\Phi}}} \right\}_{\rho, S}. \quad (4,22)$$

Эти выражения определяют зависимость скоростей первого и второго звуков от частоты, обязанную медленным процессам рождения элементарных возбуждений в гелии II.

Рассмотрим с область малых частот, удовлетворяющих условиям

$$\omega \theta_\Phi \ll 1, \quad \omega \theta_{p\Phi} \ll 1. \quad (4,23)$$

Ввиду малости коэффициента Γ_p пренебрежём в (4,21) и (4,22) всеми членами, связанными пятипоточному процессу. С учётом сказанного в указанной области частот выражения (4,21) и (4,22) значительно упрощаются

$$u_1^2 = u_{10}^2 + \frac{i\omega}{\rho} \left[\theta_\Phi \left(\frac{\partial p}{\partial \zeta_p} + \frac{\partial p}{\partial \zeta_\Phi} \right)^2 \frac{\partial \zeta_\Phi}{\partial N_\Phi} + \right. \\ \left. + \theta_{p\Phi} \left(\frac{\partial p}{\partial \zeta_p} \right)^2 \left(\frac{\partial \zeta_p}{\partial N_p} + \frac{\partial \zeta_\Phi}{\partial N_\Phi} \right) \right], \quad (4,24)$$

$$u_2^2 = u_{20}^2 + \frac{i\omega}{\rho} \left[\theta_\Phi \left(\frac{\partial p}{\partial \zeta_\Phi} + \frac{\partial p}{\partial \zeta_p} - \rho \frac{\partial \zeta_p}{\partial \zeta_p} - \rho \frac{\partial \zeta_\Phi}{\partial \zeta_\Phi} \right)^2 \frac{\partial \zeta_\Phi}{\partial N_\Phi} + \right. \\ \left. + \theta_{p\Phi} \left(\frac{\partial p}{\partial \zeta_p} - \rho \frac{\partial \zeta_p}{\partial \zeta_p} \right) \left(\frac{\partial \zeta_p}{\partial N_p} + \frac{\partial \zeta_\Phi}{\partial N_\Phi} \right) \right]. \quad (4,25)$$

Минимая часть волнового вектора, вычисленная с помощью (4,24), даёт коэффициент поглощения $\tilde{\alpha}_1$ первого звука, связанный рассмотренным в этом параграфе медленным процессам

$$\tilde{\alpha}_1 = \text{Im} \left(\frac{\omega}{u_1} \right) = \frac{\omega^2}{2\rho c^3} \left[\theta_\Phi \left(\frac{\partial p}{\partial \zeta_p} + \frac{\partial p}{\partial \zeta_\Phi} \right)^2 \frac{\partial \zeta_\Phi}{\partial N_\Phi} + \right. \\ \left. + \theta_{p\Phi} \left(\frac{\partial p}{\partial \zeta_p} \right)^2 \left(\frac{\partial \zeta_p}{\partial N_p} + \frac{\partial \zeta_\Phi}{\partial N_\Phi} \right) \right]_{\rho, S}. \quad (4,26)$$

Аналогичным образом находим коэффициент поглощения второго звука.

$$\tilde{\alpha}_2 = \text{Im} \left(\frac{\omega}{u_2} \right) = \frac{\omega^2 \rho_s}{2\rho_n \rho u_{20}^3} \left[\theta_\Phi \left(\frac{\partial p}{\partial \zeta_p} + \frac{\partial p}{\partial \zeta_\Phi} - \rho \frac{\partial \zeta_p}{\partial \mu_p} - \rho \frac{\partial \zeta_\Phi}{\partial \mu_\Phi} \right)^2 \frac{\partial \mu_\Phi}{\partial N_\Phi} + \right. \\ \left. + \theta_{p\Phi} \left(\frac{\partial p}{\partial \zeta_p} - \rho \frac{\partial \zeta_p}{\partial \mu_p} \right) \left(\frac{\partial \mu_p}{\partial N_p} + \frac{\partial \mu_\Phi}{\partial N_\Phi} \right) \right]_{\rho, S}. \quad (4,27)$$

Производные $\left(\frac{\partial p}{\partial \zeta_p} \right)$, входящие в выражение для $\tilde{\alpha}_2$, определяются формулами (15,31,I) и (15,32,I), производные же вида $\left(\frac{\partial p}{\partial \zeta_p} - \rho \frac{\partial \zeta_p}{\partial \mu_p} \right)$ согласно (15,22,I) и (15,23,I) равны (в переменных ρ, T)

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial p}{\partial \zeta_p} - \rho \frac{\partial \zeta_p}{\partial \mu_p} \right) &= N_p - S \frac{\partial N_p}{\partial S} = \\ &= N_p \left\{ 1 - \frac{S}{C} \left(\frac{\Delta}{T} + \frac{1}{2} \right) \right\}, \\ \left(\frac{\partial p}{\partial \zeta_\Phi} - \rho \frac{\partial \zeta_\Phi}{\partial \mu_\Phi} \right) &= N_\Phi - S \frac{\partial N_\Phi}{\partial S} = N_\Phi \left\{ 1 - 3 \frac{S}{C} \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (4,28)$$

С помощью экспериментальных значений коэффициента поглощения первого звука в гелии II, как это уже было указано, могут быть определены коэффициенты Γ_Φ и $\Gamma_{\Phi P}$.

Знание указанных коэффициентов позволяет вычислить по формулам (4,20) времена релаксации θ_Φ и $\theta_{\Phi P}$. Времена релаксации θ и $\theta_{\Phi P}$ при не слишком низких температурах оказываются ничтожно малыми, порядка 10^{-10} сек. Температурный ход времён релаксации θ_Φ и $\theta_{\Phi P}$ приведён на рис. 2. Чрезвычайная малость времени релаксации приводит к необычайно малому поглощению звука в гелии II. Заметного поглощения звука можно ожидать для частот порядка $\omega \sim 1/\theta_{\Phi P}$ или $1/\theta_\Phi$.

Производные $\left(\frac{\partial N_p}{\partial \mu_p}\right)_p, S$ и $\left(\frac{\partial N_\Phi}{\partial \mu_\Phi}\right)_p, S$, содержащиеся в формулах (4,20) для θ_Φ и $\theta_{\Phi P}$, удобнее всего вычислять в переменных p и T . Переход к указанным переменным производится с помощью известных свойств якобианов.

$$\left(\frac{\partial N_p}{\partial \mu_p}\right)_S = \frac{\frac{\partial (N_p, S)}{\partial (\mu_p, T)}}{\frac{\partial (\mu_p, S)}{\partial (\mu_p, T)}} = \left(\frac{\partial N_p}{\partial \mu_p}\right)_T - \left(\frac{\partial N_p}{\partial T}\right)_{\mu_p} \frac{\left(\frac{\partial S}{\partial \mu_p}\right)_T}{\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{\mu_p}}. \quad (4,29)$$

Далее воспользуемся соотношением, вытекающим из термодинамического тождества

$$\left(\frac{\partial N_p}{\partial T}\right)_{\mu_p} = \left(\frac{\partial S}{\partial \mu_p}\right)_T$$

и перепишем (4,29) в виде

$$\left(\frac{\partial N_p}{\partial \mu_p}\right)_S = \left(\frac{\partial N_p}{\partial \mu_p}\right)_T - \frac{\left(\frac{\partial N_p}{\partial T}\right)_{\mu_p}^2}{\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{\mu_p}}. \quad (4,30)$$

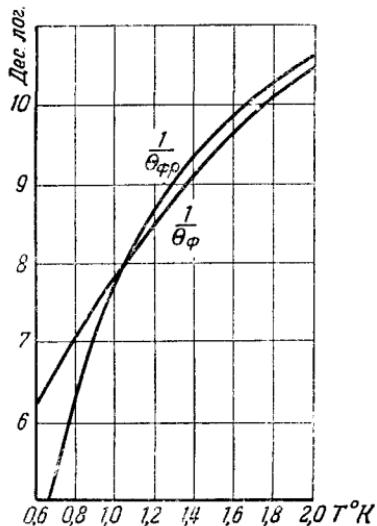


Рис. 2. Температурный ход времён релаксации θ_Φ и $\theta_{\Phi P}$.

Аналогично получаем

$$\left(\frac{\partial N_\Phi}{\partial \mu_\Phi} \right)_S = \left(\frac{\partial N_\Phi}{\partial \mu_\Phi} \right)_T - \frac{\left(\frac{\partial N_\Phi}{\partial T} \right)_{\mu_\Phi}^2}{\frac{\partial S}{\partial T}}. \quad (4,31)$$

Из функции распределения для ротонов (классическая статистика) следует

$$\left(\frac{\partial N_p}{\partial \mu_p} \right)_{T, \varphi} = \frac{N_p}{kT}. \quad (4,32)$$

Вспользовавшись формулой для полного числа фононов в 1 см³ в неравновесном состоянии с химическим потенциалом μ_Φ

$$N_\Phi = (2\pi\hbar)^{-3} \int \left[e^{\frac{cp - \mu_\Phi}{kT}} - 1 \right]^{-1} 4\pi p^2 dp, \quad (4,33)$$

находим

$$\left(\frac{\partial N_\Phi}{\partial \mu_\Phi} \right)_{p, T} \approx \frac{N_\Phi}{kT} \frac{5\pi^2}{36}. \quad (4,34)$$

Значения других равновесных производных получим из соотношений

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial N_p}{\partial T} \right)_{\mu_p} &= \frac{N_p}{T} \left(\frac{1}{2} + \frac{\Delta}{T} \right), \quad \left(\frac{\partial N_\Phi}{\partial T} \right)_{\mu_\Phi} = \frac{3N_\Phi}{T}, \\ \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_{\mu_p \mu_\Phi} &= \frac{k}{T} \left[N_p \left(\frac{\Delta^2}{T^2} + \frac{\Delta}{T} + \frac{3}{4} \right) + N_\Phi \frac{\pi^4}{9} \right]. \end{aligned} \quad (4,35)$$

Воспользуемся теперь полученными соотношениями (4,32), (4,34) и (4,35); согласно (4,30) и (4,31) имеем

$$\left(\frac{\partial \mu_p}{\partial N_p} \right)_{T, S} = \frac{\frac{kT}{N_p} \left[\left(\frac{\Delta^2}{T^2} + \frac{\Delta}{T} + \frac{3}{4} \right) \frac{N_p}{N_\Phi} + \frac{\pi^4}{9} \right]}{\left[\frac{1}{2} \frac{N_p}{N_\Phi} + \frac{\pi^4}{9} \right]}, \quad (4,36)$$

$$\left(\frac{\partial \mu_\Phi}{\partial N_\Phi} \right)_{T, S} = \frac{\frac{36}{5\pi^2} \frac{kT}{N_\Phi} \left[\left(\frac{\Delta^2}{T^2} + \frac{\Delta}{T} + \frac{3}{4} \right) \frac{N_p}{N_\Phi} + \frac{\pi^4}{9} \right]}{\left[\left(\frac{\Delta^2}{T^2} + \frac{\Delta}{T} + \frac{3}{4} \right) + \frac{\pi^4}{9} - \frac{324}{5\pi^2} \right]}. \quad (4,37)$$

Поглощение звука в гелии II. Рассмотренные ранее кинетические явления — первая и вторая вязкости, теплопроводность — представляют собой источники поглощения звука в гелии II. Вычислим коэффициент поглощения звука в гелии II, связанный указанным диссипативным процессом. Линеаризованная система гидродинамических уравнений, описывающая распространение звука в гелии II

с учётом диссипативных процессов, согласно (2,14) записывается в виде

$$\dot{\rho} + \text{div } \mathbf{j} = 0, \quad (4,38)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} j_l + \frac{\partial p}{\partial x_l} = & \eta \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial v_{nl}}{\partial x_k} + \frac{\partial v_{nk}}{\partial x_l} - \frac{2}{3} \delta_{lk} \frac{\partial v_{nl}}{\partial x_l} \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial x_l} \{ \zeta_1 \text{div} (\mathbf{j} - \rho \mathbf{v}_n) + \zeta_2 \text{div} \mathbf{v}_n \}, \end{aligned} \quad (4,39)$$

$$\dot{\mathbf{v}}_s + \nabla \mu = \nabla \{ \zeta_3 \text{div} (\mathbf{j} - \rho \mathbf{v}_n) + \zeta_4 \text{div} \mathbf{v}_n \}, \quad (4,40)$$

$$T \{ (\sigma \rho) + \sigma \rho \text{div} \mathbf{v}_n \} = x \nabla T. \quad (4,41)$$

В плоской звуковой волне все величины слагаются из постоянных равновесных слагаемых и небольших добавок, изменяющихся по закону $e^{i\omega(t-x/u)}$ (x — направление распространения волны, ω — частота звука, u — скорость звука). Скорости \mathbf{v}_n и \mathbf{v}_s в звуковой волне являются также малыми величинами, изменяющимися по этому же закону. Выберем в качестве независимых переменных плотность ρ и энтропию σ (на 1 г гелия II) и исключим из уравнения (4,38) — (4,41) скорости \mathbf{v}_n и \mathbf{v}_s . Ограничивааясь линейными по кинетическим коэффициентам членами, получим два уравнения.

В общем случае эти уравнения выглядят очень громоздкими. Однако, если учесть аномальную малость коэффициента теплового расширения гелия II, что позволяет опустить все члены, содержащие производные $\left(\frac{\partial T}{\partial \rho}\right)_\sigma$ и $\left(\frac{\partial p}{\partial \sigma}\right)_\rho$, то уравнения заметно упрощаются *). Таким путём получаем, во-первых,

$$\begin{aligned} \left(u^2 - \frac{\partial p}{\partial \rho} \right) \rho' = & i\omega \left\{ \left(\frac{4}{3} \eta + \zeta_2 \right) \frac{\rho'}{\rho} + \right. \\ & \left. + \left(\frac{4}{3} \eta + \zeta_2 - \rho \zeta_1 \right) \frac{\sigma'}{\sigma} \right\}. \end{aligned} \quad (4,42)$$

*) Согласно термодинамическому тождеству $d\mu = -\sigma dT + \frac{1}{\rho} dp$ производные $\left(\frac{\partial T}{\partial \rho}\right)_\sigma$ и $\left(\frac{\partial p}{\partial \sigma}\right)_\rho$ связаны соотношением $\rho^2 \frac{\partial T}{\partial \rho} = \frac{\partial p}{\partial \sigma}$. С помощью известных свойств якобианов легко показать, что при малом коэффициенте теплового расширения $\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p$ имеет место равенство

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \sigma}\right)_\rho = \frac{-\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p}{\left(\frac{\partial \sigma}{\partial T}\right)_p \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_T}.$$

и, во-вторых,

$$\left(u^2 - \frac{\partial p}{\partial \rho} \right) \frac{\rho'}{\rho} = - \left(\sigma \frac{\partial T}{\partial \sigma} - \frac{\rho_n}{\rho_s \sigma} u^2 \right) \sigma' + \\ + i\omega \left\{ \zeta_1 \frac{\rho'}{\rho} + \frac{\sigma'}{\sigma} (\zeta_4 - \rho \zeta_3) - \frac{\rho_n}{\rho_s} \frac{x}{T \rho \sigma} \frac{\partial T}{\partial \sigma} \sigma' \right\} \quad (4.43)$$

(ρ' и σ' — изменяющиеся слагаемые в плотности и энергии). Исключим из левой части уравнения (4.43) с помощью уравнения (4.42) член, содержащий ρ' ; в результате указанное уравнение переходит в

$$\left(\sigma \frac{\partial T}{\partial \sigma} - \frac{\rho_n}{\rho_s \sigma} u^2 \right) \sigma' = \\ = i\omega \left\{ \left(\zeta_4 - \frac{\zeta_2}{\rho} - \frac{4}{3} \frac{\eta}{\rho} \right) \frac{\rho'}{\rho} + \right. \\ \left. + \left(\zeta_4 - \rho \zeta_3 - \frac{\zeta_2}{\rho} + \zeta_1 \right) \frac{\sigma'}{\sigma} - \frac{\rho_n}{\rho_s} \frac{x}{T \rho \sigma} \frac{\partial T}{\partial \sigma} \sigma' \right\}. \quad (4.44)$$

Условие совместности системы уравнений (4.42) и (4.44) записывается в виде равенства нулю её определителя

$$\left| \begin{array}{l} u^2 - \frac{\partial p}{\partial \rho} - i\omega \frac{1}{\rho} \left(\frac{4}{3} \eta + \zeta_2 \right) - i\omega \left(\frac{4}{3} \eta + \zeta_2 - \rho \zeta_1 \right) \frac{1}{\sigma} \\ i\omega \left(-\zeta_4 + \frac{\zeta_2}{\rho} + \frac{4}{3} \frac{\eta}{\rho} \right) \frac{1}{\rho} - \left(\sigma \frac{\partial T}{\partial \sigma} - \frac{\rho_n}{\rho_s \sigma} u^2 \right) + \\ + i\omega \left\{ \frac{4}{3} \eta + \zeta_2 - \rho (\zeta_1 + \zeta_4) + \rho^2 \zeta_3 + \frac{\rho_n}{\rho_s} \frac{x}{T \sigma} \frac{\partial T}{\partial \sigma} \right\} \end{array} \right| = 0. \quad (4.45)$$

В области небольших частот звука ω уравнение (4.45), определяющее скорости звука в гелии II, распадается на два уравнения:

$$u^2 - \frac{\partial p}{\partial \rho} = i\omega \frac{1}{\rho} \left(\frac{4}{3} \eta + \zeta_2 \right), \quad (4.46)$$

$$\left(\sigma \frac{\partial T}{\partial \sigma} - \frac{\rho_n}{\rho_s \sigma} u^2 \right) = \\ = i\omega \frac{1}{\rho \sigma} \left\{ \rho (\zeta_1 + \zeta_4) - \rho^2 \zeta_3 - \zeta_2 - \frac{4}{3} \eta - \frac{\rho_n}{\rho_s} \frac{x}{T} \frac{\partial T}{\partial \sigma} \right\}. \quad (4.47)$$

Корень уравнения (4.46)

$$u_1^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s + i\omega \frac{1}{\rho} \left(\frac{4}{3} \eta + \zeta_2 \right) \quad (4.48)$$

определяет скорость первого звука в гелии II с учётом кинетических явлений. Корень же уравнения (4.47)

$$u_2^2 = \sigma^2 \frac{\partial T}{\partial \sigma} \frac{\rho_s}{\rho_n} + \\ + \frac{i\omega}{\rho} \frac{\rho_s}{\rho_n} \left\{ \zeta_2 + \rho^2 \zeta - \rho \zeta_1 - \rho \zeta_4 + \frac{4}{3} \eta + \frac{\rho_n}{\rho_s} \frac{x}{T} \frac{\partial T}{\partial \sigma} \right\} \quad (4.49)$$

определяет скорость второго звука с учётом кинетических явлений. Скорости u_1 и u_2 являются комплексными величинами. Поэтому комплексными величинами будут также волновые векторы $k = \frac{\omega}{u}$. Действительная часть волнового вектора определяет изменение фазы колебаний с расстоянием, мнимая же часть есть просто коэффициент поглощения звука.

Поглощение первого звука в гелии II. Мнимая часть волнового вектора для первого звука согласно (4,48) равна

$$\alpha_1 = \operatorname{Im} \left(\frac{\omega}{u_1} \right) = \frac{\omega^2}{2\rho u_1^3} \left(\frac{4}{3} \eta + \zeta_2 \right). \quad (4,50)$$

Таким образом, коэффициент поглощения первого звука α_1 зависит только от двух кинетических коэффициентов — коэффициента первой вязкости η и коэффициента второй вязкости ζ_2 . То обстоятельство, что другие коэффициенты (ζ_1 , ζ_3 и κ) не входят в выражение для α_1 , связано существенным образом с пренебрежением эффектом теплового расширения гелия II. Так, например, эффект теплопроводности даёт в выражении для коэффициента поглощения первого звука дополнительное слагаемое

$$\alpha_{1\kappa} = \frac{\omega^2}{2\rho u_1^3} \frac{\kappa}{C} \left(\frac{c_p}{c_v} - 1 \right).$$

Коэффициент вязкости η может быть измерен экспериментально независимо от явления распространения звука в гелии II, например, по затуханию крутильных колебаний диска, погруженного в гелий. Следовательно, опыты по поглощению первого звука в гелии II позволяют определить значения коэффициента второй вязкости ζ_2 . Сравнение измеренных значений Пелламом и Сквайром¹⁴ с вычисленными по формуле (15,24, I) позволяет найти постоянные a и b , входящие в формулы для кинетических коэффициентов Γ_Φ и $\Gamma_{\Phi r}$. Величина коэффициента второй вязкости ζ_2 , вычисленная из экспериментальных значений коэффициента поглощения первого звука в гелии II, заметно превосходит известную величину коэффициента вязкости η во всём интервале температур от 1,57 до 2°K, в котором производились измерения. Таким образом, поглощение первого звука в основном определяется второй вязкостью. На рис. 3 приведён температурный ход коэффициента ζ_2 . Коэффициент ζ_2 превосходит по величине коэффициент η во всей области температур, изображённой на рис. 3. Вычисленный в начале параграфа коэффициент поглощения первого звука $\tilde{\alpha}_1$, связанный медленным процессом в гелии II, естественно совпадает с той частью α_1 , которая зависит от второй вязкости. В этом легко убедиться сравнением (4,25) с (4,50) с учётом определения времени релаксации (4,20). Температурная зависи-

мость коэффициента поглощения первого звука в гелии II изображена на рис. 4.

В последнее время Аткинсоном и Чейзом¹⁵ были произведены измерения коэффициента поглощения обычного звука в широком интервале температур, существенно более низких, чем у Пеллама и Сквайра, по которым нормировались наши коэффициенты.

Авторы ставили своей целью проверку настоящей теории. Частота звука равнялась 14 Гц.

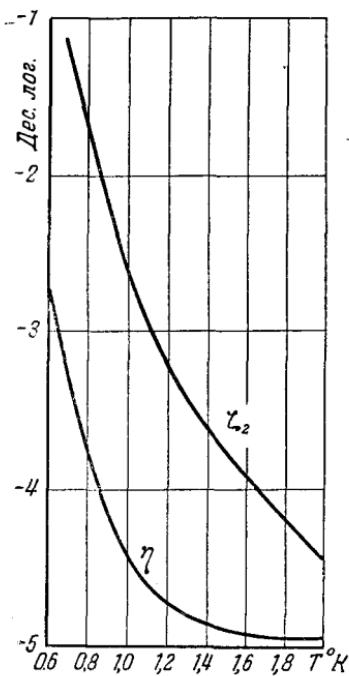


Рис. 3. Температурная зависимость коэффициента первой вязкости η и коэффициента второй вязкости ζ_2 , определяющего поглощение первого звука в гелии II.

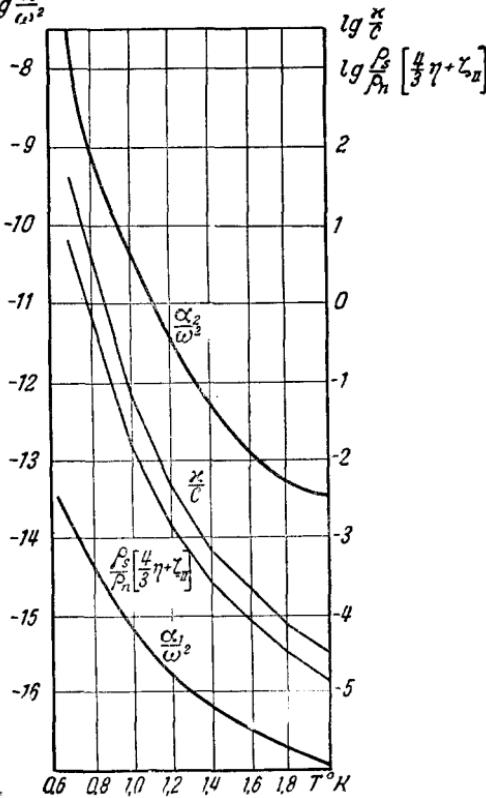


Рис. 4. Температурная зависимость коэффициентов поглощения первого звука α_1 и второго звука α_2 в гелии II.

Измеренные значения коэффициента поглощения звука оказались хорошо совпадающими с теоретическими значениями во всём интервале температур (рис. 5). Таким образом, указанные эксперименты подтверждают изложенные здесь представления о механизме поглощения звука в гелии II.

Поглощение второго звука в гелии II. Коэффициент поглощения второго звука равен мнимой части волнового вектора, вычисленной с помощью выражения (4,49) для скорости звука

$$\alpha_2 = \operatorname{Im} \left(\frac{\omega}{u_2} \right) = \frac{\omega^2}{2\rho} \frac{\rho_s}{u_2^3} \frac{\rho_n}{\rho_s} \left\{ \frac{4}{3} \eta + [\zeta_2 + \rho^2 \zeta_3 - 2\zeta_1] + \frac{\rho_n}{\rho_s} \frac{x}{T} \frac{\partial T}{\partial \sigma} \right\}. \quad (4,51)$$

Таким образом, коэффициент поглощения второго звука слагается из трёх частей, зависящих от первой вязкости, второй вязкости и теплопроводности гелия II. Значения коэффициента первой вязкости и коэффициента теплопроводности нам известны (см. ¹⁴ и ¹⁶), эффекты в поглощении звука, зависящие от этих коэффициентов, легко вычисляются с помощью полученной формулы (4,51). Комбинация из коэффициентов второй вязкости, входящая в формулу (4,51), согласно (4,24) — (4,27), равна

$$\zeta_2 + \rho^2 \zeta_3 - 2\rho \zeta_1 = \frac{1}{\Gamma_\Phi} \left(N - \frac{\partial N}{\partial S} S \right)^2 + \frac{1}{\Gamma_{\Phi p}} \left(N_p - \frac{\partial N_p}{\partial S} S \right)^2. \quad (4,52)$$

С помощью соотношений (4,20), (4,22) и (4,23) легко убеждаемся в том, что выражение (4,51) совпадает в точности с выражением, стоящим в квадратной скобке в (4,27). Последнее вполне естественно, так как коэффициент поглощения второго звука $\tilde{\alpha}_2$ (4,27) и та часть коэффициента α_2 , которая зависит от второй вязкости, учитывают один и тот же эффект, обвязанный медленным релаксационным процессом в гелии II.

Входящие в формулу (4,52) выражения вида $N - \frac{\partial N}{\partial S} S$ определяются формулами (4,27). На рис. 4 приведён температурный ход слагаемых, стоящих в фигурной скобке в (4,51); при всех температурах эффект поглощения звука в гелии II, обвязанный теплопроводности, играет существенную роль и превосходит вязкие эффекты. Вычисленные по формуле (4,51) значения коэффициента поглощения второго звука в гелии II изображены на рис. 4. Благодаря наличию множителя $\frac{\rho_s}{\rho_n}$ в (4,51) и значитель- но меньшему значению скорости второго звука по сравнению со скоростью первого звука коэффициент поглощения второго звука α_2

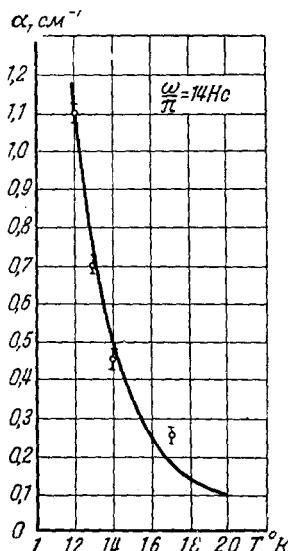


Рис. 5. Коэффициент поглощения первого звука в гелии II: — теоретические значения, ○ — экспериментальные значения Аткинса и Чайза¹⁵.

оказывается на несколько порядков больше, чем коэффициент поглощения первого звука α_1 , при одинаковых значениях частоты ω . Так, при температуре $1,0^\circ\text{K}$ заметное поглощение второго звука будет наблюдаться при частоте $\omega = 10^4 \text{ сек}^{-1}$.

Это обстоятельство было в последнее время экспериментально подтверждено К. Зиновьевой¹⁶, производившей измерения поглощения второго звука в цилиндрическом резонаторе, заполненном гелием II. В области температур выше $1,2^\circ\text{K}$ при применявшихся ею частотах звука (меньше 10^4 сек^{-1}) поглощение определялось главным образом вязкими эффектами на стенках сосуда. В области температур от $0,8$ до $1,2^\circ\text{K}$ ею было обнаружено в полном соответствии с теорией заметное поглощение звука в объеме гелия.

Полученные в этих опытах значения коэффициента поглощения второго звука в объеме, а также температурный ход указанного коэффициента согласуются с теорией (рис. 6). На том же рисунке

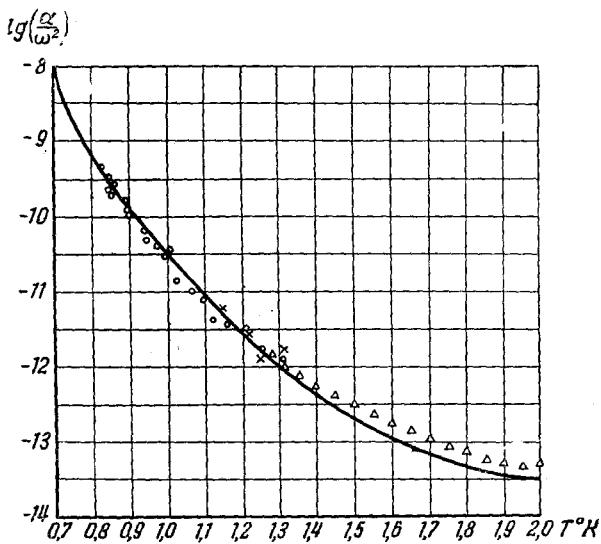


Рис. 6. Коэффициент поглощения второго звука в гелии II: ○ — К. Зиновьева¹⁶; △ — Хансон и Пеллам¹⁷; × — Аткинс и Харт³⁹; — теоретические значения.

приведены результаты измерений поглощения второго звука, полученные Хансоном и Пелламом¹⁷ и Аткинсом³⁹. Они также хорошо согласуются с теоретическими значениями. Здесь уместно отметить, что в опытах по поглощению второго звука по существу измеряется коэффициент теплопроводности гелия II, прямые измерения которого весьма затруднительны вследствие наличия больших макроскопических потоков тепла в гелии II. Следует также отметить, что почти

во всей области исследованных температур (ниже 1,6° К) существенна фононная часть коэффициента теплопроводности, при вычислении которой, кроме характеристик энергетического спектра гелия II (p_0 , μ , c), никаких новых констант не вводилось. Характеристики же спектра находились из термодинамических опытов.

В статьях Дингля¹⁸ и Кронига и Теллуига¹⁹ делалась попытка рассмотреть вопрос поглощения звука в гелии II. Указанные авторы не учитывали явление второй вязкости, существенным образом влияющее на рассматриваемые эффекты. В этих работах также не был выяснен вопрос о роли теплопроводности.

5. Об аномальном поглощении звука вблизи λ -точки²⁰

Общая теория фазовых переходов позволяет рассмотреть явление поглощения звука вблизи λ -точки. Мы покажем, что вблизи λ -точки должно наблюдаться аномально большое поглощение звука.

Вблизи точки фазового перехода второго рода термодинамический потенциал Φ может быть представлен в виде

$$\Phi(p, T, \eta) = \Phi_0(p, T) + A(p, T) \eta^2 + C(p, T) \eta^4 \dots \quad (5,1)$$

Здесь $C > 0$; $A < 0$ в низкотемпературной (несимметричной) фазе; $A > 0$ в высокотемпературной (симметричной) фазе; точка перехода определяется условием $A(p, T) = 0$. При заданном давлении вблизи точки перехода функция $A(p, T)$ разлагается в ряд по разности $T - T_\lambda$ (T_λ — температура перехода)

$$A(p, T) = a(p)(T - T_\lambda). \quad (5,2)$$

Параметр η характеризует степень несимметрии. В симметричной фазе $\eta = 0$, в несимметричной же фазе параметр η отличен от нуля. Зависимость η от температуры вблизи λ -точки определяется из условия минимальности потенциала Φ . Из условия $\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} = 0$ находим неравное нулю значение η_0^2 :

$$\eta_0^2 = -\frac{A}{2C} = \frac{A}{2C}(T_\lambda - T), \quad (5,3)$$

соответствующее некоторому равновесному состоянию несимметричной фазы. Пусть система, находящаяся в несимметричном состоянии, выведена из состояния равновесия. Скорость приближения параметра η к равновесному значению η_0 определяется кинетическим уравнением

$$\frac{d\eta}{dt} = \gamma \frac{\partial \Phi}{\partial \eta}. \quad (5,4)$$

γ — кинетический коэффициент, о котором мы будем предполагать, что он не обладает какими-либо особенностями вблизи T_λ . Разлагая

производную $\frac{d\Phi}{d\eta}$ в ряд по разности $\eta - \eta_0$, при помощи (5,4) находим

$$\frac{d\eta}{dt} = 2\gamma C\eta_0^2 (\eta - \eta_0) = -\frac{1}{\tau} (\eta - \eta_0). \quad (5,5)$$

Отсюда следует, что время релаксации τ , характеризующее установление равновесия в несимметричной фазе, равно

$$\tau = \frac{1}{2C\gamma_0^2}. \quad (5,6)$$

Вблизи λ -точки имеем

$$\tau = -\frac{1}{\gamma a (T_\lambda - T)}. \quad (5,7)$$

Следовательно, время релаксации вблизи точки перехода быстро возрастает по мере приближения к λ -точке. Установление равновесия, таким образом, вблизи λ -точки происходит чрезвычайно медленно, а это должно приводить к заметному затуханию звука. Совершенно очевидно, что такое аномальное затухание звука будет наблюдаться только в несимметричной фазе, т. е. ниже T_λ (при заданном давлении). В симметричной же фазе параметр η тождественно равен нулю во всех состояниях, как равновесных, так и неравновесных, а следовательно, никаких аномалий в поглощении звука не будет.

Пусть в рассматриваемой системе распространяется звуковая волна частоты ω , т. е. в системе происходит адиабатическое периодическое сжатие и разрежение. Согласно М. Леоновичу и Л. Мандельштаму *) квадрат скорости звука в низкотемпературной фазе будет равен

$$c^2 = \frac{1}{1 - i\omega\tau} [c_{\text{равн}}^2 - i\omega\tau c_\eta^2]. \quad (5,8)$$

Здесь $c_{\text{равн}}$ есть скорость звука при процессе столь медленном, что система всё время находится в равновесии. Эта скорость в нашем случае, очевидно, равна равновесной скорости звука c_{II} в низкотемпературной фазе**)

$$c_{\text{равн}} = c_{II}. \quad (5,9)$$

Скорость же c_η есть скорость звука при процессе столь быстром, что параметр η при распространении звуковой волны остаётся постоянным. Вблизи λ -точки скорость c_η равна равновесной скорости звука в высокотемпературной фазе

$$c_\eta = c_I. \quad (5,10)$$

*) См., например, 21.

**) Значения величин в низкотемпературной фазе обозначаем римской цифрой II, а в высокотемпературной — цифрой I.

Таким образом, окончательно имеем

$$c^2 = \frac{1}{1 - i\omega\tau} [c_{II}^2 - i\omega\tau c_I^2]. \quad (5.11)$$

Величина коэффициента поглощения звука α равна мнимой части волнового вектора

$$k = \frac{\omega}{c} = \omega \sqrt{\frac{1 - i\omega\tau}{c_{II}^2 - c_I^2 i\omega\tau}}. \quad (5.12)$$

Предполагая разность значений скоростей c_{II} и c_I малой по сравнению с c_I , находим отсюда

$$\alpha = \operatorname{Im} k = \frac{\omega^2\tau}{1 + \omega^2\tau^2} \frac{1}{2c_I^3} (c_I^2 - c_{II}^2). \quad (5.13)$$

Время релаксации τ вблизи λ -точки определяется формулой (5.7). Оно быстро возрастает при приближении к λ -точке. Согласно (5.13) при приближении к λ -точке (при заданной частоте звука ω) коэффициент поглощения звука также возрастает. В непосредственной же окрестности λ -точки ($\omega\tau \approx 1$) величина α достигает максимума, а затем начинает убывать. Такова общая картина явления аномального поглощения звука вблизи λ -точки в низкотемпературной фазе. В высокотемпературной же фазе никакого аномального поглощения звука не должно быть.

Величина скачка скорости звука в λ -точке $c_{II} - c_I$, входящая в формулу для α , может быть выражена через обычно хорошо известную величину скачка теплопёмкости в λ -точке.

Имея в виду в дальнейшем применить результаты к случаю λ -точки в гелии II, мы получим искомую связь для перехода в жидкости. Исходим из того, что объём V и температура T в точке перехода непрерывны (в качестве независимых переменных выбираем давление p и энтропию S), т. е. их скачки ΔV и ΔT равны нулю:

$$\Delta V = 0, \quad \Delta T = 0. \quad (5.14)$$

Дифференцируя эти равенства по энтропии вдоль кривой перехода, имеем

$$\Delta \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{dp}{dS} \Delta \frac{\partial V}{\partial p} = 0, \quad (5.15)$$

$$\Delta \frac{\partial T}{\partial S} + \frac{dp}{dS} \Delta \frac{\partial T}{\partial p} = 0. \quad (5.16)$$

Учитывая равенство производных $\frac{\partial V}{\partial S} = \frac{\partial T}{\partial p}$, исключим из обоих равенств величину $\Delta \frac{\partial V}{\partial S}$:

$$\Delta \frac{\partial V}{\partial p} = \Delta \frac{\partial T}{\partial S} \left(\frac{\partial S}{\partial p} \right)^2. \quad (5.17)$$

Отсюда получаем искомое соотношение, связывающее скачки скорости звука и теплоёмкости в λ -точке:

$$\Delta \frac{1}{c^2} = -\frac{T}{V} \left(\Delta \frac{1}{c_p} \right) \left(\frac{dS}{dp} \right)^2. \quad (5,18)$$

Производную $\frac{dS}{dp}$ вдоль кривой равновесия фаз можно выразить через коэффициент теплового расширения $\frac{\partial V}{\partial T}$ и производную $\frac{\partial T_\lambda}{\partial p}$

$$\frac{dS}{dp} = \left(\frac{dS}{dp} \right)_T + \left(\frac{dS}{dT} \right)_p \frac{dT_\lambda}{dp} = - \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p + c_p \frac{d \ln T_\lambda}{dp}. \quad (5,19)$$

Полученные выше результаты относительно поглощения звука вблизи λ -точки применимы во всех случаях фазовых переходов второго рода *). Мы их применим для анализа данных по поглощению первого (обычного) звука вблизи λ -точки в гелии II. Чейз ²² наблюдал аномальный рост коэффициента поглощения звука в гелии II при приближении к λ -точке. Выше же λ -точки аномально большого поглощения звука не наблюдалось. Пользуясь данными ²³ для c_p и $\frac{\partial V}{\partial T}$ и данными ²⁴ о зависимости T_λ от давления, при помощи (5,18) находим величину скачка скорости звука в λ -точке:

$$c_{II} - c_1 \approx 12,5 \text{ м/сек.} \quad (5,20)$$

Далее, сравнив экспериментальные значения коэффициента поглощения при различных температурах (применившиеся частоты в ²² равнялись 2 и 12,1 мегацикла в секунду), находим величину времени релаксации τ . Экспериментально полученное значение времени релаксации прекрасно следует температурной зависимости, даваемой формулой (5,7):

$$\tau = \frac{4 \cdot 10^{-13}}{T_\lambda - T} (\text{сек.}) \quad (5,21)$$

В интервале температур, в котором производились измерения, величина ωt не превышала 10^{-2} . Поэтому член $\omega^2 t^2$ в знаменателе выражения (5,13) можно при этом не учитывать. Указанный член мог бы оказаться влияние лишь при $T_\lambda - T \approx 3 \cdot 10^{-5}$ К (для рассматриваемых частот звука). Выше этого значения T следовало бы ожидать уменьшения величины коэффициента поглощения звука α .

*) В частности, они должны быть применимы для переходов из нормального в сверхпроводящее состояние, где аномальное поглощение звука вблизи точки перехода экспериментально ещё никем не наблюдалось.

II. ГИДРОДИНАМИКА РАСТВОРОВ

6. Уравнения гидродинамики растворов посторонних частиц в гелии II

Поведение посторонних частиц, растворенных в гелии II. Л. Ландау и И. Померанчук²⁵ показали, что посторонние атомы или молекулы, растворённые в небольших концентрациях в гелии II, не могут участвовать в сверхтекущем движении. Рассмотрим энергетический спектр гелия II, содержащего малое количество посторонних атомов. Взаимодействие посторонних атомов между собой можно не учитывать в этом случае. Взаимодействие же этих атомов с атомами He^4 приводит к появлению в растворе дополнительных энергетических уровней. Таким образом, в растворе, кроме фононной и ротонной ветвей энергетического спектра, возникает ещё одна ветвь, обязанная посторонним растворённым атомам. Движению постороннего атома через гелий соответствует некоторый импульс, от которого непрерывным образом зависит энергия. Зависимость энергии от импульса может быть различной для атомов различных сортов. Логически возможны два типа энергетических спектров — в одном случае минимуму энергии соответствует равный нулю импульс, в другом случае — не равный нулю импульс p_0 . В первом случае энергия вблизи минимума может быть представлена в виде

$$\epsilon = \epsilon_0 + \frac{p^2}{2m} \quad (6,1)$$

(ϵ_0 — некоторая постоянная, m — эффективная масса постороннего атома в растворе). Во втором случае вблизи минимума имеем

$$\epsilon = \epsilon_0 + \frac{(p - p_0)^2}{2m}. \quad (6,2)$$

Анализ экспериментальных данных по скорости второго звука в растворах He^3 в He^4 позволяет сделать выбор между указанными двумя возможностями.

Оказалось, что экспериментальные данные согласуются только с предположением, об энергетическом спектре He^3 в He^4 первого типа. Таким образом, для случая, когда посторонними частицами являются атомы изотопа He^3 , энергетический спектр имеет вид

$$\epsilon = \epsilon_0 + \frac{p^2}{2m}. \quad (6,3)$$

При движении в гелии постороннего атома последний может излучать фононы. Из закона сохранения импульса и энергии следует, что это возможно в том случае, если скорость постороннего атома $\frac{p - p_0}{m}$ превосходит скорость звука. Излучение ротонов также возможно, однако для этого требуется, чтобы энергия постороннего

атома превосходила $\Delta = 8,9^\circ\text{K}$. Это возможно в том случае, если скорость атома примеси превосходит некоторое значение (для He^3 порядка скорости звука), зависящее от эффективной массы m . Таким образом, примесные частицы, движущиеся в гелии II со скоростями, меньшими скорости звука, никак не взаимодействуют со сверхтекучей частью жидкости. Посторонние частицы, сталкиваясь с фононами и ротонами, будут рассеиваться. Благодаря этому они будут двигаться вместе с фононами и ротонами и, следовательно, они будут входить в нормальную часть жидкости.

Следует подчеркнуть то обстоятельство, что полученный вывод об участии примесей в нормальном движении нисколько не связан с тем, сверхтекучи или несверхтекучи атомы примеси сами по себе.

Распределение атомов примеси по энергиям определяется в области не очень низких температур статистикой Больцмана. В области же низких температур необходимо учитывать вырождение «примесного газа» и взаимодействие частиц примеси друг с другом.

Условия, при которых наступает отклонение от классической статистики, были установлены И. Померанчуком²⁶. Для слабых растворов указанные отступления наступают лишь при очень низких температурах (порядка $0,10^\circ\text{K}$), в классической области можно легко получить термодинамические функции для слабых растворов посторонних атомов в гелии.

Нормальная плотность. Вклад примесей в нормальную плотность жидкости вычисляется по общей формуле (4,2, I). В случае, когда $p_0 \neq 0$, вычисления совершенно аналогичные, проведённые для ротона (см. ²⁶), дают

$$\rho_{ni} = n \frac{p_0^2}{3kT} \quad (6,4)$$

(n — число атомов примеси в 1 cm^3 гелия). Таким образом, при $p_0 \neq 0$ величина нормальной плотности жидкости обвязанной примеси обратно пропорциональна температуре. В наиболее же интересном случае $p_0 = 0$ получаем очевидный результат

$$\rho_{ni} = \frac{\rho \epsilon m}{m_4} \quad (6,5)$$

(ϵ — молярная концентрация, m_4 — масса атома He^4). Таким образом, при $p_0 = 0$ вклад примеси в нормальной части жидкости постоянен относительно температуры.

Энтропия. Применение общих формул для энтропии слабых растворов и идеального газа для случая $p_0 = 0$ даёт следующее выражение, определяющее энтропию 1 г раствора:

$$\sigma = \sigma_0 + \frac{k\epsilon}{m_4} \left\{ \ln \left(\frac{(mkT)^{3/2}}{2\pi\hbar^2} \cdot \frac{(2s+1)v_0}{\epsilon} \right) + \frac{5}{2} \right\}, \quad (6,6)$$

где σ_0 — энтропия чистого гелия, v_0 — объём, приходящийся на один атом гелия.

Подобным же образом для случая $p_0 \neq 0$ находим выражение

$$\sigma = \sigma_0 + \frac{k\varepsilon}{m_4} \left\{ \ln \frac{(2s+1) v_0 p_0^2}{h^3 \varepsilon} \sqrt{\frac{mkT}{\pi^3}} + \frac{3}{2} \right\}. \quad (6,7)$$

Теплоёмкость. Теплоёмкость 1 г гелия, содержащегося в примеси при $p_0 \neq 0$, равна

$$C = C_0 + \frac{3}{2} \frac{k\varepsilon}{m_4}. \quad (6,8)$$

C_0 — теплоёмкость чистого гелия He^4 .

При $p_0 = 0$ имеем

$$C = C_0 + \frac{k\varepsilon}{2m_4}. \quad (6,9)$$

Вклад примеси в теплоёмкость оказывается менее заметным, чем в энтропию и в нормальную плотность.

Гидродинамика слабых растворов посторонних атомов в гелии была рассмотрена в уже упомянутой работе²⁶. Однако применение полученных уравнений к вопросу о распространении звука в гелии II проведено не вполне корректно. Автор не учитывал зависимость плотности жидкости ρ от концентрации раствора c . Это обстоятельство не отразилось на выражении для скорости второго звука в слабых растворах лишь потому, что пропущенные члены в окончательном результате умножились на коэффициент теплового расширения $(\frac{\partial \rho}{\partial T})$, величина которого для гелия практически равна нулю.

Уравнение гидродинамики растворов⁴. Переайдём теперь к выводу уравнений гидродинамики растворов посторонних частиц в гелии II. Мы не будем предполагать, что растворы являются слабыми, и выведем уравнения, справедливые при произвольных концентрациях раствора. Мы будем только предполагать, что растворённые частицы подчиняются статистике Ферми (раствор He^3 в He^4) и сами по себе не образуют сверхтекучей жидкости *).

Рассмотрим раствор посторонних частиц в гелии II, концентрация которого равна c (rc — масса растворённых частиц, приходящаяся на 1 см³ раствора). Сохранение полной массы жидкости позволяет, как и раньше, написать уравнение непрерывности в виде

$$\rho + \operatorname{div} j = 0. \quad (6,10)$$

*.) Случай раствора двух сверхтекучих жидкостей рассматривается в следующем пункте.

Уравнение движения

 $\lambda = \frac{\partial \Pi}{\partial v}$

16.11.1

в полных дифференциалах

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{f}{w} - s \right) dT + \left(\frac{g}{w} - pc \right) d \frac{Z}{\rho} - \\ - \left(\frac{p}{w} - \rho \right) d \left(\varphi - \mu + \frac{Z}{\rho} c \right) = 0, \\ w = |\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s|. \end{aligned} \right\} \quad (6.20)$$

Пусть гелий находится при абсолютном нуле температуры. В этом случае уравнение (6.20) упрощается

$$\left(\frac{g}{w} - pc \right) d \frac{Z}{\rho} + \rho_s d \left(\varphi - \mu + \frac{Z}{\rho} c \right) = 0. \quad (6.21)$$

При написании (6.21) мы заменяем скобку $(p/w) - \rho$ её значением

$$\frac{p}{w} - \rho = \frac{\rho_n w}{w} - \rho = -\rho_s.$$

Введём обозначение $\varphi - \mu \neq \frac{Z}{\rho} c = \eta$, $\frac{Z}{\rho} = \zeta$. Из (6.21) следует, что при $T = 0$ функция η зависит только от ζ . Следовательно, производная

$$\frac{d\eta}{d\zeta} = -\frac{1}{\rho_s} \left(\frac{g}{w} - pc \right) = F(\zeta) \quad (6.22)$$

также является функцией одной переменной ζ . Этую функцию обозначим символически $F(\zeta)$.

При стремлении концентрации c к нулю поток примеси, а следовательно, и функция $F(\zeta)$ стремятся к нулю

$$F(\zeta) = -\frac{1}{\rho_s} \left(\frac{g}{w} - pc \right) = 0 \quad (c \rightarrow 0). \quad (6.23)$$

Для растворенных частиц, подчиняющихся статистике Ферми, потенциал ζ при малых значениях концентрации c может быть записан в виде^{*})

$$\zeta = A(\rho) + B(\rho) c^{1/3} + \dots \quad (6.24)$$

Функция плотности $A(\rho)$ представляет собой потенциал чистого растворителя (гелия II). Второй член в (6.24) обязан растворённым частицам. Функция $F(\zeta)$, согласно (6.23), равна нулю при малых концентрациях и при всех значениях плотности ρ . Но функция, равная нулю при всех значениях аргумента, равна нулю тождественно, поэтому имеем

$$F(\zeta) \equiv 0. \quad (6.25)$$

Согласно (6.22), в таком случае

$$g = pcw. \quad (6.26)$$

Следовательно, при температуре абсолютного нуля посторонние частицы, растворённые в гелии II, при любых концентрациях участвуют только в нормальном движении.

Таким образом, в двух предельных случаях — при температуре абсолютного нуля и любых значениях концентрации примесей, с одной стороны, и при не равных нулю значениях температуры и малых концентрациях примесей, с другой стороны, — имеет место соотношение (6,26). Подробный анализ, учитывающий справедливость соотношения (6,26) в указанных предельных случаях, позволяет заключить, что это соотношение выполняется при всех значениях температуры и концентрации раствора. Таким образом, полный поток примесей в растворе всегда равен $\rho c v_n$, т. е. примеси при любых концентрациях раствора переносятся только нормальным движением. Учитывая соотношение (6,26), условие (6,20) можно переписать в виде

$$\left(\frac{f}{w} - S \right) dT + \rho_s d \left(\varphi - \mu + \frac{Z}{\rho} c \right) = 0.$$

Отсюда следует, что выражение $\varphi - \mu + \frac{Z}{\rho} c$ не зависит от концентрации c . Поскольку при малых концентрациях $\frac{f}{w} - S = 0$, $\varphi - \mu + \frac{Z}{\rho} c = 0$, то, следовательно, при всех концентрациях имеют место соотношения:

$$\varphi - \mu + \frac{Z}{\rho} c = 0, \quad (6,27)$$

$$f = S w. \quad (6,28)$$

Смысъ соотношения (6,28) очевиден: энтропия растворов, так же как и чистого гелия II, переносится только нормальным движением. Окончательная полная система гидродинамических уравнений для растворов с учётом (6,26), (6,27) и (6,28) выглядит следующим образом:

$$\left. \begin{array}{l} \text{I. } \dot{\rho} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \\ \text{II. } \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{j} + \mathbf{v}_s \operatorname{div} \mathbf{j} + (\mathbf{j} \nabla) \mathbf{v}_s + (\mathbf{v}_n \nabla) \mathbf{p} + \\ \qquad \qquad \qquad + \mathbf{p} \operatorname{div} \mathbf{v}_n + \nabla p = 0, \\ \text{III. } \dot{S} + \operatorname{div} S \mathbf{v}_n = 0, \\ \text{IV. } (\rho c) + \operatorname{div} (\rho c \mathbf{v}_n) = 0, \\ \text{V. } \dot{\mathbf{v}}_s + \nabla \left(\frac{v_s^2}{2} + \mu - \frac{Z}{\rho} c \right) = 0. \end{array} \right\} \quad (6,29)$$

Вместо уравнения II из (6,29) можно пользоваться уравнением

$$\dot{\mathbf{p}} + \mathbf{p} \operatorname{div} \mathbf{v}_n + \nabla (\mathbf{p} \mathbf{v}_n) - [\mathbf{v}_n \operatorname{rot} \mathbf{p}] + \rho c \nabla \frac{Z}{\rho} + S \nabla T = 0, \quad (6,30)$$

которое получается, если выразить в II (6,29) производную v_s при помощи уравнения V (6,29).

Выражение (6,18) для потоков энергии \mathbf{Q} с учётом (6,26) и (6,28) записывается в виде

$$\mathbf{Q} = \mathbf{j} \left(\mu - \frac{Z}{\rho} c + \frac{v_s^2}{2} \right) + Zc \mathbf{v}_n + ST \mathbf{v}_n + (\mathbf{v}_n \mathbf{p}) \mathbf{v}_n. \quad (6,31)$$

Выразим встречающиеся в формулах настоящего параграфа потенциалы μ и Z через химические потенциалы μ_4 гелия II и растворённых частиц μ_3 в растворе. Из соображений аддитивности свободную энергию раствора можно представить в виде

$$F = (N_3 m_3 + N_4 m_4) f \left(T, \frac{V}{N_3 m_3 + N_4 m_4}, \frac{N_3 m_3}{N_3 m_3 + N_4 m_4} \right). \quad (6,32)$$

Здесь N_3 и N_4 — числа атомов гелия II и растворённого вещества, m_3 и m_4 — массы соответствующих атомов, V — объём, занимаемый раствором.

Свободная энергия F единицы объёма раствора, очевидно, равна

$$F = \varphi f. \quad (6,33)$$

Химический потенциал μ_4 гелия II в растворе равен

$$\mu_4 = \frac{\partial F}{m_4 \partial N_4} = f - \frac{\partial f}{\partial v} v - \frac{\partial f}{\partial c} c. \quad (6,34)$$

Аналогичным образом для растворённых частиц находим

$$\mu_3 = \frac{1}{m_3} \frac{\partial F}{\partial N_3} = f - \frac{\partial f}{\partial v} v + (1 - c) \frac{\partial f}{\partial c}; \quad (6,35)$$

$$c = \frac{N_3 m_3}{N_3 m_3 + N_4 m_4} \text{ — концентрация раствора,}$$

$$v = \frac{V}{N_3 m_3 + N_4 m_4} = \frac{1}{\rho} \text{ — удельный объём.}$$

Дифференцируя выражения (6,33) и учитывая соотношения (6,34) и (6,35), находим искомую связь

$$Z = \left(\frac{\partial F}{\partial c} \right)_{\varphi, T} = \rho (\mu_3 - \mu_4), \quad (6,36)$$

$$\mu = \left(\frac{\partial F}{\partial \varphi} \right)_{T, c} = c \mu_3 + (1 - c) \mu_4. \quad (6,37)$$

При помощи (6,37) находим выражение для энтропии единицы массы раствора:

$$\sigma = - \left(\frac{\partial \mu}{\partial T} \right)_\varphi = - c \frac{\partial \mu_3}{\partial T} - (1 - c) \frac{\partial \mu_4}{\partial T}. \quad (6,38)$$

В общем случае, ввиду наличия взаимодействия между частицами растворённого вещества и гелия II, выражения для химических потенциалов μ_3 и μ_4 не могут быть написаны. Единственный случай,

Следовательно, при температуре абсолютного нуля посторонние частицы, растворённые в гелии II, при любых концентрациях участвуют только в нормальном движении.

Таким образом, в двух предельных случаях — при температуре абсолютного нуля и любых значениях концентрации примесей, с одной стороны, и при не равных нулю значениях температуры и малых концентрациях примесей, с другой стороны, — имеет место соотношение (6,26). Подробный анализ, учитывающий справедливость соотношения (6,26) в указанных предельных случаях, позволяет заключить, что это соотношение выполняется при всех значениях температуры и концентрации раствора. Таким образом, полный поток примесей в растворе всегда равен $\rho c v_n$, т. е. примеси при любых концентрациях раствора переносятся только нормальным движением. Учитывая соотношение (6,26), условие (6,20) можно переписать в виде

$$\left(\frac{f}{w} - S \right) dT + \rho_s d \left(\varphi - \mu + \frac{Z}{\rho} c \right) = 0.$$

Отсюда следует, что выражение $\varphi - \mu + \frac{Z}{\rho} c$ не зависит от концентрации c . Поскольку при малых концентрациях $\frac{f}{w} - S = 0$, $\varphi - \mu + \frac{Z}{\rho} c = 0$, то, следовательно, при всех концентрациях имеют место соотношения:

$$\varphi - \mu + \frac{Z}{\rho} c = 0, \quad (6,27)$$

$$f = Sw. \quad (6,28)$$

Смысъ соотношения (6,28) очевиден: энтропия растворов, так же как и чистого гелия II, переносится только нормальным движением. Окончательная полная система гидродинамических уравнений для растворов с учётом (6,26), (6,27) и (6,28) выглядит следующим образом:

$$\left. \begin{array}{l} \text{I. } \dot{\rho} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \\ \text{II. } \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{j} + \mathbf{v}_s \operatorname{div} \mathbf{j} + (\mathbf{j} \nabla) \mathbf{v}_s + (\mathbf{v}_n \nabla) \mathbf{p} + \\ \qquad \qquad \qquad + \mathbf{p} \operatorname{div} \mathbf{v}_n + \nabla p = 0, \\ \text{III. } \dot{S} + \operatorname{div} S \mathbf{v}_n = 0, \\ \text{IV. } (\rho c) + \operatorname{div} (\rho c \mathbf{v}_n) = 0, \\ \text{V. } \dot{\mathbf{v}}_s + \nabla \left(\frac{v_s^2}{2} + \mu - \frac{Z}{\rho} c \right) = 0. \end{array} \right\} \quad (6,29)$$

Вместо уравнения II из (6,29) можно пользоваться уравнением

$$\dot{\mathbf{p}} + \mathbf{p} \operatorname{div} \mathbf{v}_n + \nabla (\mathbf{p} \mathbf{v}_n) - [\mathbf{v}_n \operatorname{rot} \mathbf{p}] + \rho c \nabla \frac{Z}{\rho} + S \nabla T = 0, \quad (6,30)$$

которое получается, если выразить в II (6,29) производную v_s при помощи уравнения V (6,29).

Выражение (6,18) для потоков энергии \mathbf{Q} с учётом (6,26) и (6,28) записывается в виде

$$\mathbf{Q} = \mathbf{j} \left(\mu - \frac{Z}{\rho} c + \frac{v_s^2}{2} \right) + Zc \mathbf{v}_n + ST \mathbf{v}_n + (\mathbf{v}_n \mathbf{p}) \mathbf{v}_n. \quad (6,31)$$

Выразим встречающиеся в формулах настоящего параграфа потенциалы μ и Z через химические потенциалы μ_4 гелия II и растворённых частиц μ_3 в растворе. Из соображений аддитивности свободную энергию раствора можно представить в виде

$$F = (N_3 m_3 + N_4 m_4) f \left(T, \frac{V}{N_3 m_3 + N_4 m_4}, \frac{N_3 m_3}{N_3 m_3 + N_4 m_4} \right). \quad (6,32)$$

Здесь N_3 и N_4 — числа атомов гелия II и растворённого вещества, m_3 и m_4 — массы соответствующих атомов, V — объём, занимаемый раствором.

Свободная энергия F единицы объёма раствора, очевидно, равна

$$F = \varphi f. \quad (6,33)$$

Химический потенциал μ_4 гелия II в растворе равен

$$\mu_4 = \frac{\partial F}{m_4 \partial N_4} = f - \frac{\partial f}{\partial v} v - \frac{\partial f}{\partial c} c. \quad (6,34)$$

Аналогичным образом для растворённых частиц находим

$$\mu_3 = \frac{1}{m_3} \frac{\partial F}{\partial N_3} = f - \frac{\partial f}{\partial v} v + (1 - c) \frac{\partial f}{\partial c}; \quad (6,35)$$

$$c = \frac{N_3 m_3}{N_3 m_3 + N_4 m_4} \text{ — концентрация раствора,}$$

$$v = \frac{V}{N_3 m_3 + N_4 m_4} = \frac{1}{\rho} \text{ — удельный объём.}$$

Дифференцируя выражения (6,33) и учитывая соотношения (6,34) и (6,35), находим искомую связь

$$Z = \left(\frac{\partial F}{\partial c} \right)_{\varphi, T} = \rho (\mu_3 - \mu_4), \quad (6,36)$$

$$\mu = \left(\frac{\partial F}{\partial \varphi} \right)_{T, c} = c \mu_3 + (1 - c) \mu_4. \quad (6,37)$$

При помощи (6,37) находим выражение для энтропии единицы массы раствора:

$$\sigma = - \left(\frac{\partial \mu}{\partial T} \right)_\varphi = - c \frac{\partial \mu_3}{\partial T} - (1 - c) \frac{\partial \mu_4}{\partial T}. \quad (6,38)$$

В общем случае, ввиду наличия взаимодействия между частицами растворённого вещества и гелия II, выражения для химических потенциалов μ_3 и μ_4 не могут быть написаны. Единственный случай,

когда можно написать выражения для μ_3 и μ_4 , есть случай идеального раствора. В этом случае

$$\mu_3 = \mu_{30} + \frac{kT}{m_3} \ln c, \quad (6.39)$$

$$\mu_4 = \mu_{40} + \frac{kT}{m_4} \ln (1 - c) \quad (6.40)$$

(μ_{30} и μ_{40} — химические потенциалы частиц растворённого вещества и гелия II). Для энтропии s имеем согласно (6.38)

$$s = (1 - c) s_{40} + c s_{30} - \frac{k}{m_4} (1 - c) \ln (1 - c) - \frac{k}{m_3} c \ln c. \quad (6.41)$$

Согласно (6.12) и (1.21) для термодинамического потенциала раствора имеет место тождество

$$\rho d\mu = -s dT + dp + Z dc - \mathbf{p} d(\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s). \quad (6.42)$$

Из тождества (6.42) для случая небольших значений разности скоростей ($\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s$) (см. (1.32)) следует интегральное соотношение

$$\mu = \mu_c(p, T, c) - \frac{\rho_n}{2\rho} (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)^2, \quad (6.43)$$

где потенциал μ_c удовлетворяет тождеству

$$\rho d\mu_c = -s dT + dp + Z dc. \quad (6.44)$$

Комбинация потенциалов μ и Z , содержащаяся в уравнении движения (6.29) согласно (6.36) и (6.37), выражается через химические потенциалы

$$\mu - \frac{Z}{\rho} c = c \mu_3 + (1 - c) \mu_4 - c (\mu_3 - \mu_4) \equiv \mu_4. \quad (6.45)$$

Для слабых растворов и небольших значений разности $\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s$ согласно (6.40) и (1.33) указанная комбинация равна

$$\mu - \frac{Z}{\rho} c = \mu_{40} - \frac{kTc}{m_4} = \mu_0(p, T) - \frac{kTc}{m_4}. \quad (6.46)$$

В этом случае уравнение V из (6.29) приобретает вид

$$\dot{\mathbf{v}}_s + \nabla \left\{ \mu_0(p, T) + \frac{v_s^2}{2} - \frac{\rho_n}{2\rho} (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)^2 - \frac{kTc}{m_4} \right\} = 0. \quad (6.47)$$

В таком виде это уравнение совпадает с уравнением движения, приведённым в ²⁶. Первые четыре уравнения (6.29) переходят в уравнения для слабых растворов ²⁶, если выразить в них импульсы \mathbf{j} и \mathbf{p} при помощи соотношений (1.27) и (1.29), естественно, справедливых и для случая растворов (при этом плотности ρ_n и ρ_s считаются не зависящими от относительной скорости $\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s$ величинами).

В заключение настоящего параграфа необходимо сделать следующее замечание. Приведённое выше доказательство того, что посто-

ронние частицы, растворённые в гелии II, при всех концентрациях участвуют только в нормальном движении, существенным образом зависит от предположения о наличии в растворе двух движений: одного сверхтекущего со скоростью \mathbf{v}_s и нормального со скоростью \mathbf{v}_n . Такой результат не имел бы места в том, например, случае, если предположить, что в растворе (кроме нормального) имеют место два сверхтекущих движения с различными скоростями. Однако такое предположение вряд ли имеет смысл для раствора несверхтекущих частиц в гелии II. Для раствора же сверхтекущего вещества в гелии II такая возможность могла бы осуществиться, т. е. возможны были бы в растворе два сверхтекущих движения обоих сверхтекущих компонентов (гелия II и растворённого вещества).

7. Диссипативные процессы в растворах⁶

Остановимся на диссипативных процессах в растворах; при выяснении этого вопроса действуем совершенно аналогично тому, как это делалось для чистого гелия II. В этом случае имеем дополнительные члены в уравнениях движения и в уравнении непрерывности для растворённых частиц

$$\frac{\partial}{\partial t} j_i + \frac{\partial}{\partial x_k} (\Pi_{ik} + \tau_{ik}) = 0 \quad (\tau_{ik} = \tau \delta_{ik} + \mu_{ik}), \quad (7.1)$$

$$\cdot \mathbf{v}_s + \nabla \left(\mu - \frac{z}{\rho} c + \frac{v_s^2}{2} + h \right) = 0, \quad (7.2)$$

$$(\rho c) + \operatorname{div} (\rho c \mathbf{v}_n + \mathbf{g}) = 0. \quad (7.3)$$

Дополнительные члены учитывают возможные диссипативные процессы. Далее из закона сохранения энергии получаем выражение потока энергии

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} = & \mathbf{j} \left(\mu - \frac{z}{\rho} c + \frac{v_s^2}{2} \right) + Zc \mathbf{v}_n + ST \mathbf{v}_n + \\ & + (\mathbf{v}_n \mathbf{p}) \mathbf{v}_n + h (\mathbf{j} - \rho \mathbf{v}_n) + \tau \mathbf{v}_n + \mathbf{q} + \mathbf{v} \quad (\nu_k = v_{ni} \mu_{ik}) \end{aligned} \quad (7.4)$$

и уравнение, определяющее скорость изменения энтропии,

$$\begin{aligned} T \left\{ \dot{s} + \operatorname{div} \left(S \mathbf{v}_n + \frac{\mathbf{q}}{T} - \frac{\mathbf{g} Z}{\rho T} \right) \right\} = & - \left\{ h \operatorname{div} (\mathbf{j} - \rho \mathbf{v}_n) + \right. \\ & + \tau \operatorname{div} \mathbf{v}_n + \frac{1}{2} \mu_{ik} \left(\frac{\partial v_{ni}}{\partial x_k} + \frac{\partial v_{nk}}{\partial x_l} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_{kl}}{\partial x_l} \right) + \\ & \left. + \frac{\mathbf{q} \nabla T}{T} + \mathbf{g} T \nabla \frac{Z}{\rho T} \right\}. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Далее из положительности диссипативной функции заключаем, что неизвестные коэффициенты должны иметь вид

$$\tau = -\zeta_1 \operatorname{div} (\mathbf{j} - \rho \mathbf{v}_n) - \zeta_2 \operatorname{div} \mathbf{v}_n, \quad (7.6)$$

$$h = -\zeta_3 \operatorname{div} (\mathbf{j} - \rho \mathbf{v}_n) - \zeta_1 \operatorname{div} \mathbf{v}_n, \quad (7.7)$$

$$\mu_{ik} = -\eta \left(\frac{\partial v_{ni}}{\partial x_k} + \frac{\partial v_{nk}}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_{kl}}{\partial x_l} \right), \quad (7.8)$$

$$\mathbf{g} = -\alpha \nabla \frac{Z}{\rho T} - \beta \frac{1}{T^2} \nabla T, \quad (7.9)$$

$$\mathbf{q} = -\gamma \nabla \frac{Z}{\rho T} - \delta \frac{1}{T^2} \nabla T. \quad (7.10)$$

В силу принципа симметрии кинетических коэффициентов имеют место два соотношения:

$$\zeta_1 = \zeta_4, \quad \beta = \gamma. \quad (7.11)$$

Коэффициенты $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4$ имеют смысл коэффициентов второй вязкости раствора; η — коэффициент первой вязкости раствора. В выражении для теплового потока \mathbf{q} удобно исключить $\nabla \frac{Z}{\rho T}$, выразив эту величину через поток примесей \mathbf{g} и ∇T

$$-\mathbf{q} = \frac{\gamma}{\alpha} \mathbf{g} + \left(\delta - \frac{\beta \gamma}{\alpha} \right) \frac{\nabla T}{T^2}. \quad (7.12)$$

Коэффициент теплопроводности определяем таким образом, чтобы при равном нулю потоке \mathbf{g} поток тепла равнялся бы $-\mathbf{x} \nabla T$. Таким образом имеем

$$\mathbf{x} = \left(\delta - \frac{\beta \gamma}{\alpha} \right) \frac{1}{T^2}. \quad (7.13)$$

Далее, аналогично тому, как это делается в обычных растворах, переходим в выражении для потока примесей \mathbf{g} к обычным переменным p, T и c и вводим обозначения

$$D = \frac{\alpha}{\rho} \frac{\partial}{\partial c} \left(\frac{Z}{\rho T} \right), \quad (7.14)$$

$$\rho D k_T = \alpha T \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{Z}{\rho T} \right) + \frac{\beta}{T}. \quad (7.15)$$

$$k_p = \frac{p \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{Z}{\rho T} \right)}{\frac{\partial}{\partial c} \left(\frac{Z}{\rho T} \right)}. \quad (7.16)$$

После этого потоки \mathbf{g} и \mathbf{q} приобретают вид

$$-\mathbf{g} = \rho D \left(\nabla c + \frac{k_T}{T} \nabla T + \frac{k_p}{p} \nabla p \right), \quad (7.17)$$

$$-\mathbf{q} = T^2 \left(\frac{\partial}{\partial T} \frac{Z}{\rho T} - \frac{k_T}{T} \frac{\partial}{\partial c} \frac{Z}{\rho T} \right) \mathbf{g} + \mathbf{x} \nabla T. \quad (7.18)$$

Величина D является коэффициентом диффузии, а $k_T D$ — коэффициентом термодиффузии. Величину $k_p D$ называют коэффициентом бародиффузии. Этот последний существен лишь при наличии градиента давления. Он не зависит от кинетики и полностью определяется термодинамическими свойствами раствора.

Выясним теперь, как выглядят потоки \mathbf{g} и \mathbf{q} в стационарных условиях. Согласно уравнениям (6,29) и в стационарных условиях (при малых градиентах)

$$\left. \begin{array}{l} p = \text{const}, \\ p - \frac{Z}{\rho} c = \text{const}. \end{array} \right\} \quad (7,19)$$

С помощью термодинамического тождества (6,42) находим связь между градиентами концентрации и температуры в стационарных условиях:

$$\nabla c \frac{\partial}{\partial c} \left(\frac{Z}{\rho} \right) = - \left[\frac{S}{\rho c} + \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{Z}{\rho} \right) \right] \nabla T = \nabla T \frac{\partial}{\partial c} \left(\frac{S}{\rho c} \right). \quad (7,20)$$

В стационарных условиях согласно уравнениям гидродинамики (6,29) полный поток растворённых частиц равен нулю

$$\mathbf{g} + \rho c \mathbf{v}_n = 0, \quad (7,21)$$

а полный поток тепла равен выделяемой на единицу поверхности гелия мощности \mathbf{Q}

$$\mathbf{Q} = (Zc + ST) \mathbf{v}_n + \mathbf{q}. \quad (7,22)$$

Скорость \mathbf{v}_n в стационарных условиях не равна нулю, из уравнения (6,29) следует в этом случае равенство нулю только полного импульса. Согласно (7,20) и (7,21) оба потока \mathbf{g} и \mathbf{q} и скорость \mathbf{v}_n в стационарных условиях пропорциональны градиенту температуры. Мы выразим их через ∇T и подставим в формулу (7,22). Таким путём находим

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} = & -\kappa \nabla T - \rho D \frac{T}{\frac{\partial}{\partial c} \left(\frac{Z}{\rho} \right)} \times \\ & \times \left\{ c \frac{\partial}{\partial c} \left(\frac{S}{\rho c} \right) + \frac{k_T}{T} \frac{\partial}{\partial c} \left(\frac{Z}{\rho} \right) \right\}^2 \nabla T. \end{aligned} \quad (7,23)$$

Теперь видно, что для характеристики растворов удобно ввести некоторую эффективную теплопроводность $\kappa_{\text{эфф}}$, которая является определённой комбинацией коэффициентов диффузии, термодиффузии и теплопроводности и равна

$$\kappa_{\text{эфф}} = \kappa + \rho D \frac{T}{\frac{\partial}{\partial c} \left(\frac{Z}{\rho} \right)} \left\{ c \frac{\partial}{\partial c} \left(\frac{S}{\rho c} \right) + \frac{k_T}{T} \frac{\partial}{\partial c} \left(\frac{Z}{\rho} \right) \right\}^2. \quad (7,24)$$

Эффективная теплопроводность $\kappa_{\text{эфф}}$ связывает ∇T с выделяемой в растворе мощностью

$$\mathbf{Q} = -\kappa_{\text{эфф}} \nabla T. \quad (7,25)$$

С помощью формул (6,26), (6,27) вычислим $\kappa_{\text{эфф}}$ для слабых растворов

$$\kappa_{\text{эфф}} = \kappa + \frac{\rho D m_3}{k c} \left\{ \left(\sigma_0 + \frac{k c}{m_3} \right) - \frac{k}{m_3} k_T \right\}^2 \quad (7,26)$$

(σ_0 — энтропия единицы массы чистого гелия II). Для достаточно слабых растворов второй член в формуле (7,26) обратно пропорционален концентрации раствора и превосходит коэффициент теплопроводности κ . Заметим здесь, что в чистом гелии II при наличии ∇T отсутствует стационарное решение уравнений гидродинамики. В стационарном случае из постоянства давления p и потенциала μ следует постоянство температуры в гелии.

Запишем теперь в окончательном виде уравнения гидродинамики растворов в гелии II с диссипативными членами

$$\left. \begin{aligned} \dot{\rho} + \operatorname{div} \mathbf{j} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} j_i + \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} &= \frac{T}{\partial x_k} \left\{ \eta \left(\frac{\partial v_{ni}}{\partial x_k} + \frac{\partial v_{nk}}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_{nl}}{\partial x_l} \right) \right\} + \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial x_l} \{ \zeta_1 \operatorname{div} (\mathbf{j} - \rho \mathbf{v}_n) + \zeta_2 \operatorname{div} \mathbf{v}_n \}, \\ (\rho c) + \operatorname{div} \rho c \mathbf{v}_n &= \operatorname{div} \left\{ \rho D \left(\nabla c + \frac{k_T}{T} \nabla T + \frac{k_p}{p} \nabla p \right) \right\}, \\ \dot{\mathbf{v}}_s + \nabla \left(\mu - \frac{Z}{\rho} c + \frac{v_s^2}{2} \right) &= \\ &= \nabla \{ \zeta_3 \operatorname{div} (\mathbf{j} - \rho \mathbf{v}_n) + \zeta_4 \operatorname{div} \mathbf{v}_n \}. \end{aligned} \right\} \quad (7,27)$$

Согласно тем же соотношениям уравнение возрастания энтропии приобретает вид:

$$T \left\{ \dot{S} + \operatorname{div} \left[S \mathbf{v}_n + \frac{\mathbf{q} - \frac{Zg}{\rho}}{T} \right] \right\} = R, \quad (7,28)$$

$$\begin{aligned} R = \zeta_3 [\operatorname{div} (\mathbf{j} - \rho \mathbf{v}_n)]^2 + \zeta_2 [\operatorname{div} \mathbf{v}_n]^2 + 2\zeta_1 \operatorname{div} (\mathbf{j} - \rho \mathbf{v}_n) \operatorname{div} \mathbf{v}_n + \\ + \frac{1}{2} \eta \left(\frac{\partial v_{ni}}{\partial x_k} + \frac{\partial v_{nk}}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_{nl}}{\partial x_l} \right)^2 + \frac{\kappa (\nabla T)^2}{T} + \\ + \rho D \frac{\partial}{\partial c} \left(\frac{Z}{\rho} \right) \left[\nabla c + \frac{k_T}{T} \nabla T + \frac{k_p}{p} \nabla p \right]^2. \end{aligned} \quad (7,29)$$

8. Звук в растворах посторонних частиц в гелии II

Свойства звука в слабых растворах посторонних частиц в гелии II были выяснены Померанчуком²⁶. Мы воспользуемся системой уравнений (6,29) и получим формулы, определяющие скорость звука в растворах произвольной концентрации. Распространение звука в растворах описывается системой уравнений (6,20), в которой достаточно сохранить только линейные относительно производных и скоростей члены. Указанная система, будучи так линеаризована, запишется в виде:

$$\rho + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \quad (8,1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{j} + \nabla p = 0, \quad (8,2)$$

$$(\rho\sigma) + \rho\sigma \operatorname{div} \mathbf{v}_n = 0 \quad (S = \rho\sigma), \quad (8,3)$$

$$(\rho c) + \rho c \operatorname{div} \mathbf{v}_n = 0, \quad (8,4)$$

$$\dot{\mathbf{v}}_s + \nabla \left(\mu - \frac{Z}{\rho} c \right) = 0. \quad (8,5)$$

Исключим из системы (8,1)–(8,5) скорости \mathbf{v}_n и \mathbf{v}_s , в результате получаем три уравнения:

$$\frac{\rho_n}{\rho_s} \frac{\dot{\sigma}}{\sigma} = \sigma \Delta T + c \Delta \frac{Z}{\rho}, \quad (8,6)$$

$$\dot{\rho} = \Delta p, \quad (8,7)$$

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{\dot{\sigma}}{\sigma}. \quad (8,8)$$

Выберем в качестве независимых переменных температуру T , давление p и концентрацию c . В звуковой волне эти величины можно представить в виде сумм постоянных равновесных значений и небольших добавок, которые мы будем обозначать теми же буквами со штрихом. Ищем решение системы (8,6)–(8,8), соответствующее плоской волне; в этом случае указанные небольшие добавки изменяются по закону $e^{i\omega(t-x/u)}$ (x — направление распространения волны, u — скорость звука). Представим все величины в системе (8,6)–(8,8) в таком виде, получаем:

$$\left\{ \begin{aligned} & \left\{ \frac{\rho_n}{\rho_s \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial T} u^2 - \sigma - c \frac{\partial}{\partial T} \frac{Z}{\rho} \right\} T' + \left\{ \frac{\rho_n}{\rho_s \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial p} u^2 - c \frac{\partial}{\partial p} \frac{Z}{\rho} \right\} p' + \\ & + \left\{ \frac{\rho_n}{\rho_s \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial c} u^2 - c \frac{\partial}{\partial c} \frac{Z}{\rho} \right\} c' = 0, \end{aligned} \right. \quad (8,9)$$

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial \rho}{\partial T} u^2 T' + \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} u^2 - 1 \right) p' + \frac{\partial \rho}{\partial c} u^2 c' = 0, \\ & c \frac{\partial \sigma}{\partial T} T' + c \frac{\partial \sigma}{\partial p} p' + \left(c \frac{\partial \sigma}{\partial c} - \sigma \right) c' = 0. \end{aligned} \right\} \quad (8,10)$$

Условие совместности полученной системы даёт уравнение, определяющее скорость звука в растворе

$$u^4 \frac{\rho_n}{\rho_s} \left\{ \frac{d\sigma}{dT} \frac{d\rho}{dp} - \frac{d\sigma}{dp} \frac{d\rho}{dT} \right\} - u^2 \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial p} \left[\sigma + c \frac{\partial}{\partial T} \frac{Z}{\rho} \right] \sigma + \right. \\ \left. + \frac{\rho_n}{\rho_s} \frac{d\sigma}{dT} - \frac{d\rho}{dT} \frac{d}{dp} \left(\frac{Z}{\rho} \right) \sigma c \right\} + \sigma \left(\sigma + c \frac{d}{dT} \frac{Z}{\rho} \right) = 0. \quad (8,11)$$

Для краткости мы ввели полные производные:

$$\frac{df}{dT} = \frac{\partial f}{\partial T} + \frac{\partial f}{\partial c} \frac{c}{\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial T}, \quad \frac{df}{dp} = \frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial c} \frac{c}{\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial p}, \quad (8,12)$$

$$\bar{\sigma} = \sigma - c \frac{\partial \sigma}{\partial c} \quad (8,13)$$

(f есть одна из трёх термодинамических функций σ , ρ , Z/ρ). Уравнение (8,11) мало пригодно для исследования ввиду его чрезвычайной громоздкости. Воспользуемся упрощающим обстоятельством, состоящим в том, что производная $\frac{\partial \rho}{\partial T}$ практически оказывается всегда чрезвычайно малой. Пренебрегаем в (8,11) всеми членами, содержащими указанную производную; кроме того, воспользуемся соотношениями, вытекающими из термодинамического тождества

$$d\mu = \frac{1}{\rho} dp - \sigma dT + \frac{Z}{\rho} dc, \quad (8,14)$$

именно

$$\frac{\partial}{\partial p} \frac{Z}{\rho} = - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial c}, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial p} = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial T}, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial c} = - \frac{\partial}{\partial T} \frac{Z}{\rho}. \quad (8,15)$$

В результате уравнение (8,11) приобретает вид:

$$u^4 - u^2 \left\{ \frac{\rho_s}{\rho_n} \left[\frac{\bar{\sigma}^2}{\frac{\partial \sigma}{\partial T}} + c^2 \frac{\partial}{\partial c} \frac{Z}{\rho} \right] + \left[1 + \frac{\rho_s}{\rho_n} \left(\frac{c}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial c} \right)^2 \right] \middle/ \frac{\partial \rho}{\partial p} \right\} + \\ + \frac{\rho_s}{\rho_n} \left[\frac{\bar{\sigma}^2}{\frac{\partial \sigma}{\partial T}} + c^2 \frac{\partial}{\partial c} \frac{Z}{\rho} \right] \middle/ \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right) = 0. \quad (8,16)$$

Решим это уравнение относительно u^2 и воспользуемся тем, что один из корней u_1^2 , определяющий скорость первого звука, значительно превосходит по величине второй u_2^2 , определяющий скорость второго звука; в результате находим ($u_2^2 \ll u_1^2$)

$$u_1^2 = \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_{c, T} \left[1 + \frac{\rho_s}{\rho_n} \left(\frac{\partial \rho}{\partial c} \frac{c}{\rho} \right)^2 \right], \quad (8,17)$$

$$u_2^2 = \frac{\rho_s}{\rho_n} \left[\bar{\sigma}^2 \left(\frac{\partial T}{\partial \sigma} \right)_{c, p} + c^2 \frac{\partial}{\partial c} \left(\frac{Z}{\rho} \right) \right] \middle/ \left[1 + \frac{\rho_s}{\rho_n} \left(\frac{\partial \rho}{\partial c} \frac{c}{\rho} \right)^2 \right]. \quad (8,18)$$

В первом приближении при малых значениях концентрации c скорость первого звука не зависит от концентрации*). Скорость же второго звука содержит линейные по концентрации c члены $\bar{\sigma}$ и $c^2 \frac{\partial}{\partial c} \frac{Z}{\rho}$ (потенциал Z зависит от концентрации c по логарифмическому закону). Величины $\bar{\sigma}$ и $\frac{\partial}{\partial c} \frac{Z}{\rho}$, определяющие скорость второго звука (8,18) для идеального раствора, равны

$$\bar{\sigma} = \sigma - c \frac{\partial \sigma}{\partial c} = \sigma_{40} - \frac{k}{m_4} [c + \ln(1 - c)] + \frac{k}{m_3} c, \quad (8,19)$$

$$c^2 \frac{\partial}{\partial c} \frac{Z}{\rho} = kT \left[\frac{c^2}{m_4(1 - c)} + \frac{c}{m_3} \right]. \quad (8,20)$$

Для слабых растворов выражения (8,19) и (8,20) обращаются в

$$\bar{\sigma} = \sigma_{40} + \frac{kc}{m_3}, \quad c^2 \frac{\partial}{\partial c} \frac{Z}{\rho} = \frac{kTc}{m_3},$$

а формула (8,18) в формулу И. Померанчука

$$u_2^2 = \frac{\rho_s}{\rho_n} \left[\frac{\partial T}{\partial \sigma} \left(\sigma_{40} + \frac{kc}{m_3} \right)^2 + \frac{kTc}{m_3} \right]^{**}. \quad (8,21)$$

9. Гидродинамика растворов двух сверхтекучих жидкостей²⁷

Рассмотрим смесь двух сверхтекучих жидкостей; например, жидкого He^4 и жидкого He^6 . В этом случае принципиально возможно, что в жидкости будут происходить три движения: нормальное со скоростью \mathbf{v}_n и два сверхтекучих со скоростями \mathbf{v}'_s и \mathbf{v}''_s . Мы покажем, как можно из законов сохранения и условия потенциальности сверхтекучих движений получить уравнения такой трёхскоростной гидродинамики. Для вывода уравнений будем рассматривать жидкость в той системе отсчёта, где покоятся нормальная (несверхтекучая) часть жидкости. В этой системе полную энергию жидкости можно записать в виде

$$E = \rho \frac{v_n^2}{2} + (\mathbf{p}' + \mathbf{p}'') \cdot \mathbf{v}_n + \epsilon. \quad (9,1)$$

*) Подчеркнём, что этот результат получается только в предположении, что $\frac{\partial \rho}{\partial T} = 0$, так как точное выражение для u_1^2 , вытекающее из уравнения (8,11), содержит члены, линейные по концентрации и пропорциональные произведению $\frac{\partial \rho}{\partial T} \frac{\partial \rho}{\partial c}$.

**) Молярная концентрация $\epsilon = N_3/(N_3 + N_4)$ связана с концентрацией $c = N_3 m_3 / (N_3 m_3 + N_4 m_4)$, фигурирующей в наших формулах, соотношением $\frac{1}{\epsilon} - 1 = \frac{m_3}{m_4} \left(\frac{1}{c} - 1 \right)$.

Здесь приняты следующие обозначения: ρ — плотность жидкости, \mathbf{p}' и \mathbf{p}'' — относительные импульсы двух сверхтекущих движений, ε — внутренняя энергия жидкости. Она является функцией как термодинамических переменных плотностей ρ_1 , ρ_2 и энтропии S , так и скоростей относительного движения $\mathbf{v}'_s = \mathbf{v}_n$ и $\mathbf{v}''_s = \mathbf{v}_n$ и определяется термодинамическим тождеством.

Вид термодинамического тождества устанавливается следующим образом. Для этого вспомним выражение для полной энергии E , использованное нами при выводе уравнений гидродинамики гелия II (1,8)

$$E = \rho \frac{v_s^2}{2} + \mathbf{p}' \mathbf{v}_s + \varepsilon'. \quad (9,2)$$

Здесь \mathbf{p}' — импульс относительного движения в системе отсчёта, движущейся со скоростью \mathbf{v}_s , он выражается через полный импульс жидкости \mathbf{j}

$$\mathbf{p}' = \mathbf{j} - \rho \mathbf{v}_s. \quad (9,3)$$

Энергия ε' определялась термодинамическим тождеством

$$d\varepsilon' = \mu' d\rho + T dS + (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s, d\mathbf{p}'). \quad (9,4)$$

Если вместо импульса \mathbf{p}' ввести импульс \mathbf{p} в системе отсчёта, движущейся со скоростью \mathbf{v}_{nc}

$$\mathbf{p} = \mathbf{j} - \rho \mathbf{v}_n = \mathbf{p}' + \rho (\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_n), \quad (9,5)$$

то выражение для энергии E приводится к следующему виду:

$$E = \rho \frac{v_n^2}{2} + \mathbf{p} \mathbf{v}_n + \varepsilon, \quad (9,6)$$

где внутренняя энергия ε уже определяется тождеством, отличным от (9,4), а именно:

$$d\varepsilon = \mu d\rho + T dS + \mathbf{p} d(\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_n) \quad (9,7)$$

с химическим потенциалом μ , связанным с μ' соотношением

$$\mu = \mu' + \frac{(\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)^2}{2}.$$

Таким образом в том случае, когда мы переходим в систему отсчёта, связанную с нормальным движением, внутреннюю энергию ε следует рассматривать как функцию плотности, энтропии и относительной скорости. При этом соотношение (9,7) и является определением импульса относительного движения \mathbf{p} .

В случае трёхскоростной гидродинамики термодинамическое тождество записывается совершенно аналогично (9,7)

$$d\varepsilon = \mu_1 d\rho_1 + \mu_2 d\rho_2 + T ds + \mathbf{p}' d(\mathbf{v}'_s - \mathbf{v}_n) + \mathbf{p}'' d(\mathbf{v}''_s - \mathbf{v}_n), \quad (9,8)$$

μ_1 и μ_2 — химические потенциалы компонент раствора. Плотности ρ_1 и ρ_2 выражаются через концентрацию c раствора

$$\rho_1 = \rho c, \quad \rho_2 = \rho (1 - c). \quad (9,9)$$

Запишем теперь законы сохранения для энергии E , импульса жидкости $\mathbf{j} = \mathbf{p}' + \mathbf{p}'' + \rho \mathbf{v}_n$, количества вещества и энтропии. Для энергии E имеем:

$$\dot{E} + \operatorname{div} \mathbf{Q} = 0, \quad (9,10)$$

\mathbf{Q} — вектор потока энергии; вид его пока нам неизвестен. Производные от импульса \mathbf{j} по времени должны быть равны расходимости некоторого тензора

$$\frac{\partial}{\partial t} j_i + \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} = 0. \quad (9,11)$$

Вид симметричного тензора потока импульса Π_{ik} может быть установлен таким же образом, как это было сделано при выводе уравнений гидродинамики сверхтекущей жидкости (п. 1). Выразим тензор Π_{ik} через его значение π_{ik} в системе отсчета, движущейся со скоростью \mathbf{v}_n

$$\Pi_{ik} = \rho v_{ni} v_{nk} + (p'_i + p''_i) v_{nk} + (p'_k + p''_k) v_{ni} + \pi_{ik}. \quad (9,12)$$

Вид тензора π_{ik} мы выясним ниже.

Законы сохранения вещества записываются в форме уравнений непрерывности

$$\dot{\rho}_1 + \operatorname{div} (\mathbf{p}' + \rho_1 \mathbf{v}_n + \mathbf{g}') = 0, \quad (9,13)$$

$$\dot{\rho}_2 + \operatorname{div} (\mathbf{p}'' + \rho_2 \mathbf{v}_n + \mathbf{g}'') = 0, \quad (9,14)$$

которые содержат неизвестные векторы \mathbf{g}' и \mathbf{g}'' . Поскольку для всей жидкости имеет место уравнение непрерывности

$$\dot{\rho} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0 \quad (9,15)$$

между векторами \mathbf{g}' и \mathbf{g}'' имеет место соотношение

$$\mathbf{g}' + \mathbf{g}'' = 0. \quad (9,16)$$

Уравнение непрерывности для энтропии записываем в виде

$$\dot{S} + \operatorname{div} (S \mathbf{v}_n + \mathbf{f}) = 0 \quad (9,17)$$

с неизвестным вектором \mathbf{f} в потоке энтропии.

Уравнения сверхтекущего движения выбираем таким образом, чтобы были выполнены условия $\operatorname{rot} \mathbf{v}'_s = 0$, $\operatorname{rot} \mathbf{v}''_s = 0$

$$\dot{\mathbf{v}}'_s + \nabla \left(\varphi_1 - \frac{v_n^2}{2} + \mathbf{v}_n \mathbf{v}'_s \right) = 0, \quad (9,18)$$

$$\dot{\mathbf{v}}''_s + \nabla \left(\varphi_2 - \frac{v_n^2}{2} + \mathbf{v}_n \mathbf{v}''_s \right) = 0. \quad (9,19)$$

Здесь φ_1 и φ_2 — неизвестные пока функции.

Наша задача состоит теперь в том, чтобы, используя законы сохранения, найти вид неизвестных функций.

Для этого мы вычислим производную от энергии E по времени и с помощью уравнений гидродинамики (9,13), (9,14), (9,17), (9,18), (9,19) выделим все члены, представляющие собой полные дивергенции. Согласно (9,1) имеем

$$\begin{aligned}\dot{E} = & \dot{\rho} \frac{v_n^2}{2} + \rho \mathbf{v}_n \cdot \dot{\mathbf{v}}_n + (\dot{\mathbf{p}}' + \dot{\mathbf{p}}'') \mathbf{v}_n + (\mathbf{p}' + \mathbf{p}'') \cdot \dot{\mathbf{v}}_n + \\ & + \mu_1 \dot{\rho}_1 + \mu_2 \dot{\rho}_2 + T \dot{S} + (\mathbf{p}', \dot{\mathbf{v}}_s - \dot{\mathbf{v}}_n) + (\mathbf{p}'', \dot{\mathbf{v}}_s'' - \dot{\mathbf{v}}_n) = \\ = & - \dot{\rho} \frac{v_n^2}{2} + \mathbf{j} \mathbf{v}_n + \mathbf{p}' \dot{\mathbf{v}}_s + \mathbf{p}'' \dot{\mathbf{v}}_s'' + \mu_1 \dot{\rho}_1 + \mu_2 \dot{\rho}_2 + T \dot{S}. \quad (9,20)\end{aligned}$$

Далее выражим здесь все производные по времени с помощью уравнений (9,13)–(9,19)

$$\begin{aligned}\dot{E} = & - \left(\mu_1 - \frac{v_n^2}{2} \right) \operatorname{div} (\mathbf{p}' + \rho_1 \mathbf{v}_n + \mathbf{g}') - \\ & - \left(\mu_2 - \frac{v_n^2}{2} \right) \operatorname{div} (\mathbf{p}'' + \rho_2 \mathbf{v}_n + \mathbf{g}'') - \mathbf{p}' \nabla \left(\varphi_1 - \frac{v_n^2}{2} + \mathbf{v}_n \mathbf{v}'_s \right) - \\ & - \mathbf{p}'' \nabla \left(\varphi_2 - \frac{v_n^2}{2} + \mathbf{v}_n \mathbf{v}''_s \right) - v_{nl} \frac{\partial \Pi_{lk}}{\partial x_k} - T \operatorname{div} (S \mathbf{v}_n + \mathbf{f}). \quad (9,21)\end{aligned}$$

Выделим отсюда полные дивергенции, после несложных вычислений получаем:

$$\begin{aligned}\dot{E} = & - \operatorname{div} \left\{ (\mathbf{p}' + \rho_1 \mathbf{v}_n + \mathbf{g}') \left(\mu_1 - \frac{v_n^2}{2} \right) + \right. \\ & + (\mathbf{p}'' + \rho_2 \mathbf{v}_n + \mathbf{g}'') \left(\mu_2 - \frac{v_n^2}{2} \right) + T (S \mathbf{v}_n + \mathbf{f}) \Big\} + \\ & + \left\{ - \rho \mathbf{v}_n \nabla \frac{v_n^2}{2} + \mathbf{v}_n (\rho_1 \nabla \mu_1 + \rho_2 \nabla \mu_2 + S \nabla T) - v_{nl} \frac{\partial \Pi_{lk}}{\partial x_k} - \right. \\ & - \mathbf{p}' \nabla (\mathbf{v}_n \mathbf{v}'_s) - \mathbf{p}'' \nabla (\mathbf{v}_n \mathbf{v}''_s) \Big\} + \{ \mathbf{p}' \nabla (\mu_1 - \varphi_1) + \mathbf{p}'' \nabla (\mu_2 - \varphi_2) + \\ & + \mathbf{g}' \nabla (\mu_1 - \mu_2) + \mathbf{f} \nabla T \}. \quad (9,22)\end{aligned}$$

Теперь займёмся преобразованием второй фигурной скобки в (9,22). Для этого удобно тензор π_{ik} выбрать следующим образом (\mathfrak{M}_{ik} — неизвестный тензор):

$$\pi_{ik} = (-\varepsilon + \mu_1 \rho_1 + \mu_2 \rho_2 + TS) \delta_{ik} + \mathfrak{M}_{ik}. \quad (9,23)$$

После подстановки Π_{ik} в виде (9,12) с так выбранным π_{ik} вторая фигурная скобка приводится к виду

$$-\operatorname{div}\{(\mathbf{jv}_n)\mathbf{v}_n + \mathbf{p}'(\mathbf{v}_n\mathbf{v}'_s) + \mathbf{p}''(\mathbf{v}_n\mathbf{v}''_s)\} - \\ - v_{ni} \frac{\partial}{\partial x_k} \{ \mathfrak{M}_{ik} - p'_k(v_{si} - v_{ni}) - p''_k(v''_{si} - v_{ni}) \}.$$

Используя этот результат, получаем следующее выражение для \dot{E} :

$$\dot{E} = -\operatorname{div} \left\{ (\mathbf{p}' + \rho_1 \mathbf{v}_n + \mathbf{g}') \left(\mu_1 - \frac{v_n^2}{2} \right) + \right. \\ + (\mathbf{p}'' + \rho_2 \mathbf{v}_n + \mathbf{g}'') \left(\mu_2 - \frac{v_n^2}{2} \right) + \mathbf{v}_n(\mathbf{jv}_n) + \mathbf{p}'(\mathbf{v}_n\mathbf{v}'_s) + \\ + \mathbf{p}''(\mathbf{v}_n\mathbf{v}''_s) \Big\} + \left\{ \mathbf{p}' \nabla (\mu_1 - \varphi_1) + \mathbf{p}'' \nabla (\mu_2 - \varphi_2) + \mathbf{g}' \nabla (\mu_1 - \mu_2) + \right. \\ \left. + f \nabla T + v_{ni} \frac{\partial}{\partial x_k} [p'_k(v'_{si} - v_{ni}) + p''_k(v''_{si} - v_{ni}) - \mathfrak{M}_{ik}] \right\}. \quad (9,24)$$

Величины φ_1 , φ_2 , \mathbf{f} , \mathbf{g}' и \mathfrak{M}_{ik} в отсутствии диссипации могут зависеть лишь от термодинамических переменных и скоростей и не могут зависеть от их производных по времени и координатам. Перебрав различные предельные случаи, как-то: температура равная нулю, малые концентрации одной из компонент и т. д., можно однозначно установить вид неизвестных функций. Для упрощения задачи привлечём некоторые физические соображения. Именно, в сверхтекучей жидкости вся энтропия заключена в тепловых возбуждениях, которые участвуют только в нормальном движении. Поэтому поток энтропии равен произведению $S\mathbf{v}_n$ и вектор \mathbf{f} , который мы ввели в поток, следует просто положить равным нулю

$$\mathbf{f} = 0. \quad (9,25)$$

Что касается тензора \mathfrak{M}_{ik} , то вид его мы также в известной степени знаем. Действительно, если ввести плотности жидкости, связанные с нормальным ρ_n и двумя сверхтекущими движениями (ρ'_s и ρ''_s), то тензор Π_{ik} можно записать в виде

$$\Pi_{ik} = \rho_n v_{ni} v_{nk} + \rho'_s v'_{si} v'_{sk} + \rho''_s v''_{si} v''_{sk} + p \delta_{ik} \quad (9,26)$$

(p — давление).

Сумма $\rho_n + \rho'_s + \rho''_s$ равна полной плотности жидкости ρ . Импульсы относительного движения \mathbf{p}' и \mathbf{p}'' тогда равны

$$\mathbf{p}' = \rho'_s (\mathbf{v}'_s - \mathbf{v}_n), \quad \mathbf{p}'' = \rho''_s (\mathbf{v}''_s - \mathbf{v}_n). \quad (9,27)$$

Учитывая (9,26) и (9,27), находим, что тензор \mathfrak{M}_{ik} равен *)

$$\mathfrak{M}_{ik} = p'_k(v'_{si} - v_{ni}) + p''_k(v''_{si} - v_{ni}). \quad (9,28)$$

Теперь нам остаётся лишь рассмотреть комбинацию из оставшихся в (9,24) членов недивергентного типа.

Для этого используем предельные случаи, когда концентрация одной из компонент близка к нулю. Тогда, как известно ², эта компонента будет целиком участвовать в нормальном движении, т. е. один из импульсов сверхтекущего движения (p') равен строго нулю, кроме того, в этом случае $\mu_2 = \varphi_2$ и $\mathbf{g}' = -\mathbf{g}'' = 0$. Поскольку вектор \mathbf{g}' равен нулю в этом случае при всех значениях плотностей компонент, то путём несложных выкладок можно заключить, что это условие будет выполнено всегда. Подобным путём находим

$$\mu_1 = \varphi_1, \quad \mu_2 = \varphi_2, \quad \mathbf{g}' = 0. \quad (9,29)$$

Учитывая (9,25), (9,28) и (9,29), запишем в окончательном виде уравнения гидродинамики для раствора двух сверхтекущих жидкостей.

Уравнения непрерывности:

$$\dot{\rho}_1 + \operatorname{div}(\mathbf{p}' + \rho_1 \mathbf{v}_n) = 0, \quad (9,30)$$

$$\dot{\rho}_2 + \operatorname{div}(\mathbf{p}'' + \rho_2 \mathbf{v}_n) = 0. \quad (9,31)$$

Одно из них можно заменить уравнением непрерывности для всей жидкости

$$\dot{\rho} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \quad \mathbf{j} = \rho \mathbf{v}_n + \mathbf{p}' + \mathbf{p}''. \quad (9,32)$$

Уравнение непрерывности для энтропии

$$\dot{S} + \operatorname{div} S \mathbf{v}_n = 0. \quad (9,33)$$

Уравнения сверхтекущих движений:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{v}}'_s + \nabla \left(\mu_1 - \frac{v_n^2}{2} + \mathbf{v}_n \mathbf{v}'_s \right) &= 0, \\ \dot{\mathbf{v}}''_s + \nabla \left(\mu_2 - \frac{v_n^2}{2} + \mathbf{v}_n \mathbf{v}''_s \right) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (9,34)$$

Уравнение движения всей жидкости как целого

$$\frac{\partial}{\partial t} j_i + \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} = 0, \quad (9,35)$$

*) Легко видеть, что благодаря (9,27) тензор \mathfrak{M}_{ik} является симметричным.

где тензор потока импульса Π_{ik} равен

$$\Pi_{ik} = \rho v_{ni} v_{nk} + (p'_k v'_{si} + v_{nk} p'_i) + (p''_k v''_{si} + v_{nk} p''_i) + p \delta_{ik}, \quad (9,36)$$

а давление p равно

$$p = -\epsilon + TS + \mu_1 \rho_1 + \mu_2 \rho_2. \quad (9,37)$$

Учитывая термодинамическое тождество (9,7), отсюда получаем

$$dp = \rho_1 d\mu_1 + \rho_2 d\mu_2 + SdT - \mathbf{p}' d(\mathbf{v}'_s - \mathbf{v}_n) - \mathbf{p}'' d(\mathbf{v}''_s - \mathbf{v}_n). \quad (9,38)$$

Наконец, закон сохранения энергии приобретает вид

$$\left. \begin{aligned} \dot{E} + \operatorname{div} \mathbf{Q} &= 0, \\ \mathbf{Q} = (\mathbf{p}' + \rho_1 \mathbf{v}_n) \left(\mu_1 - \frac{v_n^2}{2} \right) + (\mathbf{p}'' + \rho_2 \mathbf{v}_n) \left(\mu_2 - \frac{v_n^2}{2} \right) + \\ &+ \mathbf{v}_n (\mathbf{j} \mathbf{v}_n) + \mathbf{p}' (\mathbf{v}_n \mathbf{v}'_s) + \mathbf{p}'' (\mathbf{v}_n \mathbf{v}''_s). \end{aligned} \right\} \quad (9,39)$$

Для малых скоростей из (9,38) находим зависимость химических потенциалов от относительных скоростей

$$\mu_1 = \mu_{10} + \frac{\rho_s'}{2\rho} (\mathbf{v}'_s - \mathbf{v}_n)^2, \quad \mu_2 = \mu_{20} + \frac{\rho_s''}{2} (\mathbf{v}''_s - \mathbf{v}_n)^2. \quad (9,40)$$

Здесь μ_{10} и μ_{20} — не зависящие от скоростей части химических потенциалов.

Наличие трёх движений в растворах сверхтекучих жидкостей может приводить к ряду своеобразных явлений. Так, например, в таких растворах возможно распространение звуковых колебаний трёх типов с различными скоростями. Кроме обычных звуковых волн, возможно распространение двух типов волн, в которых совершаются колебания температуры и концентрации раствора.

В заключение отметим, что нам пока известны лишь две сверхтекучих жидкости — жидкий He^4 и жидкий He^6 . К сожалению, изотоп He^6 является короткоживущим (время полураспада 0,8 сек), и это обстоятельство, естественно, затрудняет возможность экспериментов с растворами таких двух жидкостей.

III. РАЗРЫВЫ И ЗВУК БОЛЬШОЙ АМПЛИТУДЫ В ГЕЛИИ II

Обзорном²⁸ была экспериментально доказана возможность наблюдения температурных разрывов в гелии II. Сделанная в связи с этим Темперли попытка теоретического разбора этого вопроса²⁹ не может быть признана удовлетворительной, так как указанная работа базируется на неправильной, противоречивой системе гидродинамических уравнений для гелия II. Автор не учитывает также отличия местной скорости звука от её равновесного значения. Кроме того, он использует ошибочное, противоречивое эксперименту положение теории

Тиссы¹¹ о пропорциональности энтропии и плотности нормальной части гелия II.

В настоящем разделе мы рассмотрим явление образования разрывов в сверхтекучей жидкости и связанное с ним явление распространения звука большой амплитуды.

10. Разрывы в гелии II³⁰

Выясним условия, которые должны выполняться на поверхности разрыва в гелии II. Для этого рассмотрим некоторый элемент поверхности разрыва и выберем систему координат, движущуюся вместе с этим элементом. Ось x выберем по направлению нормали к этому элементу. На поверхности разрыва должны быть непрерывны:

а) x -компоненты потока жидкости*)

$$[j_x] = [\rho_s v_{sx} + \rho_n v_{nx}] = 0 \quad (10,1)$$

(ρ_s и ρ_n — плотности, v_s и v_n — скорости нормальной и сверхтекучей частей жидкости).

б) x -компоненты потока импульса

$$[p + \rho_s v_{sx}^2 + \rho_n v_{nx}^2] = 0,$$

$$[\rho_s v_{sx} v_{sy} + \rho_n v_{nx} v_{ny}] = 0, \quad [\rho_s v_{sx} v_{sz} + \rho_n v_{nx} v_{nz}] = 0 \quad (10,2)$$

(p — давление).

в) y и z -компоненты скорости \mathbf{v}_s

$$[v_{sy}] = 0, \quad [v_{sz}] = 0. \quad (10,3)$$

Это следует непосредственно из условия $\text{rot } \mathbf{v}_s = 0$.

г) x -компоненты потока энергии

$$\left[j_x \left(\tilde{\mu} + \frac{v_s^2}{2} \right) + \tilde{\rho} \tilde{\sigma} T v_{nx} + \rho_n (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s, \mathbf{v}_n) v_{nx} \right] = 0. \quad (10,4)$$

$\tilde{\mu}$ есть термодинамический потенциал, зависящий от относительной скорости $\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s$,

$$\tilde{\mu} = \mu(p, T) - \frac{\rho_n}{2\tilde{\rho}} (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)^2. \quad (10,5)$$

Из термодинамического тождества

$$\tilde{d}\mu = -\tilde{\sigma}dT + \frac{1}{\tilde{\rho}} dp - \frac{\rho_n}{\rho_s} (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s) d(\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s) \quad (10,6)$$

*) Разность значений некоторой величины с обеих сторон поверхности обозначим посредством квадратной скобки.

следует, что плотность $\tilde{\rho}$ и энтропия $\tilde{\sigma}$ являются также функциями разности $\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s$:

$$\tilde{\sigma} = \sigma(\rho, T) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\rho_n}{\rho} \right) (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)^2, \quad (10,7)$$

$$\frac{1}{\tilde{\rho}} = \frac{1}{\rho} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\rho_n}{\rho} \right) (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)^2. \quad (10,8)$$

д) Наконец, должны быть равны силы, действующие на сверхтекучую часть жидкости по обеим сторонам поверхности разрыва, т. е. должна быть непрерывной величина

$$\left[\tilde{\mu} + \frac{v_s^2}{2} \right] = 0. \quad (10,9)$$

Это условие следует непосредственно из уравнения сверхтекучего движения

$$\dot{\mathbf{v}}_s + \nabla \left(\tilde{\mu} + \frac{v_s^2}{2} \right) = 0.$$

При помощи (10,1) и (10,9) вместо условия (10,4) на поверхности разрыва можно сформулировать более простое условие, именно,

$$\left[\tilde{\rho} \tilde{\sigma} T v_{nx} + \rho_n (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s, \mathbf{v}_n) v_{nx} \right] = 0. \quad (10,10)$$

Темперли в качестве одного из условий на поверхности разрыва требует непрерывности потока энтропии $\rho \sigma v_{nx}$. Такое условие не удовлетворяется по тем же причинам, что и в обычной гидродинамике.

Записанные выше выражения для термодинамических функций $\tilde{\mu}$, $\tilde{\rho}$, $\tilde{\sigma}$ справедливы с точностью до членов третьего порядка относительно разности $(\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)$. Поэтому при всех преобразованиях мы ограничимся *) записью членов порядка не выше второго относительно $(\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)$. В дальнейшем мы рассмотрим нормальные разрывы в гелии, обычно называемые ударными волнами. Естественно, что указанное выше ограничение позволяет рассматривать только ударные волны небольшой мощности.

Обозначим все величины перед ударной волной в невозмущённой жидкости индексом 0. Значения же функций за ударной волной — теми же буквами, но без индекса. Пусть скорость ударной волны относительно невозмущённой жидкости равна u ; введём также скорость \mathbf{v} , связанную с потоком \mathbf{j} соотношением $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$; наконец, разность скоростей $\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s$ обозначим одной буквой \mathbf{w} .

*) В этом приближении можно не учитывать зависимости плотностей ρ_n и ρ_s от относительной скорости $\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s$. Знаком тильда обозначаем термодинамические величины, зависящие от скоростей \mathbf{v}_n и \mathbf{v}_s .

Рассмотрим случай одномерного движения жидкости, при этом индексы у векторных величин опустим. В неподвижной системе координат условия (10,1), (10,2), (10,9) и (10,10) перепишутся в виде

$$\rho_0 u = \tilde{\rho} (u - v), \quad (10,1)$$

$$p_0 + \rho_0 u^2 = p + \tilde{\rho} (u - v)^2 + \rho_s \rho_n \frac{w^2}{\rho}, \quad (10,2)$$

$$\mu_0 + \frac{u^2}{2} = \mu + \frac{1}{2} \left(u - v + \rho_n \frac{w}{\tilde{\rho}} \right)^2, \quad (10,9)$$

$$\rho_0 T_0 \sigma_0 u = \tilde{\rho} \tilde{\sigma} T \left(u - v - \rho_s \frac{w}{\tilde{\rho}} \right) + \rho_n w \left(u - v - \rho_s \frac{w}{\tilde{\rho}} \right)^2. \quad (10,10)$$

Исключив из приведённых выше уравнений скорость при помощи (10,1) и выразив величины $\tilde{\sigma}$ и $\tilde{\rho}$ при помощи (10,7) и (10,8), получаем

$$p - p_0 - \frac{\rho_0}{\rho} u^2 (\rho - \rho_0) + \rho_0 w^2 \left[\frac{\rho_s \rho_n}{\rho^2} - u^2 \rho_0 \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\rho_n}{\rho} \right) \right] = 0, \quad (10,11)$$

$$\mu - \mu_0 - \frac{1}{2} \frac{u^2}{\rho^2} (\rho^2 - \rho_0^2) + \frac{\rho_0 \rho_n}{\rho^2} u w - w^2 \left[\frac{\rho_n \rho_s}{2 \rho^2} + \frac{1}{2} \rho_0 u^2 \frac{\partial}{\partial p} \frac{\rho_n}{\rho} \right] = 0, \quad (10,12)$$

$$\rho_0 u (T \sigma - T_0 \sigma_0) - w \left(\sigma T \rho_s + \rho_n \frac{\rho_0^2}{\rho^2} u^2 \right) + \rho_0 w^2 u \left[\frac{2 \rho_n \rho_s}{\rho^2} + \frac{1}{2} T \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\rho_n}{\rho} \right) \right] = 0. \quad (10,13)$$

Полученная система (10,11)–(10,13) позволяет найти скорость ударной волны и скачки термодинамических величин и скоростей на поверхности волны. В качестве независимых переменных выберем давление p и температуру T . Как известно, в гелии II значение производной $\left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_p$ оказывается аномально малым. Это обстоятельство позволяет пренебречь всюду зависимостью плотности ρ от температуры. Разложим в системе (10,11)–(10,13) все величины в ряд по степеням $\Delta p = p - p_0$ и $\Delta T = T - T_0$, ограничиваясь при этом членами порядка не выше второго. Последнее ограничение следует непосредственно из того, что величина w , согласно уравнениям гидродинамики, является величиной первого порядка относительно разностей $(p - p_0)$ и $(T - T_0)$. Мы же выше условились сохранять члены не выше второго порядка по w . После указанного

разложения система (10,10)–(10,13) приобретает вид

$$\Delta p \left(1 - u^2 \frac{\partial \rho}{\partial p} \right) + (\Delta \rho)^2 u^2 \left[\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial p^2} \right] + \\ + w^2 \left[\frac{\rho_s \rho_n}{\rho} - \frac{1}{2} \rho^2 u^2 \frac{\partial}{\partial p} \frac{\rho_n}{\rho} \right] = 0, \quad (10,14)$$

$$\frac{1}{\rho} \Delta p \left(1 - u^2 \frac{\partial \rho}{\partial p} \right) - \sigma \Delta T + \frac{\rho_n}{\rho} u w + \\ + (\Delta p)^2 \left[- \frac{1}{2\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial p} + \frac{3}{2\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)^2 u^2 - \frac{1}{2\rho} u^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial p^2} \right] + \\ + \Delta p w \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial \rho_n}{\partial p} - 2 \frac{\rho_n}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p} \right] + w^2 \left[- \frac{\rho_n \rho_s}{2\rho^2} - \frac{1}{2} \rho u^2 \frac{\partial}{\partial p} \frac{\rho_n}{\rho} \right] - \\ - \frac{1}{2} (\Delta T)^2 \frac{\partial \sigma}{\partial T} + \Delta T w u \frac{\partial}{\partial T} \frac{\rho_n}{\rho} = 0, \quad (10,15)$$

$$\Delta T \rho u \left(\sigma + T \frac{\partial \sigma}{\partial T} \right) - w (\sigma T \rho_s + \rho_n u^2) + \\ + (\Delta T)^2 \rho u \left[\frac{\partial \sigma}{\partial T} + \frac{1}{2} T \frac{\partial^2 \sigma}{\partial T^2} \right] - w \Delta T \left[u^2 \frac{\partial \rho_n}{\partial T} + \sigma \rho_s + T \frac{\partial}{\partial T} (\sigma \rho_s) \right] - \\ - w \Delta p \left[- \frac{\rho_n}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p} u^2 + \frac{\partial \rho_n}{\partial p} u^2 + T \sigma \frac{\partial \rho_s}{\partial p} \right] + \\ + w^2 u \left(T \frac{\partial \rho_n}{\partial T} + 2 \rho_s \rho_n \right) = 0. \quad (10,16)$$

В линейном приближении полученная система уравнения значительно упрощается. Приравняв нулю определитель этой системы (условие её совместности), находим уравнение

$$\left(1 - u^2 \frac{\partial \rho}{\partial p} \right) \left(\frac{\partial \sigma}{\partial T} u^2 \rho_n - \sigma^2 \rho_s \right) = 0, \quad (10,17)$$

выражающее в первом приближении значение скорости u . Корни уравнения (10,17) равны

$$u_{10}^2 = \frac{\partial \rho}{\partial \rho}, \quad (10,18)$$

$$u_{20}^2 = \frac{\rho_s}{\rho_n} \sigma^2 \frac{\partial T}{\partial \sigma}. \quad (10,19)$$

Система уравнений (10,14)–(10,16) после подстановки полученных значений скорости u позволяет выяснить связь скачков Δp , ΔT и w на разрыве. Таким путём убеждаемся в том, что первому корню соответствуют скачки ΔT и w более высокого порядка, чем первый относительно Δp . Второму же корню соответствуют скачки Δp порядка выше первого относительно ΔT и w . Кроме того, в этом случае имеет место следующая связь между ΔT и w :

$$\Delta T = w u_2 \frac{\rho_n}{\rho_s}. \quad (10,20)$$

Первому корню соответствует разрыв давления, аналогичный ударным волнам в обычных средах. Второму же корню соответствует разрыв температуры (температурный разрыв).

Разрывы давления (ударные волны). Пренебрежём в уравнении (10,11) членами выше второго порядка; в результате получим уравнение

$$\left(1 - u^2 \frac{\partial \rho}{\partial p}\right) + \left[\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)^2 - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial p^2}\right] u^2 \Delta p = 0, \quad (10,21)$$

определенное значение скорости разрыва давления во втором приближении

$$u_1 = u_{10} \left\{ 1 + \Delta p \frac{\partial}{\partial p} \ln (\rho u_{10}) \right\}. \quad (10,22)$$

При небольших значениях скачка скорости на поверхности разрыва согласно (10,1) имеем

$$\Delta p = \rho u_{10} v.$$

Учитывая это соотношение, перепишем формулу (10,22) в виде

$$u_1 = u_{10} \left\{ 1 + \frac{v}{2} \frac{\partial}{\partial p} (\rho u_{10}) \right\}. \quad (10,22')$$

Решение (10,22') совпадает с выражением для скорости разрывов в обычных средах. Подставив полученное значение u^2 в остальные два уравнения, убеждаемся в том, что в этом случае скачки ΔT и w оказываются выше второго порядка относительно скачка давления Δp .

Таким образом, разрывы давления в гелии II полностью аналогичны ударным волнам в обычной гидродинамике. Знак выражения $\frac{\partial}{\partial p} \ln (\rho u_{10})$ в гелии II также положителен, как и в обычных средах. Следовательно, ударные волны этого типа могут быть только волнами сжатия. Первый член в (10,22) равен скорости первого звука в гелии II; в первом приближении разрыв давления распространяется со скоростью, равной скорости первого звука.

Температурные разрывы. Второму корню u_{20} соответствуют отличные от нуля в первом приближении скачки ΔT и w . Пренебрежём в уравнениях (10,14)–(10,16) членами более высокого порядка, чем второй. Уравнение (10,14) позволяет выразить скачок давления Δp через значения скорости w ; указанный скачок оказывается второго порядка малости относительно w (или ΔT)

$$\Delta p = -w^2 \left[\frac{\rho_s \rho_n}{\rho} - \frac{1}{2} \rho^2 u_{20}^2 \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\rho_n}{\rho} \right) \right]. \quad (10,23)$$

Подставим полученное значение Δp в уравнение (10,15) и исключим из уравнений (10,15) и (10,16) скорость w . В результате

находим уравнение

$$\rho \left(-\sigma^2 \rho_s + u^2 \frac{\partial \sigma}{\partial T} \rho_n \right) \Delta T + \rho_s \rho \sigma (\Delta T)^2 \left\{ -3 \frac{\partial \sigma}{\partial T} + \frac{3}{2} \sigma - \frac{\rho}{\rho_n \rho_s} \frac{\partial \rho_n}{\partial T} - \frac{1}{2} \sigma \frac{\partial T}{\partial \sigma} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial T^2} \right\} = 0, \quad (10,24)$$

определенное величину скорости u_2 во втором приближении. Разрешив уравнение (10,24) относительно u и учитя определение (10,19), получим

$$u_2 = u_{20} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial T} \ln \left(u_{20}^3 \frac{\partial \sigma}{\partial T} \right) \Delta T \right\}. \quad (10,25)$$

Полученную формулу можно также переписать в виде (ср. (10,10))

$$u_2 = u_{20} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \frac{\rho_n u_{20}^2}{\rho \sigma} \varpi \frac{\partial}{\partial T} \ln \left(u_{20}^3 \frac{\partial \sigma}{\partial T} \right) \right\}. \quad (10,25')$$

Температурные разрывы — специфическое явление, характерное только для сверхтекущей жидкости. Формула (10,25) определяет скорость температурных разрывов в гелии. В первом приближении температурные разрывы движутся со скоростью, равной скорости второго звука u_{20} . Знак производной $\frac{\partial}{\partial T} \left[\ln \left(u_{20}^3 \frac{\partial \sigma}{\partial T} \right) \right]$ меняется в зависимости от температуры. Как будет показано в следующем параграфе, это обстоятельство приводит к своеобразным явлениям.

11. Звук большой амплитуды в гелии II³¹

Рассмотрим задачу о распространении звуковых колебаний в гелии II во втором приближении. При этом под первым приближением мы понимаем решение, получающееся из линеаризованной системы гидродинамических уравнений. Полная система гидродинамических уравнений для гелия II, согласно (1,22)–(1,25) имеет вид

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \quad \mathbf{j} = \rho_s \mathbf{v}_s + \rho_n \mathbf{v}_n, \quad (11,1)$$

$$\frac{\partial j_l}{\partial t} + \frac{\partial \Pi_{lk}}{\partial x_k} = 0, \quad \Pi_{lk} = p \delta_{lk} + \rho_n v_{nl} v_{nk} + \rho_s v_{sl} v_{sk}, \quad (11,2)$$

$$\frac{\partial (\tilde{\rho} \tilde{\sigma})}{\partial t} + \operatorname{div} \tilde{\rho} \tilde{\sigma} \mathbf{v}_n = 0, \quad (11,3)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} + \nabla \left(\tilde{\mu} + \frac{v_s^2}{2} \right) = 0. \quad (11,4)$$

Термодинамический потенциал $\tilde{\mu}$, энтропия $\tilde{\sigma}$ и плотность $\tilde{\rho}$ являются функциями относительной скорости $(\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)$ (ср. (10,5), (10,7), (10,8)).

Введём для удобства, так же как и в предыдущем пункте, скорость \mathbf{v} , связанную с потоком \mathbf{j} соотношением $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$, и обозначим разность скоростей $v_n - v_s$ одной буквой w . Мы будем искать такое решение системы (11,1)–(11,4), которое описывало бы бегущую в одном направлении волну. При этом будем считать малой величину w . Что же касается скорости \mathbf{v} , то на её величину никаких ограничений не налагаем. Практически представляет интерес только случай малых значений w , поскольку при больших значениях w возможно нарушение сверхтекучести. Рассмотрим звуковую волну, распространяющуюся по оси x . В бегущей волне все величины можно выразить через друг друга, иначе говоря, все величины являются функциями некоторого параметра, который обозначим буквой t . Координата x и время t являются функциями того же параметра. Скорость точек профиля в волне будет поэтому равна производной $u = \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_t = -\frac{\partial l}{\partial t} / \frac{\partial l}{\partial x}$, взятой при некотором значении этого параметра. Обозначим производные от функций по указанному параметру штрихом и, ограничиваясь линейными по величине w членами, перепишем систему (11,1)–(11,4) в виде ^{*}*)

$$(v - u) \frac{\partial \rho}{\partial T} T' + (v - u) \frac{\partial \rho}{\partial p} p' + \\ + (v - u) \rho^2 \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\rho_n}{\rho} \right) w w' + \rho v' = 0, \quad (11,5)$$

$$v(v - u) \frac{\partial \rho}{\partial T} T' + \left[1 + v(v - u) \frac{\partial \rho}{\partial p} \right] p' + \\ + \left[v(v - u) \rho^2 \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\rho_n}{\rho} \right) + \frac{2\rho_s \rho_n}{\rho} \right] w w' + \\ + \rho(2v - u) v' = 0, \quad (11,6)$$

$$\left[\rho(v - u) \frac{\partial \sigma}{\partial T} + w \frac{\partial}{\partial T} (\rho_s \sigma) \right] T' + \\ + \left[\rho(v - u) \frac{\partial \sigma}{\partial p} + w \frac{\partial}{\partial p} (\rho_s \sigma) \right] p' + \\ + \left[\rho_s \sigma + \rho(v - u) \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\rho_n}{\rho} \right) w \right] w' = 0, \quad (11,7)$$

$$\left[-\sigma - (v - u) \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\rho_n}{\rho} \right) w \right] T' + \left[\frac{1}{\rho} - \right. \\ \left. - \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\rho_n}{\rho} \right) (v - u) w \right] p' + \left[-\frac{\rho_n}{\rho} (v - u) - \right. \\ \left. - \frac{\rho_s \rho_n}{\rho^2} w \right] w' + \left[(v - u) - \frac{\rho_n}{\rho} w \right] w' = 0. \quad (11,8)$$

^{*}) У векторных величин индекс x опускаем. Также опускаем индекс 0 у величин σ и p .

Условие совместности полученной таким образом системы есть равенство нулю её определителя. Раскроем указанный определитель и пренебрежём всеми членами, содержащими производную $\frac{\partial p}{\partial T}$. После несложных выкладок получаем уравнение

$$\left\{ (u - v)^2 \frac{\partial p}{\partial p} - 1 \right\} \left\{ \left[\rho_n p (u - v)^2 \frac{\partial \sigma}{\partial T} - \sigma^2 \rho_s p \right] - w (u - v) \left[4 \rho_s \rho_n \frac{\partial \sigma}{\partial T} - 2 \rho \sigma \frac{\partial \rho_n}{\partial T} \right] \right\} = 0, \quad (11,9)$$

определяющее скорость u . Полученное уравнение распадается на два уравнения. Первое из них есть

$$(u - v)^2 \frac{\partial p}{\partial p} - 1 = 0. \quad (11,10)$$

Оно определяет хорошо известное из обычной гидродинамики Риманово решение. Решая уравнение (11,10), находим

$$u_1 = c_1 + v, \quad c_1^2 = \frac{\partial p}{\partial p}. \quad (11,11)$$

Приравняв нуль вторую скобку в (11,9), получим уравнение

$$\begin{aligned} \rho_n p (v - u)^2 \frac{\partial \sigma}{\partial T} - \sigma^2 \rho_s p = \\ - w (u - v) \left[4 \rho_s \rho_n \frac{\partial \sigma}{\partial T} - 2 \rho \sigma \frac{\partial \rho_n}{\partial T} \right] = 0, \end{aligned}$$

корень которого равен

$$u_2 = c_2 + v + w \left(\frac{2 \rho_s}{\rho} - \frac{\sigma}{\rho_n} \frac{\partial \rho_n}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial \sigma} \right). \quad (11,12)$$

Выражение (11,12) определяет скорость точек профиля волны второго звука во втором приближении.

Первый звук представляет собой волну сжатия и разрежения. В такой волне отклонение давления от равновесного значения δp , согласно уравнению (11,5), связано со скоростью σ в первом приближении соотношением

$$\delta p = p \frac{v}{c_1} \frac{\partial p}{\partial p}. \quad (11,13)$$

Скорость c_1 есть местная скорость звука, изменяющаяся от точки к точке профиля с изменением давления. Разложим в (11,12) выражение для c_1 в ряд по величине δp , ограничиваясь линейным членом; имеем

$$\begin{aligned} u_2 = u_{10} + \frac{\partial c_1}{\partial p} \delta p + v = u_{10} + \\ + v \left(1 + \frac{p}{u_{10}} \frac{\partial u_{10}}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial p} \right) = u_{10} + vu_{10} \frac{\partial}{\partial p} (pu_{10}) \quad (11,14) \end{aligned}$$

(u_{10} — значение скорости первого звука для равновесных значений давления и температуры). Тот факт, что различные точки профиля движутся с различной скоростью, приводит, как известно, к искажению профиля и возникновению разрывов. Величина $\alpha_1 = u_{10} \frac{\partial}{\partial p} (\rho u_{10})$ для всех известных сред имеет положительный знак. Поэтому области повышенного давления (ср. (11,13)) движутся со скоростью, большей u_{10} , а области разрежения — со скоростью, меньшей u_{10} . В результате разрыв образуется на переднем фронте волны. Скорость возникающего разрыва, согласно (10,22), равна

$$u_1 = u_{10} + \frac{1}{2} \alpha_1 (v_1 + v_2) \quad (11,15)$$

(v_1 и v_2 — скорости среды с обеих сторон разрыва). Таким образом, поверхность разрыва движется со скоростью, равной полусумме скоростей с обеих сторон разрыва *).

Второй звук является свойством, характерным только для гелия II. Он представляет собой температурную волну. В такой волне при отсутствии связи между вторым и первым звуками скорость v равна нулю, а отклонение температуры от равновесного значения δT , согласно (11,7), связано с величиной w соотношением

$$\delta T = \frac{\rho_s \sigma}{\rho c_2} \frac{\partial T}{\partial \sigma} w. \quad (11,16)$$

Как уже указывалось, формула (11,12) определяет скорость точек профиля во втором звуке. Входящая в эту формулу скорость c_2 есть скорость второго звука, изменяющаяся от точки к точке профиля волны с изменением величины δT . Для того чтобы получить скорость профиля в интересующем нас втором приближении, необходимо разложить c_2 до членов, линейных по величине δT ; в результате при помощи (11,16) находим

$$\begin{aligned} u_2 &= u_{20} + \frac{\partial c_2}{\partial T} \delta T + w \left(\frac{2\rho_s}{\rho} - \frac{\sigma}{\rho_n} \frac{\partial \rho_n}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial \sigma} \right) = \\ &= u_{20} + w \frac{\rho_s \sigma}{\rho} \frac{\partial T}{\partial \sigma} \frac{\partial}{\partial T} \ln \left(u_{20}^3 \frac{\partial \sigma}{\partial T} \right) \end{aligned} \quad (11,17)$$

$(u_{20} = \sqrt{\frac{\rho_s}{\rho_n} \sigma^2 \frac{\partial T}{\partial \sigma}}$ — скорость второго звука, как функция равновесных значений давления и температуры).

Точки профиля волны второго звука, согласно (11,17), движутся с различными скоростями. Это приводит к изменению формы

*.) При выводе формулы (10,22) скорость v с одной стороны разрыва считалась равной нулю. В общем случае получается указанный в тексте результат.

профиля волны со временем. В тот момент, когда форма профиля становится неоднозначной функцией координаты, возникают разрывы (в данном случае температурные). Скорости точек профиля волны на поверхности разрыва изменяются скачком. Скорость поверхности возникающего разрыва при этом зависит от указанного скачка скорости. Согласно формуле (10,24) она равна (см. примечание на стр. 133)

$$u_2 = u_{20} + \frac{1}{2} (w_1 + w_2) \frac{\rho_s \sigma}{\rho} \frac{\partial T}{\partial \sigma} \frac{\partial}{\partial T} \ln \left(u_{20}^3 \frac{\partial \sigma}{\partial T} \right) \quad (11,18)$$

(w_1 и w_2 — значения относительной скорости с обеих сторон поверхности разрыва).

Во втором звуке скорость w связана со скоростью нормального движения соотношением $w = v_n \frac{\rho}{\rho_s}$. Выражая величину w через v_n , перепишем (11,18) в виде

$$u_2 = u_{20} + \frac{1}{2} \alpha_2 (v_{n1} + v_{n2}), \quad (11,19)$$

где

$$\alpha_2 = \frac{\sigma T}{C} \frac{\partial}{\partial T} \ln \left(u_{20}^3 \frac{C}{T} \right),$$

$$C = T \frac{\partial \sigma}{\partial T} \quad (11,20)$$

(C — теплоёмкость 1 г гелия II).

Коэффициент α_2 меняет знак при изменении температуры. Зависимость его от температуры изображена графически на рис. 7. При температурах выше $2,00^{\circ}\text{K}$ и в интервале $0,4—0,9^{\circ}\text{K}$ коэффициент $\alpha < 0$, в остальной области $\alpha > 0$. В области температур, где $\alpha < 0$, поверхности разрыва возникают на заднем фронте волны, в области же температур, где $\alpha > 0$, наоборот, в переднем фронте волны. Возникновение разрыва на заднем фронте волны является специфическим свойством второго звука в гелии II, неизвестным для обычного звука. Следует заметить, что, строго говоря, с момента возникновения разрыва звуковое приближение становится неприменимым. Однако, как следует из (10,24), скорость нормального разрыва небольшой интенсивности совпадает с тем, что даёт для скорости второе звуковое приближение. Ситуация аналогична той, которая имеет место в обычной гидродинамике.

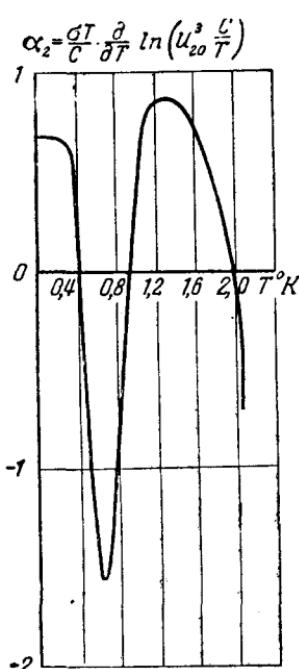


Рис. 7. Температурная зависимость коэффициента α_2 , определяющего скорость температурных разрывов в гелии II.

падает с тем, что даёт для скорости второе звуковое приближение. Ситуация аналогична той, которая имеет место в обычной гидродинамике.

Особорн²⁸ наблюдал изменение формы прямоугольного импульса температуры, распространяющегося в гелии II. Указанный импульс постепенно принимал форму треугольного зубца, одна из сторон которого была вертикальной. Это указывает на то, что в этих опытах наблюдалось образование разрывов.

Скорость поверхности разрыва вблизи λ -точки оказывалась, в соответствии с нашими результатами, больше скорости второго звука, при низких же температурах (несколько больше 1°K), наоборот, меньше скорости второго звука. При температуре $1,05^{\circ}\text{K}$ и мощности импульса до $1,3 \text{ W/cm}$ скорость разрыва (ударной волны) превышала скорость второго звука на $1,8 \text{ м/сек}$. Вычисленное значение энтропии при этой температуре равно $0,5 \cdot 10^{-3} \text{ кал/г\cdot град}$. Скорость v_n на зубце равнялась $q/\rho T = 4,15 \text{ м/сек}$. Умножив полусумму значений v_n на зубце и в основании зубца (нуль) на величину a_2 , взятую из графика, получаем $a_2 - a_{20} = 1,5 \text{ м/сек}$ в достаточном согласии с результатами измерений.

12. О распространении звука в движущемся гелии II и о влиянии теплового потока на распространение второго звука³²

Из обычной гидродинамики хорошо известно, что в движущейся жидкости происходит «снос» звука. Аналогичное явление должно иметь место в гидродинамике сверхтекучей жидкости. Поскольку в сверхтекучей жидкости возможно два движения (нормальное со скоростью \mathbf{v}_n и сверхтекущее со скоростью \mathbf{v}_s), а также два типа звуковых колебаний, распространяющихся с различными скоростями, то, естественно, что картина распространения звука в движущейся сверхтекучей жидкости будет отличаться от подобного явления в классической гидродинамике.

Пусть в гелии II, в котором имеются нормальное и сверхтекущее движение с постоянными скоростями \mathbf{v}_n и \mathbf{v}_s , распространяются звуковые колебания частоты ω в направлении, характеризующемся единичным вектором \mathbf{n} (вдоль от x). Волновой вектор \mathbf{k} равен $\frac{\omega}{u} \mathbf{n}$, где u — скорость звуковых колебаний. Мы найдём здесь скорость звуковых колебаний u (для первого и второго звуков) в движущемся гелии II в предположении, что движение происходит со скоростями, малыми по сравнению со скоростью звука. Мы будем искать линейные по скоростям \mathbf{v}_n и \mathbf{v}_s добавки к значению скорости звука в покоящейся жидкости. Для этого необходимо переписать уравнения гидродинамики с точностью до квадратичных по скоростям членов.

Задача во многом аналогична предыдущей. Проекции векторов на направление волнового вектора обозначим индексом k , а на плоскость, перпендикулярную к \mathbf{k} , индексом \perp .

Уравнения гидродинамики принимают вид ($U = u - v_k$)

$$-U \frac{\partial \rho}{\partial T} T' - [U \frac{\partial \rho}{\partial p} p' - U \rho^2 \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\rho_n}{\rho} \right) \times \\ \times (w_k w'_k + w_\perp w'_\perp) + \rho v'_k = 0, \quad (12,1)$$

$$p' + 2 \frac{\rho_s \rho_n}{\rho} w_k w'_k - \rho U v'_k = 0, \quad (12,2)$$

$$\frac{\rho_s \rho_n}{\rho} (w_k w'_\perp + w_\perp w'_k) - \rho U v'_\perp = 0, \quad (12,3)$$

$$\left[\rho U \frac{\partial \sigma}{\partial t} + w_k \frac{\partial}{\partial T} (\rho_s \sigma) \right] T' + \\ + \left[-\rho U \frac{\partial \sigma}{\partial p} + w_k \frac{\partial}{\partial p} (\rho_s \sigma) \right] p' + \rho_s \sigma w'_k = 0, \quad (12,4)$$

$$\left[-\sigma - U w_k \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\rho_n}{\rho} \right) \right] T' - \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\rho_n}{\rho} \right) U w_k p' + \\ + \left[\frac{\rho_n}{\rho} U - \frac{3 \rho_n \sigma_s}{\rho^2} w_k \right] w'_k + \left(-\frac{\rho_n}{\rho} v_\perp - \frac{\rho_s \rho_n}{\rho^2} w_\perp \right) w'_\perp - \\ - \frac{\rho_n}{\rho} w_k v'_k = \frac{\rho_n}{\rho} w_\perp v'_\perp = 0, \quad (12,5)$$

$$v'_\perp - \left(\frac{\rho_n}{\rho} w_\perp \right)' = 0. \quad (12,6)$$

Условия совместности полученной системы дают уравнения, определяющие возможные значения скорости звука u . Проекции уравнений движения на плоскость, перпендикулярную к волновому вектору (ур. (12,3), (12,6)), отщепляются от остальных уравнений. Это объясняется тем, что компоненты v_\perp и w_\perp входят в уравнения (12,1), (12,2), (12,4), (12,5) только в членах второго порядка *). Таким путём находим

$$\left(U^2 \frac{\partial \rho}{\partial p} - 1 \right) \left\{ \left(\rho_n \rho U^2 \frac{\partial \sigma}{\partial T} - \sigma^2 \rho \rho_s \right) - \right. \\ \left. - U w_k \left(4 \rho_s \rho_n \frac{\partial \sigma}{\partial T} - 2 \sigma \rho \frac{\partial \rho_n}{\partial T} \right) \right\} = 0, \quad (12,7)$$

$$U - \frac{\rho_s}{\rho} w_k = 0. \quad (12,8)$$

Корни уравнения (12,7) определяют скорости первого и второго звуков в движущемся гелии II. Для первого звука находим решение, совпадающее с известным решением в обычной гидродинамике

$$u_1 = c_1 + v_k, \quad c_1^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho}. \quad (12,9)$$

*). При этом уравнение (12,6) представляет собой следствие условия потенциальности сверхтекущего движения.

Для скорости второго звука имеем

$$u_2 = c_2 + v_k + w_k \left(\frac{2\rho_s}{\rho} - \frac{\sigma}{\rho_n} \frac{\partial \rho_n}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial \sigma} \right), \quad c_2^2 = \frac{\rho_s}{\rho_n} \sigma^2 \frac{\partial T}{\partial \sigma}. \quad (12,10)$$

Колебания поперечных компонент скорости v_{\perp} и w_{\perp} в плоскости, перпендикулярной к направлению волнового вектора, распространяются с фазовой скоростью

$$u = v_k + \frac{\rho_s}{\rho} w_k = \frac{v_n k}{k}. \quad (12,11)$$

В формулах (12,10) и (12,11) скорости c_1 и c_2 есть скорости звука в гелии в отсутствии движений с постоянными скоростями. Если амплитуды скоростей в звуковой волне малы по сравнению с постоянными слагающими скоростями, то тогда можно не учитывать нелинейный эффект, обвязанный переменности c_1 и c_2 вдоль профиля звуковой волны (подробнее см. § 11). В этом случае v_k и w_k в формулах (12,10) и (12,11) суть проекции постоянных скоростей на направление волнового вектора \mathbf{k} .

Из формулы (12,10) следует, что при наличии постоянного теплового потока в гелии II второй звук будет сноситься этим потоком. В тепловом потоке $\mathbf{j} = 0$, а следовательно, и $\mathbf{v} = 0$. Далее имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= \mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s = \\ &= \mathbf{v}_n + \frac{\rho_n}{\rho_s} \mathbf{v}_n = \frac{\rho}{\rho_s} \mathbf{v}_n. \end{aligned}$$

Формула (12,10) в этом случае приобретает вид

$$\begin{aligned} u_2 &= c_2 + v_{nk} \frac{\rho}{\rho_s} \left(\frac{2\rho_s}{\rho} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\sigma}{\rho_n} \frac{\partial \rho_n}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial \sigma} \right) = \\ &= c_2 + \gamma v_{nk}. \quad (12,12) \end{aligned}$$

Величина v_n связана с плотностью теплового потока \mathbf{q}

$$\mathbf{q} = \rho \sigma T \mathbf{v}_n. \quad (12,13)$$

Коэффициент γ при v_{nk} в формуле (12,12) является

функцией температуры, величина его порядка единицы. На рис. 8 изображена зависимость γ от температуры. В области температур выше 1°K , где существенны лишь ротонные части термодинамических

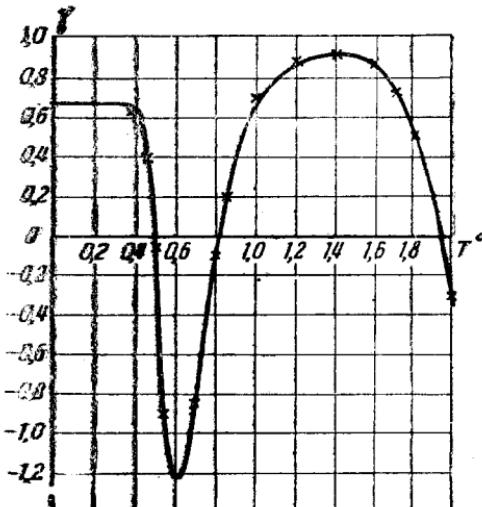


Рис. 8. Температурная зависимость коэффициента γ .

величин, имеем приближённо

$$\rho_n \sim \sigma \quad \text{и} \quad \gamma = \frac{\rho}{\rho_s} \left(\frac{2\rho_s}{\rho} - 1 \right) = \frac{\rho_s - \rho_n}{\rho}.$$

Из того факта, что γ меняет знак при некоторых температурах, следует, что «снос» второго звука может происходить как по направлению теплового потока, так и против потока.

Сделаем, наконец, замечание о влиянии теплового потока на скорость стоячих волн второго звука. Из симметрии стоячих волн следует, что этот эффект будет квадратичным по отношению скорости сноса к скорости второго звука. Даже при скоростях v_n порядка 1 м/сек влияние на скорость второго звука в стоячей волне будет порядка долей процента.

IV. ТЕПЛООБМЕН МЕЖДУ ТВЁРДЫМ ТЕЛОМ И ГЕЛИЕМ II

Необычный характер теплопередачи в гелии II ответственен за ряд своеобразных явлений, происходящих на границе между твёрдым телом и жидким гелием II. П. Л. Капица³³ обнаружил, что при выделении тепла в твёрдом теле, находящемся в контакте с жидким гелием II, возникает постоянная разность температур между твёрдым телом и гелием II. Величина этой разности оказывается пропорциональной потоку выделяемого тепла. В тех же опытах было показано, что скачок локализован в узком пристенном слое жидкости, толщина которого меньше 10^{-3} см. Величина теплосопротивления, равная отношению разности температур к потоку выделяемого тепла, в опытах Капицы возрастала с убыванием температуры по кубическому закону. Это весьма интересное явление, называемое обычно в литературе температурным скачком Капицы, в последнее время исследовалось различными авторами. Качественно картина у всех авторов совпадает с наблюдённой Капицей. Что же касается количественных закономерностей, то они существенно отличались у различных авторов. Так, Э. Андроникашвили и Г. Мирская³⁴ получили для величины теплосопротивления границы твёрдое тело — жидкий гелий II значения заметно большие, чем у Капицы.

Уайт, Гонзалес и Джонстон³⁵ получили температурную зависимость величины теплосопротивления, близкую к полученной Капицей. В их опытах теплосопротивление оказалось обратно пропорциональным температуре в степени 2,6.

Последние подробные эксперименты Фейербенка и Вилкса³⁶ дают для теплосопротивления более высокие значения, чем у Капицы, для температурной же зависимости теплосопротивления они получают закон T^{-2} .

Мы обсудим в этом разделе возможные механизмы теплообмена между твёрдым телом и гелием II.

Для этого рассмотрим твёрдое изотропное тело, заполняющее одну половину пространства и граничащее с гелием II, заполняющим

вторую половину пространства. Пусть температура твёрдого тела равна T' , а температура гелия II равна T . Наша задача состоит в том, чтобы определить поток тепла, возникающий между указанными телами. Теплообмен между твёрдым телом и гелием II может осуществляться двумя способами: а) передачей энергии при соударениях фононов и ротонов с твёрдой стенкой; б) излучением энергии колеблющейся поверхностью твёрдого тела (излучением фононов). Затруднённость теплообмена между твёрдым телом и гелием II можно качественно понять, если учесть значительное различие в скоростях звука в твёрдом теле и жидким гелием II (скорость звука в гелии II на порядок меньше скорости звука в твёрдых телах). Благодаря такому различию импульсы фононов в твёрдом теле и жидком гелии II той же температуры будут заметно отличаться. Последнее обстоятельство не позволяет фононам из твёрдого тела переходить в жидкий гелий II (и обратно), так как при таком превращении невозможно одновременно удовлетворить законам сохранения импульса и энергии.

Мы покажем, что основным механизмом, определяющим теплообмен между твёрдым телом и жидким гелием II, является излучение (и поглощение) энергии границей твёрдого тела, совершающей тепловые колебания. Возникающий на границе между твёрдым телом и гелием II поток энергии оказывается пропорциональным разности четвёртых степеней температуры указанных тел.

Для того чтобы приступить к вычислению теплообмена эффектов, необходимо предварительно произвести квантование упругих волн в твёрдом теле, заполняющем полупространство.

13. Квантование упругих волн³⁷. В твёрдом теле возможны три типа упругих колебаний: продольные, поперечные и поверхностные.

Продольные волны. Жидкий гелий II обладает весьма малой плотностью по сравнению с твёрдым телом. Поэтому граница твёрдое тело — жидкый гелий II по своим свойствам не будет отличаться от границы твёрдое тело — вакуум. При отражении от границы твёрдое тело — вакуум продольной волны, падающей в плоскости XZ , возникают две отражённые волны: продольная и поперечная. Из соображений симметрии следует, что вектор смещения в поперечной отражённой волне, так же как и сама волна, будет лежать в плоскости XZ . Полное смещение в твёрдом теле равно

$$\mathbf{n} = (A_0 \mathbf{n}_0 e^{ik_0 r} + A_l \mathbf{n}_l e^{ik_l r} + A_t [a \mathbf{n}_t] e^{ik_t r}) e^{-i\omega t}, \quad (13.1)$$

A_0 , A_l , A_t и \mathbf{n}_0 , \mathbf{n}_l , \mathbf{n}_t — амплитуды и единичные векторы вдоль направлений падающей продольной и отражённых продольной и поперечных волн соответственно; a — единичный вектор, перпендикулярный к плоскости XZ , $k_0 = k_l = \omega/c_l$; $k_t = \omega/c_t$. Угол падения θ_0 и угол отражения продольной θ_l и поперечной θ_t волн связаны соотношениями:

$$\theta_0 = \theta_l, \quad c_l \sin \theta_0 = c_t \sin \theta_t. \quad (13.2)$$

Компоненты вектора смещения \mathbf{u} равны:

$$u_z = (\cos \theta_0 A_0 e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}} - \cos \theta_t A_t e^{i\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r}} - A_t \sin \theta_t e^{i\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r}}) e^{-i\omega t}, \quad (13,3)$$

$$u_x = (\sin \theta_0 A_0 e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}} + \sin \theta_t A_t e^{i\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r}} - A_t \cos \theta_t e^{i\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r}}) e^{-i\omega t}. \quad (13,4)$$

Вычислим далее компоненты тензора деформации u_{ik} и тензора напряжений

$$\sigma_{ik} = 2\rho c_t^2 u_{ik} + \rho (c_t^2 - 2c_t^2) u_{ll} \delta_{ik}$$

(ρ — плотность тела).

Границные условия на границе твёрдое тело — вакуум дают два условия $\sigma_{zz} = \sigma_{xz} = 0$, связывающие амплитуды A_t , A_t с амплитудой A_0 . Таким образом находим

$$A_t = A_0 \frac{c_t^2 \sin 2\theta_t \sin 2\theta_0 - c_t^2 \cos^2 2\theta_t}{c_t^2 \sin 2\theta_t \sin 2\theta_0 + c_t^2 \cos^2 2\theta_t} \quad (13,5)$$

и

$$A_t = -A_0 \frac{2c_t c_t \sin 2\theta_0 \cos 2\theta_t}{c_t^2 \sin 2\theta_t \sin 2\theta_0 + c_t^2 \cos^2 2\theta_t}. \quad (13,6)$$

Подставив (13,5) и (13,6) в (13,3), найдём величину z -компоненты вектора смещения на поверхности раздела твёрдое тело — вакуум:

$$u_{zt} = A_0 \frac{2c_t^2 \cos \theta_0 \cos 2\theta_t}{c_t^2 \sin 2\theta_t \sin 2\theta_0 + c_t^2 \cos^2 2\theta_t} e^{-i\omega t}. \quad (13,7)$$

Поперечные волны. При отражении от границы твёрдое тело — вакуум падающей в плоскости xz поперечной волны возникают две отражённые волны: поперечная и продольная. Возможны два случая: или направления колебаний в падающей поперечной волне лежат в плоскости падения xz , или указанные колебания совершаются в направлении, перпендикулярном к этой плоскости. Пусть направление колебаний поперечной волны лежит в плоскости падения, тогда и в отражённой поперечной волне, как это видно из соображений симметрии, направление колебаний лежит в той же плоскости. Вектор смещения в этом случае равен

$$\mathbf{u} = ([\mathbf{a}\mathbf{n}_0] A_0 e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}} + A_t \mathbf{n}_t e^{i\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r}} + A_t [\mathbf{a}\mathbf{n}_t] e^{i\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r}}) e^{-i\omega t} \quad (13,8)$$

(\mathbf{n}_0 — единичный вектор в направлении падающей поперечной волны, A_0 — соответствующая амплитуда).

Угол падения θ_0 и угол отражения продольной волны θ_t и поперечной волны θ_t связаны соотношениями:

$$\theta_0 = \theta_t, \quad c_t \sin \theta_t = c_l \sin \theta_0. \quad (13,9)$$

Так же как и для случая падающей продольной волны, граничные условия позволяют выразить амплитуды A_t и A_t через амплитуды A_0 :

имеем

$$A_t = A_0 \frac{c_t^2 \sin 2\theta_l \sin 2\theta_0 - c_t^2 \cos^2 2\theta_0}{c_t^2 \sin 2\theta_l \sin 2\theta_0 + c_t^2 \cos^2 2\theta_0}, \quad (13,10)$$

$$A_l = A_0 \frac{2c_t c_t \sin 2\theta_0 \cos 2\theta_0}{c_t^2 \sin 2\theta_l \sin 2\theta_0 + c_t^2 \cos^2 2\theta_0}. \quad (13,11)$$

На поверхности раздела твёрдое тело — вакуум z -компоненты вектора смещения в этом случае равна

$$u_{zt} = -A_0 \frac{2c_t^2 \cos \theta_0 \sin 2\theta_l}{c_t^2 \sin 2\theta_l \sin 2\theta_0 + c_t^2 \cos^2 2\theta_0} e^{-i\omega t}. \quad (13,12)$$

Поперечные волны, направление колебаний в которых перпендикулярно плоскости падения, не будут оказывать влияния на рассматриваемое нами явление. В самом деле, как будет видно из дальнейшего, интересующий нас эффект определяется величиной нормальной z -компоненты вектора смещения границы раздела твёрдое тело — вакуум. В поперечных же колебаниях такого типа z -компонента вектора смещения на поверхности раздела равна нулю как в падающей, так и в отражённой волнах*).

Выражения (13,7) и (13,12) содержат в качестве множителя амплитуду падающей волны A_0 . Величину этой амплитуды в случае одного фона находим из условия, сводящегося к требованию, чтобы полная энергия, заключённая в падающей волне частоты ω , была равна $\hbar\omega$. Полная энергия колебаний равна удвоенной кинетической (или потенциальной) энергии; таким образом имеем (ρ_T — плотность твёрдого тела)

$$\varepsilon = \int \rho_T |\dot{\mathbf{u}}|^2 dV = \rho_T |A_0|^2 \omega^2 V = \hbar\omega, \quad (13,13)$$

откуда находим

$$|A_0| = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{\rho_T \omega V}}. \quad (13,14)$$

С учётом этого результата запишем выражение для модулей амплитуд z -компоненты скорости на поверхности тела ($z=0$)

$$|\dot{u}_{zl}| = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{\rho_T V}} \left| \frac{2c_t^2 \cos \theta_0 \cos 2\theta_t}{c_t^2 \sin 2\theta_t \sin 2\theta_0 + c_t^2 \cos^2 2\theta_t} \right|, \quad (13,15)$$

$$|\dot{u}_{zt}| = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{\rho_T V}} \left| \frac{2c_t^2 \cos \theta_0 \sin 2\theta_t}{c_t^2 \sin 2\theta_t \sin 2\theta_0 + c_t^2 \cos^2 2\theta_0} \right|. \quad (13,16)$$

Поверхностные волны. Компоненты вектора смещения в распространяющейся в направлении оси x поверхностью волне

*.) В этом случае, как видно из соображений симметрии, продольная отражённая волна не возникает.

равны

$$u_t = (ax_t e^{ikx} + x_t z + bke^{ikx} + x_t z) e^{-i\omega t}, \quad (13,17)$$

$$u_z = -t(ake^{ikx} + x_t z + bx_t e^{ikx} + x_t z) e^{-i\omega t}. \quad (13,18)$$

Здесь $k = \omega/c$, $c = \xi c_t$ — скорость распространения поверхности волн; ξ — функция отношения c_t/c_i ;

$$x_t = \omega \sqrt{c^{-2} - c_t^{-2}}, \quad x_l = \omega \sqrt{c^{-2} - c_l^{-2}};$$

a и b — некоторые постоянные.

При помощи выражений (13,17) и (13,18) вычисляем компоненты тензора деформации u_{ik} и тензора напряжений σ_{ik} .

Границные условия на поверхности твёрдого тела ($z = 0$): $\sigma_{ik} n_k = 0$ дают два уравнения:

$$a(x_t^2 + k^2) + 2x_t kb = 0, \quad (13,19)$$

$$2x_t ka + (x_t^2 + k^2) b = 0. \quad (13,20)$$

Условие совместности системы (13,19)–(13,20) имеет вид

$$4k^2 x_t x_t = (x_t^2 + k^2)^2 \quad (13,21)$$

и связывает между собой скорость поверхности волны c и скорость объёмных волн — поперечной c_t и продольной c_l . Уравнения (13,19)–(13,20) дают, таким образом, одну связь между величинами a и b . Величина a (или b) определяется соответствующей нормировкой, сводящейся к тому, что полная энергия, заключённая в поверхности волне, должна быть равна $\hbar\omega$. Поскольку для колебательного движения потенциальная энергия равна кинетической и поскольку в данном случае выражение для кинетической энергии может быть получено более простым путём, полную энергию поверхности волны мы найдём удвоением выражения для кинетической энергии. Таким образом, полная энергия поверхности волны частоты ω равна

$$\epsilon = \int_0^\infty \rho_t (|\dot{u}_x|^2 + |\dot{u}_z|^2) s dz = \hbar\omega \quad (13,22)$$

(ρ_t — плотность твёрдого тела, s — его поверхность).

Далее вычислим при помощи (13,17) и (13,18) производные по времени от компонент вектора смещения u и выразим коэффициент b через коэффициент a согласно (13,19). После подстановки полученных выражений \dot{u}_x и \dot{u}_z в (13,22) и интегрирования по z получим

$$s\rho_t \left\{ \frac{k^2 + x_t^2}{2x_t} + \frac{k^2 + x_l^2}{2x_l} \frac{x_t}{x_l} - \frac{k^2 + x_t^2}{x_l} \right\} \omega^2 |a|^2 = \hbar\omega. \quad (13,23)$$

Отсюда находим выражение для модуля коэффициента

$$|a| = \sqrt{\frac{\hbar}{\rho_T \omega s}} \sqrt{\frac{1}{f}}, \quad f = \frac{k^2 + \kappa_t^2}{2\kappa_t} + \frac{k^2 - \kappa_t^2}{2\kappa_t} \frac{\kappa_t}{\kappa_l} - \frac{\kappa_t^2 + k^2}{\kappa_l}, \quad (13,24)$$

Величина z -компоненты вектора смещения \mathbf{u} на поверхности тела согласно (13,18) и (13,19) равна

$$u_z = -i \frac{k^2 - \kappa_t^2}{2k} \sqrt{\frac{\hbar \omega}{\rho_T s}} \frac{1}{\sqrt{f}}. \quad (13,25)$$

Интересующая нас в дальнейшем величина модуля z -компоненты скорости u_z равна

$$|\dot{u}_z| = \frac{k^2 - \kappa_t^2}{2k} \sqrt{\frac{\hbar \omega}{\rho_T s}} \frac{1}{\sqrt{f}}. \quad (13,26)$$

14. Излучение энергии колеблющейся поверхностью твёрдого тела³⁷

Твёрдое тело, поверхность которого совершает колебательное движение с частотой ω , будет излучать в окружающую жидкую среду звук. Можно вычислить энергию, уносимую звуком в единицу времени. Она равна

$$Q = \rho_{ж} c_{ж} \int |\dot{u}_n|^2 ds *), \quad (14,1)$$

$\rho_{ж}$ — плотность жидкого гелия II, $c_{ж}$ — скорость звука в гелии II, u_n — нормальная к поверхности тела компонента скорости движения поверхности. Интегрирование производится по поверхности тела. В случае плоской границы тела интегрирование упрощается и выражение (14,1) можно переписать в виде

$$q(\omega) = \frac{Q}{s} = \rho_{ж} c_{ж} |\dot{u}_z|^2, \quad (14,2)$$

где $q(\omega)$ — поток энергии.

Наряду с излучением звука (фононов) с поверхности будет происходить и обратный процесс поглощения фононов, падающих из гелия II на поверхность тела.

Что касается возможного процесса поглощения и испускания ротонов поверхностью твёрдого тела, то легко видеть, что такой

*) Выражение (14,1) имеет место в том случае, когда размеры тела превосходят длину волны излучаемого звука. В рассматриваемом случае тела, заполняющего половину пространства, это условие, естественно, соблюдается.

процесс не может играть существенной роли. Действительно, фонон твёрдого тела может превратиться в ротон только в том случае, если его энергия равна *) или больше Δ . Но $\Delta \gg kT$ и поэтому число таких фононов в твёрдом теле, распределённых по Планку, экспоненциально мало. Следовательно, указанный процесс маловероятен.

Для того чтобы найти поток энергии, которым обмениваются твёрдое тело с жидким гелием II, необходимо вычислить разность потоков энергии, направленных от твёрдого тела к жидкости и от жидкости к твёрдому телу. Указанная разность, будучи проинтегрирована по всем частотам ω , даёт искомый поток ΔW

$$\begin{aligned}\Delta W &= \int q(\omega) \{n(T)[n(T') + 1] - [n(T) + 1]n(T')\} d\tau_\omega = \\ &= \int q(\omega) \{n(T) - n(T')\} d\tau_\omega = W(T) - W(T');\end{aligned}\quad (14,3)$$

$d\tau_\omega$ — элемент фазового объёма, $n(T)$ — функция распределения Планка

$$n(T) = \left(e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1 \right)^{-1}. \quad (14,4)$$

Таким образом искомый поток равен разности значений интегралов W , полученных интегрированием $q(\omega)$ по планковскому распределению, взятых при температурах твёрдого тела, T' , и жидкого гелия II, T . Учитывая все возможные типы колебаний, согласно (14,3) имеем

$$\begin{aligned}W &= \int p_{jk} c_k \left(e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1 \right)^{-1} \left\{ \int |\dot{u}_{zt}|^2 \frac{\omega^2 d\omega V}{2(2\pi c_l)^3} + \right. \\ &\quad \left. + \int |\dot{u}_{zI}|^2 \frac{\omega^2 d\omega V}{2(2\pi c_l)^3} + |\dot{u}_{zs}|^2 \frac{2\pi\omega s}{(2\pi c)^2} \right\} d\omega,\end{aligned}\quad (14,5)$$

$d\omega = 2\pi \sin \theta_0 d\theta_0$ — элемент телесного угла.

В выражениях для фазовых объёмов поперечных и продольных колебаний дополнительный множитель $\frac{1}{2}$ учитывает возможность интегрирования по половине телесного угла $d\omega$. Подставим в (14,5) выражения для соответствующих z -компонент скорости \dot{u}_z , определённые формулами (13,15), (13,16) и (13,26),

$$\begin{aligned}W &= p_{jk} c_k \int \left(e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1 \right)^{-1} \left\{ \frac{1}{2c_l^3} \left| \frac{2c_l^2 \cos \theta_0 \sin 2\theta_l}{c_l^2 \sin 2\theta_0 \sin 2\theta_l + c_l^2 \cos^2 2\theta_0} \right|^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2c_l^3} \left| \frac{2c_l^2 \cos \theta_0 \cos 2\theta_l}{c_l^2 \sin 2\theta_0 \sin 2\theta_l + c_l^2 \cos^2 2\theta_l} \right|^2 + \frac{\pi (k^2 - \omega^2)^2}{4k^3 c^3 f} \right\} \times \\ &\quad \times \frac{\hbar\omega}{p_T} \frac{\omega^2 d\omega d\theta_0}{(2\pi)^3}.\end{aligned}\quad (14,6)$$

*) Минимальная энергия ротона равна $\Delta/k = 8,9^\circ \text{К}$.

Интегрирование по частотам ω проводится элементарно. Интегралы по углам нуждаются в специальном анализе, позволяющем выяснить области интегрирования. После интегрирования по частотам и несложных преобразований угловых переменных получаем окончательное выражение для теплового потока W

$$W = \frac{\rho_{jk}}{\rho_T} c_{jk} \frac{4\pi^5}{15} \frac{(kT)^4}{(2\pi\hbar c_t)^3} F(\eta), \quad (14,7)$$

где $F(\eta)$ — некоторая функция упругих констант твёрдого тела ($\eta = c_t/c_t$, $\xi = c/c_t$, c — скорость поверхностных волн)

$$\begin{aligned} F(\eta) = & 2 \int_0^1 \frac{4y \sqrt{1-y} (y\eta^2 - 1) dy}{\eta^2 (1-2y)^4 + 16(1-y)(y\eta^2-1)} + \\ & + 2 \int_0^{1/\eta^2} \frac{\eta (1-2y)^2 \sqrt{1-y\eta^2}}{\eta^2 (1-2y)^4 + 16y^2 (1-y)(y\eta^2-1)} + \\ & + \frac{\pi}{4} \left\{ \left(\frac{2}{\xi} - \xi \right) \left(\frac{1}{2\sqrt{1-\xi^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+\frac{\xi^2}{\eta^2}}} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{\xi} \sqrt{1-\xi^2} \frac{2 - \frac{\xi^2}{\eta^2}}{2 \left(1 - \frac{\xi^2}{\eta^2} \right)} \right\}^{-1}. \quad (14,8) \end{aligned}$$

Функция $F(\eta)$ порядка единицы. Она табулировалась для двух значений $\eta = 1,71$ (стекло), $\eta = 2,22$ (платина)

$$F(1,71) \approx 2,5, \quad F(2,22) \approx 2,0.$$

Поток энергии, переносимый между твёрдым телом и жидким гелием II, согласно (14,3) и (14,8) равен

$$\begin{aligned} \Delta W_{\text{зв}} = & W(T) - W(T') = \frac{\rho_{jk}}{\rho_T} c_{jk} \frac{16\pi^5}{15} \frac{1}{(2\pi\hbar c_t)^3} \times \\ & \times F \{ (kT)^4 - (kT')^4 \}. \quad (14,9) \end{aligned}$$

Таким образом указанный поток пропорционален разности четвёртых степеней температуры твёрдого тела и жидкого гелия II. Для малых разностей температур формулу (14,9) можно переписать в виде

$$\Delta W_{\text{зв}} = \frac{\rho_{jk}}{\rho_T} c_{jk} \frac{16\pi^5}{15} \frac{(kT)^3}{(2\pi\hbar c_t)^3} F k(T - T'). \quad (14,10)$$

Излучённая твёрдой стенкой энергия распространяется в гелии II в виде фононов. Возникающий в связи с этим избыток фононов,

однако, очень быстро рассасывается. Вероятность превращения фона на в ротон сравнительно велика, соответствующее время, характеризующее этот процесс, было нами найдено ранее. При температуре порядка $1,5 - 2^\circ \text{К}$ оно равно $10^{-9} - 10^{-10} \text{ сек.}$ Таким образом избыточные (над равновесным числом) фононы превращаются в ротоны сравнительно быстро на расстояниях порядка 10^{-4} см от стенки. С другой стороны, теплопередача от твёрдой стенки к гелию II (или наоборот) происходит очень медленно, а возникающий между ними поток тепла ничтожно мал. Таким образом можно считать, что теплообмен осуществляется между твёрдым телом и гелием II, находящимися в равновесии.

15. Обмен энергией при соударениях ротонов и фононов с твёрдой стенкой

Возможен обмен энергией между твёрдым телом и жидким гелием II при соударениях ротонов (фононов) с твёрдой стенкой. Ротон (фонон) при отражении от твёрдой стенки может приобрести или потерять некоторую энергию. Такое изменение энергии сопровождается поглощением или испусканием фона на в твёрдом теле.

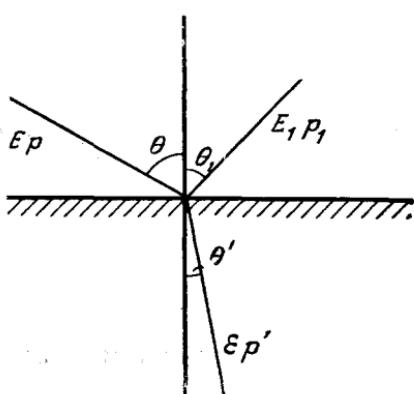
Энергия испущенного фона ε и угол θ' , под которым он испущен, определяются двумя законами сохранения: законом сохранения энергии

$$E = E_1 + \varepsilon \quad (\varepsilon = h\omega) \quad (15,1)$$

и законом сохранения для компонент импульса, касательных к поверхности раздела:

$$\begin{aligned} p \sin \theta &= \\ &= p_1 \sin \theta_1 + p' \sin \theta', \quad (15,2) \end{aligned}$$

Рис. 9.



E , p и E_1 , p_1 — энергия и импульс ротона (или фона), соответственно падающего и отражённого; ε , p' — энергия и импульс фона, испущенного в твёрдом теле. Смысл углов ясен из рисунка 9.

Скорость звука в твёрдом теле значительно превосходит скорость звука (фона) в гелии II. Поэтому при не сильно различающихся температурах твёрдого тела и гелия II импульсы фононов в гелии II будут значительно превосходить импульсы фононов в твёрдом теле. Импульсы ротонов, величина которых близка к $P_0 = 2 \cdot 10^{-19} \text{ г см сек}^{-1}$, значительно превосходят импульсы фононов в гелии II, а следовательно, и импульсы фононов в твёрдом теле. Это обстоятельство

позволяет нам в дальнейшем пренебречь импульсом фона на в твёрдом теле в правой части соотношения (15,2).

Необходимо заметить, что соотношение (15,2), строго говоря, применимо лишь к случаю соударения фона на с твёрдой стенкой. Длина волны фона на заметно превосходит межатомные расстояния. Поэтому для фона на микроструктура стенки не существенна, стенку можно считать гладкой, а, следовательно, соотношение (15,2) имеет место. Ротоны имеют длину волны порядка $\hbar/P_0 = \frac{1}{2} \cdot 10^{-8}$ см, сравнимую с межатомными расстояниями. Поэтому для случая соударения со стенкой ротона стенку можно считать гладкой лишь приближённо. Мы в дальнейшем будем тем не менее предполагать соотношение (15,2) справедливым и для ротонов. По этой причине результаты для ротонов имеют приближённый характер. Влияние микроструктуры поверхности можно эффективным образом учесть некоторым изменением поверхности твёрдого тела. Таким образом формулы, определяющие теплообмен, связанный ротонам, верны лишь с точностью до некоторого множителя порядка единицы. Забегая вперёд, укажем, что такое приближение не оказывает влияния на окончательные результаты, так как этот механизм теплообмена играет незначительную роль в общем балансе энергии. Поверхность твёрдого тела совершает малые колебания. Величина скорости колеблющейся поверхности и была определена в предыдущем пункте. Ротон (или фонон), попавший на твёрдую стенку, можно рассматривать как некоторую частицу, находящуюся в колеблющейся среде (в фононном поле). При таком рассмотрении не существенна внутренняя структура ротона и фона. Энергия элементарного возбуждения, попавшего на твёрдую стенку, в неподвижной системе отсчёта равна

$$H' = H - (\mathbf{p}\dot{\mathbf{u}}) \quad (15,3)$$

(H — энергия элементарного возбуждения в системе отсчёта, движущейся вместе с поверхностью). Отсюда следует, что энергия взаимодействия элементарного возбуждения с твёрдой стенкой равна $-(\mathbf{p}\dot{\mathbf{u}})$. Соответствующий квантовый эрмитовский оператор, описывающий взаимодействие элементарного возбуждения с твёрдой стенкой, есть

$$V = -\frac{1}{2}(\mathbf{p}\dot{\mathbf{u}} + \dot{\mathbf{u}}\mathbf{p}), \quad (15,4)$$

где $\mathbf{p} = -i\hbar\nabla$ — оператор импульса.

После этих общих соображений перейдём к рассмотрению случая соударения ротона с твёрдой стенкой. Вероятность перехода при соударении из состояния с энергией E в состояние с энергией E_1 равна

$$W = \frac{2\pi}{\hbar} |M|^2, \quad (15,5)$$

где M — матричный элемент энергии взаимодействия V , взятый между

волновыми функциями: для начального состояния, нормированной на единичный поток, а для конечного состояния, нормированной на энергию. Волновая функция падающего ротона, нормированная на единичный поток и удовлетворяющая условию $\psi = 0$ при $z = 0$, есть

$$\psi = \frac{2}{\sqrt{v \cos \theta}} \sin \left(\frac{p \cos \theta}{h} z \right) \quad (15,6)$$

$(v = \frac{\partial E}{\partial p}$ — скорость падающего ротона). Для конечного состояния аналогичным образом имеем

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \frac{2}{\sqrt{\pi h v_1 \cos \theta_1}} \sin \left(\frac{p_1 \cos \theta_1}{h} z \right) \\ &\quad (v_1 = \frac{\partial E_1}{\partial p_1}). \end{aligned} \quad (15,7)$$

Вычислим матричный элемент перехода M ; имеем

$$\begin{aligned} M &= \int_0^\infty \psi_1 V \psi dz = \\ &= \int_0^\infty \frac{4ip \cos \theta \dot{u}_z}{\sqrt{\pi h v v_1 \cos \theta \cos \theta_1}} \cos \frac{pz \cos \theta}{h} \cos \frac{p_1 z \cos \theta_1}{h} dz. \end{aligned} \quad (15,8)$$

Здесь \dot{u}_z — амплитуда скорости колебаний поверхности твёрдого тела, определённая для различных колебаний формулами (13,15), (13,16) и (13,26). После интегрирования по z в (15,8) находим

$$M = \frac{-4ihp \cos \theta p_1 \cos \theta_1}{(p_1^2 \cos^2 \theta_1 - p^2 \cos^2 \theta) \sqrt{vv_1 \cos \theta \cos \theta_1 \pi h}}. \quad (15,9)$$

Подставив этот результат в (15,5), получаем вероятность рассматриваемого перехода

$$\begin{aligned} w &= \frac{2\pi}{h} \frac{16hp^2 p_1^2 \cos \theta \cos \theta_1 |\dot{u}_z|^2}{(p_1^2 \cos^2 \theta_1 - p^2 \cos^2 \theta)^2 vv_1} = \\ &= \frac{32\pi p^2 p_1^2 \cos \theta \cos \theta_1 |\dot{u}_z|^2}{(p_1^2 - p^2)^2 vv_1}. \end{aligned} \quad (15,10)$$

При этом мы учли, что согласно (15,2)

$$p_1^2 \cos^2 \theta_1 - p^2 \cos^2 \theta = p_1^2 - p^2. \quad (15,11)$$

Переносимый между твёрдым телом и жидким гелием II поток энергии равен

$$\Delta W_p = \iint w \{n(n' + 1) - n'n_1\} h \omega d\tau_\omega v \cos \theta d\tau_p. \quad (15,12)$$

Здесь $d\tau_\omega$ — элемент фазового объёма, соответствующий частоте испущенного фонона; $d\tau_p$ — элемент фазового объёма падающего ротона; n и n_1 — функции распределения Больцмана для падающего и отражённого ротонов *):

$$n = e^{-\frac{E}{kT}}, \quad n_1 = e^{-\frac{E_1}{kT}};$$

n' — функция распределения Планка для фононов в твёрдом теле.

$$n' = \left(e^{\frac{\hbar\omega}{kT'}} - 1 \right)^{-1}.$$

Выражение в фигурной скобке в (15,12) после подстановки соответствующих функций распределения для малых разностей температур приводится к виду

$$\begin{aligned} & \{n(n' + 1) - n'n_1\} = \\ & = e^{-\frac{\Delta}{kT}} \frac{\hbar\omega(T' - T)}{kT^2 \left[\exp \left\{ \frac{(p - p_0)^2}{2\mu kT} \right\} - \exp \left\{ \frac{(p_1 - p_0)^2}{2\mu kT'} \right\} \right]}. \end{aligned} \quad (15,13)$$

Произведение $|\dot{u}_z|^2 d\tau_\omega$, содержащееся в интеграле, при учёте всех трёх возможных типов колебаний поверхности, согласно (15,5) и (15,6) преобразуется следующим образом

$$|\dot{u}_z|^2 d\tau_\omega \rightarrow \frac{\hbar\omega}{\rho_T} \frac{4\pi\omega^2 d\omega}{(2\pi c_t)^3} F, \quad (15,14)$$

где $F(c_t/c_l)$ определяется формулой (15,8).

Подставив (15,10), (15,13) и (15,14) в (15,12) и перейдя от переменной интегрирования ω к переменной p_1 ($hd\omega = -v_1 dp_1$), получаем

$$\begin{aligned} \Delta W_p = & \int \frac{256\pi^2 (\hbar\omega)^5 p^4 dp \cdot p_1^2 dp_1 \cos^2 \theta \cos \theta_1 d\cos \theta}{(2\pi\hbar)^3 c_t^3 (p^2 - p_0^2)^2 \left[\exp \left\{ \frac{(p - p_0)^2}{2\mu kT} \right\} - \exp \left\{ \frac{(p_1 - p_0)^2}{2\mu kT'} \right\} \right]} \times \\ & \times \frac{e^{-\frac{\Delta}{kT}(T - T')}}{kT^2} F, \\ & \hbar\omega = \frac{(p - p_0)^2}{2\mu} - \frac{(p_1 - p_0)^2}{2\mu}. \end{aligned} \quad (15,15)$$

Импульсы ротонов p по своей величине близки к p_0 . Поэтому в интеграле (15,15) всюду, где не содержится существенным образом разность $p_1 - p$, можно заменить p и p_1 на p_0 . Угловой

*) Ротоны подчиняются классической статистике.

интеграл при этом вычисляется обычным образом (интегрирование по полусфере)

$$\int_0^1 \cos^2 \theta \cos \theta_1 d\cos \theta \approx \int_0^1 \cos^3 \theta d\cos \theta = \frac{1}{4}.$$

Введём обозначения

$$(p - p_0)^2 / 2\mu kT = x,$$

$$(p_1 - p_0)^2 / 2\mu kT = y.$$

Окончательно получаем

$$\Delta W_p = \frac{p_0^4 (kT)^4 e^{-\frac{\Delta}{kT}} F G_p}{4\pi^4 \rho_T h^6 c_t^3} \frac{T - T'}{T}, \quad (15,16)$$

где

$$G_p = \int_0^\infty dx \int_0^x \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 (x - y)^3 dy}{\sqrt{xy} (e^x - e^y)} \approx 50. \quad (15,17)$$

Произведём аналогичные вычисления для случая соударения фононов с твёрдой стенкой. Для фононов аналогом волновой функции является потенциал скоростей ψ , удовлетворяющий волновому уравнению. На твёрдой стенке потенциал ψ удовлетворяет граничному условию

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)_{z=0} = 0. \quad (15,18)$$

Нормированная на единичный поток и удовлетворяющая этому граничному условию ψ -функция падающего фона на равна

$$\psi = \frac{2}{\sqrt{c_{ik} \cos \theta}} \cos \frac{(p \cos \theta) z}{h}. \quad (15,19)$$

Для нормированной на энергию ψ -функции конечного состояния имеем выражение

$$\psi_1 = \frac{2}{\sqrt{\pi n c_{ik} \cos \theta_1}} \cos \frac{p_1 z \cos \theta_1}{h}. \quad (15,20)$$

Матричный элемент энергии взаимодействия фонон — твёрдая стенка для рассматриваемого перехода равен

$$\begin{aligned} M &= \int_0^\infty \psi_1 V \psi dz = \frac{4 i u_z p \cos \theta}{c_{ik} \sqrt{\pi h \cos \theta \cos \theta_1}} \int_0^\infty \cos \frac{p_1 z \cos \theta_1}{h} \sin \frac{p z \cos \theta}{h} dz = \\ &= \frac{4 i \hbar p^2 \cos^2 \theta}{(p^2 \cos^2 \theta - p_1^2 \cos^2 \theta_1) c_{ik} \sqrt{\pi h \cos \theta \cos \theta_1}}. \end{aligned} \quad (15,21)$$

Далее для вероятности рассматриваемого перехода имеем

$$w = \frac{2\pi}{h} |M|^2 = \frac{32p^4 \cos^3 \theta |u_z|^2}{\cos \theta_1 (p_1^2 - p^2)^2 c_{jk}^2}. \quad (15.22)$$

Переносимый при этом между твёрдым телом и жидким гелием II поток энергии равен

$$\Delta W = \iint w \{n(n'+1)(n_1+1) - n'n_1(n+1)\} c_{jk} \cos \theta d\tau_p h\omega d\tau_\omega. \quad (15.23)$$

Здесь n , n_1 и n' — функции распределения Планка соответственно для падающего, отражённого и испущенного в твёрдом теле фотонов:

$$n = \left(e^{\frac{E}{kT}} - 1 \right)^{-1}, \quad n_1 = \left(e^{\frac{E_1}{kT}} - 1 \right)^{-1}, \quad n' = \left(e^{\frac{E}{kT'}} - 1 \right)^{-1}.$$

Выражение, стоящее в фигурной скобке в интеграле (15.23), после подстановки указанных функций распределения для малых разностей температур приобретает вид:

$$\begin{aligned} & \{n(n_1+1)(n'+1) - n_1n'(n+1)\} = \\ & = \frac{T' - T}{kT^2} \frac{E - E_1}{\left(e^{\frac{E}{kT}} - e^{\frac{E_1}{kT}} \right) \left(1 - e^{-\frac{E}{kT}} \right) \left(1 - e^{-\frac{E_1}{kT}} \right)}. \end{aligned} \quad (15.24)$$

Подставим (15.22) и (15.24) в (15.23) и воспользуемся (15.15); в результате получаем

$$\begin{aligned} \Delta W = & \frac{256\pi^2 F(T' - T)}{kT^2 (2\pi c_l)^3 (2\pi\hbar)^3 \rho_T c_{jk}} \times \\ & \times \iint \frac{(h\omega)^3 \omega^2 d\omega p^6 dp}{(p^2 - p_1^2)^2 \left(e^{\frac{E}{kT}} - e^{\frac{E_1}{kT}} \right) \left(1 - e^{-\frac{E}{kT}} \right) \left(1 - e^{-\frac{E_1}{kT}} \right)} \times \\ & \times \int_0^1 \frac{\cos^4 \theta}{\cos \theta_1} d\cos \theta. \end{aligned}$$

Далее введём новую переменную интегрирования p_1 вместо ω и обозначения

$$E/kT = x, \quad E_1/kT = y, \quad \hbar\omega = kT(x - y).$$

Окончательно искомый поток энергии ΔW_Φ может быть записан в виде

$$\Delta W_\Phi = \frac{4(kT)^8 FG_\Phi (T - T')}{\pi^4 \hbar^8 \rho_T c_l^3 c_{jk}^4 T}, \quad (15.25)$$

где

$$G_{\Phi} = \int_0^{\infty} dx \int_0^x \frac{x^6 (x-y)^3 dy}{(x+y) (e^x - e^y) (1-e^{-x}) (1-e^{-y})} \times \\ \times \left\{ \frac{3}{16} \frac{y}{x} \left(1 - \frac{y^2}{x^2} \right) \ln \frac{x+y}{x-y} + \frac{5y^2}{8x^2} - \frac{3}{8} \frac{y^4}{x^4} \right\} \approx \frac{1}{2} 7! \quad (15,26)$$

16. Теплообмен между твёрдым телом и жидким гелием II

Выясним относительную роль вычисленных выше трёх потоков, $\Delta W_{\text{зв}}$ (14,13), $\Delta W_{\text{п}}$ (15,16) и ΔW_{Φ} (15,25), в процессе теплоизмены между твёрдым телом и жидким гелием II. Для этого найдем отношения

$$\frac{\Delta W_{\Phi}}{\Delta W_{\text{п}}} \quad \text{и} \quad \frac{\Delta W_{\text{зв}}}{\Delta W_{\Phi}}.$$

Согласно (15,16) и (15,25) имеем

$$\frac{\Delta W_{\Phi}}{\Delta W_{\text{п}}} = \frac{16 (kT)^4}{c_{\text{ж}}^4 p_0^4} \frac{G_{\Phi}}{G_{\text{п}}} e^{\frac{\Delta}{kT}} \approx 8 \cdot 10^{-4} T^4 e^{\frac{\Delta}{kT}}.$$

Это отношение близко к единице при $T = 2^{\circ}\text{K}$, затем увеличивается, достигая 10 при $T = 1^{\circ}\text{K}$. Далее согласно (14,8) и (15,25) имеем

$$\frac{\Delta W_{\text{зв}}}{\Delta W_{\Phi}} = \frac{\pi^6 \rho_{\text{ж}} c_{\text{ж}} h^3 F}{30 G_{\Phi} \left(\frac{kT}{c_{\text{ж}}} \right)^4} \approx \frac{50}{T^4}.$$

Это отношение близко к трём при $T = 2^{\circ}\text{K}$, а затем при понижении температуры быстро возрастает, достигая 50 при $T = 1^{\circ}\text{K}$.

Таким образом при всех температурах ниже λ -точки теплопередача между твёрдым телом и жидким гелием II осуществляется главным образом путём излучения (и поглощения) звука с колеблющейся поверхности твёрдого тела. Величина возникающего потока тепла между твёрдым телом, находящимся при температуре T' , и жидким гелием II, находящимся при температуре T , в первом приближении пропорциональна $T - T'$. Коэффициент пропорциональности согласно (14,8) изменяется с температурой по кубическому закону.

Эти результаты хорошо согласуются с экспериментальными данными Капицы. Особенность следует подчеркнуть совпадение температурных законов для величины теплосопротивления. Открытый Капицей кубический закон следует также и из теории.

Детальное сравнение теоретических данных с экспериментальными несколько затруднительно, так как формула (14,8), определяющая поток тепла $\Delta W_{\text{зв}}$, существенным образом содержит упругие

константы твёрдого тела c_t и $F(c_t/c_l)$. В опытах Капицы³³ излучение тепла происходило с поверхности стекла, покрытой тонким слоем платины. При этом поверхность, естественно, не была достаточно гладкой, и поток не мог быть точно вычислен.

Вычисления для платины по формуле (14,8) дают

$$\frac{1}{T - T'} \Delta W_{\text{зв}} P_t = 1,2 \cdot 10^{-2} T^3 W \text{град}^{-1} \text{см}^{-2}.$$

Экспериментальное значение этого отношения, полученное Капицей, в несколько раз превосходит теоретическое. То есть в опытах Капицы наблюдались скачки температуры меньше, чем предсказываемые теорией.

Последние эксперименты Фейербенка и Вилкса³⁶ дают для теплопротивления значения большие, чем у Капицы, хорошо соглашающиеся с даваемыми теорией. Однако эти авторы получают для температурной зависимости теплопротивления закон T^{-2} вместо следующего из теории T^{-3} . Для отношения $\Delta W/(T - T')$ авторы приводят значение $2,2 \cdot 10^{-2} T^2$.

Это расхождение может объясняться рядом причин: а) при вычислении потока в работе³³ не была учтена шероховатость теплоизлучающей поверхности (учёт этого обстоятельства может уменьшить поток в 1,5—2 раза); б) в указанных опытах могли иметь место неучтённые паразитные потоки тепла; в) наши вычисления произведены со значениями упругих констант, соответствующими массивным образцам, опыт же производится на очень тонких образцах, полученных напылением платины на стекле; г) при сравнении теоретических и опытных результатов мы пренебрегаем эффектом теплообмена при соударениях фононов и ротонов с твёрдой стенкой. Это можно сделать при температурах, не очень близких к λ -точке ($2,19^\circ\text{K}$). В области же температур, близких к λ -точке, учёт этого эффекта увеличивает приведённые выше значения потока в 1,5—2 раза.

Андроникашвили и Мирская³⁴ также производили измерения разности температур, возникающей между константановой проволочкой, погружённой в жидкий гелий II, и гелием в ванне, при выделении некоторой мощности в проволочке. Опыт был поставлен таким образом, что могла быть определена только нижняя граница возникающей разности температур. Полученное в их опытах нижнее значение указанной разности температур согласуется с предсказаниями теории.

Из сказанного выше следует, что теплообмен между твёрдым телом и жидким гелием II осуществляется с большим трудом. Можно вычислить максимальную скорость нормального движения v_n , которая возникает в жидком гелии II при погружении в него твёрдого тела. Конвективный поток тепла в гелии II равен

$$\rho_{\text{ж}} T \sigma v_n$$

(σ — энтропия единицы массы гелия II). Максимальный поток тепла

возникает в том случае, когда твёрдое тело находится при абсолютном нуле температур. При этом поток $W_{\text{зв}}$ согласно (14,8) равен

$$\frac{\rho_{\text{ж}}}{\rho_T} c_{\text{ж}} \frac{4\pi^5}{15} \frac{(kT)^4}{(2\pi\hbar c_t)^3} F$$

(T — температура гелия II). Приравняв оба потока, находим максимальное значение v_n :

$$v_n \text{ макс} = \frac{4\pi^5 c_{\text{ж}} (kT)^4 F}{\rho_T T \sigma 15 (2\pi\hbar c_t)^3}. \quad (16,1)$$

Полученное таким образом значение $v_n \text{ макс}$ оказывается порядка десятых долей см/сек при температуре 2°К. При более низких температурах $v_n \text{ макс}$ возрастает, стремясь к постоянному пределу (при низких температурах энтропия σ изменяется с температурой по кубическому закону)*),

$$v_n \text{ макс} = c_{\text{ж}} \frac{\rho_{\text{ж}}}{\rho_T} \left(\frac{c_{\text{ж}}}{c_t} \right)^3 F. \quad (16,2)$$

Граница между твёрдым телом и жидким гелием обладает большим теплосопротивлением. При выполнении некоторых условий это сопротивление превышает теплосопротивление самого твёрдого тела. Согласно (14,8) поток тепла между твёрдым телом и гелием II ΔW равен

$$\begin{aligned} \Delta W &= K (T^4 - T'^4) \approx 4KT^3 (T - T'), \\ K &= c_{\text{ж}} \frac{\rho_{\text{ж}}}{\rho_T} \frac{4\pi^5}{15} \frac{k^4}{(2\pi\hbar c_t)^3}. \end{aligned} \quad \left. \right\} \quad (16,3)$$

Пусть l — толщина твёрдого тела, а κ — его теплопроводность. Очевидно, что при достаточно малых размерах l , когда выполнено условие

$$\frac{\kappa}{l} \gg 4kT^3, \quad (16,4)$$

теплосопротивление границы превышает теплосопротивление твёрдого тела. Определим в этом случае температуру твёрдого тела T , окружённого жидким гелием II, имеющего с одной стороны от твёрдого тела температуру T_1 , а с другой — T_2 . Поскольку теплосопротивление самого тела относительно мало, температура тела будет постоянной. Значение этой температуры определяется из условия равенства потоков тепла на левой и правой границах твёрдого тела. Согласно (16,3) имеем

$$K (T_1^4 - T^4) = K (T^4 - T_2^4),$$

*). При достаточно низких температурах существенна фононная часть энтропии σ_{Φ} , равная

$$\sigma_{\Phi} = \frac{16\pi^5}{45\rho_{\text{ж}}} \frac{k (kT)^3}{(2\pi\hbar c_{\text{ж}})^3}.$$

откуда находим

$$T^4 = \frac{1}{2} (T_1^4 + T_2^4). \quad (16,5)$$

Уместно также указать, что весь произведённый в настоящей работе анализ пригоден лишь к случаю границы между твёрдым телом и квантовой жидкостью. В обычных жидкостях нельзя говорить об отдельных возбуждениях. В случае теплообмена между твёрдым телом и обычной жидкостью нет причин, которые ограничивали бы обмен энергией. Поэтому на указанной границе скачок температуры отсутствует. Существенным в этом случае является также то обстоятельство, что обычные жидкости обладают конечной теплопроводностью. Теплосопротивление жидкости в объёме превосходит теплосопротивление границы с твёрдым телом, это приводит к распределению разности температур между твёрдым телом и жидкостью вдоль всего объёма жидкости; гелий же II обладает практически бесконечной теплопроводностью, и теплосопротивление гелия в объёме равно нулю (температура вдоль жидкого гелия остаётся постоянной). Поэтому разность температур между твёрдым телом и гелием II осуществляется в форме скачка на границе.

17. Прохождение второго звука через металлические пластины. Поглощение второго звука на стенках цилиндрического сосуда

Большое теплосопротивление границы твёрдое тело — жидккий гелий II ответственно за аномально малое значение коэффициента прохождения второго звука через тонкие металлические фольги, которое наблюдалось Осборном²⁸. Мы будем предполагать условие (16,4) выполненным.

Пусть на пластину падает нормально плоская волна второго звука. Поток энергии во втором звуке J слева от пластины можно представить в виде

$$J_1 = (J_1 e^{ikx} - J_2 e^{-ikx}) e^{-i\omega t}, \quad (17,1)$$

где J_1 и J_2 — амплитуды потока энергии в падающей и отражённой волнах, скорость второго звука.

Согласно уравнению непрерывности для энтропии колебания температуры в гелии II слева от пластины определяются выражением

$$T_a = \frac{1}{C u_2} (J_1 e^{ikx} + J_2 e^{-ikx}) e^{-i\omega t} \quad (17,2)$$

(C — теплоёмкость единицы объёма гелия II).

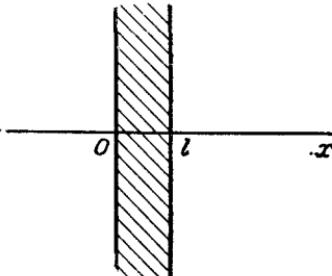


Рис. 10.

Аналогичным образом справа от пластины поток энергии равен

$$J_n = J_3 e^{ikx - i\omega t}, \quad (17.3)$$

а колебания температуры

$$T_n = \frac{1}{Cu_2} J_3 e^{ikx - i\omega t}. \quad (17.4)$$

При прохождении второго звука через теплопроводящую пластину её температура при выполнении условия (16.4) будет оставаться постоянной вдоль пластины, но отличной от температуры при отсутствии звука на величину T' . Условия непрерывности потоков энергии на левой и правой границах запишутся соответственно в виде:

$$J_1 - J_2 = 4KT^3 (T_{l(x=0)} - T') = J_3 e^{ikl} = 4KT^3 (T' - T_{n(x=l)}) \quad (17.5)$$

(T — температура гелия II).

Малость толщины пластины позволяет пренебречь изменением фазы при прохождении второго звука через пластину ($kl \ll 1$). Подставим в (17.5) выражение (17.2) и (17.4) для T_l и T_n , пренебрегая при этом изменением фаз; получим

$$J_1 - J_2 = 4KT^3 \left(\frac{J_1 + J_2}{Cu_2} - T' \right) = J_3 = 4KT^3 \left(T - \frac{J_3}{Cu_2} \right). \quad (17.6)$$

Отсюда легко находим величины J_2 и J_3

$$J_2 = J_1 \frac{1}{1 + \frac{4KT^3}{Cu_2}}, \quad (17.7)$$

$$J_3 = J_1 \frac{4KT^3}{Cu_2} \frac{1}{1 + \frac{4KT^3}{Cu_2}}. \quad (17.8)$$

Коэффициент прохождения второго звука J_3/J_1 , таким образом, равен

$$\frac{J_3}{J_1} = \frac{4KT^3}{Cu_2} \frac{1}{1 + \frac{4KT^3}{Cu_2}}. \quad (17.9)$$

Отношение $4KT^3/Cu_2$ при всех температурах оказывается значительно меньше единицы. При крайне низких температурах, когда теплопёмкость C гелия II определяется только фононами, величина коэффициента прохождения второго звука стремится к постоянному пределу, не зависящему от температуры. В этом случае имеем

$$C = C_\Phi = 4 \frac{4\pi^5}{15} \frac{k \cdot (kT)^3}{(2\pi\hbar c_{\text{ж}})^3} u_2 = \frac{C_m}{V^3}.$$

Подставив эти выражения в (17,9), получаем

$$\left(\frac{J_3}{J_1} \right)_{T \rightarrow 0} = \frac{\rho_m}{\rho_T} \sqrt{3} \left(\frac{c_{\infty}}{c_T} \right)^2 F \quad (17,10)$$

(для платины это отношение равно $2,5 \cdot 10^{-4}$).

Наличие температурного скачка на границе между твёрдым телом и жидким гелием II существенным образом сказывается в явлении отражения второго звука от твёрдой стенки. Пусть на плоскую границу между гелием II и твёрдым телом, заполняющим половину пространства, падает нормально плоская волна второго звука. Начало координат выбираем на указанной границе, а ось x — по нормали к плоскости границы. Поток энергии в гелии II и распределение температуры T определяются соответственно выражениями (17,1) и (17,2). Распределение температуры в твёрдом теле определяется уравнением теплопроводности

$$C_T \frac{\partial T}{\partial t} = -x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \quad (17,11)$$

Обозначив температуру твёрдой стенки через T_0 из (17,11) без труда находим

$$T = T_0 \exp [-V C_T i \omega / \kappa \cdot x e^{i \omega t}]. \quad (17,12)$$

Требование непрерывности потоков энергии на границе между гелием и твёрдым телом даёт два условия, а именно:

$$J_1 - J_2 = 4KT^3 \left\{ \frac{J_1 + J_2}{Cu_2} - T_0 \right\} = -x \operatorname{Re} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=0}. \quad (17,13)$$

Выражение, стоящее в (17,13) между двумя знаками равенства, есть поток энергии, обязаный скачку температуры на границе. Подставим в (17,13) выражение (17,12) для T и исключим из наших условий величину T_0 . Таким образом находим соотношение, связывающее потоки J_2 и J_1

$$J_2 = J_1 \left(1 - \frac{4KT^3/Cu_2}{1 + 4KT^3 \sqrt{2/C_T \kappa \omega}} \right) / \left(1 + \frac{4KT^3/Cu_2}{1 + 4KT^3 \sqrt{2/C_T \kappa \omega}} \right). \quad (17,14)$$

Как уже отмечалось, имеет место неравенство $Cu_2/4KT^3 \gg 1$. С учётом этого обстоятельства из (17,14) находим выражения коэффициента отражения и коэффициента прохождения в твёрдое тело для второго звука:

$$\frac{J_2}{J_1} = 1 - \frac{2}{Cu_2 \left(\frac{1}{4KT^3} + \sqrt{\frac{2}{C_T \kappa \omega}} \right)} \quad (17,15)$$

(коэффициент отражения),

$$\frac{J_1 - J_2}{J_1} = \frac{2}{Cu_2 \left(\frac{1}{4KT^3} + \sqrt{\frac{2}{C_T \kappa \omega}} \right)} \quad (17,16)$$

(коэффициент прохождения).

В знаменателе формулы (17,16) содержится сумма тепловых сопротивлений границы $1/4KT^3$ и твёрдого тела $\sqrt{2/C_{T\omega}}$. Если твёрдое тело обладает большой теплопроводностью, то отражение второго звука определяется главным образом теплосопротивлением границы. Наоборот, в случае малой теплопроводности твёрдого тела отражение определяется величиной теплосопротивления твёрдого тела. Благодаря условию $Cu_2/4KT^3 \gg 1$ коэффициент отражения второго звука мало отличается от единицы.

При помощи формулы (17,16) легко можно вычислить коэффициент поглощения второго звука на стенах цилиндрического сосуда. В случае, когда звук распространяется по оси трубы радиуса r , из формулы (17,16) вытекает следующее выражение для коэффициента поглощения звука:

$$2\gamma_x = \frac{P}{2Q} \frac{2}{Cu_2 \left(\frac{1}{4KT^3} + \sqrt{\frac{2}{C_{T\omega}}} \right)}. \quad (17,17)$$

Здесь P — периметр цилиндра, Q — площадь поперечного сечения *). Для кругового цилиндра, таким образом, имеем

$$\gamma_x = \frac{1}{rCu_2} \frac{1}{\frac{1}{4KT^3} + \sqrt{\frac{2}{C_{T\omega}}}}. \quad (17,18)$$

Формула (17,18) определяет коэффициент поглощения второго звука на стенах цилиндрического сосуда, связанный теплопроводности стенок и скачку температуры на границе между жидким гелием II и твёрдым телом. Коэффициент поглощения второго звука на стенах цилиндрического сосуда был вычислен Пешковым³⁸. Он слагается из трёх частей, связанных вязким потерям, теплопроводным потерям и, наконец, краевым эффектом. Та часть коэффициента поглощения, которая связана вязким потерям, согласно³⁸ равна

$$\gamma_n = \frac{1}{ru_2} \frac{\rho_s}{\rho_n} \sqrt{\frac{\rho_n \eta \omega}{2}}. \quad (17,19)$$

Что касается тепловых потерь, то в указанной работе не учитывалась скачок температуры на границе между твёрдым телом и жидким гелием, существенно меняющий величину γ_n . Окончательно для коэффициента поглощения второго звука на стенах цилиндра при

*) В случае распространения звука по оси трубы необходимо ввести дополнительный множитель 2 в знаменателе (17,17). Это вызывается тем, что при отражении звука, как видно из формулы (17,2), температура T практически удваивается по сравнению с температурой в падающей (бегущей) волне.

помощи (17,18) и (17,19) получаем следующее выражение:

$$\gamma = \frac{1}{ru_2\rho} \frac{\rho_s}{\rho_n} \sqrt{\frac{\rho_n \eta \omega}{2}} + \frac{1}{rCu_2} \frac{1}{\frac{1}{4KT^3} + \sqrt{\frac{2}{C_T \omega}}} + \gamma_{kp}. \quad (17,20)$$

Член γ_{kp} обязан краевым потерям.

Поглощение второго звука на стенках существенно лишь при малых частотах звука. При больших же частотах объёмное поглощение, зависящее от частоты по закону ω^2 , заметно превосходит поверхностные эффекты.

Дингль¹⁸, рассматривая явления поглощения второго звука на стенках цилиндрической трубки, допустил грубую ошибку. Координаты — вдоль оси и нормальную к стенке — он обозначил одной буквой. Не заметив этого, он затем не делал различия между дифференцированием скорости v_n по различным направлениям. В результате этого в коэффициенте поглощения звука получен не имеющий физического смысла член, в котором перепутываются эффекты вязкости гелия II и теплопроводности твёрдой стенки. Этот эффект оказался столь большим, что, по мнению Дингля, только он и определяет поглощение второго звука на стенках трубы.

Поверхностные эффекты в поглощении второго звука наблюдались К. Зиновьевой¹⁶. В этих опытах определялось затухание второго звука в цилиндрической трубке. В области небольших частот поглощение изменялось по закону $\sqrt{\omega}$. Эффектов, зависящих от теплопроводности, не было; при переходе от стеклянных трубок к медным никакого заметного изменения поглощения не наблюдалось. Это объясняется тем, что благодаря большому теплосопротивлению границы твёрдое тело — жидкый гелий II второй звук практически полностью отражается от твёрдого тела и колебания температуры не проникают в твёрдое тело. Это следует непосредственно из формулы (17,20), в которой благодаря чрезвычайно большой величине $1/KT^3$, характеризующей теплосопротивление границы, второй член оказывается несущественным.

Экспериментальные значения коэффициента поглощения второго звука, полученные К. Зиновьевой, хорошо согласуются с вычислением по формуле (17,20).

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Д. Ландау, ЖЭТФ **11**, 592 (1941).
2. P. Zilself, Phys. Rev. **79**, 309 (1950).
3. Nakajima, Tomita, Usui **78**, 768 (1950).
4. И. М. Халатников, ЖЭТФ **23**, 1969 (1952).
5. Б. Давыдов, ДАН **69**, 165 (1949).
6. И. М. Халатников, ЖЭТФ **23**, 265 (1952).
7. В. Пешков, ЖЭТФ **16**, 1000 (1946); **18**, 951 (1948); (1952).
8. R. Maileg a. M. Herlin, Phys. Rev. **76**, 948, (1942).

9. K. Atkins a. D. Osborne, Phil. Mag. **41**, 1078 (1950).
 10. Kramers, Van den Berg a. Gorter **90**, 1117 (1953).
 11. L. Tisza, J. phys. radium **1**, 165, 350 (1940).
 12. И. М. Халатников, ЖЭТФ **20**, 243 (1950).
 13. И. М. Халатников, ЖЭТФ **23**, 21 (1952).
 14. J. Peltam a. C. Squire, Phys. Rev. **72**, 1245 (1947).
 15. K. Atkins a. C. Chase, Proc. Roy. Soc. **64**, A, 826 (1951).
 16. К. Зиновьева, ЖЭТФ (в печати).
 17. W. Hansen a. J. Peltam, Phys. Rev. **95**, 321 (1954).
 18. R. Dingle, Proc. Phys. Soc. **63**, A, 638 (1950).
 19. R. Kronig a. A. Theilung, Physica, XVI, № 9, 678 (1950).
 20. Л. Ландау и И. Халатников, ДАН **96**, 469 (1954).
 21. Л. Ландау и Е. Лифшиц, Механика сплошных сред, (1953).
 22. C. Chase, Proc. Roy. Soc. **220**, 116 (1953).
 23. В. Кеезом, Гелий, ИЛ, 1949.
 24. W. Keesom, K. Clasius, Leiden Univ. Phys. № 216в, 1931.
 25. Л. Ландау и И. Померанчук, ДАН **69**, 165 (1949).
 26. И. Померанчук, ЖЭТФ **19**, 42 (1949).
 27. И. М. Халатников, ЖЭТФ (в печати).
 28. D. V. Osborne, Proc. Phys. Soc. **64**, 114 (1951).
 29. H. Temperley, Proc. Phys. Soc. **64**, 105 (1951).
 30. И. М. Халатников, ЖЭТФ **23**, 253 (1952).
 31. И. М. Халатников, ДАН **79**, 237 (1951).
 32. И. М. Халатников, ЖЭТФ **30**, 617 (1956).
 33. П. Л. Капица, ЖЭТФ **11**, 1 (1941).
 34. Э. Айроникашвили и Г. Мирская, ЖЭТФ **2**, 490 (1955).
 35. D. White, O. Gonzales, Johnston, Proc. Roy. Soc. A **214**, 546 (1953).
 36. H. Fairbank a. J. Willys, Proc. Roy. Soc. A **231**, 545 (1955).
 37. И. М. Халатников, ЖЭТФ **22**, 687 (1952).
 38. В. П. Пешков, ЖЭТФ **18**, 857 (1948).
 39. K. Atkins a. K. Hart, Phys. Rev. **92**, 304 (1953).
-