

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

ТЕОРИЯ КИНЕТИЧЕСКИХ ЯВЛЕНИЙ В ГЕЛИИ II

И. М. Халатников

I. ВВЕДЕНИЕ

Жидкий гелий в области температур, лежащих ниже λ -точки *) (гелий II), обладает рядом замечательных особенностей. Главная из этих особенностей — способность протекать без трения через узкие капилляры — была открыта П. Л. Капицей ^{1, 2, 3} и названа «сверхтекучестью». Несложный расчёт показывает, что де-бройлевская длина волны атомов гелия в области температур порядка 1—2° К оказывается сравнимой с межатомными расстояниями. Отсюда непосредственно следует, что гелий II является существенно квантовым объектом. Последовательное объяснение свойств гелия II с точки зрения его квантовой природы принадлежит Л. Д. Ландау ^{4, 5}.

Температуре абсолютного нуля соответствует нормальное состояние гелия II. При отличной от нуля температуре можно говорить о возбуждённом состоянии гелия II. Каждое возбуждённое состояние гелия II представляет собой совокупность элементарных возбуждений, как это имеет место, например, в твёрдом кристалле, в котором тепловые колебания атомов в узлах решётки могут быть представлены в виде совокупности фононов.

1. Энергетический спектр гелия II

Элементарные возбуждения в гелии II характеризуются определённой зависимостью энергии ε от импульса p . Можно показать, что достаточно близким к нормальному возбуждённым состояниям соответствует потенциальное движение жидкости **). Потенциальное движение в жидкости, как известно, представляет собой продольные звуковые волны. Соответствующими элементарными возбуждениями являются кванты звука — фононы. Таким образом, возбуждения в гелии II в начальной области энергетического спектра представ-

*) $T = 2,19^\circ \text{ К}$ при атмосферном давлении.

**) Этот результат получается в предположении, что нормальное состояние является потенциальным.

ляют собой фононы. Анализ экспериментального материала об основных термодинамических величинах, характеризующих гелий II, показывает, что их температурная зависимость может быть удовлетворительно объяснена, если исходить из энергетического спектра для возбуждений в гелии II, имеющего вид, изображённый на рис. 1а. Малым значениям импульса соответствуют длинноволновые возбуж-

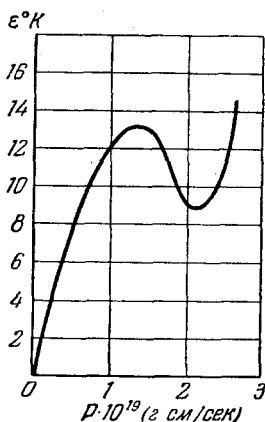


Рис. 1а. Энергетический спектр возбуждений гелия II.

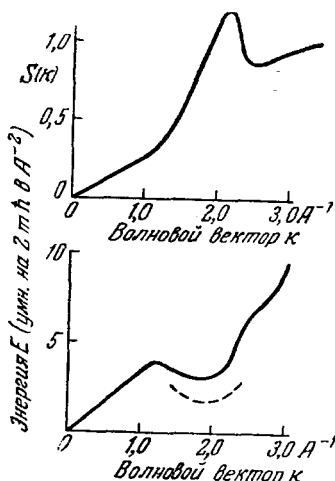


Рис. 1б. Структурный фактор $S(k)$.

дения — фононы, у которых энергия пропорциональна величине импульса:

$$\varepsilon = cp \quad (c — \text{скорость звука}). \quad (1.1)$$

После линейного участка кривая ε загибается, достигает минимума, равного Δ при значении импульса $p = P_0$, а затем снова возрастает. Вблизи минимума энергия ε может быть разложена по степеням $(p - P_0)$, при этом разложение начинается с квадратичных членов по $(p - P_0)$. В этой области импульсов, таким образом, имеем

$$\varepsilon = \Delta + \frac{(p - P_0)^2}{2\mu}. \quad (1.2)$$

Длинноволновые возбуждения, соответствующие этой области импульсов, называют ротонами. Коэффициент μ имеет смысл эффективной массы ротона. Параметры теории Δ , P_0 и μ были вычислены нами, исходя из экспериментальных значений теплоёмкости и скорости второго звука в гелии II (см. ниже). Они оказались равными

$$\Delta = 8,9^\circ \text{K}, \quad P_0 = 2,1 \cdot 10^{-19} \text{ г см/сек}, \quad \mu = 1,72 \cdot 10^{-24} \text{ г}.$$

Строгий теоретический вывод энергетического спектра для реальной жидкости, какой является гелий II, естественно, невозможен. Н. Н. Боголюбов⁶ рассмотрел идеализированную задачу о разреженном Бозе-газе. Разработанный Н. Н. Боголюбовым оригинальный метод позволил полностью определить энергетический спектр слабовозбуждённых состояний такой системы. Оказалось, что слабовозбуждённое состояние представляет собой совокупность элементарных возбуждений, имеющих энергетический спектр, сходный с вышеприведённым для возбуждений в гелии II.

Можно показать, что энергетический спектр возбуждений указанного выше вида приводит к свойству сверхтекучести^{*)}. В гелии II могут существовать одновременно два движения — сверхтекучее со скоростью $\mathbf{V}_s$ и нормальное со скоростью $\mathbf{V}_n$. Каждому из этих движений соответствует своя эффективная масса. Сумма сверхтекучей и нормальной масс равна полной массе жидкости. Оба движения происходят независимо (по крайней мере в области малых значений скоростей $\mathbf{V}_s$ и $\mathbf{V}_n$, не превосходящих некоторые критические значения) так, что передача импульса от одного к другому невозможна. Импульс единицы объёма гелия II $\mathbf{j}$ таким образом складывается из двух частей

$$\mathbf{j} = \rho_s \mathbf{V}_s + \rho_n \mathbf{V}_n. \quad (1.3)$$

Коэффициент ρ_n называют плотностью нормальной части жидкости, а ρ_s — плотностью сверхтекучей части жидкости. Сумма ρ_n и ρ_s равна плотности жидкости.

$$\rho = \rho_n + \rho_s. \quad (1.4)$$

Отношение $\frac{\rho_n}{\rho}$ в λ -точке равно единице; с понижением температуры оно убывает. При достаточном удалении от λ -точки совокупность элементарных возбуждений в гелии II можно рассматривать как некоторый идеальный газ возбуждений. При этом фононы, очевидно, подчиняются статистике Бозе. Что же касается ротонов, то в этом случае можно применять статистику Больцмана, поскольку содержащийся в энергии ротона член Δ заметно превосходит величину kT .

Пусть в гелии одновременно происходят два поступательных движения со скоростями $\mathbf{V}_n$ и $\mathbf{V}_s$. Энергия элементарного возбуждения в неподвижной системе отсчёта $E(p)$ выражается через энергию $\varepsilon(p)$ в системе отсчёта, в которой сверхтекучая часть жидкости покоится с помощью соотношения²⁹

$$E(p) = \varepsilon(p) + p\mathbf{V}_s. \quad (1.5)$$

*) К свойству сверхтекучести приводит и спектр любого другого вида, удовлетворяющий условию

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial p} \neq 0 \quad \text{при} \quad p = 0.$$

Нормальное движение жидкости связано с поступательным движением газа возбудений, происходящим со скоростью $\mathbf{v}_n$. Функция распределения n для элементарных возбудений зависит от энергии относительного движения

$$E' = E - \mathbf{p}\mathbf{v}_n = \varepsilon(p) + \mathbf{p}\mathbf{v}_s - \mathbf{p}\mathbf{v}_n. \quad (1.6)$$

Таким образом, в движущемся гелии II распределение фононов по энергиям определяется функцией Планка

$$n = \left[e^{\frac{\varepsilon + \mathbf{p}\mathbf{v}_s - \mathbf{p}\mathbf{v}_n}{kT}} - 1 \right]^{-1} \quad (1.7)$$

с функцией ε (1.1).

Распределение же ротонов по энергиям определяется функцией Больцмана

$$n = e^{-\frac{\varepsilon + \mathbf{p}\mathbf{v}_s - \mathbf{p}\mathbf{v}_n}{kT}} \quad (1.8)$$

с функцией ε (1.2).

2. Связь энергетического спектра возбудений со структурным фактором жидкого гелия II

Р. Фейнман⁸ показал, что между формой энергетического спектра и структурным фактором жидкости имеется тесная связь. Фейнман рассматривает некоторое возбуждённое состояние жидкости и конструирует ψ функцию этого состояния. Анализируя различные возможные конфигурации атомов в жидкости, он приводит ряд соображений в пользу того, что ψ функция такого состояния может быть представлена в виде симметричной суммы

$$\sum_a f(\mathbf{r}_a) \Phi, \quad (2.1)$$

взятой по всем атомам системы. $f(\mathbf{r}_a)$ есть некоторая функция, радиус-вектора атома номера a , Φ — волновая функция основного состояния, зависящая от координат всех атомов. Функция подобного типа была впервые предложена Байлем⁹. Для малых значений волнового вектора $\mathbf{k}$ Байль записывал волновую функцию возбуждённого состояния в виде $\sum_a \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}_a) \Phi$. Фейнман привёл аргументы в пользу того, что такого рода функция является хорошей аппроксимацией ψ функции и при больших значениях волнового вектора $\mathbf{k}$. Для нахождения функции $f(\mathbf{r}_a)$ применяем вариационный метод.

Запишем гамильтониан системы

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_a \nabla_a^2 + U - E_0, \quad (2.2)$$

где U — потенциальная энергия системы: энергия измеряется относительно основного состояния E_0 . Волновая функция основного состояния удовлетворяет поэтому уравнению

$$H\Phi = 0. \quad (2.3)$$

Далее вводим функцию F

$$\psi = F\Phi. \quad (2.4)$$

Поддействовав на функцию ψ , взятую в таком виде, гамильтонианом (2.2) и учитывая (2.3), получаем

$$\begin{aligned} H\psi &= H(F\Phi) = -(\hbar^2/2m) \sum_a (\Phi \nabla_a^2 F + 2\nabla_a \Phi \nabla_a F) = \\ &= \Phi^{-1} (-\hbar^2/2m) \Sigma \nabla_a (\rho_N \nabla_a F). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Здесь $\rho_N = \Phi^2$ есть плотность вероятностей для основного состояния, она определяет вероятность той или иной конфигурации $\mathbf{r}^N$ ($\mathbf{r}^N$ обозначает совокупность радиус-векторов всех N атомов системы).

Энергия системы находится как минимум выражения

$$\mathcal{E} = \int \psi^* H \psi d^N \mathbf{r} = \frac{\hbar^2}{2m} \Sigma_a \int \nabla_a F^* \Delta_a F \rho_N d^N \mathbf{r} \quad (2.6)$$

($d^N \mathbf{r}$ обозначает интегрирование по координатам всех атомов) при дополнительном условии, что нормировочный интеграл

$$I = \int \psi^* \psi d^N \mathbf{r} = \int F^* F \rho_N d^N \mathbf{r} \quad (2.7)$$

имеет фиксированное значение. Энергия E равна $\mathcal{E}/I$. Согласно (2.1) функцию F можно записать в виде суммы

$$F = \Sigma_a f_a(\mathbf{r}_a) \quad (2.8)$$

по всем атомам системы. Подставляя это выражение в нормировочный интеграл

$$I = \int \Sigma_a \Sigma_b f_a^*(\mathbf{r}_b) f(\mathbf{r}_a) \rho_N d^N \mathbf{r}, \quad (2.9)$$

зафиксируем два каких-либо значения номеров атомов a и b и проинтегрируем в (2.9) по координатам всех остальных атомов; таким путём получим

$$I = \int f_a^*(\mathbf{r}_1) f(\mathbf{r}_2) \rho_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) d^3 \mathbf{r}_1 d^3 \mathbf{r}_2, \quad (2.10)$$

где ρ_2 — вероятность нахождения одного атома в $\mathbf{r}_1$, а другого в $\mathbf{r}_2$. Аналогичным образом можно, проинтегрировав ρ_N по координатам всех атомов, за исключением одного, получить функцию $\rho_1(\mathbf{r}_1)$, дающую вероятность нахождения атома в $\mathbf{r}_1$ в жидкости, находящейся в основном состоянии. Эта величина, очевидно, не зависит от $\mathbf{r}$ и равна некоторому числу ρ_0 . Что же касается функции

$\rho_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$, то её можно записать в виде $\rho_2 = \rho_0 p(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$, где функция p зависит лишь от взаимного расстояния двух атомов, так что нормированный интеграл (2.10) равен

$$I = \rho_1 \int f^*(\mathbf{r}_1) f(\mathbf{r}_2) p(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) d^3\mathbf{r}_1 d^3\mathbf{r}_2. \quad (2.11)$$

Интеграл (2.6) для энергии $\mathcal{E}$ после подстановки F в форме (2.8) и интегрирования по координатам всех атомов, за исключением одного, приобретает вид

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \frac{\hbar^2}{2m} \Sigma_a \int \nabla_a f^*(\mathbf{r}_a) \nabla_a f(\mathbf{r}_a) \rho_N d^N\mathbf{r} = \\ &= \rho_0 \frac{\hbar^2}{2m} \int \nabla f^*(\mathbf{r}) \nabla f(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Теперь выбираем функцию $f(\mathbf{r})$ таким образом, чтобы отношение $\frac{\mathcal{E}}{I}$ имело минимальное значение. Проварьировав отношение $\frac{\mathcal{E}}{I}$ по f^* , с помощью (2.11) и (2.12) находим уравнение

$$E \int p(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) f(\mathbf{r}_2) d^3\mathbf{r}_2 = - \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 f(\mathbf{r}_1). \quad (2.13)$$

Полученное уравнение имеет решение

$$f(\mathbf{r}) = \exp i\mathbf{k}\mathbf{r}. \quad (2.14)$$

Этому решению соответствует значение энергии $E(\mathbf{k})$, равное

$$E(\mathbf{k}) = \frac{\hbar^2 k^2}{2mS(\mathbf{k})}, \quad (2.15)$$

где $S(\mathbf{k})$ есть Фурье-компонента корреляционной функции $p(\mathbf{r})$

$$S(\mathbf{k}) = \int p(\mathbf{r}) \exp i\mathbf{k}\mathbf{r} d^3\mathbf{r}. \quad (2.16)$$

Функция $S(\mathbf{k})$, как это видно из её связи с корреляционной функцией $p(\mathbf{r})$, является структурным фактором жидкости, определяющим, например, рассеяние нейтронов при абсолютном нуле температуры.

Структурный фактор $S(\mathbf{k})$ хорошо известен из эксперимента. Наиболее характерные свойства этой функции могут быть получены, исходя из элементарных соображений. При больших $\mathbf{k}$ функция $S(\mathbf{k})$ стремится к единице при этом корреляционная функция обращается в δ -функцию. Функция $S(\mathbf{k})$ имеет максимум при значениях $\mathbf{k}$ порядка $\frac{2\pi}{a}$, где a — межатомное расстояние, чему соответствует максимум функции $p(\mathbf{r})$ при r порядка a , когда два атома находятся на расстоянии, равном среднему межатомному. Наконец, при малых значениях $\mathbf{k}$ функция $S(\mathbf{k})$ стремится к нулю по линей-

ному закону, в соответствии с тем, что на больших расстояниях корреляция исчезает. На рис. 16 изображен вид функции $S(k)$ и следующий из неё вид функции $E(k)$. Начальный линейный участок $E(k)$ соответствует фононной части спектра. Вблизи минимума на кривой представим функцию $E(k)$ в виде

$$E(k) = \Delta + \frac{\hbar^2}{2\mu} (k - k_0)^2.$$

Эта часть энергетического спектра соответствует ротонной части спектра. Исходя из данных Херста и Хеншоу¹⁰ по рассеянию нейтронов в жидком гелии при $T = 4,2^\circ \text{K}$, Фейнман получил для минимальной энергии ротона значения 18°K в то время, как по термодинамическим данным $\Delta = 8,9^\circ \text{K}$. Полученное расхождение не следует считать большим, поскольку Фейнман пользовался довольно грубой аппроксимацией для волновой функции состояния жидкости.

3. Термодинамические функции гелия II

Не очень близко к λ -точке плотности фононного и ротонного газа не велики и, как уже говорилось, они могут рассматриваться как идеальные газы. В этом случае все термодинамические функции складываются из двух частей — из части, связанной фононам, и части, связанной ротонам.

При вычислении термодинамических функций мы воспользуемся функциями распределения фононов и ротонов (1.7) и (1.8). При этом зависимостью функций распределения от относительной скорости $\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s$ в первом приближении можно пренебречь. Указанная зависимость проявляется в области значений $\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s$, где в обычных условиях наступает нарушение сверхтекучести. Лишь при распространении второго звука в гелии II большой амплитуды удаётся достичь заметных значений относительной скорости $\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s$. В этом случае появляется необходимость учета квадратичных относительно разности $\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s$ членов в термодинамических функциях.

Вычислим вначале термодинамические функции для покоящегося гелия II.

Термодинамические функции гелия II могут быть получены с помощью формул статистики Бозе. Фононы, как известно, подчиняются статистике Бозе; распределение ротонов не зависит от типа статистики благодаря наличию в энергии ротона большого постоянного члена $\Delta \gg kT$.

Свободная энергия Бозе-газа равна

$$F = -kT \int \ln(1 + n) d\tau_p \quad (3.1)$$

($d\tau_p = \frac{p^2 dp d\phi}{(2\pi\hbar)^3}$ — элемент объёма в $\mathbf{p}$ -пространстве, $d\phi$ — элемент телесного угла). После однократного интегрирования по

частям в (3.1) получаем формулу

$$F = -\frac{1}{3} \int n p \frac{\partial \varepsilon}{\partial p} d\tau_p, \quad (3.2)$$

дающую возможность вычислить свободную энергию газа возбуждений. Энтропия возбуждений находится дифференцированием свободной энергии (3.2) по температуре

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T} = -\frac{1}{3kT^2} \int n' \varepsilon \left(p \frac{\partial \varepsilon}{\partial p} \right) d\tau_p \quad (3.3)$$

(n' — производная функции распределения по аргументу).

Свободная энергия, энтропия и теплоёмкость фононного газа. Выполним в (3.2) интегрирование с функцией распределения (1.7), находим свободную энергию фононного газа ($\varepsilon = cp$)

$$F_\Phi = -\frac{1}{3} \int \left(e^{\frac{\varepsilon}{kT}} - 1 \right)^{-1} p \frac{\partial \varepsilon}{\partial p} d\tau_p = -\frac{1}{3} E_\Phi. \quad (3.4)$$

Энергия E_Φ фононов в единице объёма гелия II равна

$$E_\Phi = \frac{4\pi^5}{15} \left(\frac{kT}{2\pi\hbar c} \right)^3 kT \approx \frac{\pi^4}{36} kT N_\Phi \quad (3.5)$$

($N_\Phi \approx 2,4 \cdot 4\pi \left(\frac{kT}{2\pi\hbar c} \right)^3$ — число фононов в единице объёма гелия II). Энтропия фононного газа находится или по общей формуле (3.3), или непосредственно дифференцированием полученного выражения (3.4) для свободной энергии; таким путём находим

$$S_\Phi = -\frac{\partial F_\Phi}{\partial T} = \frac{16\pi^5}{45} k \left(\frac{kT}{2\pi\hbar c} \right)^3. \quad (3.6)$$

Далее вычисляем теплоёмкость фононного газа

$$C_\Phi = T \frac{\partial S_\Phi}{\partial T} = \frac{16\pi^5}{15} k \left(\frac{kT}{2\pi\hbar c} \right)^3. \quad (3.7)$$

Свободная энергия, энтропия и теплоёмкость ротонного газа. Свободная энергия ротонного газа в единице гелия II находится по общей формуле (3.2) с функцией распределения (1.8). При интегрировании необходимо учитывать то обстоятельство, что согласно энергетическому спектру импульсы ротоннов по своей величине близки к P_0 .

Таким путём находим

$$F_p = -kT N_p, \quad (3.8)$$

где N_p — число ротоннов в единице объёма гелия

$$N_p = \int n d\tau_p = \frac{2P_0^2 (\mu kT)^{1/2} e^{-\frac{\Delta}{T}}}{(2\pi)^{3/2} \hbar^3}. \quad (3.8')$$

Дифференцированием соотношения (3.8) находим энтропию ротонного газа

$$S_p = - \frac{\partial F_p}{\partial T} = kN_p \left(\frac{\Delta}{T} + \frac{3}{2} \right). \quad (3.9)$$

Далее вычисляем теплоёмкость ротонного газа

$$C_p = T \frac{\partial S_p}{\partial T} = kN_p \left(\frac{\Delta^2}{T^2} + \frac{\Delta}{T} + \frac{3}{4} \right). \quad (3.10)$$

Суммируя результаты (3.6), (3.7), (3.9) и (3.10), находим выражения для энтропии и теплоёмкости единицы объёма гелия II

$$S = S_p + S_\phi = kN_p \left(\frac{\Delta}{T} + \frac{3}{2} \right) + \frac{16\pi^5 k}{45} \left(\frac{kT}{2\pi\hbar c} \right)^3, \quad (3.11)$$

$$C = C_p + C_\phi = kN_p \left(\frac{\Delta^2}{T^2} + \frac{\Delta}{T} + \frac{3}{4} \right) + \frac{16\pi^5 k}{15} \left(\frac{kT}{2\pi\hbar c} \right)^3 \quad (3.12)$$

Вычисления, аналогичные приведенным, могут быть произведены для случая неравной нулю относительной скорости $\mathbf{w} = \mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s$ ²⁹. Не останавливаясь на несложных вычислениях, приведём окончательные выражения для термодинамических функций, получающиеся в этом случае:

$$\bar{F}_\phi = F_\phi (1 - w^2/c^2)^{-2}, \quad (3.13)$$

$$\bar{F}_p = F_p \frac{kT}{P_0 w} \operatorname{sh} \frac{P_0 w}{kT}, \quad (3.14)$$

$$\bar{S}_\phi = S_\phi (1 - w^2/c^2)^{-2}, \quad (3.15)$$

$$\bar{C}_\phi = C_\phi (1 - w^2/c^2)^{-2}, \quad (3.16)$$

$$\bar{S}_p = S_p \frac{kT}{P_0 w} \operatorname{sh} \frac{P_0 w}{kT} + F_p \frac{1}{T} \left[\frac{kT}{P_0 w} \operatorname{sh} \frac{P_0 w}{kT} - \operatorname{ch} \frac{P_0 w}{kT} \right], \quad (3.17)$$

$$\bar{C}_p = C_p \frac{kT}{P_0 w} \operatorname{sh} \frac{P_0 w}{kT} + F_p \frac{1}{T} \frac{P_0 w}{kT} \operatorname{sh} \frac{P_0 w}{kT}. \quad (3.18)$$

$w = |\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s|$ есть относительная скорость нормального и сверхтекучего движений. Буквами без черты обозначаем значение термодинамических функций в покоящемся гелии II.

4. Нормальная плотность

Гелий II характеризуется еще одной очень важной функцией — нормальной плотностью ρ_n . Импульс единицы объёма гелия II в системе отсчёта, движущейся вместе со сверхтекучей частью, равен согласно (1.3)

$$\mathbf{p}_{\text{отн}} = \mathbf{j} - \rho \mathbf{v}_s = \rho_n (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s). \quad (4.1)$$

С другой стороны, этот импульс может быть представлен в виде интеграла

$$\int p n (\varepsilon + p v_s - p v_n) d\tau_p, \quad (4.2)$$

взятого по всем элементарным возбуждениям. Сравнивая (4.1) и (4.2), получаем соотношение, определяющее величину нормальной плотности

$$\rho_n (v_n - v_s) = \int p n (\varepsilon + p v_s - p v_n) d\tau_p. \quad (4.3)$$

В случае малых значений разности $(v_n - v_s)$ функцию распределения n можно разложить в ряд по степеням этой разности. Нулевой член разложения обращает интеграл правой части в ноль. Первый член разложения даёт

$$\rho_n = -\frac{1}{3kT} \int p^2 n' d\tau_p. \quad (4.4)$$

Формула (4.4) справедлива при малых значениях разности $(v_n - v_s)$.

Вычислим вначале фононную часть нормальной плотности. Подставив в (4.3) функцию распределения (1.7)

$$\rho_{n\Phi} (v_n - v_s) = \int p \left[e^{\frac{\varepsilon + p v_s - p v_n}{kT}} - 1 \right]^{-1} d\tau_p. \quad (4.5)$$

Произведя несложное интегрирование и опустив общий множитель $(v_n - v_s)$ в левой и правой частях (4.5), находим

$$\rho_{n\Phi} = \frac{4}{3} \frac{E_\Phi}{c^2} (1 - \omega^2/c^2)^{-3}. \quad (4.6)$$

Произведём аналогичные вычисления для ротонов. Имеем

$$\begin{aligned} \rho_{np} (v_n - v_s) &= \int p e^{-\frac{\varepsilon + p v_s - p v_n}{kT}} d\tau_p = \\ &= (v_n - v_s) N_p \frac{kT}{\omega^2} \left(\operatorname{ch} \frac{P_0 \omega}{kT} - \frac{kT}{P_0 \omega} \operatorname{sh} \frac{P_0 \omega}{kT} \right). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Отсюда без труда находим

$$\rho_{np} = N_p \frac{kT}{\omega^2} \left(\operatorname{ch} \frac{P_0 \omega}{kT} - \frac{kT}{P_0 \omega} \operatorname{sh} \frac{P_0 \omega}{kT} \right). \quad (4.8)$$

Нормальная плотность гелия ρ_n равна сумме $\rho_{n\Phi}$ и ρ_{np} . Согласно (4.6) и (4.8) имеем

$$\begin{aligned} \rho_n = \rho_{np} + \rho_{n\Phi} &= N_p \frac{kT}{\omega^2} \left(\operatorname{ch} \frac{P_0 \omega}{kT} - \frac{kT}{P_0 \omega} \operatorname{sh} \frac{P_0 \omega}{kT} \right) + \\ &+ \frac{4}{3} \frac{E_\Phi}{c^2} (1 - \omega^2/c^2)^{-3}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

В случае малых значений скорости относительного движения нормальной и сверхтекучей частей зависимостью $\rho_{\pi\Phi}$ и $\rho_{\pi p}$ от $w = |\mathbf{v}_\pi - \mathbf{v}_s|$ можно пренебречь. Формулы (4.6) и (4.8) в этом случае дают

$$\rho_{\pi\Phi} = \frac{4}{3} \frac{E_\Phi}{c^2}, \quad (4.10)$$

$$\rho_{\pi p} = \frac{P_0^2}{3kT} N_p, \quad (4.11)$$

$$\rho_\pi = \frac{4}{3} \frac{E_\Phi}{c^2} + \frac{P_0^2}{3kT} N_p. \quad (4.12)$$

В области температур выше $0,8-1^\circ\text{K}$ ротонны играют основную роль во всех термодинамических функциях. Однако относительный вклад ротонов в величину указанных функций быстро убывает с убыванием температуры. Это объясняется тем, что ротонные части функций убывают с температурой по экспоненциальному закону, в то время как фононные убывают по степенному закону T^3 .

Практически, как уже отмечалось, во всех задачах, можно не учитывать зависимость термодинамических величин от скорости относительного движения $\mathbf{w} = \mathbf{v}_\pi - \mathbf{v}_s$. Это объясняется тем, что в области скоростей, где наблюдается явление сверхтекучести, отношения $\frac{w}{c}$ и $\frac{wP_0}{kT}$ очень малы. Однако при рассмотрении задачи о распространении звука большой амплитуды указанной зависимостью пренебрегать уже нельзя. Наконец, заметим, что поскольку $c > \frac{kT}{P_0}$, то зависимость от w в большей степени сказывается для ротонных величин, чем для фононных.

5. Сравнение экспериментальных и теоретических значений термодинамических величин

Прежде чем перейти к непосредственному сравнению экспериментальных и теоретических значений термодинамических величин, остановимся на вычислении основных параметров теории, характеризующих энергетический спектр гелия II (Δ , P_0 , μ). Для нахождения этих параметров мы воспользуемся данными Холла, Уилкинсона и Уилкса ¹¹ по теплоемкости гелия и данными Пешкова ¹² о скорости второго звука. При этом наиболее удобными для этой цели являются данные в области температур, удаленных от λ -точки. Непосредственно вблизи λ -точки фононно-ротонный газ нельзя считать идеальным и поэтому нельзя применять полученные выше формулы для идеального газа. Достаточно точно учесть неидеальность газа возбуджений не представляется возможным. Иное положение имеет

место при низких температурах (ниже $1,2^\circ \text{K}$), когда отношение $\frac{\rho n}{\rho}$ становится ничтожно малым и газ возбуждений можно считать идеальным.

Вычисление параметров теории производилось следующим образом:

1. Интегрированием теплоёмкости ¹¹ в интервале температур $0,6-1,2^\circ \text{K}$ находилась энтропия гелия.

2. По значению скорости второго звука (u_2) ¹², теплоёмкости (C) ¹¹ и полученным значениям энтропии S находилось отношение $\frac{\rho n}{\rho}$ согласно формуле

$$u_2 = \sqrt{\frac{\rho_s}{\rho n} T \frac{S^2}{\rho C}}.$$

3. Вычислялась фононная часть отношения $\left(\frac{\rho n}{\rho}\right)_\Phi$ по формуле (4.10). Скорость звука в рассматриваемом интервале температур принималась равной 237 м/сек ¹³. Далее вычитанием из экспериментальных значений отношения $\frac{\rho n}{\rho}$ вычисленных значений $\left(\frac{\rho n}{\rho}\right)_\Phi$ получили ротонную часть отношения $\left(\frac{\rho n}{\rho}\right)_p$.

4. Далее строился график зависимости $\lg T^{1/2} \left(\frac{\rho n}{\rho}\right)_p$ от $\frac{1}{T}$ (ср. (4.12)). Указанный график представлял собой прямую линию. Её наклон согласно формуле (4.12) равен непосредственно Δ .

Таким путём было получено значение Δ , равное

$$\Delta = (8,9 \pm 0,2)^\circ \text{K}.$$

Это значение примерно на полградуса меньше ранее полученного ¹⁴ из высокотемпературных данных $(9,6 \pm 0,5)^\circ \text{K}$.

Приведённый способ получения значения параметра Δ является наиболее выгодным при использовании имеющихся экспериментальных данных о теплоёмкости и скорости второго звука в гелии II. Непосредственно использовать данные о теплоёмкости для определения Δ не представлялось возможным. Дело в том, что теплоёмкость гелия в области низких температур измерена с довольно заметной ошибкой (5% или $3,10^{-4} \text{ кал/г град}$).

Для того чтобы найти ротонную часть теплоёмкости, необходимо было бы вычесть из измеренных значений теплоёмкости вычисленную фононную часть, которая в области низких температур составляет заметную долю от полной теплоёмкости.

При такой обработке данных ошибка, допущенная при измерении теплоёмкости, полностью падает на ротонную часть, так что относительная ошибка в определении ротонной части теплоёмкости оказывается уже больше 5%. Из полученных значений ротонной части теплоёмкости величина параметра Δ находится поэтому с боль-

шой ошибкой. При использовании же данных о скорости второго звука, известных с очень большой точностью (ошибка менее 1%) величина $\frac{\rho n}{\rho}$ находится с той же точностью, с которой известна теплоёмкость гелия II. (Ошибка в величине отношения $\left(\frac{S^2}{C}\right)$ равна ошибке в определении C или S .) Фононная часть отношения $\frac{\rho n}{\rho}$ ничтожно мала, поэтому ротонная часть отношения $\left(\frac{\rho n}{\rho}\right)_p$ известна практически с той же точностью, что $\frac{\rho n}{\rho}$. Итак, в применяемом методе существенной оказывается лишь ошибка в измерениях теплоёмкости.

Для нахождения параметра P_0 поступали следующим образом:

1. Вычисляли ротонную часть энтропии S_p . Для этого из полученных интегрированием теплоёмкости значений энтропии вычитали фононную часть, вычисленную по формуле (3.6).

2. Величина P_0^2 находилась по полученным значениям $\left(\frac{\rho n}{\rho}\right)_p$ и S_p согласно соотношению

$$P_0^2 = \left(\frac{\rho n}{\rho}\right)_p \rho \frac{\hbar^2 T}{S_p} \left(\frac{\Delta}{T} + \frac{3}{2}\right),$$

которое получается комбинированием формул (3.9) и (4.11).

Таким путем было найдено значение

$$P_0 = (2,1 \pm 0,05) \cdot 10^{-19} \text{ г см сек}^{-1},$$

мало отличающееся от значения $(2,06 \pm 0,02) \cdot 10^{-19}$ полученного ранее.

Величина эффективной массы ротона μ была найдена из значений ротонной части энтропии с использованием принятых значений параметров Δ и P_0 . Она оказалась равной

$$\mu = (1,72 \pm 0,68) \cdot 10^{-24} \text{ г.}$$

Большая ошибка в определении μ вызвана ошибкой в определении параметра Δ , стоящего в экспоненте. Незначительные изменения в величине параметра Δ вызывают существенные изменения в величине μ . Приведённое значение эффективной массы ротона почти в три раза меньше полученного ранее из высокотемпературных данных.

Полученные значения параметров Δ , P_0 и μ позволяют вычислить ротонные части теплоёмкости, энтропии и отношения $\frac{\rho n}{\rho}$. Для вычисления указанных термодинамических величин пользуемся формулами (3.9), (3.10) и (4.11). Эти формулы, выведенные в предположении полной идеальности ротонного газа, справедливы лишь при

температурах, лежащих ниже $1,2^\circ \text{K}$ ($\frac{\rho n}{\rho} = 0,03$). В области более высоких температур необходимо учитывать неидеальность ротонного газа. Можно легко показать, что с учётом неидеальности ротонные части энтропии и теплоёмкости гелия записываются в следующем виде (подробнее см. ¹⁵):

$$S_p = S_{p, \text{ид}} \left(1 + \alpha \frac{\rho n}{\rho} \right), \quad (5.1)$$

$$C_p = C_{p, \text{ид}} \left(1 + 2\alpha \frac{\rho n}{\rho} \right). \quad (5.2)$$

Здесь $S_{p, \text{ид}}$ и $C_{p, \text{ид}}$ есть значения, вычисленные в предположении полной идеальности по формулам соответственно (3.9) и (3.10). α — параметр неидеальности — некоторый коэффициент не зависящий от температуры. Величина параметра α существенным образом зависит от функции взаимодействия ротонных между собой.

Принимаемый нами при вычислении кинетических коэффициентов δ -образный закон взаимодействия между ротонами (см. ниже) не позволяет использовать имеющиеся данные о вязкости гелия II для точного вычисления коэффициента α . Сравнивая вычисленные по формуле (3.10) значения ротонной теплоёмкости с теми, которые получаются из измеренных Кеезомом и Вестмайзом ¹⁶ значений теплоёмкости при высоких температурах, можно получить величину коэффициента α . Он оказывается равным

$$\alpha = 0,5.$$

Что касается вычисления отношения $\left(\frac{\rho n}{\rho} \right)_p$, то в этом случае также можно написать соотношение, связывающее истинное значение $\left(\frac{\rho n}{\rho} \right)_p$ с вычисленным по формуле для идеального газа (4.11)

$$\left(\frac{\rho n}{\rho} \right)_p = \left(\frac{\rho n}{\rho} \right)_{p, \text{ид}} \left(1 + \beta \frac{\rho n}{\rho} \right). \quad (5.3)$$

Коэффициент β не может быть просто выражен через коэффициент α , так как величина $\frac{\rho n}{\rho}$ не может быть найдена простым дифференцированием свободной энергии, как это имеет место в случае вычисления энтропии и теплоёмкости ротонных.

Сравнивая значения $\left(\frac{\rho n}{\rho} \right)_p$, найденные в экспериментах Э. Андроникашвили ¹⁷ с вычислениями по формуле (4.11), находим значение коэффициента β

$$\beta = 0,25.$$

Измерения теплоёмкости производились Кеезомом и мисс Кеезом ¹⁸, Кеезомом и Ветмайзом ¹⁶ в области температур выше 1°K , Холлом,

Вилкинсоном и Вилксом¹¹ и Крамерсом, Гортером и Вассером¹⁹ ниже 1° К.

Следует заметить, что измерения теплоёмкости имеют небольшую точность, так как теплоёмкость является величиной дифференциальной. На рис. 2 приведены результаты измерений теплоёмкости^{11, 16, 19, 18}, а также теоретические значения (сплошная кривая). Теоретические значения получены по формуле (3.12), которая после подстановки всех констант приобретает следующий вид:

$$C = 1,69 \left(\frac{\Delta^2}{T^2} + \frac{\Delta}{T} + \frac{3}{4} \right) e^{-\frac{\Delta}{T}} + 5,1 \cdot 10^{-3} T^3 \text{ (кал/г градус)}. \quad (5.3')$$

Выше 1,2° К при вычислении ротонной части теплоёмкости вводилась поправка на неидеальность согласно формуле (5,2). Теоретическая кривая находится в хорошем согласии с данными¹¹

ниже 1,2° К и с данными¹⁶ выше 1,2° К. При сравнении указанных выше экспериментальных данных необходимо иметь в виду, что авторы работы¹¹ не ручаются за свои высокотемпературные точки. Значения теплоёмкости для температуры 1,5 и 1,6° К, полученные в этой работе, повидимому, занижены. Эти значения не согласуются не только с измерениями теплоёмкости других авторов^{16, 18}, но также с данными об энтропии, полученными П. Л. Капицей³.

Для измерения энтропии гелия П. Л. Капицей³ был использован термомеханический эффект, заключающийся в том, что при вытекании гелия из сосуда через тонкий капилляр в сосуде наблюдается нагревание, так как вытекающий через тонкий капилляр гелий не уносит тепла.

На рис. 3 приведены экспериментальные значения энтропии³ и вычисленные по формуле (3.11), которая после подстановки значений

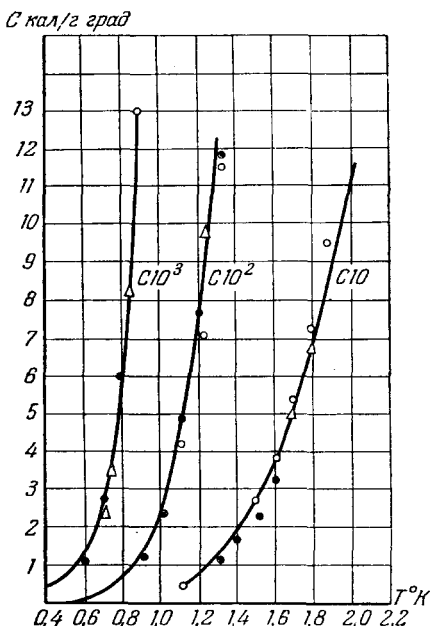


Рис. 2. Температурная зависимость теплоёмкости гелия II:

● — экспериментальные значения Холла и др.¹⁰,
○ — экспериментальные значения Кeesома и Вестмайза¹⁶, — теоретические значения, △ — экспериментальные значения Крамерса и др.¹⁹.

всех параметров приобретает вид

$$\sigma = \frac{S}{\rho} = 1,69 \left(\frac{\Delta}{T} + \frac{3}{2} \right) e^{-\frac{\Delta}{T}} + 1,7 \cdot 10^{-3} T^3 \text{ (кал/г градус).} \quad (5.4)$$

Выше $1,2^\circ \text{K}$ ротонная часть энтропии вычислялась с поправкой на неидеальность согласно формуле (5.1). На рис. 3 также приведены значения энтропии, полученные Крамерсом и др., интегрированием сглаженных значений теплоёмкости.

Прямые измерения величины нормальной плотности $\frac{\rho_n}{\rho}$ были приведены Э. Андроникашвили¹⁷. Отношение $\frac{\rho_n}{\rho}$ в этих опытах определялось как отношение моментов инерции цилиндрического со-

S кал/г град

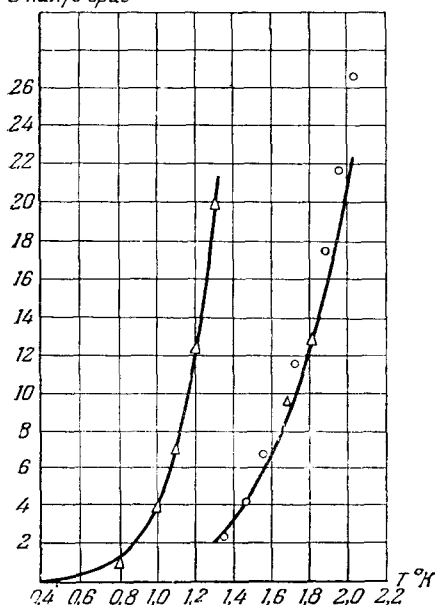


Рис. 3. Температурная зависимость энтропии гелия II:

— теоретические значения, $\circ$ — экспериментальные значения П. Калицы³, Δ — значения, полученные Крамерсом и др.¹⁹.

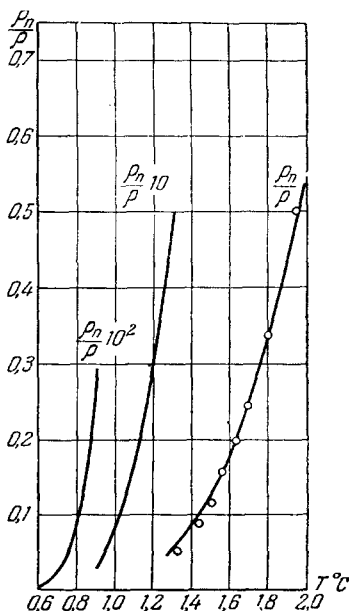


Рис. 4. Температурная зависимость отношения $\frac{\rho_n}{\rho}$:

— теоретические значения, $\circ$ — экспериментальные значения Андроникашвили¹⁷.

суда, заполненного гелием II и гелием I. Момент инерции измерялся по периоду крутильных колебаний такого сосуда. На рис. 4 производится сравнение экспериментальных значений $\frac{\rho_n}{\rho}$ и теоретических,

вычисленных по формуле (4.12). Эта формула после подстановки всех параметров приобретает вид

$$\frac{\rho n}{\rho} = 55 \cdot T^{-1/2} e^{-\frac{\Delta}{T}} + 1,28 \cdot 10^{-4} T^4. \quad (5.5)$$

На том же рисунке приведены значения $\frac{\rho n}{\rho}$, вычисленные из данных о скорости второго звука (подробнее см. ²²).

II. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ВОЗБУЖДЕНИЙ

В настоящем разделе мы рассмотрим взаимодействие элементарных возбуждений в гелии II друг с другом. Полученные выражения для эффективных сечений различных процессов взаимодействия возбуждений будут использованы в дальнейшем при вычислении кинетических коэффициентов гелия II.

6. Дисперсия фононной части энергетического спектра ²⁰

Разложение поля фононов в ряд Фурье: зависимость параметров, характеризующих форму энергетического спектра, от давления. Будем исходить из энергетического спектра для возбуждений вида, указанного в § 1. В начале спектра энергия ε зависит по линейному закону от величины импульса p . Однако для фононов большой энергии становится уже заметным эффект дисперсии, т. е. отклонения от линейного закона. Учёт дисперсии оказывается существенно необходимым при вычислении эффективных сечений процессов, в которых участвуют только фононы.

Поскольку точная форма энергетического спектра неизвестна, задача о дисперсии не может быть решена точно. Однако из имеющихся данных об энергетической кривой для малых значений импульса и вблизи минимума можно попытаться вычислить коэффициенты в разложении энергии по степеням импульса p . Для этого построим интерполяционную четырёхчленную формулу с неопределёнными пока коэффициентами

$$\varepsilon^2 = A_1 p^2 + A_2 p^4 + A_3 p^6 + A_4 p^8. \quad (6.1)$$

Выражения (1.1) и (1.2) дают четыре условия:

$$\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial p} \right)_{p=0} = c, \quad \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial p} \right)_{p=p_0} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial p^2} \right)_{p=p_0} = \frac{1}{\mu}, \quad \varepsilon(p_0) = \Delta, \quad (6.2)$$

позволяющие найти четыре коэффициента A_1 , A_2 , A_3 и A_4 в фор-

муле (6.1). Значения этих коэффициентов оказываются равными

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= c^2, & A_2 &= \frac{1}{4P_0^2} \left(24 \frac{\Delta^2}{P_0^2} + \frac{\Delta}{\mu} - 12c^2 \right), \\ A_3 &= \frac{1}{P_0^4} \left(3c^2 - 8 \frac{\Delta^2}{P_0^2} - \frac{\Delta}{2\mu} \right), \\ A_4 &= -\frac{1}{4P_0^6} \left(4c^2 - 12 \frac{\Delta^2}{P_0^2} - \frac{\Delta}{\mu} \right). \end{aligned} \right\} \quad (6.3)$$

Извлечём квадратный корень из выражения (6.1); ограничиваясь только первыми двумя членами, получим

$$\varepsilon = c(p - \gamma p^3), \quad (6.4)$$

где $\gamma = -A_2/2c^2$. Значение γ , вычисленное с помощью известных значений параметров Δ , μ и P_0 , оказывается равным

$$\gamma \approx 2,8 \cdot 10^{37} \text{ г}^{-2} \text{ см}^{-2} \text{ сек}^2.$$

Для вычисления эффективных сечений рассеяния фононов мы воспользуемся разложением поля фононов в ряд Фурье. При этом будем исходить из аналогии между полем фононов и полем излучения. Представим плотность гелия $\rho(\mathbf{r})$ и скорость $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ в виде ряда Фурье*)

$$\left. \begin{aligned} \rho(\mathbf{r}) &= \rho_0 + \Omega^{-1/2} \left\{ \sum_{\mathbf{p}} \rho_{\mathbf{p}} e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}/h} + \rho_{\mathbf{p}}^* e^{-i\mathbf{p}\mathbf{r}/h} \right\}, \\ \mathbf{v}(\mathbf{r}) &= \Omega^{-1/2} \left\{ \sum_{\mathbf{p}} \mathbf{v}_{\mathbf{p}} e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}/h} + \mathbf{v}_{\mathbf{p}}^* e^{-i\mathbf{p}\mathbf{r}/h} \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (6.5)$$

Здесь ρ_0 — равновесная плотность в отсутствие фононов, $\mathbf{p}$ — импульс фонона, связанный с частотой ω соотношением

$$\omega = cp/h. \quad (6.6)$$

Для бегущих волн суммирование в (6.5) производим как по положительным, так и по отрицательным значениям импульса.

Из соотношения коммутации⁴ между $\rho(\mathbf{r})$ и $\mathbf{v}(\mathbf{r})$:

$$\rho(\mathbf{r}_1) \mathbf{v}(\mathbf{r}_2) - \mathbf{v}(\mathbf{r}_2) \rho(\mathbf{r}_1) = (\hbar/i) \nabla \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \quad (6.7)$$

можно получить соотношения коммутации для компонент Фурье. Для этого выразим $\rho(\mathbf{r}_1)$ и $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ с помощью (6.5) и подставим указанные выражения в левую часть (6.7). Стоящую в правой части

*) Здесь и в дальнейшем через $\hbar$ обозначаем постоянную Планка, делённую на 2π .

выражения (6.7) δ -функцию представим в виде

$$\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = (1/2) \Omega^{-1} \left\{ \sum_{\mathbf{p}} e^{i(\mathbf{p}, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)/h} + e^{-i(\mathbf{p}, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)/h} \right\} \quad (6.8)$$

и сравним коэффициенты при одинаковых экспонентах в левой и правой частях. Это даёт соотношения, справедливые при $\text{rot } \mathbf{v}_s = 0$

$$\left. \begin{aligned} \rho_{\mathbf{p}} \rho_{\mathbf{s}}^* - \rho_{\mathbf{s}}^* \rho_{\mathbf{p}} &= \frac{\rho_0 P}{2c} \delta_{\mathbf{ps}}, \quad \mathbf{v}_{\mathbf{p}} = \frac{c\mathbf{p}}{\rho_0 P} \rho_{\mathbf{p}}, \\ \delta_{\mathbf{ps}} &= \begin{cases} 1 & \mathbf{p} = \mathbf{s}, \\ 0 & \mathbf{p} \neq \mathbf{s}. \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (6.9)$$

Полный гамильтониан рассматриваемого объёма гелия

$$\int \{ 1/2 \mathbf{v} \rho \mathbf{v} + \rho \varepsilon(\rho) \} d\Omega$$

($\varepsilon(\rho)$ — внутренняя энергия единицы массы жидкости) в компонентах Фурье с точностью до кубических по $\rho_{\mathbf{p}}$ членов выражается следующим образом:

$$H_0 = (c^2/\rho_0) \sum (\rho_{\mathbf{p}} \rho_{\mathbf{p}}^* + \rho_{\mathbf{p}}^* \rho_{\mathbf{p}}) = \sum (n_{\mathbf{p}} + 1/2) \hbar \omega. \quad (6.10)$$

Здесь $n_{\mathbf{p}}$ — число фононов с импульсом $\mathbf{p}$.

Из соотношений (6.9) и (6.10) получаем отличные от нуля матричные элементы компонент Фурье:

$$(\rho_{\mathbf{p}})_{n_{\mathbf{p}}, n_{\mathbf{p}}+1} = \sqrt{(p\rho_0/2c)(n_{\mathbf{p}}+1)} e^{-i\omega t}, \quad (6.11)$$

$$(\rho_{\mathbf{p}}^*)_{n_{\mathbf{p}}, n_{\mathbf{p}}-1} = \sqrt{(p\rho_0/2c)n_{\mathbf{p}}} e^{-i\omega t}. \quad (6.12)$$

В дальнейшем нам понадобятся производные по плотности от параметров Δ , P_0 , μ и скорость звука c , характеризующие форму энергетической кривой. Они могут быть вычислены из имеющихся данных о скорости первого и второго звуков под давлением с использованием данных о коэффициенте теплового расширения гелия II.

Производная от скорости первого звука c по плотности ρ вычисляется по данным Финдлея и др.²⁴ о зависимости скорости звука в гелии от давления, а также по данным Кеезома и мисс Кеезом²⁵ о зависимости плотности гелия II от давления. Те и другие данные дают $\frac{\rho}{c} \frac{\partial c}{\partial \rho} = 1,8$ и, следовательно,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\rho}{N_{\Phi}} \frac{\partial N_{\Phi}}{\partial \rho} &= -\frac{3\gamma}{c} \frac{\partial c}{\partial \rho} \approx 5,4 \\ \left(N_{\Phi} = 2,4 \frac{4\pi (kT)^3}{(2\pi\hbar c)^3} \right). \end{aligned} \right\} \quad (6.13)$$

Данные Пешкова и Зиновьевой²⁶ о скорости второго звука под давлением позволяют вычислить некоторую линейную комбинацию из

производных $\frac{\partial P_0}{\partial \rho}$, $\frac{\partial N_p}{\partial \rho}$ $\frac{\partial N_\Phi}{\partial \rho}$. Поскольку значение производной $\frac{\partial N_\Phi}{\partial \rho}$ нам уже известно, то указанные данные дают одну связь между производными $\frac{\partial P_0}{\partial \rho}$ и $\frac{\partial N_p}{\partial \rho}$.

Для нахождения второго соотношения мы воспользуемся значением коэффициента теплового расширения $\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial T}$ ²⁵, который согласно соотношению

$$\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial T} = \frac{\partial \sigma}{\partial p} \quad (6.14)$$

выражается через производные $\frac{\partial N_p}{\partial \rho}$ и $\frac{\partial N_\Phi}{\partial \rho}$. Из двух соотношений находим значение комбинации $\frac{\rho}{P_0} \frac{\partial P_0}{\partial \rho}$

$$\frac{\rho}{P_0} \frac{\partial P_0}{\partial \rho} \approx \frac{1}{3}. \quad (6.15)$$

Зная величину коэффициента теплового расширения $\frac{\partial \rho}{\partial T}$ для нескольких значений температуры, вычисляем значения производной $\frac{\partial N_p}{\partial \rho}$ для нескольких температурных точек. Опираясь на две такие точки и учитывая вышеприведенное значение производной $\frac{\partial P_0}{\partial \rho}$, находим производную $\frac{\partial \Delta}{\partial \rho}$ (см. также²³):

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \rho} \frac{\rho}{\Delta} \simeq -\frac{1}{3}. \quad (6.16)$$

Что же касается производной $\frac{\partial \mu}{\partial \rho}$, то сколько-нибудь удовлетворительное её значение получить не удаётся из имеющихся очень грубых данных для $\frac{\partial \rho}{\partial T}$. В пределах точности всех имеющихся экспериментальных данных указанную производную можно считать равной нулю.

Вторая производная $\frac{\partial^2 \Delta}{\partial \rho^2}$, определяющая величину эффективного сечения рассеяния фонона на ротоне (§ 8), может быть вычислена из температурного хода скорости первого звука в гелии II¹³.

Последние данные¹³ дают для указанной производной значение

$$\frac{\partial^2 \Delta}{\partial \rho^2} \frac{\rho^2}{\Delta} = -5. \quad (6.17)$$

Следует заметить, что вычисленные таким образом значения производных по плотности от параметров, характеризующих вид энергетической кривой для возбуждений, являются весьма грубыми.

Это объясняется чрезвычайной скудностью и грубостью данных о свойствах гелия II под давлением. Появление новых экспериментальных данных может существенным образом изменить указанные значения.

7. Рассеяние фонона фононом²⁰

Эффективное сечение для рассеяния фонона фононом будем вычислять методом теории возмущений. Гамильтониан единицы объёма гелия II согласно⁴ равен

$$H = \frac{1}{2} \mathbf{v} \rho \mathbf{v} + \rho \varepsilon(\rho). \quad (7.1)$$

Рассматриваемый процесс рассеяния является четырёхфононным эффектом. Неисчезающие матричные элементы энергии возмущения для переходов двух фононов в два других фонона получаются из кубических по ρ' членов в энергии во втором приближении теории возмущений и из членов четвёртой степени по ρ' в первом приближении теории возмущений; ρ' есть отклонение плотности от её значения в неподвижной жидкости, т. е. в отсутствие фононов.

Ограничиваясь членами четвёртого порядка по ρ' , запишем гамильтониан (7.1) в виде

$$H = H_0 + V_3 + V_4, \quad (7.2)$$

где H_0 — обычная плотность звуковой энергии, содержащая члены второго порядка относительно ρ'

$$H_0 = \frac{\rho_0 v^2}{2} + \frac{\rho'^2 c^2}{2\rho_0}. \quad (7.3)$$

V_3 содержит члены третьего порядка

$$V_3 = \frac{\mathbf{v}' \mathbf{v}}{2} + \frac{1}{3!} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{c^2}{\rho} \right) \rho'^3 \quad (7.4)$$

и, наконец, V_4 содержит член четвёртого порядка:

$$V_4 = \frac{1}{4!} \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \left(\frac{c^2}{\rho} \right) \rho'^4. \quad (7.5)$$

При рассеянии фононов с импульсами $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p}_1$, приводящем к появлению фононов $\mathbf{p}'$ и $\mathbf{p}'_1$, возможны шесть промежуточных состояний I — VI, в которых фононы имеют импульсы:

I. $\mathbf{p} + \mathbf{p}_1$; II. $\mathbf{p} - \mathbf{p}', \mathbf{p}_1, \mathbf{p}'$; III. $\mathbf{p} - \mathbf{p}'_1, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}'$; IV. $\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}'_1, \mathbf{p}, \mathbf{p}'$;

V. $\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}', \mathbf{p}, \mathbf{p}'$; VI. $\mathbf{p}, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}', \mathbf{p}'_1 - (\mathbf{p}' + \mathbf{p}'_1)$.

Матричный элемент перехода из начального состояния (A) в конечное состояние (F) во втором приближении теории возмущений

равен

$$H'_{AF} = \sum_{i=1}^{VI} \frac{(V_3)_{Ai} (V_3)_{iF}}{E_A - E_i} + (V_4)_{AF}. \quad (7.6)$$

Входящие в знаменатели (7.6) разности энергий в начальном и в промежуточном состояниях выразим через энергию фононов:

$$\left. \begin{aligned} E_A - E_I &= \varepsilon(p) + \varepsilon(p_1) - \varepsilon(|\mathbf{p} + \mathbf{p}_1|), \\ E_A - E_{II} &= \varepsilon(p) - \varepsilon(p') - \varepsilon(|\mathbf{p} - \mathbf{p}'|), \\ E_A - E_{III} &= \varepsilon(p) - \varepsilon(p'_1) - \varepsilon(|\mathbf{p} - \mathbf{p}'_1|), \\ E_A - E_{IV} &= \varepsilon(p_1) - \varepsilon(p'_1) - \varepsilon(|\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}'_1|), \\ E_A - E_V &= \varepsilon(p_1) - \varepsilon(p') - \varepsilon(|\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}'|), \\ E_A - E_{VI} &= -\varepsilon(p') - \varepsilon(p'_1) - \varepsilon(|\mathbf{p}' + \mathbf{p}'_1|). \end{aligned} \right\} \quad (7.7)$$

Из выражений (7.7) легко видеть, что при неучёте дисперсии знаменатели первых пяти членов выражения (7.6) могут обращаться в нуль, приводя к существенной расходимости матричного элемента. Действительно, при линейной зависимости энергии фононов от импульса знаменатели обращаются в нуль каждый раз, когда угол между импульсами сталкивающихся фононов равен нулю, т. е. когда $|\mathbf{p} + \mathbf{p}_1| = p + p_1$. Поэтому для энергии фононов мы будем пользоваться выражением (1.6), содержащим, кроме линейных, также и кубические по импульсам члены.

Входящие в (7.6) матричные элементы возмущения V_3 и V_4 вычисляются с помощью выражений (6.11) — (6.12) для неисчезающих матричных элементов плотности*). Получающиеся при этом выражения существенным образом содержат два безразмерных параметра:

$$u = \frac{\rho_0}{c^2} \frac{\partial c^2}{\partial \rho}, \quad z = \frac{\rho_0^3}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \left(\frac{c^2}{\rho} \right). \quad (7.8)$$

Дифференциальное эффективное сечение для рассматриваемого процесса представляется соотношением

$$d\sigma(\mathbf{p}, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}', \mathbf{p}'_1) = (2\pi/\hbar c) |H'_{AF}|^2 \delta(\varepsilon + \varepsilon_1 - \varepsilon' - \varepsilon'_1) (2\pi\hbar)^{-3} d\mathbf{p}', \quad (7.9)$$

$$d\mathbf{p}' = dp'_x dp'_y dp'_z.$$

Вычисление полного эффективного сечения для рассеяния фонона с импульсом $\mathbf{p}_1$ фононом с импульсом $\mathbf{p}$ приводит к весьма громоздким выражениям. Мы рассмотрим конкретный случай, когда один из импульсов сталкивающихся фононов мал, именно, когда $p \ll p_1$.

*) При вычислении матричных элементов следует учесть все возможные перестановки фононов. Для этого необходимо умножить члены, содержащие ρ'^2 , на 2, содержащие ρ'^3 , на 6 и, наконец, содержащие ρ'^4 , на 24.

Что касается импульсов p' и p_1' рассеянных фононов, то их предполагаем сравнимыми по величине с p_1 .

В таком случае из трёх членов в матричном элементе перехода H'_{AF} , обладающих резонансными знаменателями и соответствующих промежуточным состояниям I, IV и V, только член

$$\frac{(V_3)_{A1} (V_3)_{1F}}{\varepsilon(p) + \varepsilon(p_1) - \varepsilon(|\mathbf{p} + \mathbf{p}_1|)}$$

будет содержать малую величину в знаменателе, в отличие от двух других, пропорциональных соответственно $(p_1 - p')^2/p_1 p'$ и $(p_1 - p_1')^2/p_1 p_1'$; этот член оказывается порядка $\frac{p_1}{p}$ и, следовательно, только он один является существенным. Указанное обстоятельство упрощает выражение (7.9) для $d\sigma$, которое после несложных преобразований принимает вид:

$$d\sigma = \frac{(u+2)^4 p_1^2 p_1' p'}{(16\pi h^2 \rho_0)^2 C p} \cdot \frac{\delta[\varepsilon(p) + \varepsilon(p_1) - \varepsilon(p') - \varepsilon(p_1')]}{(1 - \mathbf{n}\mathbf{n}_1 + 3\gamma p_1^2)} p'^2 dp_1' dp'. \quad (7.10)$$

То обстоятельство, что выражение (7.10) имеет острый максимум при малых углах между импульсами сталкивающихся фононов, позволит нам выполнить необходимое интегрирование. Выберем в качестве полярной оси сферической системы координат направление, образованное суммой импульсов $\mathbf{p} + \mathbf{p}_1$. Пусть в этой системе векторы $\mathbf{p}$, $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}'$ и $\mathbf{p}_1'$ имеют полярные углы соответственно θ , θ_1 , θ' и θ_1' . Преобразуем теперь к виду, удобному для интегрирования, δ -функцию, содержащую разность энергий; последняя с помощью (6.6) и закона сохранения импульса при малых углах приводится к виду:

$$c \{ (p/2p_1) (p + p_1) \theta^2 - (p'/2p_1') (p' + p_1') \theta'^2 + \\ + 3\gamma (p_1 - p') (pp' - p_1 p_1') \}.$$

Проинтегрируем теперь выражение (7.10) по фазовому объёму и усредним по всем углам, образованным импульсами $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p}_1$. В результате для полного эффективного сечения рассеяния фонона с импульсом $\mathbf{p}$ фононом с импульсом $\mathbf{p}_1$ получаем следующее выражение *):

$$\sigma(p, p_1) = \frac{\pi (u+2)^4 p_1^4}{(90\pi h^2 \rho_0 c)^2 \gamma} (p \ll p_1). \quad (7.11)$$

Значение входящего в (7.11) безразмерного выражения u может быть вычислено из данных Кеезома²⁷ для зависимости плотности гелия II от давления. Из этих данных получается значение, равное

*) Для учёта симметрии по паре рассеянных фононов с импульсами $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p}_1$ выражение (7.11) содержит дополнительный множитель $1/2$.

3,6*). Обращаем внимание на тот любопытный факт, что эффективное сечение рассеяния (7.11) не зависит от импульса p фонона малой энергии.

Представив в (7.11) численные значения всех параметров, находим

$$\sigma(p, p_1) = 6 \cdot 10^{-19} (xT)^4. \quad (7.12)$$

Здесь x есть импульс, выраженный в единицах kT/c , так что $p_1 = x(kT/c)$.

Как уже отмечалось, эффективное сечение для рассеяния фонона фононом достигает наибольшего значения при малых углах между импульсами сталкивающихся и рассеянных фононов. Отсюда следует, что такой процесс приводит в основном к быстрому обмену энергиями между фононами и не приводит к существенному изменению направлений импульсов сталкивающихся фононов.

8. Рассеяние фонона ротон²⁰

В настоящем параграфе мы вычислим эффективное сечение рассеяния фонона ротон²⁰. Гамильтониан системы фонон — ротон можно записать в виде

$$H = H_\phi + H_p + V, \quad (8.1)$$

где H_ϕ — энергия фонона, H_p — энергия ротона, а V — функция взаимодействия фонона с ротон²⁰.

Поскольку характер взаимодействия фонона с ротон²⁰ неизвестен, будем рассматривать ротон как некоторую частицу, находящуюся в фононном поле. При таком рассмотрении несущественна внутренняя структура ротона.

Наличие фонона эквивалентно малым колебаниям плотности среды и её движению с некоторой скоростью $\mathbf{v}$. В неподвижной системе отсчёта энергия ротона с импульсом $\mathbf{P}$ выражается следующим образом:

$$H'_p = H_{p_0} - \mathbf{P}\mathbf{v} \quad (8.2)$$

(H_{p_0} — энергия ротона в движущейся вместе со средой системе отсчёта). Из (8.2) следует, что энергия взаимодействия фонон — ротон содержит член $\mathbf{P}\mathbf{v}$, зависящий от скорости. Соответствующий этому члену в энергии возмущения квантовый эрмитовый оператор есть

$$-\frac{1}{2} (\mathbf{P}\mathbf{v} + \mathbf{v}\mathbf{P}), \quad (8.3)$$

где $\mathbf{P} = -i\hbar\nabla$ — оператор импульса.

Выясним зависимость энергии взаимодействия V от плотности жидкости.

*) Укажем, что для значения параметра z (см. (7.8)) из тех же данных получаем около 20.

Для этого разложим энергию ротона по степеням отклонения плотности ρ от её равновесного значения и сохраним члены только до второго порядка по ρ включительно. (Здесь и в дальнейшем отклонение плотности жидкости от равновесного значения обозначаем через ρ без штриха.) Члены первого порядка по ρ будут давать необходимые для нашей задачи переходы во втором приближении теории возмущения, а члены второго порядка по ρ — те же переходы, но в первом приближении теории возмущений. Воспользуемся выражением (6.2) для энергии ротона и произведём указанное разложение:

$$H_p = H_{p_0} + \frac{\partial \Delta}{\partial \rho} \rho + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 \Delta}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial P_0}{\partial \rho} \right)^2 \right] \rho^2. \quad (8.4)$$

Здесь H_{p_0} — энергия ротона в отсутствие фонона. Поскольку из вида энергетического спектра следует, что большинство ротонов обладают импульсами, близкими к P_0 , то членами в разложении H_p , содержащими разность $(P - P_0)$, мы пренебрегаем и не выписываем их. Мы пренебрегаем также членом в (8.4), содержащим производную, величина которой согласно (6.16) чрезвычайно мала*).

Таким образом, окончательно с помощью (8.3) и (8.4) имеем для энергии взаимодействия фонов — ротонов:

$$V = - \frac{1}{2} (\mathbf{P}\mathbf{v} + \mathbf{v}\mathbf{P}) + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 \Delta}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial P_0}{\partial \rho} \right)^2 \right] \rho^2. \quad (8.4')$$

Вследствие малости скорости колебаний $\mathbf{v}$ и отклонения плотности от равновесного значения ρ энергия взаимодействия может рассматриваться, как малое возмущение в выражении гамильтониана (8.1) системы фонов — ротонов. Поэтому вычисление вероятности рассеяния фонона ротоном произведём по схеме теории возмущений.

Поскольку рассматриваемый эффект рассеяния является двухфоновным, то линейные по ρ или $\mathbf{v}$ члены в энергии возмущения будут давать нужные переходы во втором приближении теории возмущений. Однако тот факт, что уравнения гидродинамики являются нелинейными, несколько изменяет в этом пункте обычную картину. Действительно, будем решать уравнения гидродинамики методом последовательных приближений.

В первом приближении плотность ρ (или скорость $\mathbf{v}$) будет являться суперпозицией плоских волн. Члены второго приближения в плотности ρ (или $\mathbf{v}$) будут содержать парные произведения различных компонент Фурье. Матричные же элементы от членов второго приближения в плотности ρ будут содержать парные произведения фоновых амплитуд.

*) Как показывают несложные вычисления, членом с производной $\partial \Delta / \partial \rho$ в (8.4) можно пренебречь в том случае, если выполнено условие

$$(1/\mu c^2) (\partial \Delta / \partial \rho)^2 \ll \partial^2 \Delta / \partial \rho^2.$$

Согласно (6.16) и (6.17) это условие выполняется с большим запасом.

Среди парных произведений будут и такие, которые в точности соответствуют рассеянию фонона в рассматриваемом процессе, т. е. содержат амплитуды как падающего, так и рассеянного фононов. Поэтому уже в первом приближении теории возмущений линейные по ρ (или $\mathbf{v}$) члены в энергии возмущения будут давать необходимые для нашей задачи переходы. В связи со сказанным решим уравнения гидродинамики с учётом членов второго порядка по ρ .

В силу малости изменений плотности и давления запишем переменные в виде $p_0 + p$, $\rho_0 + \rho$, где p_0 и ρ_0 — постоянные равновесные давление и плотность. После пренебрежения в уравнении Эйлера малыми величинами третьего порядка получаем

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = - \frac{c^2}{\rho_0} \nabla p + \frac{\rho \nabla p}{\rho_0} \left(\frac{c^2}{\rho_0} - \frac{\partial c^2}{\partial \rho} \right). \quad (8.5)$$

В том же приближении уравнение непрерывности сводится к

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \mathbf{v} = - \operatorname{div} \rho \mathbf{v}. \quad (8.6)$$

Применяем к уравнению (8.5) операцию div , продифференцируем уравнение (8.6) по t и вычтем после этого второе из первого. В результате получим волновое уравнение с учетом членов второго порядка, которые сгруппируем в правой части:

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 \rho = - \operatorname{div} \left\{ \frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} - \rho_0 (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} + \left(\frac{c^2}{\rho_0} - \frac{\partial c^2}{\partial \rho} \right) \rho \nabla p \right\}. \quad (8.7)$$

В первом приближении для падающей и рассеянной волны имеем

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 e^{i(h)(\mathbf{r} - c p t)}, \quad \rho = \rho_1 e^{i(h)(\mathbf{r} - c p t)}, \quad (8.8a)$$

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v}'_1 e^{i(h)(\mathbf{r}' - c p' t)}, \quad \rho = \rho'_1 e^{i(h)(\mathbf{r}' - c p' t)}, \quad (8.8b)$$

где величины без штриха относятся к падающей волне, а со штрихом к рассеянной. Во втором приближении будем искать только те члены, в которых перепутываются падающая и рассеянная волны. Остальные члены не дают сохранения энергии и исчезают в матричных элементах энергии возмущения.

Обозначим единичный вектор в направлении падающей волны через $\mathbf{n}$ и в направлении рассеянной волны — через $\mathbf{n}'$. Пользуясь методом последовательных приближений, подставим (8.8a) и (8.8b) в правую часть (8.7). Тогда для плотности во втором приближении получим

$$\begin{aligned} \rho_{2np} = & \frac{\rho_1 \rho'_1}{c^2 p p' (1 - \mathbf{n} \mathbf{n}')} \left\{ [p - p' (\mathbf{n} \mathbf{n}')] [p' - p (\mathbf{n} \mathbf{n}')] \frac{c^2}{\rho_0} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} (\mathbf{p} - \mathbf{p}')^2 \frac{\partial c^2}{\partial \rho} \right\} e^{i(h) [(\mathbf{p} - \mathbf{p}', \mathbf{r}) - c (\rho - \rho') t]}. \end{aligned} \quad (8.9)$$

Для скорости в том же приближении из (8.5) находим:

$$V_{2пр} = \frac{\rho\rho'(p-p')(p'-p)}{\rho_0 c p p' (1 - \pi\pi')} \left\{ (\pi\pi') \frac{c^2}{\rho_0} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial c^2}{\partial p} \right\} e^{(i/\hbar) [(p - p', r) - c(p - p') t]}. \quad (8.10)$$

Задача теперь состоит в том, чтобы определить вероятность перехода ротона из состояния с импульсом $\mathbf{P}$ в состояние с импульсом $\mathbf{P}'$, при котором поглощается фонон $\mathbf{p}$ и испускается фонон $\mathbf{p}'$. Возможны два промежуточных состояния I и II.

I) Ротон в состоянии A с импульсом $\mathbf{P}$ поглощает фонон $\mathbf{p}$ и переходит в промежуточное состояние $\mathbf{P} + \mathbf{p}$, после чего испускает фонон $\mathbf{p}'$ и переходит в конечное состояние F , имея импульс $\mathbf{P}' = \mathbf{P} + \mathbf{p} - \mathbf{p}'$.

II) Ротон в состоянии A с импульсом $\mathbf{P}$ испускает фонон $\mathbf{p}'$ и переходит в промежуточное состояние $\mathbf{P} - \mathbf{p}'$, после чего поглощает фонон $\mathbf{p}$ и переходит в конечное состояние F с импульсом $\mathbf{P}' = \mathbf{P} + \mathbf{p} - \mathbf{p}'$.

Рассеяние фонона ротонном в некотором смысле аналогично рассеянию лёгкой частицы тяжёлой. Эта аналогия связана с тем, что фонон обладает импульсом, по величине значительно меньшим, чем импульс ротона. Из функции распределения для ротонов следует, что импульс ротона по своей величине примерно равен P_0 . С учетом закона сохранения импульса закон сохранения энергии для рассматриваемого процесса записывается согласно (1.1) и (1.2) в виде

$$c\rho + \frac{(P - P_0)^2}{2\mu} = c\rho' + \frac{(|\mathbf{P} + \mathbf{p} - \mathbf{p}'| - P_0)^2}{2\mu}, \quad (8.11)$$

откуда после несложных преобразований, учитывающих малость фононных импульсов (p и $p' \ll P_0$), получаем

$$c(p - p') = (\mathbf{P} + \mathbf{p} - \mathbf{p}')^2 / 2\mu P_0^2. \quad (8.12)$$

Воспользуемся теперь тем обстоятельством, что энергия фононов $\epsilon = c\rho$ значительно меньше величины μc^2 , равной приблизительно 20°K . Это позволяет заключить, что закон сохранения энергии в рассматриваемом процессе попросту сводится к равенству величин импульсов падающего и рассеянного фононов $p = p'$. Этот результат подтверждает указанную выше аналогию с рассеянием лёгких частиц тяжёлыми, где лёгкие частицы при рассеянии изменяют лишь направление импульса, не меняя его величины.

Энергия возмущения V согласно (8.4') содержит величину $V_{2пр}$, определяющуюся выражением (8.10). Однако величина $V_{2пр}$ существенным образом содержит множитель $(p - p')$. Поэтому, учитывая закон сохранения энергии, можно опустить в энергии возмущения члены второго приближения $V_{2пр}$.

Матричный элемент перехода H'_{AF} во втором приближении теории возмущений согласно (8.4') равен

$$H'_{AF} = \frac{(\mathbf{P}\mathbf{v} + \mathbf{v}\mathbf{P})_{AI} (\mathbf{P}\mathbf{v}' + \mathbf{v}'\mathbf{P})_{IF}}{4(E_A - E_I + pc)} + \frac{(\mathbf{P}\mathbf{v}' + \mathbf{v}'\mathbf{P})_{AI} (\mathbf{P}\mathbf{v} + \mathbf{v}\mathbf{P})_{IF}}{4(E_A - E_{II} - p'c)} + \\ + (1/2) \left[\frac{\partial^2 \Delta}{\partial p^2} + \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial P_0}{\partial p} \right)^2 \right] p^2. \quad (8.13)$$

Изменения энергии при переходах в промежуточные состояния равны

$$\left. \begin{aligned} E_A - E_I &= -\frac{(|\mathbf{P} + \mathbf{p}| - P_0)^2}{2\mu} = -\frac{(\mathbf{P}\mathbf{p})^2}{2\mu P_0^2}, \\ E_A - E_{II} &= -\frac{(|\mathbf{P} - \mathbf{p}'| - P_0)^2}{2\mu} = -\frac{(\mathbf{P}\mathbf{p}')^2}{2\mu P_0^2} \end{aligned} \right\} \quad (8.14)$$

На том же основании, что в (8.12), можно утверждать, что

$$E_A - E_I \ll pc, \quad E_A - E_{II} \ll p'c.$$

Однако просто пренебречь в знаменателях первых двух членов в (8.13) разностью энергий $E_A - E_I$ и $E_A - E_{II}$ нельзя, так как получающиеся при этом выражения нулевого порядка по импульсам фононов взаимно уничтожаются. Поэтому вначале приведем первые два члена в (8.13) к общему знаменателю, а затем пренебрежём в последнем изменениями энергии ротона. Таким образом получаем

$$H'_{AF} = \frac{vv'}{p^2 p'^2 c} \left\{ \left(\mathbf{p} + \frac{1}{2} \mathbf{p}, \mathbf{p} \right) \left(\mathbf{p}' + \frac{1}{2} \mathbf{p}', \mathbf{p}' \right) \left[p' + \frac{(\mathbf{P}\mathbf{p}')^2}{2\mu c P_0^2} \right] - \right. \\ \left. - \left(\mathbf{p} - \frac{1}{2} \mathbf{p}', \mathbf{p}' \right) \left(\mathbf{p}' - \frac{1}{2} \mathbf{p}, \mathbf{p} \right) \left[p - \frac{(\mathbf{P}\mathbf{p})^2}{2\mu c P_0^2} \right] \right\} + \\ + \left[\frac{\partial^2 \Delta}{\partial p^2} + \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial P_0}{\partial p} \right)^2 \right] p p'. \quad (8.15)$$

причём при раскрытии выражения $(p^2)_{AF}$ следует учесть возможные перестановки $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p}'$, приводящие к удвоению соответствующего члена.

Воспользовавшись законами сохранения, преобразуем выражение, стоящее в фигурных скобках в (8.15), к виду

$$P_0 p^3 \left\{ (\mathbf{n} + \mathbf{n}; \mathbf{m}) (\mathbf{n}\mathbf{n}') + \frac{P_0}{\mu c} (\mathbf{n}\mathbf{m})^2 (\mathbf{n}'\mathbf{m})^2 \right\}. \quad (8.16)$$

Здесь $\mathbf{m}$ есть единичный вектор в направлении импульса ротона $\mathbf{P}^*$).

*) Из закона сохранения импульса следует, что направление импульса ротона $\mathbf{P}$ сохраняется.

Окончательно матричный элемент перехода (8.13) с помощью (8.16) принимает вид:

$$H'_{AF} = \frac{P_0 p}{2\rho_0} \left\{ (n + n', m) (nn') + \frac{P_0}{\mu c} (nm)^2 (n'm)^2 + A \right\}, \quad \left. \begin{aligned} A = \frac{\rho_0^2}{P_0 c} \left[\frac{\partial^2 \Delta}{\partial p^2} + \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial P_0}{\partial p} \right)^2 \right] \end{aligned} \right\} \quad (8.17)$$

Искомое дифференциальное эффективное сечение рассеяния фонона ротоном равно

$$d\sigma = (2\pi/\hbar c) |H'_{AF}|^2 \delta(E_A + pc - E_F - p'c) (2\pi\hbar)^{-3} p'^2 dp' d\omega'. \quad (8.18)$$

Подставим (8.17) в (8.18) и произведём интегрирование по импульсам рассеянного фонона; в результате имеем

$$d\sigma = \left(\frac{P_0 p^2}{4\pi\hbar^2 \rho_0 c} \right)^2 \left\{ (n + n', m) (nn') + \frac{P_0}{\mu c} (nm)^2 (n'm)^2 + A \right\}^2 d\omega'. \quad (8.19)$$

При решении задачи о вязкости гелия II нам потребуется выражение вероятности рассеяния фонона ротонами, при котором направление импульса фонона $\mathbf{p}$ изменяется на заданный угол ψ . Поэтому усредним выражение (8.19) по углам падающего и рассеянного ротонов. В результате после несложных вычислений получаем

$$d\sigma(p, \psi) = \left(\frac{P_0 p^2}{4\pi\hbar^2 \rho_0 c} \right)^2 \left\{ \frac{2}{3} (1 + \cos \psi) \cos^2 \psi + \frac{1}{105} (1 + 8 \cos^2 \psi + \frac{8}{3} \cos^4 \psi) + \frac{2A}{15} \left(\frac{P_0}{\mu c} \right) (1 + 2 \cos^2 \psi) + A^2 \right\} d\omega'. \quad (8.20)$$

Входящий в (8.20) угол ψ образован направлениями падающего и рассеянного фононов. Интегрируя (8.20) по всем углам рассеяния, находим полное эффективное сечение рассеяния фонона с импульсом p ротоном:

$$\sigma_{\text{фр}} = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{P_0 p^2}{\hbar^2 \rho_0 c} \right)^2 \left[\frac{2}{9} + \frac{1}{25} \left(\frac{P_0}{\mu c} \right)^2 + \frac{2A}{9} \frac{P_0}{\mu c} + A^2 \right]. \quad (8.21)$$

Значение параметра A , вычисленное с помощью приведённых выше в § 6 значений производных от параметров Δ и P_0 , оказывается равным — 0,66. Следует, конечно, заметить, что точность значений указанных производных и параметра A сравнительно невелика.

Воспользовавшись численными значениями всех параметров, входящих в (8.21), получим для $\sigma_{\text{фр}}$:

$$\sigma_{\text{фр}} = 2,2 \cdot 10^{-19} (xT)^4, \quad p = x (kT/c). \quad (8.22)$$

9. Рассеяние ротона ротоном²⁰

Теория не даёт никаких указаний о характере взаимодействия ротона с ротоном; поэтому, естественно, задача о рассеянии ротона ротоном не может быть решена точно. Однако, поскольку нашей целью является вычисление только температурной зависимости вязкости гелия II, то такое точное решение не является необходимым.

Для нахождения указанного температурного закона достаточно знать вероятность рассеяния ротона ротоном как функцию температуры с точностью до постоянного множителя; такая вероятность не чувствительна к выбору функции взаимодействия ротон — ротон.

При вычислении вероятности рассеяния ротона ротоном будем пользоваться методом теории возмущений, считая энергию взаимодействия ротона с ротоном δ -функцией от расстояния между ними. Известно, что при применении теории возмущений выбор энергии взаимодействия в виде δ -функции не приводит к расходимости получаемых выражений для вероятности.

Пусть энергия взаимодействия двух ротонов равна

$$V = V_0 \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}), \quad (9.1)$$

где $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}$ — радиусы-векторы ротонов, а V_0 — некоторая постоянная, значение которой может быть определено из значений вязкости гелия II. Обозначим энергию и импульсы ротонов через E и $\mathbf{P}$ соответственно для падающих ротонов без штриха и для рассеянных с одним штрихом. Вероятность перехода ротонов из состояния A с импульсами $\mathbf{P}$ и $\mathbf{P}_1$ в состояние F с импульсами $\mathbf{P}'$ и $\mathbf{P}'_1$ определяется формулой теории возмущений

$$d\omega = (2\pi/\hbar) |V_{AF}|^2 \delta(E + E_1 - E' - E'_1) d\mathbf{P}' d\mathbf{P}'_1 / (2\pi\hbar)^2. \quad (9.2)$$

В качестве волновых функций ротонов выберем плоские волны, симметризованные по парам сталкивающихся и рассеянных ротонов. Так, для падающих ротонов волновая функция записывается в виде

$$\Psi(\mathbf{P}, \mathbf{P}_1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ e^{(i/\hbar)(\mathbf{P}\mathbf{r} + \mathbf{P}_1\mathbf{r}_1)} + e^{(i/\hbar)(\mathbf{P}\mathbf{r}_1 + \mathbf{P}_1\mathbf{r})} \}.$$

Аналогично записывается волновая функция рассеянных ротонов

$$\Psi(\mathbf{P}', \mathbf{P}'_1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ e^{(i/\hbar)(\mathbf{P}'\mathbf{r} + \mathbf{P}'_1\mathbf{r}_1)} + e^{(i/\hbar)(\mathbf{P}'\mathbf{r}_1 + \mathbf{P}'_1\mathbf{r})} \}.$$

С помощью волновых функций такого вида вычислим матричный элемент перехода V_{AF} :

$$\begin{aligned} V_{AF} &= V_0 \Omega^{-\frac{1}{2}} \int \Psi^*(\mathbf{P}, \mathbf{P}_1) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \Psi(\mathbf{P}', \mathbf{P}'_1) d\Omega d\Omega_1 = \\ &= 2V_0 \Omega^{-\frac{1}{2}} \int e^{i/\hbar [\mathbf{P}' + \mathbf{P}'_1 - \mathbf{P} - \mathbf{P}_1] \cdot \mathbf{r}} d\Omega. \end{aligned} \quad (9.3)$$

Квадрат модуля матричного элемента удаётся легко проинтегрировать по импульсам одного из рассеянных ротонов

$$\int |V_{AF}|^2 \frac{dP'_1}{(2\pi\hbar)^3} = |V_0|^2. \quad (9.4)$$

Это соотношение позволяет переписать вероятность перехода $d\omega$ в виде

$$d\omega = (8\pi/\hbar) |V_0|^2 \delta(E + E_1 - E' - E'_1) dP' (2\pi\hbar)^{-3}. \quad (9.5)$$

Вероятность, определяемая выражением (9.5), имеет размерность $\text{см}^3 \text{сек}^{-1}$. Для получения эффективного дифференциального сечения рассеяния указанную вероятность необходимо разделить на относительную скорость движения сталкивающихся ротонов, равную

$$v = \left| \frac{\partial E}{\partial P} - \frac{\partial E_1}{\partial P_1} \right|.$$

Из вида энергетического спектра следует, что большинство ротонов будет обладать импульсами, по абсолютной величине близкими к P_0 . Следовательно, изменения импульсов ротонов при рассеянии по своей величине будут значительно меньше P_0 .

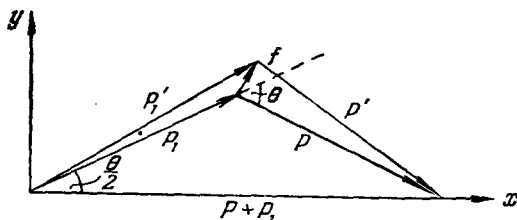


Рис. 5.

Пусть импульсы ротонов P и P_1 до столкновения образуют угол θ . Тогда из рис. 5 легко видеть, что импульсы ротонов после столкновения, вводя переменную f , можно представить в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} P' &= P_0 + f_x \cos \frac{\theta}{2} + f_y \sin \frac{\theta}{2}, \\ P'_1 &= P_0 + f_x \cos \frac{\theta}{2} - f_y \sin \frac{\theta}{2}, \end{aligned} \right\} \quad (9.6)$$

причём $|f| \ll P_0$.

В новых переменных элемент фазового объёма сводится к

$$dP' = 2\pi P_0 \sin \frac{\theta}{2} df_x df_y, \quad (9.7)$$

а закон сохранения энергии к

$$f_x^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + f_y^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} (P - P_0)^2 + \frac{1}{2} (P_1 - P_0)^2. \quad (9.8)$$

Для вычисления полного эффективного сечения σ рассеяния ротона ротоном необходимо произвести в (9.5) интегрирование по фазовому объёму рассеянной частицы. В выражении (9.5) от координат в фазовом пространстве зависит только δ -функция, содержащая закон сохранения энергии.

Если для удобства интегрирования ввести вспомогательную переменную g при помощи соотношения

$$g^2 = f_x^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + f_y^2 \sin^2 \frac{\theta}{2},$$

то с учётом (9.7) и (9.8) указанное интегрирование δ -функции по фазовому объёму рассеянной частицы производится весьма просто, именно:

$$\begin{aligned} \int \delta(E + E_1 - E' - E'_1) dP' = \\ = \int \delta \left[g^2 - \frac{1}{2} (P - P_0)^2 - \frac{1}{2} (P_1 - P_0)^2 \right] \frac{2\pi P_0 \mu}{\cos \frac{\theta}{2}} 2\pi g dg = \\ = \frac{2\pi^2 P_0 \mu}{\cos \frac{\theta}{2}}. \quad (9.9) \end{aligned}$$

Воспользовавшись теперь соотношениями (9.5) и (9.9), запишем выражение для полного эффективного сечения σ рассеяния ротона ротоном:

$$\sigma = \frac{2P_0 \mu |V_0|^2}{\left| \frac{\partial E_1}{\partial P_1} - \frac{\partial E}{\partial P} \right| h^4 \cos \frac{\theta}{2}}. \quad (9.10)$$

Обратная величина среднего времени t_p между двумя соударениями ротона получается из (9.10) умножением на полный поток ротонов с последующим усреднением по всем углам, образованным импульсами сталкивающихся ротонов. Таким образом находим*)

$$\frac{1}{t_p} = \sigma \left| \frac{\partial E_1}{\partial P_1} - \frac{\partial E}{\partial P} \right| N_p = \frac{4P_0 \mu |V_0|^2 N_p}{h^4}. \quad (9.11)$$

Здесь N_p есть число ротонов в единице объёма, равное

$$N_p = \frac{2P_0^2 (\mu kT)^{3/2} e^{-\Delta/kT}}{(2\pi)^{3/2} h^3}. \quad (9.12)$$

Величина входящей в формулы (9.10) и (9.11) постоянной $|V_0|^2$ может быть вычислена из экспериментальных значений коэффициента

*) Чертой обозначаем операцию усреднения по углам.

вязкости гелия II (см. § 16). Она оказывается по порядку величины равной $1,25 \cdot 10^{-76}$ (эрг см³)².

В заключение обратим внимание на то обстоятельство, что выражение (9.10) для эффективного сечения σ расходится при углах между направлениями импульсов сталкивающихся ротонов, близких к π . Для ротонов, обладающих средней скоростью

$$\bar{v} = (2kT/\pi\mu)^{1/2}, \quad (9.13)$$

формула (9.10) после подстановки численных значений параметров даёт

$$\sigma \approx 5 \cdot 10^{-15} T^{-1/2}. \quad (9.14)$$

10. Поглощение и испускание фононов и ротонов²¹

При соударениях ротонов и фононов возможны процессы, в результате которых общее число ротонов и фононов может изменяться. Все подобные процессы в гелии II можно разделить на три типа:

- а) процессы, при которых испускаются (или поглощаются) фононы;
- б) процессы, при которых испускаются или поглощаются ротоны;
- в) процессы, при которых происходит превращение ротонов в фононы (или наоборот).

Рассмотрим наиболее вероятные процессы каждого типа. Только наиболее быстрые из указанных процессов будут существенными в дальнейшем.

Испускание и поглощение фононов. При столкновении двух фононов возможны процессы, приводящие к изменению общего числа фононов. Наиболее простой из таких процессов — трёхфононный — запрещён из-за невозможности одновременного выполнения двух законов сохранения: закона сохранения импульса и закона сохранения энергии. Поэтому мы рассмотрим пятифононный процесс, состоящий в поглощении (или испускании) третьего фонона при соударении двух фононов.

Будем исходить из гамильтоновой функции квантовой жидкости⁴

$$H = \frac{1}{2} \mathbf{v} \rho \mathbf{v} + \rho^2(p). \quad (10.1)$$

Неисчезающие матричные элементы для переходов трёх фононов в два получаются из кубических относительно ρ' членов в энергии в третьем приближении теории возмущений, из кубических и членов четвёртого порядка во втором приближении и из членов пятого порядка в первом приближении теории возмущений (ρ' есть отклонение плотности от её значения в неподвижной жидкости).

Представим гамильтониан (10.1) в виде суммы

$$H = H_0 + V_3 + V_4 + V_5, \quad (10.2)$$

где H_0 — плотность звуковой энергии, содержащая квадратичные по ρ' члены, а V_3 , V_4 и V_5 содержат соответственно члены третьего, четвертого и пятого порядка относительно ρ'

$$H_{AF} = \sum_{I, II} \frac{(V_3)_{AI} (V_3)_{II} (V_3)_{IF}}{(E_A - E_I) (E_A - E_{II})} + \\ + \sum_I \frac{(V_4)_{AI} (V_3)_{IF}}{E_A - E_I} + (V_5)_{AF}. \quad (10.3)$$

Возникающие при неучёте дисперсии при малых углах между импульсами соударяющихся фононов знаменатели резонансного вида приводят к расходимости первых двух сумм в (10.3). Учёт дисперсии фононной части энергетического спектра (§ 6) устраняет расходимость указанных членов. Легко видеть, что существенными будут только переходы, описываемые первой суммой в (10.3), некоторые члены которой содержат в знаменателях произведения двух выражений, обращающихся одновременно в нуль при неучёте дисперсии ($E_A - E_I$ и $E_A - E_{II}$). Поэтому оставим в матричном элементе перехода только первую сумму, зависящую от членов V_3 третьего порядка по ρ' :

$$V_3 = \frac{v \rho' v}{2} + \frac{1}{3!} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{c^2}{\rho} \right) \rho'^3. \quad (10.4)$$

Пусть в начальном состоянии A имеются три фонона с импульсами $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$, $\mathbf{p}_3$, а в конечном состоянии F — два фонона с импульсами $\mathbf{p}_4$ и $\mathbf{p}_5$. Всего возможны несколько десятков промежуточных соотношений (I и II), через которые осуществляется переход из состояния A в состояние F . Однако, как уже отмечалось, существенными будут только те промежуточные состояния, для которых при малых углах между импульсами сталкивающихся фононов одновременно имеет место *):

$$E_A - E_I \rightarrow 0, \quad E_A - E_{II} \rightarrow 0. \quad (10.5)$$

Из сказанного совершенно ясно, что вычисление вероятности рассматриваемого перехода ($3 \rightarrow 2$)

$$dw = \frac{2\pi}{h} |H_{AF}|^2 \delta(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_4 - \epsilon_5) \frac{d\mathbf{p}_4}{(2\pi h)^2} \quad (10.6)$$

есть весьма громоздкая операция. Такое вычисление вряд ли имеет смысл в настоящее время. Дело в том, что основные параметры теории — производные первых трёх порядков от скорости звука c по плотности ρ , особенно, параметр дисперсии γ , известны с очень

*) Всего таких промежуточных состояний оказывается 27, но благодаря законам сохранения импульса и энергии одновременно удовлетворяют условию (11.5) только 15 промежуточных состояний, причём какие именно зависит от соотношения между величинами импульсов.

небольшой точностью. Поэтому мы ограничимся только установлением зависимости между вероятностью перехода и энергией сталкивающихся фононов. Это полностью определит температурный ход интересующих нас величин.

Для установления температурного хода некоторой средней по всем фононам вероятности рассматриваемого перехода (2.6) нет необходимости в идентификации сталкивающихся фононов. Поэтому у импульсов фононов мы будем опускать индексы. Таким образом, согласно (10.4) и (6.11) имеем

$$V_3 \sim p^{3/2}. \quad (10.7)$$

Разность энергий $E_A - E_1$, например, для конкретного случая, когда в промежуточном состоянии I имеются два фонона с импульсами $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$ и $\mathbf{p}_3$, может быть записана в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon(p_1) + \varepsilon(p_2) - \varepsilon(|\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2|) = \\ = \frac{cp_1 p_2}{p_1 + p_2} [1 - n_1 n_2 + 3\gamma(p_1 + p_2)^2], \end{aligned} \quad (10.8)$$

где $\mathbf{p}_1$ и $\mathbf{p}_2$ — единичные векторы в направлении соответствующих импульсов. Матричный элемент перехода будет содержать в своих знаменателях произведение двух выражений типа (10.8).

В настоящем контексте нас, естественно, не интересует угловое распределение фононов. Поэтому усредним выражение (10.6) для вероятности $d\omega$ по углам, образованным импульсами сталкивающихся фононов, и проинтегрируем по фазовому объёму импульса рассеянного фонона. Необходимое при этом интегрирование по углам производится довольно просто благодаря малости членов, стоящих в знаменателях выражения для H_{AF} и учитывающих дисперсию.

Не останавливаясь на сложных выкладках, приведём окончательный результат, полученный для усредненной по углам вероятности:

$$\overline{\omega} \sim p'^2 / (\gamma p^2)^2 \cdot p^5 \sim p^3. \quad (10.9)$$

Пусть полное число фононов в единице объёма (вообще не равное равновесному) есть N_Φ . Скорость изменения числа фононов благодаря пятифононному процессу может быть записана в виде

$$\begin{aligned} \dot{N}_\Phi = - \iiint \{n_1 n_2 n_3 (n_4 + 1) (n_5 + 1) - \\ - (n_1 + 1) (n_2 + 1) (n_3 + 1) n_4 n_5\} d\omega \frac{d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 d\mathbf{p}_3}{(2\pi\hbar)^3}. \end{aligned} \quad (10.10)$$

Если полное число фононов не равно равновесному, то это означает, что функции распределения n содержат неравный нулю химический потенциал μ_Φ

$$n = [e^{(\varepsilon(p) - \mu_\Phi)/kT} - 1]^{-1}.$$

При малых отклонениях от равновесия функцию n разложим по степеням μ_ϕ , ограничиваясь линейными по μ_ϕ членами; имеем

$$n - n_0 = n_0 (n_0 + 1) \mu_\phi / kT. \quad (10.11)$$

Функция n с индексом нуль соответствует равновесным функциям распределения для фононов ($\mu_\phi = 0$). После несложных преобразований с помощью (10.11) соотношение (2.10) принимает вид:

$$\dot{N}_\phi = - \iiint n_{10} n_{20} n_{30} (n_{40} + 1) (n_{50} + 1) d\omega \frac{d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 d\mathbf{p}_3 \mu_\phi}{(2\pi\hbar)^9} \frac{1}{kT}. \quad (10.10')$$

Обозначим коэффициент в равенстве, связывающем скорость изменения N_ϕ с величиной μ_ϕ , через Γ_ϕ ; согласно (10.10) имеем

$$\Gamma_\phi = \frac{1}{kT} \iiint n_{10} n_{20} n_{30} (n_{40} + 1) (n_{50} + 1) d\omega \frac{d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 d\mathbf{p}_3}{(2\pi\hbar)^9}. \quad (10.12)$$

Без большого ущерба для точности в подинтегральном выражении в (10.12) можно пренебречь функциями распределения n_{40} и n_{50} по сравнению с единицей. Тогда интегрирование по фазовым объемам импульсов трёх сталкивающихся фононов ($\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ и $\mathbf{p}_3$) производится независимо, что позволяет заменить $d\omega$ на $\bar{\omega}$, опустив при этом одно интегрирование. Таким образом получаем

$$\Gamma_\phi \approx \frac{1}{kT} \iiint n_{10} n_{20} n_{30} \bar{\omega} \frac{d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 d\mathbf{p}_3}{(2\pi\hbar)^9}. \quad (10.12')$$

Подинтегральное выражение в (10.12') пропорционально p^{12} . После интегрирования в (10.12') по фазовым объемам сталкивающихся фононов получаем температурный закон для Γ_ϕ :

$$\Gamma_\phi = aT^{11}, \quad (10.13)$$

где a — не зависящий от температуры коэффициент.

Полученное соотношение (10.13) устанавливает температурную зависимость именно той величины, которая существенно войдёт в дальнейшие вычисления.

Испускание и поглощение ротонов. При соударении двух ротонов возможно испускание или поглощение третьего ротона. Точное вычисление вероятности указанного процесса не представляется возможным, поскольку конкретный вид функции взаимодействия двух ротонов неизвестен.

Из закона сохранения энергии следует, что при соударении двух ротонов с импульсами $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_2$ может испуститься третий ротон только в том случае, когда выполнено условие:

$$\frac{(P_1 - P_0)^2}{2\mu} + \frac{(P_2 - P_0)^2}{2\mu} \geq \Delta. \quad (10.14)$$

Из вида же энергетического спектра можно заключить, что большинство ротонов обладает импульсами, близкими по величине к P_0 . Поэтому условие (10.14) является очень жёстким и, как показали соответствующие оценки, вероятность пятиротонного процесса оказывается ничтожно малой.

Если $\dot{N}_p$ есть число ротонов в единице объёма, не равное равновесному значению, то по аналогии с предыдущим скорость приближения $\dot{N}_p$ к состоянию равновесия благодаря пятиротонному процессу может быть записана в виде

$$\dot{N}_p = -\Gamma_p \mu_p, \quad (10.15)$$

где μ_p — химический потенциал ротонного газа.

Из сделанного выше утверждения о малости вероятности пятиротонного процесса следует малость величины Γ_p . Мы будем поэтому предполагать, что

$$\Gamma_p \ll \Gamma_\phi. \quad (10.16)$$

при всех температурах ниже λ -точки.

Процессы превращения фононов в ротоны. Закон сохранения импульса налагает запрет на процесс превращения ротона в фонон, поскольку импульс фонона p удовлетворяет условию $p \ll P_0$, в то время, как импульс ротона приблизительно равен P_0 . Этот запрет имеет место при столкновении ротона с ротонном, если направления импульсов сталкивающихся ротонов образуют небольшие углы, а поэтому в этом случае невозможно превращение сталкивающихся двух ротонов в рассеянные ротон и фонон. Однако, если угол между направлениями импульсов сталкивающихся ротонов не очень мал, то указанный запрет уже не имеет места, и возможны такие соударения двух ротонов, при которых они превращаются в фонон и ротон и даже в два фонона (при углах между импульсами сталкивающихся ротонов, близких к π). По той же причине, что и в предыдущем пункте, вычисление вероятности таких процессов невозможно. Представляется возможным произвести лишь соответствующие оценки, суть которых состоит в следующем.

Рассмотрим для удобства процесс, обратный упоминавшемуся выше, т. е. пусть фонон с импульсом p_1 сталкивается с ротонном с импульсом P_2 и в результате образуются два рассеянных ротона с импульсами P_3 и P_4 . Из закона сохранения энергии следует, что энергия рассматриваемого фонона должна быть не меньше Δ . Таким образом мы имеем дело с очень энергичным фононом. Будем считать, что столь энергичные фононы отличаются от ротонов только зависимостью энергии от величины импульса. Взаимодействуют же они с ротонами таким же образом, как и ротоны между собой. Поэтому мы можем все вычисления произвести совершенно аналогично тем, которые были проведены при рассмотрении рассеяния

ротона ротоном (§ 9). В соответствии с этим энергия взаимодействия V фонон — ротон для фононов большой энергии (больше Δ) может быть представлена в виде, пропорциональном δ -функции от расстояния между фононом и ротоном

$$V = V_0 \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \quad (10.17)$$

($\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$) радиусы векторы соответственно фонона и ротона. Как уже отмечалось (§ 9), выбор функции взаимодействия в такой форме позволяет определить температурный закон вероятности соответствующего процесса. Подобно предыдущему, для скорости приближения числа фононов и ротонов к состоянию равновесия в неравновесном фононно-ротонном газе, если такое приближение обусловливается процессом превращения ротонов в фононы и наоборот, можно написать

$$\dot{N}_p = -\Gamma_{\text{фр}}(\mu_p - \mu_{\text{ф}}), \quad \dot{N}_{\text{ф}} = \Gamma_{\text{фр}}(\mu_p - \mu_{\text{ф}}). \quad (10.18)$$

Коэффициент $\Gamma_{\text{фр}}$ определяется соответствующим полным интегралом столкновений. Не останавливаясь на промежуточных выкладках, приведём окончательный результат, полученный с помощью функции взаимодействия (10.17):

$$\Gamma_{\text{фр}} = |V_0|^2 \Delta^2 N_p^2 / \pi \hbar^4 c^3 kT. \quad (10.19)$$

Величина амплитуды V_0 для рассматриваемого процесса нам неизвестна. Для целей оценки можно воспользоваться значением V_0 , полученным для процесса взаимодействия ротона с ротоном из экспериментальных значений коэффициента вязкости гелия II. Заметим, что оценка, производимая с выбранным таким образом значением V_0 , даёт верхний предел для значений коэффициента $\Gamma_{\text{фр}}$. Это следует из того, что такая оценка эквивалентна предположению о превращении фонона в ротон всякий раз, когда фонон имеет достаточную энергию и угол между импульсами фонона и ротона таков, что выполняется закон сохранения импульса. Однако совершенно очевидно, что эти условия в действительности являются необходимыми, но недостаточными: при выполнении указанных условий возможно также просто рассеяние фонона ротоном.

Подставив в правую сторону часть соотношения (10.19) значения всех параметров и указанным образом выбранное значение V_0 ($1 \cdot 12 \cdot 10^{-38}$ эрг см³), находим

$$\Gamma_{\text{фр}} \leq 5 \cdot 10^{50} e^{-\frac{2\Delta}{T}}. \quad (10.20)$$

Пятифононный процесс естественно должен быть менее вероятным, чем четырёхфононный. Но для четырёхфононного процесса нами были ранее сделаны довольно точные оценки (§ 8), которые, таким образом, дают нам верхний предел для значения $\Gamma_{\text{ф}}$. Сравнение обоих верхних пределов (для $\Gamma_{\text{фр}}$ и $\Gamma_{\text{ф}}$) показывает, что они

являются величинами одного порядка в широком диапазоне температур. Следовательно, не исключено, что и сами коэффициенты $\Gamma_{\text{фр}}$ и $\Gamma_{\text{ф}}$ могут оказаться величинами одного порядка.

В дальнейшем мы обозначим неизвестный численный коэффициент в выражении для $\Gamma_{\text{фр}}$ через b и будем писать в соответствии с (10.19).

$$\Gamma_{\text{фр}} = be^{-\frac{2\Delta}{T}}. \quad (10.21)$$

Значения численных коэффициентов a в формуле (10.13) и b в формуле (10.21) могут быть вычислены из экспериментальных значений коэффициента поглощения первого звука в гелии II²⁸. При этом оказывается, что коэффициенты $\Gamma_{\text{ф}}$ и $\Gamma_{\text{фр}}$ действительно имеют одинаковый порядок величины*). Данные³² дают для указанных коэффициентов следующие значения:

$$\Gamma_{\text{ф}} = 1 \cdot 10^{43} T^{11}, \quad \Gamma_{\text{фр}} = 4 \cdot 10^{49} e^{-\frac{2\Delta}{T}}. \quad (10.22)$$

11. Установление равновесия в фононном газе

Изменение числа фононов в элементе фазового объема может происходить следующими путями: а) рассеянием фононов фононами (§ 7); б) рассеянием фононов ротоном (§ 8); в) поглощением и испусканием фононов при неупругих соударениях ротонов или фононов между собой (§ 10).

Вычислим времена релаксации (или соответствующие длины свободного пробега), которые будут характеризовать установление равновесия в фононном газе.

В § 7 было показано, что эффективное сечение рассеяния фонона фононом достигает наибольшего значения при малых углах между импульсами сталкивающихся фононов. Из законов сохранения импульса и энергии следует, что такой процесс рассеяния не приводит к существенному изменению направлений импульсов сталкивающихся фононов, и, следовательно, рассеяние фононов фононами в основном приводит к быстрому обмену энергиями между фононами. Однако точное вычисление времени релаксации, характеризующего установление энергетического равновесия в фононном газе, произвести невозможно по той простой причине, что сама задача не может быть точно сформулирована. Тем не менее, поскольку время установления энергетического равновесия в фононном газе является весьма важной характеристикой нашей системы, мы попытаемся подойти к его определению со стороны двух предельных случаев.

*) Вычисленный эффект оказывается значительно менее вероятным чем рассеяние фонона ротоном. Сравнение величины коэффициента Γ , полученного из интеграла столкновений для процесса рассеяния фонона ротоном, со значением верхнего предела для $\Gamma_{\text{фр}}$ убеждает нас в этом.

В первом случае мы предположим, что в фононном газе каким-либо способом изменено число фононов, обладающих малыми энергиями (меньшими, чем средняя энергия фонона), так что функция распределения в области малых энергий не равна равновесной функции, вслед за чем вычислим время релаксации, характеризующее установление равновесия в таком газе.

Во втором предельном случае предположим, что в фононном газе изменено число фононов, обладающих большими энергиями (большими, чем средняя энергия фононов), так что функция распределения в области больших энергий не равна равновесной функции. В этом случае вычислим время релаксации, характеризующее установление равновесия в таком газе. Сравнивая это время с временем, характеризующим процессы переноса, мы покажем, что процесс установления энергетического равновесия является более быстрым, чем процессы переноса в фононном газе.

Мы начнём с первого случая, т. е. рассмотрим рассеяние фононов с малой энергией фононами же. В этом случае можно положить, что импульс p рассматриваемого фонона значительно меньше импульса фонона p_1 , с которым этот фонон сталкивается. Такое предположение, как было показано в § 7, значительно упрощает выражение для усреднённой по углам вероятности рассеяния фонона фононом. В рассматриваемом случае усреднённое по углам эффективное сечение рассеяния фонона фононом согласно (7.11) равно

$$\sigma(p, p_1) = \frac{\pi(u+2)^4 p_1^4}{(96\pi\hbar^2 \rho_0 c)^2 \gamma}.$$

Рассмотрим кинетическое уравнение для фононов:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla n = I(n),$$

где интеграл столкновений $I(n)$ для процесса рассеяния фонона фононом равен

$$I(n) = - (2\pi\hbar)^{-3} \int c \sigma(p, p_1) \{ n n_1 (n' + 1) (n'_1 + 1) - n' n'_1 (n + 1) (n_1 + 1) \} d\mathbf{p}_1. \quad (11.1)$$

Нас интересует релаксация фононов с малой энергией, функция распределения которых равна n при заданном равновесном распределении остальных фононов. Поэтому функции распределения n_1 , n' и n'_1 в (11.1) будем считать равновесными, а отклонение функции распределения n от равновесного значения n_0 будем полагать малым и равным δn . Воспользовавшись известными свойствами равновесных функций распределения, преобразуем выражение, стоящее в фигур-

ной скобке в (11.1)

$$\begin{aligned} \{ (n_0 + \delta n)(n' + 1)(n'_1 + 1)n_1 - n'_1 n'_1 (n_1 + 1)(n_0 + 1 + \delta n) \} = \\ = \delta n \{ n_1(n' + 1)(n'_1 + 1) - n' n'_1 (n_1 + 1) \} = \\ = \delta n n' n'_1 (n_1 + 1) / n. \end{aligned} \quad (11.2)$$

Подставим в интеграл столкновений (11.1) полученное выражение; имеем

$$I(n) = - (2\pi\hbar)^{-3} \delta n \int n^{-1} n' n'_1 (n_1 + 1) c \sigma(p, p_1) d\mathbf{p}_1. \quad (11.3)$$

Таким образом, время релаксации для фононов с малой энергией определяется соотношением

$$\frac{1}{t_M} = (2\pi\hbar)^{-3} \int n^{-1} n' n'_1 (n_1 + 1) c \sigma(p, p_1) d\mathbf{p}_1. \quad (11.4)$$

Для того чтобы упростить интегрирование в (11.4), заменим функции n , n' и n'_1 на функции Вина и учтём тот факт, что импульсы p и p_1 удовлетворяют неравенству $p \ll p_1$. При этом комбинация из функций распределения, входящая в выражение (11.4), принимает вид: $n_1(n_1 + 1) pc/kT$. Воспользуемся этим и, подставив в (11.4) выражение (7.11) для $\sigma(p, p_1)$, имеем*)

$$\frac{1}{t_M} = (2\pi\hbar)^{-3} \frac{\pi(u+2)^4}{(96\pi\hbar^2\rho_0)^2 c \gamma} \int n_1(n_1 + 1) p_1^4 d\mathbf{p}_1 \frac{pc}{kT}, \quad (11.5)$$

или после элементарного интегрирования

$$\frac{1}{t_M} = \frac{(u+2)^4 6!}{(48\hbar^2\rho_0)^2 c \gamma (2\pi\hbar)^3} \left(\frac{kT}{c} \right)^6 p. \quad (11.6)$$

Тот факт, что фононы с импульсом p_1 обладают большой энергией, учитывается в (11.5) автоматически, поскольку при интегрировании по $d\mathbf{p}_1$ существенную роль играют фононы с энергией порядка $6kT$.

Перейдём к случаю релаксации фононов с большой энергией. В этом случае предположение о том, что импульсы фононов связаны соотношением

$$p_1 \ll p, \quad (11.7)$$

позволяет упростить выражение усреднённой по углам вероятности рассеяния фонона фононом. Заменяя в выражении (7.11) p_1 на p , получаем

$$\sigma(p, p_1) = \frac{\pi(u+2)^4 p^4}{(96\pi\hbar^2\rho_0 c)^2 \gamma}. \quad (11.8)$$

*) Интегрирование по $d\mathbf{p}_1$ с нулевым нижним пределом приводит к некоторой ошибке, которая, однако не существенна, поскольку наши результаты имеют приближённый характер.

Совершенно аналогично случаю фононов с малой энергией находим два времени релаксации t_B фононов с большой энергией соотношение

$$\frac{1}{t_B} = (2\pi\hbar)^{-3} \int n^{-1} (n_1 + 1) n' n'_1 c \sigma(p, p_1) dp_1, \quad (11.9)$$

которое совпадает с выражением (11.4). Такое совпадение является естественным, поскольку при выводе соотношения (11.4) нигде не использовалось предположение о величине энергии релаксирующих фононов. Воспользуемся теперь предположением о малости импульса и, полагая функции распределения фононов n , n' и n'_1 малыми по сравнению с единицей, упростим комбинацию из функций распределения, входящую в выражение (11.9). Имеем *)

$$n^{-1} n' n'_1 (n_1 + 1) \cong n_1 (n_1 + 1). \quad (11.10)$$

Подставим (11.8) и (11.10) в выражение (11.9); имеем

$$\frac{1}{t_B} = (2\pi\hbar)^{-3} p^4 \frac{\pi (u + 2)^4}{(96\pi\hbar^2 \rho_0)^2 c \gamma} \int n_1 (n_1 + 1) dp_1. \quad (11.11)$$

Наконец, после элементарного интегрирования находим

$$\frac{1}{t_B} = \frac{(u + 2)^4 (kT/c)^3 (\pi^3/3) p^4}{(48\hbar^2 \rho_0)^2 c \gamma (2\pi\hbar)^3}. \quad (11.12)$$

Тот факт, что импульс p_1 является малым, учитывается в выражении (11.11) автоматически, поскольку в стоящем там интеграле существенную роль играют импульсы порядка $2kT$. С помощью численных значений параметров, входящих в формулы (11.6) и (11.12), вычислим коэффициенты в этих выражениях. В результате получаем для времени релаксации фононов с малой энергией

$$\frac{1}{t_M} \approx 2 \cdot 10^7 T^7 x \quad (11.13)$$

и для фононов с большой энергией:

$$\frac{1}{t_B} \approx 10^5 \cdot T^7 x^4. \quad (11.14)$$

Здесь величина x связана с энергией фонона соотношением $\varepsilon = xkT$.

Для определения времени релаксации фононов, обладающих произвольной энергией, можно подобрать интерполяционную формулу, которая в обоих предельных случаях переходила бы в полученные (11.13) и (11.14). Следующая формула удовлетворяет этому условию:

$$\frac{1}{t_\phi} = 10^5 \cdot T^7 \cdot x (x + 6)^3. \quad (11.15)$$

*) Предположение о малости функций n , n' , n'_1 эквивалентно условию $p, p', p'_1 \gg kT/c$.

Рассеяние фононов фононами не приводит к существенному изменению импульсов рассеянных фононов, но зато этот процесс, как уже отмечалось, обеспечивает установление равновесия по энергиям в фононном газе. Вычисленное время релаксации $1/t_{\text{ф}}$ характеризует скорость установления такого равновесия в фононном газе.

III. КИНЕТИЧЕСКИЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ ГЕЛИЯ II

Подробный анализ кинетического уравнения для элементарных возбуждений в гелии II позволил выяснить вопрос о кинетических коэффициентах гелия II. При этом обнаружилось, что гелий II характеризуется коэффициентом первой вязкости и тремя коэффициентами второй вязкости. Кроме того, в гелии II имеется ещё один кинетический коэффициент, аналог коэффициента теплопроводности для обычных тел. Указанный коэффициент связывает градиент температуры с потоком тепла.

Рассмотрение вопроса начнём с анализа кинетического уравнения для элементарных возбуждений в гелии II. Такой анализ позволит нам получить уравнения гидродинамики гелия II и общие выражения для потоков энергии и импульса.

12. Кинетическое уравнение для элементарных возбуждений в гелии II²⁹

Кинетическое уравнение, определяющее функцию распределения n элементарных возбуждений в гелии II, может быть записано в виде уравнения непрерывности в пространстве координат $\mathbf{r}$ и импульсов $\mathbf{p}$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial n \mathbf{r}}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\partial n \mathbf{p}}{\partial \mathbf{p}} = I(n). \quad (12.1)$$

$I(n)$ — интеграл столкновений, конкретный вид которого в данном случае нас не интересует.

Скорость $\dot{\mathbf{r}}$ и сила $\dot{\mathbf{p}}$ согласно уравнению Гамильтона — Якоби выражаются через гамильтониан элементарного возбуждения H .

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \quad \dot{\mathbf{p}} = - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}}. \quad (12.2)$$

Подставим (12.2) в (12.1), раскрывая производные от произведений $n \mathbf{r}$ и $n \mathbf{p}$, перепишем (12.1) в виде

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial n}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial n}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}} = I(n). \quad (12.3)$$

Пусть в гелии II происходит сверхтекучее движение со скоростью $\mathbf{v}_s$. Гамильтониан H равен тогда

$$H = \varepsilon(p) + \mathbf{p} \mathbf{v}_s, \quad (12.4)$$

где $\varepsilon(p)$ — энергия возбуждения в движущейся со скоростью $\mathbf{v}_s$ системе отсчёта.

Уравнения движения гелия II. Умножим левую и правую части уравнения (12.3) на i -компоненту импульса p_i и проинтегрируем их по всему p -пространству. Благодаря закону сохранения импульса для всей системы интеграл от правой части равен нулю

$$\int p_i I(n) d\tau_p = 0. \quad (12.5)$$

Таким образом, имеем

$$\frac{\partial}{\partial t} \int n p_i d\tau_p + \int p_i \frac{\partial n}{\partial r_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} d\tau_p - \int p_i \frac{\partial n}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial r_k} d\tau_p = 0.$$

Далее путем несложного преобразования находим:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int n p_i d\tau_p + \frac{\partial}{\partial r_k} \int n p_i \frac{\partial H}{\partial p_k} d\tau_p + \int n \frac{\partial H}{\partial r_i} d\tau_p = 0. \quad (12.6)$$

Подставив сюда выражение (12.4) для H и для краткости обозначив интегрирование по p -пространству чертой над соответствующими выражениями, имеем

$$\frac{\partial}{\partial t} \overline{n p_i} + \frac{\partial}{\partial r_k} \overline{n p_i \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial p_k} + v_{sk} \right)} + n \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial r_i} + p_k \frac{\partial v_{sk}}{\partial r_i} \right) = 0. \quad (12.7)$$

Уравнение (12.7) является одним из уравнений движения жидкого гелия II. Оно определяет ускорение относительного движения нормальной и сверхтекучей части гелия II. Это следует непосредственно из того, что $\overline{n p}$ есть полный импульс возбуждений в той системе отсчёта, где отсутствует сверхтекучее движение (сверхтекучая часть жидкости покоится).

Полный импульс единицы объёма гелия II выражается через импульс возбуждений $\overline{n p}$ в системе отсчёта, движущейся со скоростью $\mathbf{v}_s$, с помощью соотношения $\mathbf{j} = \overline{n p} + \rho \mathbf{v}_s$. Производная по времени от полного импульса, как следует из общего закона сохранения энергии и импульса, равна расходимости некоторого симметричного тензора Π_{ik} . Тензор потока импульса Π_{ik} в неподвижной системе отсчёта выразим через его значение π_{ik} в системе отсчёта, движущейся со скоростью $\mathbf{v}_s$ *)

$$\Pi_{ik} = \pi_{ik} + v_{sk} \overline{n p_i} + v_{si} \overline{n p_k} + \rho v_{si} v_{sk}; \quad (12.8)$$

*) Соотношение, связывающее значения тензора потока импульса в неподвижной системе отсчёта (Π_{ik}) и в системе, движущейся с некоторой скоростью $\mathbf{v}$ (π_{ik}), может быть легко получено в случае классической гидродинамики, где вид тензора Π_{ik} известен. Тензор в классической гидродинамике записывается в виде

$$\Pi_{ik} = \rho u_i u_k + \delta_{ik} p$$

($\mathbf{u}$ — скорость жидкости, p давление). Выразим скорость жидкости в неподвижной системе отсчёта через скорость жидкости $\mathbf{u}'$ в системе отсчёта, движущейся со скоростью $\mathbf{v}$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}' + \mathbf{v}.$$

итак,

$$\frac{\partial}{\partial t} \overline{np_i} + \frac{\partial}{\partial t} \rho v_{si} + \frac{\partial}{\partial r_k} (\pi_{ik} + v_{sk} \overline{np_i} + v_{si} \overline{np_k} + \rho v_{si} v_{sk}) = 0. \quad (12.9)$$

Вычтем из (12.9) уравнение (12.7) и воспользуемся уравнением непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r_k} (\overline{np_k} + \rho v_{sk}) = 0. \quad (12.10)$$

В результате получаем

$$\rho \frac{\partial v_{si}}{\partial t} + \rho v_{sk} \frac{\partial v_{si}}{\partial r_k} + \frac{\partial}{\partial r_k} \pi_{ik} - n \frac{\partial \varepsilon}{\partial r_i} - \frac{\partial}{\partial r_k} \overline{np_i} \frac{\partial \varepsilon}{\partial p_k} = 0. \quad (12.11)$$

В отсутствии внешнего поля производная $\frac{\partial \varepsilon}{\partial r_i}$ равна $\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial r_i}$. Из условия $\text{rot } \mathbf{v}_s = 0$ следует требование, чтобы сумма последних трёх членов в (12.11) была произведением плотности ρ на градиент некоторой функции. Кроме того, совершенно очевидно, что тензор π_{ik} при абсолютном нуле в отсутствии возбуждений должен быть равен $p_0 \delta_{ik}$ (p_0 — давление жидкого гелия II без возбуждений).

Эти требования однозначным образом определяют вид тензора π_{ik}

$$\pi_{ik} = \overline{np_i} \frac{\partial \varepsilon}{\partial p_k} + \delta_{ik} n \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \rho + \delta_{ik} p_0. \quad (12.12)$$

Давление p_0 выражается через энергию E_0 и потенциал μ_0 ($T=0$)

$$p_0 = -E_0 + \rho \mu_0.$$

Отсюда следует

$$\frac{\partial p_0}{\partial r_i} = \rho \frac{\partial \mu_0}{\partial r_i}. \quad (12.13)$$

Подставим выражение (12.12) для π_{ik} в (12.11), учитывая (12.13) получим

$$\rho \frac{\partial v_{si}}{\partial t} + \rho v_{sk} \frac{\partial v_{si}}{\partial r_k} + \rho \frac{\partial}{\partial r_i} n \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} + \rho \frac{\partial \mu_0}{\partial r_i} = 0. \quad (12.14)$$

После подстановки этого выражения для $\mathbf{u}$ в приведенную выше формулу для Π_{ik} получаем

$$\Pi_{ik} = \rho v_i v_k + \rho u_i' v_k + \rho u_k' v_i + \rho (u_i' u_k + p \delta_{ik}).$$

Обозначив импульс единицы объема жидкости в движущейся системе отсчёта буквой $\mathbf{p}$, окончательно находим искомое соотношение

$$\Pi_{ik} = \rho v_i v_k + p_i v_k + p_k v_i + \pi_{ik}.$$

Естественно, что полученная формула преобразования тензора Π_{ik} сохраняет свой вид и в гидродинамике гелия II.

Опустив общий множитель ρ в (12.14), окончательно находим

$$\frac{\partial v_s}{\partial t} + \nabla \left\{ \mu_0 + n \overline{\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho}} + \frac{v_s^2}{2} \right\} = 0. \quad (12.15)$$

Полученное уравнение есть уравнение сверхтекучего движения. Полный термодинамический потенциал μ согласно (12.15) равен

$$\mu = \mu_0 + \int n \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} d\tau_p. \quad (12.16)$$

Второй член (12.16) обязан вкладу возбуждений в термодинамический потенциал μ .

Вместо уравнения (12.7) иногда удобно пользоваться уравнением движения (12.9), которое после подстановки выражения (12.12) для тензора π_{ik} приобретает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\overline{np_i} + \rho v_{si}) + \frac{\partial}{\partial r_k} \left\{ \overline{np_i \frac{\partial \varepsilon}{\partial p_k}} + \delta_{ik} n \overline{\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho}} \rho + \right. \\ \left. + \delta_{ik} p_0 + \overline{np_i v_{sk}} + \overline{np_k v_{si}} + \rho v_{si} v_{sk} \right\} = 0. \end{aligned} \quad (12.9')$$

Закон сохранения энергии. Энергия единицы объема жидкого гелия II E в неподвижной системе отсчёта согласно известным формулам преобразований связана с внутренней энергией E_b в системе отсчёта, движущейся со скоростью $\mathbf{v}_s$, соотношением

$$E = \rho \frac{v_s^2}{2} + \mathbf{v}_s n \mathbf{p} + E_b. \quad (12.17)$$

Продифференцируем по времени первые два члена в (12.17), представляющие собой кинетическую энергию гелия (за вычетом энергии относительного движения нормальной и сверхтекучей частей), и воспользуемся уравнениями движения (12.7), (12.15) и уравнением непрерывности (12.10), имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} E_k = \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \frac{v_s^2}{2} + \mathbf{v}_s n \mathbf{p} \right) = \\ = - (\rho v_{si} + \overline{np_i}) \frac{\partial}{\partial r_i} \left(\mu_0 + n \overline{\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho}} + \frac{v_s^2}{2} \right) - \frac{v_s^2}{2} \frac{\partial}{\partial r_i} (\rho v_{si} + \overline{np_i}) - \\ - v_{si} \frac{\partial}{\partial r_k} \overline{np_i} \left(n \overline{\frac{\partial \varepsilon}{\partial p_k}} + v_{sk} \right) - v_{si} \left(n \overline{\frac{\partial \varepsilon}{\partial r_i}} + p_k \overline{\frac{\partial v_{sk}}{\partial r_i}} \right). \end{aligned} \quad (12.18)$$

Найдём теперь производную по времени от внутренней энергии гелия $E_b = n\varepsilon$. Для этого умножим левую и правую части кинетического уравнения (12.3) на ε и проинтегрируем их по всему $\mathbf{p}$ -пространству. Интеграл от правой части $\int I(n) \varepsilon d\tau_p$ при этом равен нулю согласно закону сохранения энергии. В результате получаем

$$\varepsilon \frac{\partial n}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial n}{\partial r_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} - \varepsilon \frac{\partial n}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial r_k} = 0. \quad (12.19)$$

Далее путём несложных преобразований полученного уравнения с использованием теоремы Гаусса — Остроградского находим

$$\frac{\partial}{\partial t}(\overline{n\varepsilon}) + \frac{\partial}{\partial r_k} \overline{\varepsilon n \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial p_k} + v_{sk} \right)} - \overline{v_{sk} n \frac{\partial \varepsilon}{\partial r_k}} + \\ + n \frac{\partial \varepsilon}{\partial p_k} p_i \frac{\partial v_{si}}{\partial r_k} - n \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (12.20)$$

Таким образом, имеем:

$$\frac{\partial}{\partial t} E_B = - \frac{\partial}{\partial r_k} \overline{\varepsilon n \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial p_k} + v_{sk} \right)} + \overline{v_{sk} n \frac{\partial \varepsilon}{\partial r_k}} - \\ - n \frac{\partial \varepsilon}{\partial p_k} p_i \frac{\partial v_{si}}{\partial r_k} + \frac{\partial \rho}{\partial t} n \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho}. \quad (12.21)$$

Производная от суммы кинетической и внутренней энергий гелия II согласно (12.13) и (12.21) равна

$$\frac{\partial}{\partial t} (E_k + E_B) = - \frac{v_s^2}{2} \frac{\partial}{\partial r_k} (\overline{np_k} + \rho v_{sk}) - v_{si} \frac{\partial v_{sk}}{\partial r_i} \overline{np_k} - \\ - \rho v_{sk} \frac{\partial}{\partial r_k} \frac{v_s^2}{2} - \overline{np_k} \frac{\partial}{\partial r_k} \left(n \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} + \mu_0 \right) - \rho v_{sk} \frac{\partial}{\partial r_k} \left(n \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} + \mu_0 \right) - \\ - v_{sk} \frac{\partial}{\partial r_i} \overline{np_k \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial p_i} + v_{si} \right)} - v_{sk} \frac{\partial v_{si}}{\partial r_k} \overline{np_i} - n \frac{\partial \varepsilon}{\partial r_k} v_{sk} + \\ + n \frac{\partial \varepsilon}{\partial r_k} v_{sk} - \frac{\partial}{\partial r_k} \overline{\varepsilon n \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial p_k} + v_{sk} \right)} + \frac{\partial v_{si}}{\partial r_k} n \frac{\partial \varepsilon}{\partial p_k} p_i - \frac{\partial \rho}{\partial t} n \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho}.$$

Отсюда после преобразований с использованием уравнения (12.10) получаем закон сохранения энергии, записанный в форме уравнения непрерывности для полной энергии

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial E_k}{\partial t} + \frac{\partial E_B}{\partial t} + \mu_0 \frac{\partial \rho}{\partial t} = \\ = - \frac{\partial}{\partial r_k} \left\{ (\overline{np_k} + \rho v_{sk}) \left(\mu_0 + n \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} + \frac{v_s^2}{2} \right) + n H \frac{\partial}{\partial p_k} H \right\}. \quad (12.22)$$

Третий член в левой части (12.22) характеризует изменение энергии жидкого гелия II без возбуждений. Поток энергии $\mathbf{Q}$ в гелии II согласно (12.22) равен

$$\mathbf{Q} = (\overline{np} + \rho \mathbf{v}_s) \left(\mu_0 + n \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} + \frac{v_s^2}{2} \right) + n H \frac{\partial}{\partial p_k} H \quad (12.23) \\ (\mathbf{j} = \overline{n\mathbf{p}} + \rho \mathbf{v}_s).$$

Уравнения (12.7), (12.10), (12.15) вместе с уравнением (12.22) представляют собой полную систему гидродинамических уравнений для гелия II. Обычно вместо уравнения непрерывности для энергии (12.22) пишут уравнение непрерывности для энтропии, вытекающее из (12.23) и термодинамических тождеств.

13. Кинетические коэффициенты²⁹

Равновесная функция распределения для возбуждений в гелии II, в котором имеют место равномерное нормальное движение со скоростью $\mathbf{v}_n$ и сверхтекучее движение со скоростью $\mathbf{v}_s$ имеет вид (статистика Бозе)

$$n_0 = \left[e^{\frac{H - \mathbf{p}\mathbf{v}_n}{kT} - 1} \right]^{-1} = \left[e^{\frac{\varepsilon + \mathbf{p}\mathbf{v}_s - \mathbf{p}\mathbf{v}_n}{kT} - 1} \right]^{-1}. \quad (13.1)$$

Равновесная функция распределения (13.1) удовлетворяет кинетическому уравнению, обращая правую часть его в нуль. В случае отклонения системы возбуждений в гелии II от равновесия распределение возбуждений определяется иной функцией, вид которой в общем случае не может быть указан, так как кинетическое уравнение в общем виде не решается. Задача упрощается для случая, когда пространственные производные от величин, определяющих состояние системы, малы, т. е. сами эти величины мало меняются на расстояниях, характеризующих размеры системы. В этом случае функция распределения мало отличается от равновесной функции n_0 . Это обстоятельство позволяет линеаризовать кинетическое уравнение. Для этого в левую часть кинетического уравнения подставляем равновесную функцию n_0 , при этом сохраняем в ней после дифференцирования только линейные по пространственным производным члены. Правая часть кинетического уравнения (интеграл столкновений) разлагается в ряд по разности $(n - n_0)$. Таким образом, получается линейное интегральное уравнение, определяющее разность $(n - n_0)$ в виде, пропорциональном пространственным производным от величин, характеризующих состояние. Найденные значения $n - n_0$ позволяют вычислить диссипацию энергии в неравновесной системе и определить вид кинетических коэффициентов.

Выясним в общем виде свойства кинетических коэффициентов в гелии II.

Подставим функцию распределения n_0 в левую часть кинетического уравнения. При этом наряду с малостью пространственных производных будем считать малой разность скоростей $\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s$. Последнее обстоятельство несколько не ограничивает задачу, поскольку разность скоростей $(\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)$ должна быть мала по сравнению со скоростью звука в гелии II. Как известно, сверхтекучесть нарушается значительно раньше, чем этот предел может быть достигнут. Выпишем в отдельности каждый из членов, содержащихся в левой части кинетического уравнения*):

$$\frac{\partial n_0}{\partial t} = n' \left\{ \frac{1}{kT} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - \mathbf{p} \frac{\partial \mathbf{v}_n}{\partial t} + \mathbf{p} \frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} \right) - \frac{1}{kT^2} (\varepsilon - \mathbf{p}\mathbf{v}_n + \mathbf{p}\mathbf{v}_s) \frac{\partial T}{\partial t} \right\}. \quad (13.2)$$

*) Штрихом обозначаем дифференцирование функции по аргументу

$$\frac{\varepsilon - \mathbf{p}\mathbf{v}_n + \mathbf{p}\mathbf{v}_s}{kT}; \quad n' = -n(n+1).$$

Выберем в качестве независимых переменных плотность ρ и энтропию S .

Согласно уравнениям гидродинамики временные производные выражаются через пространственные в линейном приближении следующим образом:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial t} + \operatorname{div} S \mathbf{v}_n = 0, \quad (13.3)$$

$$\rho_n \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s) = -S \nabla T \quad (13.4)$$

($\mathbf{j} = \rho_n \mathbf{v}_n + \rho_s \mathbf{v}_s$ — поток гелия II).

С помощью (13.4) преобразуем (13.2) к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_0}{\partial t} = & \frac{n'}{kT} \left\{ \operatorname{div} (\mathbf{j} - \rho \mathbf{v}_n) \left[\frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial \rho} (\varepsilon - \rho \mathbf{v}_n + \rho \mathbf{v}_s) - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \right] + \right. \\ & + \operatorname{div} \mathbf{v}_n \left[\frac{1}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial \rho} \rho + \frac{\partial T}{\partial S} S \right) (\varepsilon - \rho \mathbf{v}_n + \rho \mathbf{v}_s) - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \rho \right] + \\ & \left. + \frac{ST}{\rho_n} \rho \frac{\nabla T}{T} - (\mathbf{v}_n \nabla \varepsilon) + \frac{1}{T} (\mathbf{v}_n \nabla T) (\varepsilon - \rho \mathbf{v}_n + \rho \mathbf{v}_s) \right\}. \quad (13.5) \end{aligned}$$

Далее имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial H}{\partial \rho} - \frac{\partial n}{\partial \rho} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}} = & \frac{n'}{kT} \left\{ - \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} + \mathbf{v}_s \right) \nabla (\rho \mathbf{v}_n) - \right. \\ & \left. - \frac{\nabla T}{T} (\varepsilon - \rho \mathbf{v}_n + \rho \mathbf{v}_s) \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} - \mathbf{v}_n + \mathbf{v}_s \right) + \mathbf{v}_n \nabla (\varepsilon + \rho \mathbf{v}_s) \right\}. \quad (13.6) \end{aligned}$$

Подставим (13.5) и (13.6) в левую часть кинетического уравнения (12.1); собрав подобные члены получаем

$$\begin{aligned} \frac{n'}{kT} \left\{ \left[\frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial \rho} (\varepsilon - \rho \mathbf{v}_n + \rho \mathbf{v}_s) - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \right] \operatorname{div} (\mathbf{j} - \rho \mathbf{v}_n) + \right. \\ + \left[\frac{1}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial \rho} \rho + \frac{\partial T}{\partial S} S \right) (\varepsilon - \rho \mathbf{v}_n + \rho \mathbf{v}_s) - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \rho \right] \operatorname{div} \mathbf{v}_n + \\ + \frac{\nabla T}{T} \left[\rho \frac{ST}{\rho_n} - (\varepsilon - \rho \mathbf{v}_n + \rho \mathbf{v}_s) \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} - \mathbf{v}_n + \mathbf{v}_s \right) \right] - \\ \left. - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \nabla (\rho \mathbf{v}_n) - \mathbf{v}_s \nabla (\rho \mathbf{v}_s) + \mathbf{v}_n \nabla (\rho \mathbf{v}_s) \right\} = I(n). \quad (13.7) \end{aligned}$$

Дважды последними членами в фигурной скобке в (13.7) можно пренебречь, так как их разность, как легко видеть, порядка $(\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)^2$. Того же порядка $(\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)^2$ оказываются все члены, содержащие множитель $\rho \mathbf{v}_n - \rho \mathbf{v}_s$. Ими мы также пренебрежем. Окончательно имеем

$$\begin{aligned} \frac{n'}{kT} \left\{ \left(\frac{\varepsilon}{T} \frac{\partial T}{\partial \rho} - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \right) \operatorname{div} (\mathbf{j} - \rho \mathbf{v}_n) + \left[\frac{\varepsilon}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial \rho} \rho + \frac{\partial T}{\partial S} S \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \rho \right] \operatorname{div} \mathbf{v}_n + \frac{\nabla T}{T} \left[\rho \frac{ST}{\rho_n} - \varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \right] - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \nabla (\rho \mathbf{v}_n) \right\} = I(n). \quad (13.8) \end{aligned}$$

Решение уравнения (13.8) может быть представлено в виде

$$\begin{aligned}
 n - n_0 = & \frac{n'}{kT} \left\{ A \left[\frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial \rho} \varepsilon - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \right] \operatorname{div} (\mathbf{j} - \rho \mathbf{v}_n) + \right. \\
 & + A \left[\frac{\varepsilon}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial \rho} \rho + \frac{\partial T}{\partial S} S \right) - \frac{1}{3} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \mathbf{p} - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \rho \right] \operatorname{div} \mathbf{v}_n + \\
 & + B \frac{\nabla T}{T} \left[\mathbf{p} \frac{ST}{\rho n} - \varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \right] + \\
 & \left. + C \left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho_i} p_k - \frac{1}{3} \delta_{ik} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} p \right] \left(\frac{\partial v_{nk}}{\partial r_i} + \frac{\partial v_{ki}}{\partial r_k} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_{kl}}{\partial r_l} \right) \right\} \quad (13.9)
 \end{aligned}$$

где A , B и C — некоторые функции состояния, вид которых определяется характером взаимодействия возбуждений*). Коэффициент A является общим для всех членов скалярного типа, коэффициент B для векторных (члены, пропорциональные $\mathbf{p}$) и, наконец, коэффициент C для тензорных. Из последнего члена в фигурной скобке (13.8) $\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \nabla (\rho \mathbf{v}_n)$ мы выделяем содержащиеся в нём члены вида $\operatorname{div} \mathbf{v}_n$, а остающуюся часть симметризуем.

Результат (13.9) позволяет нам сделать предварительные выводы о типах кинетических коэффициентов в гелии II. Члены в (13.9), пропорциональные $\operatorname{div} (\mathbf{j} - \rho \mathbf{v}_n)$ и $\operatorname{div} \mathbf{v}_n$, будут ответственны за вторую вязкость; члены, содержащие ∇T , определяют коэффициент, аналогичный теплопроводности и, наконец, члены, содержащие $\frac{\partial v_{nk}}{\partial r_i} + \frac{\partial v_{ki}}{\partial r_k} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_{kl}}{\partial r_l}$, определяют первую вязкость, связанную нормальному движению. Обращаем внимание на любопытный факт, что первой вязкости, связанной со сверхтекучим течением, нет, хотя логически возможность такого эффекта допускается, поскольку условие сверхтекучести состоит только в требовании $\operatorname{rot} \mathbf{v}_s = 0$.

Выясним вид дополнительных членов в уравнениях гидродинамики, обязанных неравновесным условиям. При этом следует иметь в виду условия

$$\int \mathbf{p} (n - n_0) d\tau_{\mathbf{p}} = 0, \quad \int \varepsilon (n - n_0) d\tau_{\mathbf{p}} = 0, \quad (13.10)$$

вытекающие из требования, состоящего в том, что неравновесная

*) Функции A , B и C , вообще говоря, зависят от импульса $\mathbf{p}$ элементарного возбуждения. Однако во всех случаях решения кинетического уравнения для ротонов указанные коэффициенты получаются независимыми от импульса $\mathbf{p}$ величинами. Это объясняется следующим образом. При вычислении интегралов столкновений для ротонов существенным оказывается лишь процесс рассеяния ротонов ротонами, вероятность которого согласно (§ 9) не зависит от энергии сталкивающихся ротонов. Поэтому в этом случае интеграл столкновений $I(n)$ в конечном счёте записывается в виде $\operatorname{const} (n - n_0)$.

функция n должна приводить к таким же значениям полной энергии и полного импульса, какие даёт равновесная функция.

В общем случае первое из условий (13.10) налагает ограничение на коэффициент B , находящийся при решении кинетического уравнения. Оно выполняется автоматически, если величина коэффициента не зависит от импульса $\mathbf{p}$. Тогда согласно (3.4), (4.4) и (13.9) имеем

$$B \int -\frac{\nabla T}{T} \left(\mathbf{p} \frac{ST}{\rho n} - \varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}} \right) \frac{n'}{kT} \mathbf{p} d\tau_{\mathbf{p}} = \\ = B \frac{\nabla T}{3kT^2} \left\{ \frac{ST}{\rho n} \int p^2 n' d\tau_{\mathbf{p}} - \int n' \varepsilon \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}} \mathbf{p} \right) d\tau_{\mathbf{p}} \right\} = 0. \quad (13.11)$$

Поскольку согласно (13.10) величина импульса не изменяется, то в уравнении непрерывности (2.10) дополнительные члены не возникают.

В уравнении движения (12.9) возникают в первом приближении дополнительные члены

$$\frac{\partial}{\partial r_k} \left\{ \int (n - n_0) p_l \frac{\partial \varepsilon}{\partial p_k} d\tau_{\mathbf{p}} + \delta_{lk} \int (n - n_0) \frac{\partial \varepsilon}{\partial p} p d\tau_{\mathbf{p}} \right\}. \quad (13.12)$$

Подставим (13.9) в интегралы (13.12), после несложных преобразований, учитывая свойства симметрии указанных интегралов, получаем

$$\frac{\partial}{\partial r_l} \left\{ \operatorname{div} (\mathbf{j} - \rho \mathbf{v}_n) \int A \frac{n'}{kT} \left(\frac{\varepsilon}{T} \frac{\partial T}{\partial p} - \frac{\partial \varepsilon}{\partial p} \right) \left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial p} p + \frac{1}{3} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}} \mathbf{p} \right] d\tau_{\mathbf{p}} + \right. \\ \left. + \operatorname{div} \mathbf{v}_n \int A \frac{n'}{kT} \left[\frac{\varepsilon}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial p} p + \frac{\partial T}{\partial S} S \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\partial \varepsilon}{\partial p} p - \frac{1}{3} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}} \mathbf{p} \right] \left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial p} p + \frac{1}{3} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}} \mathbf{p} \right] d\tau_{\mathbf{p}} \right\} + \\ + \frac{\partial}{\partial r_k} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_{nl}}{\partial r_k} + \frac{\partial v_{nk}}{\partial r_l} - \frac{2}{3} \delta_{lk} \frac{\partial v_{nl}}{\partial r_l} \right) \int C \frac{n'}{5kT} \left[\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial p} \right)^2 p^2 - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}} \mathbf{p} \right)^2 \right] d\tau_{\mathbf{p}} \right\}. \quad (13.13)$$

Уравнение (12.9'), таким образом, приобретает вид

$$\frac{\partial j_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r_k} \left\{ -\delta_{ik} \zeta_1 \operatorname{div} (\mathbf{j} - \rho \mathbf{v}_n) - \delta_{ik} \zeta_2 \operatorname{div} \mathbf{v}_n + \delta_{ik} p_0 + \right. \\ \left. + n_0 p_i \frac{\partial \varepsilon}{\partial p_k} + \overline{n_k p_i v_{sl}} - \eta \left(\frac{\partial v_{ki}}{\partial r_k} + \frac{\partial v_{nk}}{\partial r_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_{kl}}{\partial r_l} \right) + \right. \\ \left. + \delta_{ik} n_0 \frac{\partial \varepsilon}{\partial p} p + \overline{v_{sk} n_0 p_i} + \rho v_{si} v_{sk} \right\} = 0. \quad (13.14)$$

Кинетические коэффициенты ζ_1 и ζ_2 , имеющие смысл коэффициентов

второй вязкости, согласно (13.13) равны

$$\zeta_1 = - \int A \frac{n'}{kT} \left(\frac{\varepsilon}{T} \frac{\partial T}{\partial \rho} - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \right) \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \rho + \frac{1}{3} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}} \mathbf{p} \right) d\tau_{\mathbf{p}}, \quad (13.15)$$

$$\begin{aligned} \zeta_2 = - \int A \frac{n'}{kT} \left[\frac{\varepsilon}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial \rho} \rho + \frac{\partial T}{\partial S} S \right) - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \rho - \frac{1}{3} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}} \mathbf{p} \right] \times \\ \times \left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \rho + \frac{1}{3} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}} \mathbf{p} \right] d\tau_{\mathbf{p}}. \end{aligned} \quad (13.16)$$

Коэффициент η есть коэффициент первой вязкости, согласно (13.13) он равен

$$\begin{aligned} \eta = - \frac{1}{2} \int C \frac{n'}{5kT} \left[\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \right)^2 \rho^2 - \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}} \mathbf{p} \right)^2 \right] d\tau_{\mathbf{p}} = \\ = - \frac{1}{5kT} \int C n' \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \right)^2 \rho^2 d\tau_{\mathbf{p}}. \end{aligned} \quad (13.17)$$

В уравнении сверхтекучего движения (12.15) в неравновесном случае возникает дополнительный член

$$\frac{\partial}{\partial r_i} \int (n - n_0) \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} d\tau_{\mathbf{p}}. \quad (13.18)$$

Подстановка в этот интеграл выражения (13.9) для разности $(n - n_0)$ подобно (13.13) даёт

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r_i} \left\{ \operatorname{div} (\mathbf{j} - \rho \mathbf{v}_n) \int A \frac{n'}{kT} \left(\frac{\varepsilon}{T} \frac{\partial T}{\partial \rho} - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} d\tau_{\mathbf{p}} + \right. \\ \left. + \operatorname{div} \mathbf{v}_n \int A \frac{n'}{kT} \left[\frac{\varepsilon}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial \rho} \rho + \frac{\partial T}{\partial S} S \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \rho - \frac{1}{3} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}} \mathbf{p} \right] \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} d\tau_{\mathbf{p}} \right\}. \end{aligned} \quad (13.19)$$

Таким образом уравнение сверхтекучего движения при наличии неравновесности приобретает вид

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{v}_s}{dt} + \nabla \left\{ \frac{v_s^2}{2} + \mu_0 + n \overline{\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho}} - \right. \\ \left. - \zeta_3 \operatorname{div} (\mathbf{j} - \rho \mathbf{v}_n) - \zeta_4 \operatorname{div} \mathbf{v}_n \right\} = 0. \end{aligned} \quad (13.20)$$

Коэффициенты ζ_3 и ζ_4 имеют смысл коэффициентов второй вязкости; согласно (13.19) они равны

$$\zeta_3 = \int - A \frac{n'}{3kT} \left(\frac{\varepsilon}{T} \frac{\partial T}{\partial \rho} - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} d\tau_{\mathbf{p}}, \quad (13.21)$$

$$\begin{aligned} \zeta_4 = - \int A \frac{n'}{3kT} \left(\frac{\varepsilon}{T} \frac{\partial T}{\partial \rho} \rho + \frac{\varepsilon}{T} \frac{\partial T}{\partial S} S - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \rho - \right. \\ \left. - \frac{1}{3} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}} \mathbf{p} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} d\tau_{\mathbf{p}}. \end{aligned} \quad (13.22)$$

Коэффициенты ζ_1 , ζ_2 , ζ_3 и ζ_4 не являются независимыми. Согласно принципу Онзагера, они связаны одним соотношением $\zeta_1 = \zeta_4$. Проще всего в справедливости указанного соотношения можно убедиться в том случае, когда A не зависит от импульса p . Согласно (13.15) и (13.22) имеем

$$\begin{aligned} \zeta_1 - \zeta_4 = & -A \int \frac{n'}{kT} \left\{ \frac{1}{3} \frac{\partial \varepsilon}{\partial p} p \left(\frac{\varepsilon}{T} \frac{\partial T}{\partial p} - \frac{\partial \varepsilon}{\partial p} \right) + \frac{\partial \varepsilon}{\partial p} p \left(\frac{\varepsilon}{T} \frac{\partial T}{\partial p} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\partial \varepsilon}{\partial p} \right) - \frac{\varepsilon}{T} \frac{\partial T}{\partial p} \frac{\partial \varepsilon}{\partial p} p - \frac{\varepsilon}{T} \frac{\partial T}{\partial S} S \frac{\partial \varepsilon}{\partial p} p + \frac{\partial \varepsilon}{\partial p} \frac{\partial \varepsilon}{\partial p} p + \right. \\ & \left. + \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial p} p \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial p} \right\} d\tau_p = A \int \frac{n'}{kT} \frac{S}{T} \frac{\partial T}{\partial S} \frac{\partial \varepsilon}{\partial p} \varepsilon d\tau_p + \\ & + A \int \frac{n'}{3kT} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial p} p \right) \frac{\varepsilon}{T} \frac{\partial T}{\partial p} d\tau_p. \quad (13.23) \end{aligned}$$

Согласно (3.4) второй интеграл в (13.23) равен $AS \frac{\partial T}{\partial p}$. В результате однократного интегрирования по частям соотношение (3.4) приобретает вид

$$S = \frac{1}{3T} \int n \frac{\partial}{\partial p} (\varepsilon p^3) \frac{1}{p^2} d\tau_p. \quad (13.24)$$

Продифференцируем это соотношение слева и справа по p при постоянной температуре T , имеем

$$\frac{\partial S}{\partial p} = \frac{1}{3T} \int \left\{ n' \frac{1}{kT} \frac{\partial \varepsilon}{\partial p} \frac{\partial}{\partial p} (\varepsilon p^3) + n \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial p} p^3 \right) \right\} \frac{1}{p^2} d\tau_p.$$

Интегрируя второй член по частям, находим

$$\frac{\partial S}{\partial p} = \frac{1}{kT^2} \int n' \frac{\partial \varepsilon}{\partial p} \varepsilon d\tau_p. \quad (13.25)$$

Первый интеграл в (13.23) согласно (13.25) равен

$$A \int \frac{n'}{kT} \varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial p} \left(\frac{\partial T}{\partial S} \frac{S}{T} \right) d\tau_p = -AS \left(\frac{\partial T}{\partial S} \right)_p \left(\frac{\partial S}{\partial p} \right)_T = AS \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_S.$$

Сумма же первого и второго интегралов в (13.23), таким образом, равна нулю, следовательно

$$\zeta_1 = \zeta_4. \quad (13.26)$$

Выясним, наконец, вид дополнительных членов в потоке энергии (13.17), возникающих при нарушении равновесия. Предварительно преобразуем второй член в выражении (12.23) для потока Q , член $nH \frac{\partial}{\partial p} H$. Разложим функцию распределения n в ряд по степеням $(n - n_0)$. Нулевой член, как уже указывалось, при этом обращается в нуль вследствие симметрии подинтегрального выражения в p -пространстве. Член первого порядка, которым мы и ограни-

чимся, равен

$$-\frac{1}{kT} \int n' \left(\frac{H}{kT} \right) (\rho \mathbf{v}_n) H \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} H d\tau_{\mathbf{p}}.$$

Далее, после интегрирования по частям получаем

$$\overline{nH \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} H} = \int n \left[H \mathbf{v}_n + (\rho \mathbf{v}_n) \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \right] d\tau_{\mathbf{p}}. \quad (13.27)$$

В искомом первом приближении дополнительные члены в потоке энергии согласно (12.23) и (13.27) равны

$$(\overline{n\rho} + \rho \mathbf{v}_s) \int (n - n_0) \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}} d\tau_{\mathbf{p}} + \int (n - n_0) \left[H \mathbf{v}_n + (\rho \mathbf{v}_n) \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \right] d\tau_{\mathbf{p}}.$$

Подставим сюда выражение (13.9) для $(n - n_0)$; учитывая свойства симметрии полученных интегралов, подобно предыдущему находим

$$\begin{aligned} & (\overline{n_0 \mathbf{p}} + \rho \mathbf{v}_s) \left\{ \operatorname{div} (\mathbf{j} - \rho \mathbf{v}_n) \int A \left(\frac{\varepsilon}{T} \frac{\partial T}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}} \frac{n'}{kT} d\tau_{\mathbf{p}} + \right. \\ & + \operatorname{div} \mathbf{v}_n \int A \left(\frac{\varepsilon}{T} \frac{\partial T}{\partial \mathbf{p}} \rho + \frac{\varepsilon}{T} \frac{\partial T}{\partial S} S - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}} \rho - \frac{1}{3} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}} \mathbf{p} \right) \times \\ & \times \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}} \frac{n'}{kT} d\tau_{\mathbf{p}} \left. \right\} + \mathbf{v}_n \left\{ \operatorname{div} (\mathbf{j} - \rho \mathbf{v}_n) \int A \left(\frac{\varepsilon}{T} \frac{\partial T}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}} \right) \times \right. \\ & \times \left(\varepsilon + \frac{1}{3} \mathbf{p} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}} \right) \frac{n'}{kT} d\tau_{\mathbf{p}} + \operatorname{div} \mathbf{v}_n \int A \left(\frac{\varepsilon}{T} \frac{\partial T}{\partial \mathbf{p}} \rho + \frac{\partial T}{\partial S} \frac{\varepsilon}{T} S - \right. \\ & - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}} \rho - \frac{1}{3} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}} \mathbf{p} \left. \right) \frac{n'}{kT} \left(\varepsilon + \frac{1}{3} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}} \mathbf{p} \right) d\tau_{\mathbf{p}} + \\ & + \frac{\nabla T}{3T} \int B \varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}} \left(\mathbf{p} \frac{ST}{\rho n} - \varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}} \right) \frac{n'}{kT} d\tau_{\mathbf{p}} + \\ & + \frac{1}{2} \int C (\rho \mathbf{v}_n) \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \left(\rho_k \frac{\partial \varepsilon}{\partial p_i} - \frac{1}{3} \delta_{ik} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}} \mathbf{p} \right) \frac{n'}{kT} d\tau_{\mathbf{p}} \times \\ & \times \left(\frac{\partial v_{nk}}{\partial r_i} + \frac{\partial v_{ni}}{\partial r_k} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_{kl}}{\partial r_l} \right). \quad (13.28) \end{aligned}$$

Учтём теперь условие $\int \varepsilon (n - n_0) d\tau_{\mathbf{p}} = 0$ и определение коэффициентов второй вязкости (соотношения (13.15), (13.16), (13.21) и (13.22)) и коэффициента первой вязкости (13.17). Окончательно получаем выражение для дополнительных неравновесных членов в i -компоненте потока энергии в следующем виде:

$$\begin{aligned} & (j_i - \rho v_{ni}) [\zeta_3 \operatorname{div} (\mathbf{j} - \rho \mathbf{v}_n) + \zeta_4 \operatorname{div} \mathbf{v}_n] + \mathbf{v}_{ni} [\zeta_1 \operatorname{div} (\mathbf{j} - \rho \mathbf{v}_n) + \\ & + \zeta_2 \operatorname{div} \mathbf{v}_n] + \eta v_{nk} \left(\frac{\partial v_{nk}}{\partial r_i} + \frac{\partial v_{ni}}{\partial r_k} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_{kl}}{\partial r_l} \right) + \kappa \frac{\partial T}{\partial r_i}. \quad (13.29) \end{aligned}$$

Первые три члена в выражении (13.29) обязаны первой и второй вязкостям. Четвёртый же член определяет дополнительный поток энергии в гелии II, возникающий при наличии градиента темпера-

туры ∇T . Коэффициент κ — аналог коэффициента теплопроводности — согласно (13.28) равен

$$\kappa = - \frac{1}{3kT^2} \int B n' \varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial p} \left(p \frac{ST}{\rho_n} - \varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial p} \right) d\tau_p. \quad (13.30)$$

14. Теплопроводность гелия II^{30, 28}

При наличии градиента температуры в гелии II возникает макроскопическое движение. Скорости возникающих при этом нормального и сверхтекучего движений определяются уравнениями движения. Нормальное движение в гелии II представляет собой не что иное, как макроскопический потек тепла. Таким образом, градиент температуры в гелии II вызывает макроскопический поток тепла. Однако этим дело не ограничивается. Согласно (13.29) в этом случае возникает еще некоторый дополнительный поток, величина которого пропорциональна ∇T . Это явление аналогично теплопроводности в обычных жидкостях. Следует обратить внимание на то, что хотя по внешнему виду выражение для потока (13.29) совпадает с обычным выражением для потока тепла, связанного теплопроводности, тем не менее имеет место существенное отличие этих явлений. Легко видеть, что в чисто фоновом газе коэффициент κ , определённый соотношением (13.30), тождественно равен нулю. Действительно в этом случае

$$S_\Phi = \frac{4}{3} \frac{E_\Phi}{T}, \quad \rho_{n\Phi} = \frac{4}{3} \frac{E_\Phi}{c^2}, \quad \varepsilon = c\rho.$$

Подстановка этих значений в (13.30) обращает содержащийся под интегралом множитель

$$p \frac{ST}{\rho_n} - \varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial p}$$

в нуль. Только наличие в гелии II возбуждений другого типа — ротонов — обеспечивает отличное от нуля значение коэффициента κ .

Это обстоятельство указывает на своеобразность рассмотренного эффекта, который лишь условно может быть назван теплопроводностью. Коэффициент κ , который мы будем называть коэффициентом теплопроводности, складывается из двух частей: из части, связанной ротонам κ_p , и части, связанной фононам κ_Φ :

$$\kappa = \kappa_p + \kappa_\Phi. \quad (14.1)$$

Ротонная часть коэффициента теплопроводности (κ_p). Изменение числа ротонов в некотором фазовом объеме, если пренебречь процессами их испускания и поглощения (§ 10), будет происходить двойным путём: упругим рассеянием ротонов ротонами (§ 9); рассеянием ротонов фононами (§ 8).

Однако, как показывают несложные вычисления, процесс рассеяния ротонов фононами будет несущественным в теплопроводности по сравнению с упругим рассеянием ротонов ротонами вплоть до температур порядка $0,6-0,7^\circ \text{K}$.

Если учесть ещё и то обстоятельство, что ротонная часть коэффициента теплопроводности при температурах ниже 1°K становится несущественно малой по сравнению с фононной частью, то мы приходим к выводу о необходимости учитывать в кинетическом уравнении только рассеяние ротонов ротонами. Интеграл столкновений $I(n)$ для ротонов точно не может быть вычислен, поскольку характер взаимодействия ротонов друг с другом не известен. Если ограничиться, однако, выяснением только температурной зависимости коэффициента χ_p , то тогда задача упрощается. В этом случае интеграл столкновений сводится к

$$-\frac{n - n_0}{t}, \quad (14.2)$$

где t есть некоторое время по порядку величины, равное среднему времени t_p между соударениями ротонов. Время t_p вычислялось нами ранее в предположении, что взаимодействие ротонов носит δ -образный характер (§ 9):

$$t_p = \frac{h^4}{4P_0 |V_0|^2 N_p}. \quad (14.3)$$

Величина амплитуды v_0 , определяющей взаимодействие ротонов ($V = V_0 \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$), может быть найдена из опытных данных в вязкости гелия II. Согласно § 9

$$V_0 = 1,1 \cdot 10^{-38} \text{ эрг см}^3. \quad (14.4)$$

Точнее говоря, из опытных данных можно найти величину времени t . Если же отождествить это время с временем столкновения двух ротонов t_p , то тогда находим указанную выше величину V_0 . Такое отождествление возможно в том случае, если вероятность рассеяния ротонов ротонами имеет острый максимум при рассеянии на малые углы. Мы предположим, что это обстоятельство действительно имеет место. (В дальнейшем, мы увидим, что это предположение не влияет существенным образом на окончательный результат.) Тогда не только $t = t_p$, но и интеграл столкновений $I(n)$ в рассматриваемой задаче совпадает с интегралом столкновений в задаче о вязкости гелия II. Таким образом,

$$I(n) = -\frac{n - n_0}{t_p}. \quad (14.5)$$

Сравнив (14.5) с (13.9), замечаем, что введенный там коэффициент B просто равен $-t_p$. Учитывая это, согласно (13.30) имеем

$$\chi_p = t_p \frac{1}{3kT^2} \int n' \varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial p} \left(p \frac{ST}{\rho n} - \varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial p} \right) d\tau_p. \quad (14.6)$$

Распределение ротонов определяется функцией Больцмана

$$n = e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}; \quad (14.7)$$

энергия ротона ε равна

$$\varepsilon = \Delta + \frac{(p - P_0)^2}{2\mu}. \quad (14.8)$$

Интегрирование первого члена в (14.6) с учётом (2.4) даёт

$$-\frac{t_p}{3kT^2} \int n' \varepsilon^2 \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial p} \right) p \frac{ST}{\rho n} d\tau_p = \frac{STS_p}{\rho n} t_p. \quad (14.9)$$

(S_p — ротонная часть энтропии).

Интегрирование второго члена в (14.6) с функцией распределения (14.7) даёт

$$-\frac{t_p}{3kT^2} \int n' \varepsilon^2 \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial p} \right)^2 d\tau_p = \frac{\Delta^2 t_p N_p}{3\mu T}. \quad (14.10)$$

Таким образом, окончательно имеем

$$\chi_p = \frac{\Delta^2 t_p N_p}{3\mu T} \left\{ 1 - \frac{3ST^2 S_p \mu}{\rho n N_p} \right\}. \quad (14.11)$$

Подстановкой численных значений параметров в (14.9) и (14.10) убеждаемся в том, что второй член в (14.6) заметно превосходит первый при всех температурах. Поэтому с достаточной степенью точности имеем

$$\chi_p = -t_p \frac{1}{3kT^2} \int n' \varepsilon^2 \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial p} \right)^2 d\tau_p = \frac{\Delta^2 t_p N_p}{3\mu T}. \quad (14.12)$$

Ротонная часть коэффициента первой вязкости согласно (§ 16) равна

$$\eta_p = \frac{P_0^2 t_p N_p}{15\mu}. \quad (14.13)$$

Сравнивая (14.12) с (14.13), находим простую связь между χ_p и η_p

$$\chi_p = \frac{5\Delta^2}{P_0^2 T} \eta_p. \quad (14.14)$$

В справедливости соотношения (14.14) можно легко убедиться также сравнением (13.17) с (14.12).

Фононная часть коэффициента теплопроводности. Кинетическое уравнение, определяющее функцию распределения фононов n при наличии градиента температуры ∇T , согласно (13.7) имеет вид

$$\frac{n'}{kT} \cos \vartheta \frac{\partial T}{\partial x} \frac{1}{T} \left[p \frac{ST}{\rho n} - \varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial p} \right] = I(n). \quad (14.15)$$

Для простоты предполагаем, что направление ∇T совпадает с осью x . Угол ϑ образован импульсом p фонона с указанной осью.

Основные закономерности, характеризующие рассеяние фононов в гелии II, были выяснены в главе II. Необходимо рассмотреть при этом две области температур.

1. Область температур выше $0,9^\circ \text{K}$. В этой области температур рассеяние фононов происходит главным образом на ротонах. Рассеяние фононов фононами с изменением направления импульсов сталкивающихся фононов имеет небольшую вероятность по сравнению с указанным процессом. Столкновения же фононов с близкими направлениями импульсов имеют большую вероятность, но они не сопровождаются изменением направлений импульсов сталкивающихся фононов. Этот процесс обеспечивает установление энергетического равновесия между фононами, движущимися в заданном направлении, за времена, меньшие чем те, которые характеризуют рассеяние фононов на ротонах. Таким образом, фононы, движущиеся в каждом заданном направлении, можно характеризовать своей температурой T' , вообще не равной средней температуре фононного газа. Следует, наконец, ещё учесть возможные процессы неупругого рассеяния фононов фононами, сопровождающиеся изменением их числа. Наибольшую вероятность из процессов такого типа имеет процесс превращения двух фононов в три (пятифононный процесс), характеризующийся временами одного порядка с теми, которые определяют рассеяние фононов ротонами. Учитывая всё это, приходим к выводу, что функция распределения фононов, движущихся в заданном направлении, может быть представлена в виде

$$n = [e^{\alpha'} + pc/kT - 1]^{-1}, \quad (14.16)$$

где α' — некоторая функция направления импульса фонона, аналогичная в некотором смысле химическому потенциалу.

Отклонение значения функции распределения n от равновесного значения n_0 согласно (14.15) равно

$$n - n_0 = -n_0 (n_0 + 1) \left\{ \alpha' - \frac{pc}{kT} \frac{T' - T}{T} \right\} \quad (14.17)$$

(T — средняя температура фононного газа).

Интеграл столкновений $I(n)$ в правой части (14.15) складывается из четырёх частей: $I_I(n)$, связанной с рассеянием фононов ротонами (§ 8), $I_{II}(n)$, связанной с рассеянием фононов фононами (§ 7), $I_{III}(n)$, связанной с специфическим процессом рассеяния фононов фононами на малые углы (§ 11) и, наконец, $I_{IV}(n)$, характеризующей изменение числа фононов, происходящее благодаря пятифононному процессу (§ 10).

Полная энергия фононов, движущихся в заданном направлении, и их число при рассеянии на малые углы при четырёхфононном процессе сохраняются. Пятифононный процесс, происходящий также главным образом при малых углах между импульсами сталкиваю-

щихся фононов, не меняет энергии фононов, движущихся в заданном направлении, но существенным образом изменяет их число.

Проинтегрируем левую и правую части уравнения (14.15) по всем фононам и по всем возможным энергиям. Поскольку согласно сказанному интегралы

$$\int I_{III}(n) p^2 dp, \quad \int I_{III}(n) \varepsilon p^2 dp \quad \text{и} \quad \int I_{IV}(n) \varepsilon p^2 dp$$

равны нулю, имеем

$$\cos \vartheta \frac{\partial T}{\partial x} \frac{1}{kT^2} \int n' \left(p \frac{ST}{\rho n} - \varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial p} \right) p^2 dp = \int (I_I + I_{II}) p^2 dp + \int I_{IV} p^2 dp, \quad (14.18)$$

$$\cos \vartheta \frac{\partial T}{\partial x} \frac{1}{kT^2} \int n' \left(p \frac{ST}{\rho n} - \varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial p} \right) \varepsilon p^2 dp = \int (I_I + I_{II}) \varepsilon p^2 dp. \quad (14.19)$$

Величиной интеграла $I_{II}(n)$ в рассматриваемой области температур по сравнению с $I_I(n)$ пренебрегаем. Значение интеграла $\int I_{IV} p^2 dp$ вычислялось в (§ 10). Согласно (10.12) и (10.22) имеем

$$\frac{1}{kT} \int I_{IV}(n) d\tau_p = \alpha \Gamma_\Phi, \quad \Gamma_\Phi = 1,0 \cdot 10^{43} \cdot T^{11}.$$

Левая часть кинетического уравнения содержит угловую функцию вида $\cos \vartheta$, поэтому естественно представить зависимость параметров α и $\frac{T' - T}{T}$ от угла в этом же виде

$$\alpha'_\vartheta = \alpha \cos \vartheta, \quad \frac{T' - T}{T} = \beta \cos \vartheta. \quad (14.20)$$

2. Область температур ниже $0,9^\circ \text{K}$. В этой области температур наряду с рассеянием фононов ротонами существенным становится рассеяние фононов фононами. При этом пятифононный процесс оказывается более быстрым, чем указанные процессы рассеяния. Таким образом, фононы, движущиеся в заданном направлении, находятся в равновесии и могут поэтому описываться просто функцией распределения Планка, зависящей от температуры фононов в этом направлении

$$n = \left[e^{\frac{pc}{kT}} - 1 \right]^{-1}. \quad (14.21)$$

Отклонение функции распределения n от равновесного значения в этом случае определяется одним параметром $T' - T$:

$$n - n_0 = n_0 (n_0 + 1) \frac{pc}{kT} \frac{T' - T}{T}. \quad (14.21')$$

Значение этого параметра находится с помощью уравнения (14.19). Уравнение (14.18) в этом случае тривиализуется и сводится просто к условию $\alpha = 0$. Покажем теперь, что интеграл $I_{II}(n)$ равен тождественно нулю. Действительно, имеем

$$I_{II}(n) = \int d\sigma(\mathbf{p}, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}', \mathbf{p}_1') \times \\ \times \{n n_1 (n' + 1) (n'_1 + 1) - n' n'_1 (n + 1) (n_1 + 1)\} d\tau_{\mathbf{p}_1}. \quad (14.22)$$

Здесь: $\mathbf{p}, \mathbf{p}_1$ — импульсы фононов до рассеяния, $\mathbf{p}', \mathbf{p}_1'$ — импульсы фононов после рассеяния; n, n_1, n', n'_1 — соответствующие функции распределения, $d\sigma$ — дифференциальное эффективное сечение для рассеяния фонона с импульсом $\mathbf{p}_1$ фононом с импульсом $\mathbf{p}$. Подставим в (14.22) функции распределения, выраженные в виде сумм равновесных значений и добавок (14.21'). Поскольку левая часть кинетического уравнения (14.15) содержит угловую функцию только в виде множителя $\cos \vartheta$, то естественно, что величина $T' - T$ в заданном направлении зависит от угла ϑ , образованного направлением движения фонона с осью x таким же образом, т. е.

$$T' - T = \beta \cos \vartheta. \quad (14.23)$$

Учитывая это и сохраняя только линейные по β члены, получим

$$I_{II}(n) = \int d\sigma n_0 n_{01} (n'_0 + 1) (n'_{01} + 1) \frac{\beta c}{kT} \times \\ \times \{p \cos \vartheta + p \cos \vartheta_1 - p' \cos \vartheta' - p'_1 \cos \vartheta'_1\} d\tau_{\mathbf{p}_1}. \quad (14.24)$$

Индексом 0 обозначим равновесные функции распределения. Углы $\vartheta, \vartheta_1, \vartheta', \vartheta'_1$ образованы соответствующими импульсами фононов с осью x . Выражение, стоящее в фигурной скобке в (14.24), согласно закону сохранения импульса равно нулю. Таким образом, $I_{II}(n) = 0$, и утверждение доказано.

Помня сказанное ранее об относительной величине I_{II} и I_I в области температур выше $0,9^\circ \text{K}$, приходим к заключению, что при всех температурах теплопроводность определяется процессом рассеяния фононов ротонами.

После всего сказанного займемся вычислением интеграла столкновений $I_I(n)$, имеем:

$$I_I(n) = (2\pi\hbar)^3 \iint c d\sigma(p, \psi) \{N n (n' + 1) - n' N' (n + 1)\} d\mathbf{P}. \quad (14.25)$$

Здесь N и N' — функции распределения ротона до и после рассеяния; n и n' — функции распределения фонона до и после рассеяния; $\mathbf{P}$ — импульс падающего ротона; $d\sigma(p, \psi)$ — дифференциальное эффективное сечение для рассеяния фонона с импульсом p ротоном,

при котором направление движения фонона изменяется на угол ψ , равное согласно (8.20)

$$d\sigma = \left(\frac{P_0 p^3}{4\pi \hbar^2 \rho_0 c} \right)^2 \left\{ \frac{2}{3} (1 + \cos \psi) \cos^2 \psi + \frac{1}{105} \left(\frac{P_0}{\mu c} \right)^2 \times \right. \\ \times \left(1 + 8 \cos^2 \psi + \frac{8}{3} \cos^4 \psi \right) + \frac{2A}{15} \frac{P_0}{\mu c} \times \\ \left. \times (1 + 2 \cos^2 \psi) + A^2 \right\} d\sigma, \quad (14.26)$$

$d\sigma$ — элемент телесного угла,

$$A = \frac{\rho^2}{P_0 c} \left[\frac{\partial^2 \Delta}{\partial p^2} + \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial P_0}{\partial \rho} \right)^2 \right].$$

При написании фигурной скобки в (14.25) мы учли то обстоятельство, что ротоны подчиняются классической статистике, а фононы статистике Бозе. Распределение фононов и ротонов при наличии градиента температуры ∇T характеризуется неравновесными функциями. Однако благодаря относительной быстроте процесса рассеяния ротона ротоном отклонения их функций распределения от равновесных значений будут значительно меньше соответствующих отклонений для фононов. Поэтому в интеграле столкновений $I_1(n)$ функции распределения ротонов можно заменить их равновесными значениями. Для фононов же следует в (14.25) подставить значения функций распределения (14.27) или (14.21). Рассмотрим вначале случай $T > 0,9^\circ \text{K}$. После подстановки в функции (14.17) и (14.25) и интегрирования по фазовому объёму ротонов получаем

$$I_1(n) = \\ = N_p \int n_0 (n_0 + 1) c d\sigma(p, \psi) \left(\alpha - \frac{\beta}{kT} pc \right) (\cos \vartheta - \cos \vartheta') \quad (14.27)$$

(N_p — число ротонов в единице объёма). Выразим угол ϑ' через угол ϑ и угол ψ

$$\cos \vartheta' = \cos \vartheta \cos \psi + \sin \vartheta \sin \psi \cos \varphi.$$

Далее элементарным путём находим

$$\int f(\psi) \cos \vartheta' d\sigma_\psi = \cos \vartheta \int \cos \psi f(\psi) d\sigma_\psi \quad (14.27')$$

($f(\psi)$ — некоторая функция угла ψ).

Интеграл (14.27) содержит интегрирование по телесному углу. Учитывая (14.27'), перепишем $I_1(n)$ в виде

$$I_1(n) = \cos \vartheta N_p c \int d\sigma(p, \psi) (1 - \cos \psi) \times \\ \times \left(\alpha - \beta \frac{pc}{kT} \right) n_0 (n_0 + 1). \quad (14.28)$$

Отсюда после интегрирования по телесному углу $d\omega_\psi$ окончательно находим

$$I_1(n) = n_0(n_0 + 1) \left(\alpha - \beta \frac{pc}{kT} \right) \left(\frac{pc}{kT} \right)^4 \frac{1}{6!0} \cos \vartheta, \quad (14.29)$$

где θ — величина, имеющая размерность времени

$$\frac{1}{\theta} = \frac{6!N_p}{4\pi c} \left[\frac{P_0(kT/c)^2}{h^2\rho} \right]^2 \left\{ \frac{4}{45} + \frac{1}{25} \left(\frac{P_0}{\mu c} \right)^2 + \frac{4}{9} \frac{P_0}{\mu c} A + A^2 \right\}. \quad (14.30)$$

Подставим (14.29) в уравнения (14.18) и (14.19), после несложного интегрирования получаем два линейных уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial x} \frac{4\pi^4}{15} \left(c^2 - \frac{ST}{\rho n} \right) &= \frac{7}{\theta} (\alpha - 8\beta), \\ \frac{\partial T}{\partial x} \frac{36}{5} \left(c^2 - \frac{ST}{\rho n} \right) &= \frac{1}{\theta} (\alpha - 7\beta) + \frac{1}{\theta_\Phi} \alpha. \end{aligned} \quad (14.31)$$

Величина θ_Φ , имеющая размерность времени, характеризует скорость изменения числа фоонов, происходящего благодаря пятифоонному процессу. Время θ_Φ связано с коэффициентом Γ_p , вычисленным в § 10 соотношением

$$\frac{1}{\theta_\Phi} = \frac{(2\pi\hbar)^3}{4\pi(kT/c)^3} kT\Gamma_\Phi = 1,95 \cdot 10^8 T^3. \quad (14.31')$$

Решив уравнения (14.31) относительно α и β и подставив полученные значения в (14.17), находим

$$n - n_0 =$$

$$= n' \cos \vartheta \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial x} \theta \left(c^2 - \frac{ST}{\rho n} \right) \frac{31,2 - \frac{pc}{kT} (3,5 - 3,7\theta/\theta_\Phi)}{1 + 8\theta/\theta_\Phi}. \quad (14.32)$$

С помощью полученного выражения неравновесной функции вычисляем возникающий поток тепла

$$\begin{aligned} Q &= \int \frac{\partial \varepsilon}{\partial p} p (n - n_0) \cos \vartheta d\tau_p = \\ &= -19 \frac{\partial T}{\partial x} \theta N_\Phi k \left(c^2 - \frac{ST}{\rho n} \right) \frac{1 + 0,75\theta/\theta_\Phi}{1 + 8\theta/\theta_\Phi}. \end{aligned} \quad (14.33)$$

Наконец, находим искомое выражение коэффициента теплопроводности

$$\kappa_\Phi = 19 \left(c^2 - \frac{ST}{\rho n} \right) \theta N_\Phi k \frac{1 + 0,75\theta/\theta_\Phi}{1 + 8\theta/\theta_\Phi}. \quad (14.34)$$

Число фоонов в единице объема фоонного газа N_Φ равно

$$N_\Phi \cong 2,4 \cdot 4\pi \left(\frac{kT}{2\pi\hbar c} \right)^3. \quad (14.35)$$

В результате аналогичных вычислений для области температур $T < 0,9^\circ \text{K}$ находим уравнение, определяющее значение единствен-

ного в этом случае параметра β

$$\frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial x} \frac{4\pi^4}{15} \left(c^2 - \frac{ST}{\rho_n} \right) = \frac{56}{\theta} \beta. \quad (14.36)$$

Далее находим выражение для функции распределения фононов

$$n - n_0 = n' \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial x} \cos \vartheta \frac{pc}{kT} \frac{4\pi^4}{15 \cdot 56} \left(c^2 - \frac{ST}{\rho_n} \right). \quad (14.37)$$

С помощью (14.37) окончательно для коэффициента теплопроводности получаем выражение

$$\chi_\phi = 1,8 \cdot \theta N_\phi k \left(c^2 - \frac{ST}{\rho_n} \right). \quad (14.38)$$

Подстановка численных значений параметров показывает, что членом $\frac{ST}{\rho_n}$ можно в круглой скобке в (14.34) и (14.38) пренебречь при всех температурах выше $0,8^\circ \text{K}$. Суммируя результаты (14.12), (14.34) и (14.38), для полного коэффициента теплопроводности имеем

$$\chi = \frac{h^4 \Delta^2}{12 P_{0\mu} |V_0|^2} + \theta N_\phi k \left(c^2 - \frac{ST}{\rho_n} \right) \begin{cases} 19 \frac{1 + 0,75\theta/\theta_\phi}{1 + 8\theta/\theta_\phi} & (\text{при } T > 0,9^\circ \text{K}), \\ 1,8 & (\text{при } T < 0,9^\circ \text{K}). \end{cases} \quad (14.39)$$

После подстановки в (14.39) численных значений параметров находим

$$\chi = 2 \cdot 10^3 \frac{1}{T} + T^{-3/2} e^{\frac{\Delta}{T}} \left(1 - \frac{ST}{\rho_n c^2} \right) \begin{cases} 84 \frac{1 + 0,75\theta/\theta_\phi}{1 + 8\theta/\theta_\phi} & (T > 0,9^\circ \text{K}), \\ 7,8 & (T < 0,9^\circ \text{K}). \end{cases} \quad (14.40)$$

Таким образом, выражение для коэффициента теплопроводности гелия II состоит из двух частей: обязанной ротонам и растущей с убыванием температуры по закону $\frac{1}{T}$ и второй, обязанной фононам и растущей с убыванием температуры по более сильному экспоненциальному закону $e^{\frac{\Delta}{T}}$. Фононная и ротонная части коэффициента примерно совпадают по величине вблизи λ -точки, а затем с понижением температуры χ_ϕ заметно превосходит χ_p (ниже $1,4^\circ \text{K}$). Температурная зависимость коэффициента теплопроводности χ изображена графически на рис. 6. На этом же рисунке приведены экспериментальные значения, полученные К. Зиновьевой³⁷ из данных о поглощении второго звука в гелии II.

С понижением температуры время θ , определенное формулой (4.30), быстро вырастает благодаря экспоненциальному убыванию числа

ротонів N . Это обстоятельство тем не менее в формуле (14.39) не проявляется в сильной мере, поскольку содержащийся в той же формуле множитель $c^2 - \frac{ST}{\rho_n}$ при малых значениях числа ротонов оказывается пропорциональным этому числу N_p . Разлагая выражение

$c^2 - \frac{ST}{\rho_n}$ при малых значениях N_p в ряд, получаем

$$c^2 - \frac{ST}{\rho_n} = c^2 \left(\frac{S_p}{S_\phi} - \frac{\rho_{np}}{\rho_{n\phi}} \right) \approx \approx \frac{P_0^2 c^4 N_p}{4kTE_\phi}. \quad (14.41)$$

С помощью (14.41) находим предельное значение χ при малых T :

$$\chi = \frac{2\pi^5 (\rho c^2)^2 (hc)^4}{3 \cdot 15 \cdot 7! (kT)^5 TD}, \quad (14.42)$$

$$D = \frac{4}{45} + \frac{1}{25} \left(\frac{P_0}{\mu c} \right)^2 + \frac{4}{9} \left(\frac{P_0}{\mu c} \right) A + \frac{1}{4} A^2 \approx 0,84.$$

Получился любопытный результат. Выше указывалось, что в чисто фононном газе коэффициент χ тождественно равен нулю. Достаточно, однако, небольшого количества ротонов, чтобы сделать его значение не равным нулю.

Заметим, что формула, определяющая значение χ при $T > 0,9^\circ \text{K}$,

переходит в формулу, определяющую значение χ в области $T < 0,9^\circ \text{K}$, если стремить отношение θ/θ_0 к бесконечности. Это обстоятельство находится в полном соответствии со сделанным предположением о чрезвычайной быстроте пятифононного процесса в области температур ниже $0,9^\circ \text{K}$.

При вычислениях мы пользуемся следующими значениями параметров:

$$\Delta = 8,9^\circ \text{K}, \quad P_0 = 2,1 \cdot 10^{-19} \text{ г} \cdot \text{см} \cdot \text{сек}^{-1}, \quad \mu = 1,72 \cdot 10^{-24} \text{ г}, \\ A = -0,66.$$

Следует здесь сказать, что указанные значения параметров благодаря недостаточности экспериментальных данных, из которых они получены, являются чрезвычайно грубыми. Необходимо поэтому иметь в виду возможность заметного изменения этих значений в связи

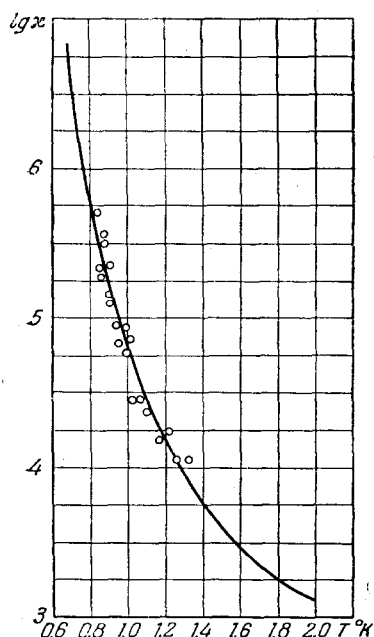


Рис. 6. Температурная зависимость коэффициента теплопроводности гелия II χ (эрг/см·сек·град):

— теоретические значения, $\circ$ — экспериментальные значения Зиновьевой ³⁷.

с появлением новых экспериментальных данных, а следовательно, и возможность изменения вычисленных значений коэффициента χ . В связи с этим представляет интерес величина отношения фоновых частей коэффициента вязкости η_ϕ и коэффициента теплопроводности, которая в слабой степени зависит от выбора параметров. Фононная часть коэффициента вязкости η_ϕ с учётом пятифононного процесса равна (§ 16)

$$\eta_\phi = 3,8 N_\phi k T \bar{\theta} \frac{1 + 0,75\theta/\bar{\theta}_\phi}{1 + 8\theta/\bar{\theta}_\phi}.$$

Время $\bar{\theta}$ при этом определяется формулой

$$\frac{1}{\bar{\theta}} = \frac{N_p 6!}{4\pi c} \left[\frac{P_0 (kT/c)^2}{h^2 p} \right]^2 \left\{ \frac{2}{15} + \frac{33}{35^2} \left(\frac{P_0}{\mu c} \right)^2 + \frac{14}{75} \left(\frac{P_0}{\mu c} \right) A + A^2 \right\}.$$

Указанное значение времени $\bar{\theta}$ мало отличается от времени θ , определённого формулой (3.10). Поэтому имеет место приближённое соотношение ($T > 0,9^\circ \text{K}$)

$$\chi_\phi / \eta_\phi \approx 5c^2 / T.$$

(Величиной $\frac{ST}{\rho n}$ в рассматриваемой области температур можно пренебречь по сравнению с c^2 .)

Следует также считаться с возможностью изменения значения численного коэффициента в формуле, определяющей величину θ_ϕ , поскольку приведённое значение этого коэффициента найдено из экспериментальных значений коэффициента поглощения звука в гелии II в очень небольшой области температур, близких к λ -точке, где все явления могут осложняться близостью λ -точки. Кроме того, при вычислении этого коэффициента используются весьма грубые значения производных $\frac{\partial P_0}{\partial \rho}$, $\frac{\partial \Delta}{\partial \rho}$ и $\frac{\partial c}{\partial \rho}$. Изменение значения этого коэффициента существенным образом сказывается на величине χ_ϕ .

Длина свободного пробега фононов, характеризующая теплопроводность. Вычислим длину свободного пробега, характеризующую теплопроводность. Параметры α и β , определяющие отклонение функции распределения от её равновесного значения, существенным образом характеризуют величину коэффициента теплопроводности. При одновременном изменении значений этих параметров коэффициент теплопроводности изменяется во столько же раз. Будем рассматривать параметры α и β зависящими от времени t . Тогда совершенно аналогично уравнениям (14.31) можно получить два уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{\pi^2}{3} \frac{d\alpha}{dt} - \frac{36}{5} \frac{d\beta}{dt} &= -\frac{1}{\bar{\theta}} (\alpha - 7\beta) - \frac{1}{\theta_\phi} \alpha, \\ \frac{36}{5} \frac{d\alpha}{dt} - \frac{4\pi^4}{15} \frac{d\beta}{dt} &= -\frac{7}{\bar{\theta}} (\alpha - 8\beta), \end{aligned} \quad (14.43)$$

определяющие закон изменения указанных параметров в области температур выше $0,9^\circ \text{K}$. Решение этой системы линейных дифференциальных уравнений ищем в виде, пропорциональном $e^{-t/\tau}$. Величину τ естественно выбрать в качестве характеристического времени, определяющего теплопроводность. Соответствующая длина свободного пробега фононов λ_ϕ получается умножением τ на скорость фононов c . Для определения τ из системы (14.43) получаем квадратное характеристическое уравнение, корни которого равны

$$\tau \approx 16\theta \frac{1 + \theta/4\theta_\phi}{1 + 8\theta/\theta_\phi} \quad \text{или} \quad \frac{\theta}{3} \frac{1}{1 + 8\theta/\theta_\phi}. \quad (14.44)$$

Для целей сравнения при макроскопическом рассмотрении явления теплопроводности следует взять больший из этих корней. Беря большее из полученных значений τ , для длины свободного пробега фононов получаем с помощью (14.44) и (14.30) выражение

$$\frac{1}{\lambda_\phi} = \frac{1}{c\tau} = \frac{45N_p}{4\pi c^3} \left[\frac{P_0 (kT/c)^2}{h^2 \rho} \right]^2 \times \\ \times \left\{ \frac{4}{45} + \frac{1}{25} \left(\frac{P_0}{\mu c} \right)^2 + \frac{4}{9} \frac{P_0}{\mu c} A + A^2 \right\} \frac{1 + 8\theta/\theta_\phi}{1 + \theta/4\theta_\phi}. \quad (14.45)$$

Для определения характеристического времени τ в области температур ниже $0,9^\circ \text{K}$ аналогично (14.43) получаем линейное дифференциальное уравнение

$$\frac{4\pi^4}{15} \frac{d\beta}{dt} = -\beta \frac{56}{\theta}. \quad (14.46)$$

В этом случае λ_ϕ определяется выражением

$$\frac{1}{\lambda_\phi} = \frac{15 \cdot 56}{4\pi^4 c} \cdot \frac{1}{\theta} \approx 1500 \frac{N_p}{4\pi c^3} \left[\frac{P_0 (kT/c)^2}{h^2 \rho} \right]^2 \times \\ \times \left\{ \frac{4}{45} + \frac{1}{25} \left(\frac{P_0}{\mu c} \right)^2 + \frac{4}{9} \left(\frac{P_0}{\mu c} \right) A + A^2 \right\}. \quad (14.47)$$

Подставив в формулы (14.45) и (14.47) численные значения всех параметров, окончательно получаем

$$\frac{1}{\lambda_\phi} = 7,85 \cdot 10^5 T^{3/2} e^{-\Delta/T} \begin{cases} \frac{1 + 8\theta/\theta_\phi}{1 + \theta/4\theta_\phi}, \\ 32. \end{cases} \quad (14.48)$$

На рис. 7 графически представлена зависимость $1/\lambda_\phi$ от температуры. Из (14.43) легко видеть, что пробег фононов, характеризующий величину коэффициента теплопроводности, определяется фононами с энергией порядка $7 - 8 kT$. В § 11 было вычислено время t_ϕ , характеризующее установление энергетического равновесия в фононном газе. Сравнив времена t_ϕ (формула (11.15)) и τ для фононов, обладающих такой энергией, убеждаемся в том, что при всех тем-

пературах ниже λ -точки установление энергетического равновесия происходит быстрее процессов рассеяния фононов, определяющих теплопроводность.

15. Коэффициенты второй вязкости гелия II²¹

Уравнения движения гелия II с учётом второй вязкости согласно (13.14) и (13.20) записываются в виде

$$\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} + \nabla p + \mathbf{v}_s \operatorname{div} \mathbf{j} + (\mathbf{j} - \rho \mathbf{v}_s) \operatorname{div} \mathbf{v}_n + (\mathbf{j} \nabla) \mathbf{v}_s + (\mathbf{v}_n \nabla) (\mathbf{j} - \rho \mathbf{v}_n) = \\ = \nabla \{ \zeta_1 \operatorname{div} (\mathbf{j} - \rho \mathbf{v}_n) + \zeta_2 \operatorname{div} \mathbf{v}_n \}, \quad (15.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} + \nabla \left(\mu + \frac{v_s^2}{2} \right) = \nabla \{ \zeta_3 \operatorname{div} (\mathbf{j} - \rho \mathbf{v}_n) + \zeta_4 \operatorname{div} \mathbf{v}_n \}. \quad (15.2)$$

Необычный характер гидродинамики гелия II приводит к появлению четырёх вторых коэффициентов вязкости. Согласно принципу Онзагера коэффициенты ζ_1 и ζ_4 равны. Выясним зависимость вторых коэффициентов вязкости от температуры и других термодинамических величин. При этом мы исходим из того, что вторая вязкость в гелии II обусловлена процессами, связанными с изменением общего числа фононов N_ϕ и ротонов N_r .

Пусть N_r и N_ϕ есть числа соответственно ротонов и фононов в единице объёма гелия II, а μ_r и μ_ϕ — их химические потенциалы. В состоянии равновесия, когда μ_r и μ_ϕ равны нулю, числа ротонов и фононов являются функциями плотности ρ и энтропии S гелия и равны соответственно N_{r0} и $N_{\phi 0}$. В выведенной из состояния равновесия системе числа N_r и N_ϕ будут изменяться со временем, стремясь принять равновесные значения N_{r0} и $N_{\phi 0}$. Рассмотрим малые отклонения от состояния равновесия, при которых плотность и энтропия мало отличаются от постоянных равновесных значений. Без ограничения общности будем предполагать малыми также ско-

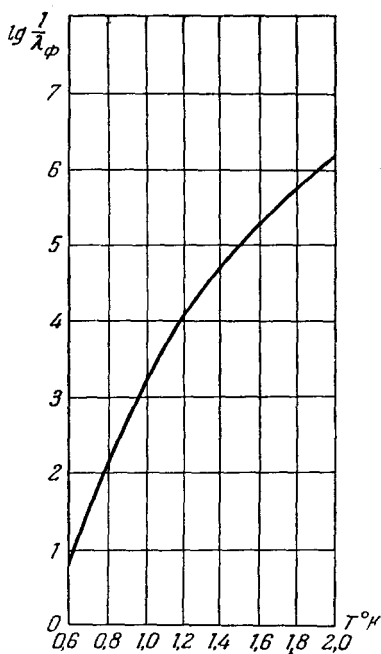


Рис. 7. Температурная зависимость длины свободного пробега фононов

рости $\mathbf{v}_n$ и $\mathbf{v}_s$. Уравнения, характеризующие приближение системы к состоянию равновесия, можно написать, разлагая скорости изменения числа частиц $\dot{N}_p$ и $\dot{N}_\phi$ по степеням химических потенциалов. Если ограничиться линейными по μ_p и μ_ϕ членами, то указанные уравнения принимают вид

$$\dot{N}_p + \text{div } N_p \mathbf{v}_n = -\gamma_{pp}\mu_p + \gamma_{p\phi}\mu_\phi, \quad (15.3)$$

$$\dot{N}_\phi + \text{div } N_\phi \mathbf{v}_n = \gamma_{\phi p}\mu_p - \gamma_{\phi\phi}\mu_\phi, \quad (15.4)$$

где γ_{pp} , $\gamma_{p\phi}$, $\gamma_{\phi p}$ и $\gamma_{\phi\phi}$ — кинетические коэффициенты, симметричные по индексам p и ϕ . Члены вида $\text{div } N \mathbf{v}_n$ в уравнениях (15.3) и (15.4) учитывают то обстоятельство, что фононы и ротонны участвуют в движении нормальной части гелия II со скоростью $\mathbf{v}_n$. Пренебрегая в уравнениях (15.3) и (15.4) квадратичными эффектами, получаем

$$\dot{N}_p + N_p \text{div } \mathbf{v}_n = -\gamma_{pp}\mu_p + \gamma_{p\phi}\mu_\phi, \quad (15.5)$$

$$\dot{N}_\phi + N_\phi \text{div } \mathbf{v}_n = \gamma_{\phi p}\mu_p - \gamma_{\phi\phi}\mu_\phi. \quad (15.6)$$

Изменение термодинамических величин ρ , S со временем определяется уравнениями непрерывности для плотности и энтропии, которые в рассматриваемом случае подобно уравнениям (15.5) и (15.6) после линеаризации приобретают вид

$$\left. \begin{aligned} \dot{\rho} + \text{div } \mathbf{j} &= 0, \\ \dot{S} + S \text{div } \mathbf{v}_n &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (15.7)$$

Числа ротонов N_p и фононов N_ϕ зависят от трёх переменных — ρ , S , μ_p или μ_ϕ . Для достаточно медленных процессов отклонения от состояния равновесия указанные числа ротонов и фононов успевают следовать за изменением термодинамических величин. В этом случае производные $\dot{N}_p$ и $\dot{N}_\phi$ выражаются через производные $\dot{\rho}$ и $\dot{S}$

$$\left. \begin{aligned} \dot{N}_p &= \frac{\partial N_p}{\partial \rho} \dot{\rho} + \frac{\partial N_p}{\partial S} \dot{S} = -\frac{\partial N_p}{\partial \rho} \text{div } \mathbf{j} - \frac{\partial N_p}{\partial S} S \text{div } \mathbf{v}_n, \\ \dot{N}_\phi &= \frac{\partial N_\phi}{\partial \rho} \dot{\rho} + \frac{\partial N_\phi}{\partial S} \dot{S} = -\frac{\partial N_\phi}{\partial \rho} \text{div } \mathbf{j} - \frac{\partial N_\phi}{\partial S} S \text{div } \mathbf{v}_n. \end{aligned} \right\} \quad (15.8)$$

Учитывая (15.7) и (15.8), перепишем уравнения (15.5) и (15.6) в виде

$$\begin{aligned} -\frac{\partial N_p}{\partial \rho} \text{div } (\mathbf{j} - \rho \mathbf{v}_n) + \left(N_p - \frac{\partial N_p}{\partial S} S - \frac{\partial N_p}{\partial \rho} \rho \right) \text{div } \mathbf{v}_n &= \\ &= -\gamma_{pp}\mu_p + \gamma_{p\phi}\mu_\phi, \end{aligned} \quad (15.9)$$

$$\begin{aligned} -\frac{\partial N_\phi}{\partial \rho} \text{div } (\mathbf{j} - \rho \mathbf{v}_n) + \left(N_\phi - \frac{\partial N_\phi}{\partial S} S - \frac{\partial N_\phi}{\partial \rho} \rho \right) \text{div } \mathbf{v}_n &= \\ &= \gamma_{\phi p}\mu_p - \gamma_{\phi\phi}\mu_\phi. \end{aligned} \quad (15.10)$$

Полученные уравнения (15.9) и (15.10) определяют величины химических потенциалов μ_p и μ_ϕ через $\text{div}(\mathbf{j} - \rho \mathbf{v}_n)$ и $\text{div} \mathbf{v}_n$ для случая медленных неравновесных процессов в гелии

$$\begin{aligned} \mu_p = \frac{1}{\gamma_{\phi p}^2 - \gamma_{\phi\phi}\gamma_{pp}} \left\{ -\text{div}(\mathbf{j} - \rho \mathbf{v}_n) \left[\frac{\partial N_p}{\partial \rho} \gamma_{\phi\phi} + \frac{\partial N_\phi}{\partial \rho} \gamma_{\phi p} \right] + \right. \\ \left. + \text{div} \mathbf{v}_n \left[N_p - \frac{\partial N_p}{\partial S} S - \frac{\partial N_p}{\partial \rho} \rho \right] \gamma_{\phi\phi} + \right. \\ \left. + \left(N_\phi - \frac{\partial N_\phi}{\partial S} S - \frac{\partial N_\phi}{\partial \rho} \rho \right) \gamma_{\phi p} \right\}, \quad (15.11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu_\phi = \frac{1}{\gamma_{\phi p}^2 - \gamma_{\phi\phi}\gamma_{pp}} \left\{ -\text{div}(\mathbf{j} - \rho \mathbf{v}_n) \left[\frac{\partial N_p}{\partial \rho} \gamma_{\phi p} + \frac{\partial N_\phi}{\partial \rho} \gamma_{pp} \right] + \right. \\ \left. + \text{div} \mathbf{v}_n \left[\left(N_p - \frac{\partial N_p}{\partial \rho} \rho - \frac{\partial N_p}{\partial S} S \right) \gamma_{\phi p} \right] + \right. \\ \left. + \left(N_\phi - \frac{\partial N_\phi}{\partial S} S - \frac{\partial N_\phi}{\partial \rho} \rho \right) \gamma_{pp} \right\}. \quad (15.12) \end{aligned}$$

Встречающиеся в уравнениях настоящего параграфа кинетические коэффициенты γ просто выражаются через коэффициенты Γ , вычисленные в § 10 для конкретных процессов. Сравнивая (15.5) и (15.6) с (10.15) и (10.18) и учитывая определение Γ , находим

$$\gamma_{pp} = \Gamma_p + \Gamma_{\phi p}, \quad \gamma_{p\phi} = \gamma_{\phi p} = \Gamma_{\phi p}, \quad \gamma_{pp} = \Gamma_\phi + \Gamma_{\phi p}. \quad (15.13)$$

Учтём относительную малость коэффициента Γ_p по сравнению с $\Gamma_{\phi p}$ и Γ_ϕ . Соотношения (15.11) и (15.12) тогда переходят в

$$\begin{aligned} \mu_p = \frac{1}{\Gamma_\phi} \left\{ \frac{\partial N}{\partial \rho} \text{div}(\mathbf{j} - \rho \mathbf{v}_n) - \left(N - \frac{\partial N}{\partial S} S - \frac{\partial N_p}{\partial \rho} \rho \right) \text{div} \mathbf{v}_n \right\} + \\ + \frac{1}{\Gamma_{\phi p}} \left\{ \frac{\partial N_p}{\partial \rho} \text{div}(\mathbf{j} - \rho \mathbf{v}_n) - \left(N_p - \frac{\partial N_p}{\partial S} S - \frac{\partial N_p}{\partial \rho} \rho \right) \text{div} \mathbf{v}_n \right\}, \quad (15.14) \end{aligned}$$

$$\mu_\phi = \frac{1}{\Gamma_\phi} \left\{ \frac{\partial N}{\partial \rho} \text{div}(\mathbf{j} - \rho \mathbf{v}_n) - \left(N - \frac{\partial N}{\partial S} S - \frac{\partial N}{\partial \rho} \rho \right) \text{div} \mathbf{v}_n \right\}. \quad (15.15)$$

Дополнительные члены в уравнениях движения (15.1) и (15.2) обусловлены процессами, связанными с изменением общего числа ротоннов N_p и фононов N_ϕ ($\mu_p \neq 0$, $\mu_\phi \neq 0$). Таким образом, указанные члены связаны зависимости давления p и потенциала μ от химических потенциалов μ_p и μ_ϕ и равны соответственно

$$\nabla \left(\frac{\partial p}{\partial \mu_p} \mu_p + \frac{\partial p}{\partial \mu_\phi} \mu_\phi \right), \quad \nabla \left(\frac{\partial \mu}{\partial \mu_p} \mu_p + \frac{\partial \mu}{\partial \mu_\phi} \mu_\phi \right).$$

Приравняв правые части уравнения (15.1) и (15.2) указанным выра-

жениям и подставив выражения (15.14) и (15.15) для μ_p и μ_Φ , получаем два равенства

$$\begin{aligned} \zeta_1 \operatorname{div} (\mathbf{j} - \rho \mathbf{v}_n) + \zeta_2 \operatorname{div} \mathbf{v}_n = \\ = \frac{1}{\Gamma_\Phi} \left\{ \left(N - \frac{\partial N}{\partial S} S - \frac{\partial N}{\partial \rho} \rho \right) \operatorname{div} \mathbf{v}_n - \frac{\partial N}{\partial \rho} \operatorname{div} (\mathbf{j} - \rho \mathbf{v}_n) \right\} \times \\ \times \left(\frac{\partial p}{\partial \mu_p} + \frac{\partial p}{\partial \mu_\Phi} \right) + \frac{1}{\Gamma_{\Phi p}} \times \\ \times \left\{ \left(N_p - \frac{\partial N_p}{\partial S} S - \frac{\partial N_p}{\partial \rho} \rho \right) \operatorname{div} \mathbf{v}_n - \frac{\partial N_p}{\partial \rho} \operatorname{div} (\mathbf{j} - \rho \mathbf{v}_n) \right\} \frac{\partial p}{\partial \mu_p}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \zeta_3 \operatorname{div} (\mathbf{j} - \rho \mathbf{v}_n) + \zeta_4 \operatorname{div} \mathbf{v}_n = \\ = \frac{1}{\Gamma_\Phi} \left\{ \left(N - \frac{\partial N}{\partial S} S - \frac{\partial N}{\partial \rho} \rho \right) \operatorname{div} \mathbf{v}_n - \frac{\partial N}{\partial \rho} \operatorname{div} (\mathbf{j} - \rho \mathbf{v}_n) \right\} \times \\ \times \left(\frac{\partial \mu}{\partial \mu_p} + \frac{\partial \mu}{\partial \mu_\Phi} \right) + \frac{1}{\Gamma_{\Phi p}} \times \\ \times \left\{ \left(N_p - \frac{\partial N_p}{\partial S} S - \frac{\partial N_p}{\partial \rho} \rho \right) \operatorname{div} \mathbf{v}_n - \frac{\partial N_p}{\partial \rho} \operatorname{div} (\mathbf{j} - \rho \mathbf{v}_n) \right\} \frac{\partial \mu}{\partial \mu_p}. \end{aligned}$$

Поскольку полученные равенства должны выполняться при любых значениях $\operatorname{div} \mathbf{v}_n$ и $\operatorname{div} (\mathbf{j} - \rho \mathbf{v}_n)$, то отсюда следует

$$\zeta_1 = -\frac{1}{\Gamma_\Phi} \left(\frac{\partial p}{\partial \mu_p} + \frac{\partial p}{\partial \mu_\Phi} \right) \frac{\partial N}{\partial \rho} - \frac{1}{\Gamma_{\Phi p}} \frac{\partial p}{\partial \mu_p} \frac{\partial N_p}{\partial \rho}, \quad (15.16)$$

$$\begin{aligned} \zeta_2 = \frac{1}{\Gamma_\Phi} \left(\frac{\partial p}{\partial \mu_p} + \frac{\partial p}{\partial \mu_\Phi} \right) \left(N - \frac{\partial N}{\partial S} S - \frac{\partial N}{\partial \rho} \rho \right) + \\ + \frac{1}{\Gamma_{\Phi p}} \frac{\partial p}{\partial \mu_p} \left(N_p - \frac{\partial N_p}{\partial S} S - \frac{\partial N_p}{\partial \rho} \rho \right), \end{aligned} \quad (15.17)$$

$$\zeta_3 = -\frac{1}{\Gamma_\Phi} \left(\frac{\partial \mu}{\partial \mu_p} + \frac{\partial \mu}{\partial \mu_\Phi} \right) \frac{\partial N}{\partial \rho} - \frac{1}{\Gamma_{\Phi p}} \frac{\partial \mu}{\partial \mu_p} \frac{\partial N_p}{\partial \rho}, \quad (15.18)$$

$$\begin{aligned} \zeta_4 = \frac{1}{\Gamma_\Phi} \left(\frac{\partial \mu}{\partial \mu_p} + \frac{\partial \mu}{\partial \mu_\Phi} \right) \left(N - \frac{\partial N}{\partial S} S - \frac{\partial N}{\partial \rho} \rho \right) + \\ + \frac{1}{\Gamma_{\Phi p}} \frac{\partial \mu}{\partial \mu_p} \left(N_p - \frac{\partial N_p}{\partial S} S - \frac{\partial N_p}{\partial \rho} \rho \right). \end{aligned} \quad (15.19)$$

Определим с помощью следующего тождества функцию

$$d\varepsilon = TdS + \mu dp - N_p d\mu_p - N_\Phi d\mu_\Phi. \quad (15.20)$$

Функция ε является аналогом энергии и при постоянных химических потенциалах обращается в энергию единицы объёма жидкости. Давление p выражается через функцию ε с помощью соотношения:

$$p = -\varepsilon + ST + \mu p. \quad (15.21)$$

Из (15.20) и (15.21) следуют выражения для производных $\frac{\partial p}{\partial \mu_p}$ и $\frac{\partial \mu}{\partial \mu_p}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial \mu_p} &= N_p - S \frac{\partial N_p}{\partial S} - \rho \frac{\partial N_p}{\partial \rho}, \\ \frac{\partial p}{\partial \mu_\Phi} &= N_\Phi - S \frac{\partial N_\Phi}{\partial S} - \rho \frac{\partial N_\Phi}{\partial \rho},\end{aligned}\quad (15.22)$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial \mu_p} = -\frac{\partial N_p}{\partial \rho}, \quad \frac{\partial \mu}{\partial \mu_\Phi} = -\frac{\partial N_\Phi}{\partial \rho}. \quad (15.23)$$

Воспользовавшись соотношениями (15.22) и (15.23), перепишем выражения для коэффициентов второй вязкости гелия II в следующем виде:

$$\begin{aligned}\zeta_1 &= -\frac{1}{\Gamma_\Phi} \frac{\partial N}{\partial \rho} \left(N - \frac{\partial N}{\partial S} S - \frac{\partial N}{\partial \rho} \rho \right) - \\ &\quad - \frac{1}{\Gamma_{\Phi p}} \frac{\partial N_p}{\partial \rho} \left(N_p - \frac{\partial N_p}{\partial S} S - \frac{\partial N_p}{\partial \rho} \rho \right),\end{aligned}\quad (15.24)$$

$$\begin{aligned}\zeta_2 &= \frac{1}{\Gamma_p} \left(N - \frac{\partial N}{\partial S} S - \frac{\partial N}{\partial \rho} \rho \right)^2 + \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma_{\Phi p}} \left(N_p - \frac{\partial N_p}{\partial S} S - \frac{\partial N_p}{\partial \rho} \rho \right)^2,\end{aligned}\quad (15.25)$$

$$\zeta_3 = \frac{1}{\Gamma_\Phi} \left(\frac{\partial N}{\partial \rho} \right)^2 + \frac{1}{\Gamma_{\Phi p}} \left(\frac{\partial N_p}{\partial \rho} \right)^2, \quad (15.26)$$

$$\begin{aligned}\zeta_4 &= -\frac{1}{\Gamma_\Phi} \left(N - \frac{\partial N}{\partial S} S - \frac{\partial N}{\partial \rho} \rho \right) \frac{\partial N}{\partial \rho} - \\ &\quad - \frac{1}{\Gamma_{\Phi p}} \frac{\partial N_p}{\partial \rho} \left(N_p - \frac{\partial N_p}{\partial S} S - \frac{\partial N_p}{\partial \rho} \rho \right).\end{aligned}\quad (15.27)$$

Коэффициенты ζ_1 и ζ_4 оказались равными, как и следовало ожидать из принципа симметрии кинетических коэффициентов. Производные, входящие в выражения для коэффициентов второй вязкости, вычисляются с помощью известных соотношений для числа ротон и фоннов и энтропии гелия II (2.5), (2.8') и (2.11). В результате несложного дифференцирования, переходя к переменным ρ и T , находим:

$$\begin{aligned}&\left(N_p - \frac{\partial N_p}{\partial S} S - \frac{\partial N_p}{\partial \rho} \rho \right) = \\ &= \left[N_p - \rho \left(\frac{\partial N_p}{\partial \rho} \right)_T \right] - \left(\frac{\partial N_p}{\partial T} \right)_\rho \left(\frac{\partial T}{\partial S} \right)_\rho \left[S - \rho \left(\frac{\partial S}{\partial \rho} \right)_T \right],\end{aligned}\quad (15.28)$$

$$\begin{aligned}&\left(N_\Phi - \frac{\partial N_\Phi}{\partial S} S - \frac{\partial N_\Phi}{\partial \rho} \rho \right) = \\ &= \left[N_\Phi - \rho \left(\frac{\partial N_\Phi}{\partial \rho} \right)_T \right] - \left(\frac{\partial N_\Phi}{\partial T} \right)_\rho \left(\frac{\partial T}{\partial S} \right)_\rho \left[S - \rho \left(\frac{\partial S}{\partial \rho} \right)_T \right],\end{aligned}\quad (15.29)$$

Производные от параметров Δ , P_0 , μ по плотности, определяющие величину $\frac{\partial N_p}{\partial \rho}$, были вычислены в § 6. Используя приведённые там значения производных, согласно (2.8') находим

$$\left(1 - \frac{\rho}{N_p} \frac{\partial N_p}{\partial \rho}\right) \approx \frac{1}{3} \left(1 - \frac{\Delta}{T}\right). \quad (15.30)$$

Производная от скорости первого звука c по плотности ρ может быть вычислена из данных Кеезема²⁷ по зависимости плотности гелия II от давления. Эти данные дают $\frac{\rho}{c} \frac{\partial c}{\partial \rho} \approx 1,8$ и, следовательно,

$$\left(1 - \frac{\rho}{N_\Phi} \frac{\partial N_\Phi}{\partial \rho}\right) = \left(1 + \frac{3\rho}{c} \frac{\partial c}{\partial \rho}\right) \approx 6,4.$$

Используя указанные значения производных, запишем окончательные выражения

$$\begin{aligned} \left(N_p - \frac{\partial N_p}{\partial \rho} \rho - \frac{\partial N_p}{\partial S} S\right) &\approx -N_p \frac{C_\Phi}{3C} \times \\ &\times \left\{ \left(\frac{\Delta}{T} - 1\right) + \left(\frac{\Delta}{T} + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{3\rho}{c} \frac{\partial c}{\partial \rho}\right) \right\}, \end{aligned} \quad (15.31)$$

$$\left(N_\Phi - \frac{\partial N_\Phi}{\partial \rho} \rho - \frac{\partial N_\Phi}{\partial S} S\right) \approx N_\Phi \frac{C_p}{C} \left\{ 2 + \frac{3\rho}{c} \frac{\partial c}{\partial \rho} \right\}. \quad (15.32)$$

Поглощение первого звука в гелии II определяется величиной коэффициента ζ_2 (см. § 17). Экспериментальные значения коэффициента поглощения первого звука в гелии II для области температур 1,57—2,0° K позволяют с удовлетворительной степенью точности вычислить неизвестные коэффициенты a и b в формулах (10.13) и (10.21) для Γ_Φ и $\Gamma_{\Phi p}$. Таким образом, находим*)

$$\Gamma_\Phi = 1 \cdot 10^{43} T^{11}, \quad \Gamma_{\Phi p} = 4 \cdot 10^{49} e^{2\Delta/T}. \quad (15.33)$$

Полученное значение для $\Gamma_{\Phi p}$ естественно оказалось меньше верхнего предела, даваемого формулой (10.20).

16. Коэффициент первой вязкости гелия II^{31, 30}

Вопрос о вязкости гелия II был подвергнут подробному рассмотрению нами ранее¹⁵. В последнее время появилась возможность несколько уточнить полученные ранее результаты путём более точного учёта пятифононного процесса. Кроме того, удалось несколько

*) Указанные значения коэффициентов a и b отличаются от значений, приведённых в³⁸. Это изменение вызвано уточнением значения производной $\partial N_p / \partial \rho$, определяющей величину ζ_2 , которое было произведено в настоящее время на основе новых экспериментальных данных.

уточнить значения производных от параметров Δ и P_0 по плотности, определяющих величину эффективного сечения рассеяния фонона ротонном. Для полноты картины в вопросе о кинетических коэффициентах в гелии II приведём здесь кратко полученные ранее результаты с произведёнными в последнее время уточнениями.

Коэффициент вязкости η складывается из двух частей — одной, обязанной ротонам и другой, обязанной фононам

$$\eta = \eta_p + \eta_f. \quad (16.1)$$

Ротонная вязкость. Интеграл столкновений для ротонов, аналогично тому, как это делается при вычислении χ_p , представляем в виде

$$-\frac{n - n_0}{t}, \quad (16.2)$$

где t — есть величина, отличающаяся от среднего времени между соударениями двух ротонов (t_p) множителем порядка единицы. Поскольку выражение (9.11) для t_n содержит неизвестный постоянный множитель V_0 , то не будем делать различия между t и t_p , включая множитель порядка единицы в величину V . В таком случае множитель в формуле (13.17), определяющей величину коэффициента вязкости, просто совпадает с t_p и мы имеем

$$\eta_p = -\frac{t_p}{15kT} \int n' \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial p} \right)^2 p^2 d\tau_p. \quad (16.3)$$

Выполнив несобходимое интегрирование по $d\tau_p$, получаем

$$\eta_p = \frac{P_0^2 t_p N_p}{15\mu}. \quad (16.4)$$

Величина $t_p N_p$ согласно (9.13) не зависит от температуры и равна

$$t_p N_p = \frac{h^4}{P_0 \mu |V_0|^2}. \quad (16.5)$$

Подставив (16.5) в (16.4), окончательно находим

$$\eta_p = \frac{h^4 P_0}{15\mu^2 |V_0|^2}. \quad (16.6)$$

Выражение (16.6) содержит только не зависящие от температуры множители, поэтому ротонная часть коэффициента вязкости η_p оказывается постоянной, не зависящей от температуры величиной.

Фононная часть коэффициента вязкости η_f . Рассмотрим гелий II, в котором имеется небольшой градиент нормальной скорости $\mathbf{v}_n$, направленный по оси x . Скорость $\mathbf{v}_n$ для удобства выбираем направленной по оси z . Направление движения фонона характеризуется двумя углами ϑ и φ в полярной системе координат с полярной осью z . Кинетическое уравнение для фононов тогда

записывается в виде

$$n(n+1) \frac{c\rho}{kT} \frac{\partial v_n}{\partial x} \cos \vartheta \sin \vartheta \cos \varphi = \\ = I_I(n) + I_{II}(n) + I_{III}(n) + I_{IV}(n), \quad (16.7)$$

где I_I и I_{II} — интегралы столкновений, обязанные соответственно рассеянию фононов ротонами и фононов фононами; I_{III} — интеграл столкновений, связанный с рассеянием фононов на малые углы; наконец, I_{IV} характеризует изменение числа фононов, происходящее благодаря пятифононному процессу.

При вычислении фононной части коэффициента вязкости η_f мы исходим из предположения, в справедливости которого мы в конце концов убеждаемся, состоящего в том, что процесс установления энергетического равновесия в фононном газе происходит заметно быстрее рассеяния фононов ротонами и фононами. По отношению к процессам, связанным с изменениями полного числа фононов, здесь так же, как и при вычислении χ_f , следует рассматривать две области температуры. При температурах выше $0,9^\circ \text{K}$ установление равновесия по числу фононов (пятифононный процесс) характеризуется временами, сравнимыми с теми, которые определяют рассеяние фононов ротонами.

Наоборот, при температурах, лежащих ниже $0,9^\circ \text{K}$, установление равновесия происходит быстрее процессов рассеяния фононов, характеризующих вязкость.

Область температур выше $0,9^\circ \text{K}$. В этой области ($T > 0,9^\circ \text{K}$) кинетическое уравнение (16.7) после интегрирования по всем фононам и по всем энергиям фононов даёт два уравнения

$$\frac{c}{kT} \frac{\partial v_n}{\partial x} \cos \vartheta \sin \vartheta \cos \varphi \int n(n+1) \varepsilon p^3 dp = \int (I_I + I_{II}) \varepsilon p^2 dp, \\ \frac{c}{kT} \frac{\partial v_n}{\partial x} \cos \vartheta \sin \vartheta \cos \varphi \int n(n+1) p^3 dp = \\ = \int (I_I + I_{II}) p^2 dp + \int I_{IV} p^2 dp. \quad (16.8)$$

Функция распределения фононов зависит от двух параметров α' и T' , зависящих от направления движения фононов

$$n = [e^{\alpha' + pc/kT'} - 1]^{-1} \quad (16.9)$$

(T' — температура фононов, движущихся в заданном направлении). Отклонение функции распределения n от равновесного значения n_0 согласно (16.9) записывается в виде

$$n - n_0 = -n(n+1) \left\{ \alpha' - \frac{pc}{kT} \frac{T' - T}{T} \right\}. \quad (16.10)$$

Учитывая симметрию задачи, представляем отклонение температуры фононов, движущихся в заданном направлении от равновесного

значения T и величину α' , в виде

$$\frac{T' - T}{T} = \beta P_2(\cos \vartheta), \quad \alpha' = \alpha P_2(\cos \vartheta)$$

($P_2(\cos \vartheta)$ — шаровая функция).

При температурах выше $0,7^\circ \text{K}$ интегралом I_{II} можно пренебречь по сравнению с I_I . Интеграл столкновений I_I в результате несложных преобразований с использованием теоремы сложения функций Лежандра после подстановки функции распределения (16.9) сводится к

$$I_I(n) = P_2(\cos \vartheta) N_p \int c d\sigma(p, \psi) [1 - P_2 \cos \vartheta] \times \\ \times \left(\alpha - \beta \frac{pc}{kT} \right) n(n+1). \quad (16.11)$$

Здесь $d\sigma(p, \psi)$ — дифференциальное эффективное сечение рассеяния фонона ротоном на угол ψ , определённое выражением (8.20). После подстановки (8.20) в (16.11) и интегрирования по телесному углу $d\Omega_\psi$ получаем

$$I_I(n) = \frac{1}{6\bar{\theta}} P_2(\cos \vartheta) n(n+1) \left(\alpha - \beta \frac{pc}{kT} \right) \left(\frac{pc}{kT} \right)^4, \quad (16.12)$$

где введено обозначение

$$\frac{1}{\bar{\theta}} = \frac{N_p 6!}{4\pi c} \left[\frac{P_0 (kT/c)^2}{h^2 \rho} \right]^2 \left\{ \frac{2}{15} + \frac{33}{35^2} \left(\frac{P_0}{\mu c} \right)^2 + \frac{14A}{75} \frac{P_0}{\mu c} + A^2 \right\}. \quad (16.13)$$

Величина $\bar{\theta}$, имеющая размерность времени, по порядку величины равна времени $\bar{\theta}$, вычисленному в задаче о теплопроводности (14.30). С помощью (16.12) и (16.8) получаем два уравнения, определяющие параметры α и β .

$$\frac{\partial v_n}{\partial x} \frac{4\pi^4}{15} = \frac{7}{\bar{\theta}} (\alpha - 8\beta), \quad \frac{\partial v_n}{\partial x} \frac{36}{5} = \frac{1}{\bar{\theta}} (\alpha - 7\beta) + \frac{1}{\bar{\theta}_\Phi} \alpha. \quad (16.14)$$

Область температур ниже $0,9^\circ \text{K}$. В этой области смысл имеет только первое уравнение (16.8); параметр α' равен нулю. Интеграл I_{II} , обязанный рассеянию фононов фононами, имеет заметную величину, и им пренебречь нельзя. Указанный интеграл оказывается сходящимся без учёта дисперсии фононов. В результате довольно длинных вычислений с функцией распределения вида (16.9) находим

$$\int I_{II}(n) \varepsilon p^2 dp = -P_2(\cos \vartheta) \beta kT \left(\frac{kT}{c} \right)^3 \frac{1}{\tau_\Phi}, \quad (16.15)$$

где τ_Φ — величина размерности времени, определяемая соотношением

$$\frac{1}{\tau_\Phi} = \frac{3 \cdot 13! (u+2)^4}{5 \cdot 2^{19} (2\pi)^3 h^7 \rho^2 c} \left(\frac{kT}{c} \right)^9 \\ \left(u = \frac{\rho}{c^2} \frac{\partial c^2}{\partial \rho} \right). \quad (16.16)$$

Уравнение, определяющее величину параметра β , в этом случае обращается в

$$\frac{4\pi^4}{15} \frac{\partial v_n}{\partial x} = -\beta \left(\frac{56}{\theta} + \frac{1}{\tau_\phi} \right). \quad (16.17)$$

Среднее время между соударениями фонона, характеризующее вязкость. Аналогично (14.13) для определения среднего времени между соударениями фонона, характеризующего вязкость, получаем уравнения

$$\left. \begin{aligned} \frac{\pi^3}{3} \frac{dx}{dt} - \frac{36}{5} \frac{d\beta}{dt} &= -(\alpha - 7\beta) \frac{1}{\theta} - \alpha \frac{1}{\theta_\phi}, \\ \frac{36}{5} \frac{dx}{dt} - \frac{4\pi^4}{15} \frac{d\beta}{dt} &= -7(\alpha - 8\beta) \frac{1}{\theta} \end{aligned} \right\} T > 0,9^\circ \text{ K}, \quad (16.18)$$

$$\frac{4\pi^4}{15} \frac{d\beta}{dt} = -\beta \left(\frac{56}{\theta} + \frac{1}{\tau_\phi} \right), \quad T < 0,9^\circ \text{ K}. \quad (16.19)$$

Решение системы уравнений (16.18) и уравнения (16.19) ищем в виде, пропорциональном $e^{-t/\tau}$. Таким образом, из (16.18) находим два значения

$$\tau = 16\bar{\theta} \frac{1 + \bar{\theta}/4\theta_\phi}{1 + 8\bar{\theta}/\theta_\phi} \quad \text{или} \quad \frac{1}{3} \bar{\theta} \frac{1}{1 + 8\bar{\theta}/\theta_\phi}. \quad (16.20)$$

Для целей сравнения выбираем больший из этих корней. Из уравнения (16.19) находим

$$\tau = \frac{4\pi^4}{15 \cdot 56} \bar{\theta} (1 + \bar{\theta}/56\tau_\phi)^{-1}. \quad (16.21)$$

Подставив численные значения параметров в (16.20) и (16.21), окончательно получаем

$$\frac{1}{\tau} = \begin{cases} 7,5 \cdot 10^{10} T^{3/2} e^{-\Delta/T} \frac{1 + 8\bar{\theta}/\theta_\phi}{1 + \bar{\theta}/4\theta_\phi}, & T > 0,9^\circ \text{ K}, \\ 4,75 \cdot 10^{11} T^{3/2} e^{-\Delta/T}, & T < 0,9^\circ \text{ K}. \end{cases} \quad (16.22)$$

Сравнив полученные значения среднего времени между соударениями фонона τ с временем t_ϕ , характеризующим установление энергетического равновесия, убеждаемся в том, что при всех температурах ниже λ -точки $t_\phi < \tau$. Таким образом, сделанное вначале предположение о скорости установления энергетического равновесия в фононном газе оказывается справедливым. На рис. 7 проведён температурный ход длины свободного пробега фононов $\lambda_\phi = c\tau$, характеризующий вязкость.

Температурная зависимость фононной части коэффициента вязкости. Решим систему уравнений (16.14) относительно α и β и подставим полученные значения в выражение (16.16) для отклонения $n - n_0$ функции распределения от её равновесного значения.

Таким путём получаем

$$n - n_0 = -n_0(n_0 + 1) \cos \vartheta \sin \vartheta \cos \varphi \bar{\theta} \times \\ \times \frac{\left\{ 31,2 - \frac{Pc}{kT} (3,5 - 3,7\bar{\theta}/\theta_\Phi) \right\} \frac{\partial v_n}{\partial x}}{\{1 + 8\bar{\theta}/\theta_\Phi\}}. \quad (16.23)$$

При этом заменяем функцию $P_2(\cos \vartheta)$ на $P_{21}(\cos \vartheta) \cos \varphi$, поскольку в левой части кинетического уравнения в действительности содержится функция от углов $P_{21}(\cos \vartheta) \cos \varphi$. Аналогичным путём из (16.17) и (16.10) находим

$$n - n_0 = -n_0(n_0 + 1) \cos \vartheta \sin \vartheta \cos \varphi \times \\ \times \frac{4\pi^4}{15 \cdot 56} \bar{\theta} (1 + \bar{\theta}/56\tau_\Phi)^{-1} \frac{Pc}{kT} \frac{\partial v_n}{\partial x}. \quad (16.24)$$

Отличная в нашем случае от нуля xz компонента тензора напряжений равна

$$\sigma_{xz} = \eta_\Phi \frac{\partial v_n}{\partial x} = \\ = - (2\pi\hbar)^{-3} \int Pc (n - n_0) \cos \vartheta \sin \vartheta \cos \varphi p^2 dp d\phi. \quad (16.25)$$

Из (16.25) с помощью (16.23) и (16.24) находим выражение для

$$\eta_\Phi = 3,8 \cdot N_\Phi k T \bar{\theta} \frac{1 + 0,75\bar{\theta}/\theta_\Phi}{1 + 8\bar{\theta}/\theta_\Phi} \quad \text{при } T > 0,9^\circ \text{ K}, \\ \eta_\Phi = 0,36 \cdot N_\Phi k T \bar{\theta} (1 + \bar{\theta}/56\tau_\Phi)^{-1} \quad \text{при } T < 0,9^\circ \text{ K}. \quad (16.26)$$

Подставив в (16.26) численные значения всех параметров, окончательно получаем

$$\eta_\Phi = \begin{cases} 3,75 \cdot 10^{-8} T^{-1/2} e^{\Delta/T} \frac{1 + 0,75\bar{\theta}/\theta_\Phi}{1 + 8\bar{\theta}/\theta_\Phi} & \text{при } T > 0,9^\circ \text{ K}, \\ 3,50 \cdot 10^{-9} T^{-1/2} e^{\Delta/T} (1 + 2,15 \cdot 10^{-5} T^{9/2} e^{\Delta/T})^{-1} & \text{при } T < 0,9^\circ \text{ K}. \end{cases} \quad (16.27)$$

Фононная часть коэффициента вязкости возрастает с убыванием температуры по закону $e^{\Delta/T}$. При температурах же ниже $0,7^\circ \text{ K}$, когда существенным является только эффект рассеяния фононов фононами, этот закон заменяется законом T^{-5} .

Температурная зависимость коэффициента вязкости гелия II. Ротонная часть коэффициента вязкости не может быть вычислена точно, однако она может быть найдена из опыта. Вычитая из экспериментальных значений коэффициента вязкости¹⁸ вычисленную по формуле (16.27) фононную часть, находим в интервале температур $1,9^\circ \text{ K} - 1,4^\circ \text{ K}$ почти постоянную величину, равную

$1,15 \cdot 10^{-5}$ пуаз, которую мы отождествим с ротонной частью коэффициента вязкости. Таким образом имеем

$$\eta_p = \frac{h^4 P_0}{15\mu^2 V_0^2} = 1,15 \cdot 10^{-5} \text{ пуаз.} \quad (16.28)$$

Из (16.28) находим значение постоянной V_0 .

$$V = 1,1 \cdot 10^{-38} \text{ эрг см;}$$

величина коэффициента вязкости гелия II получается суммированием ротонной (16.28) и фононной (16.27) частей

$$\eta \cdot 10^5 = 1,15 + \begin{cases} 3,75 \cdot 10^{-3} T^{1/2} e^{\Delta/T} \frac{1 + 0,75 \cdot \bar{\theta}/\theta_{\Phi}}{1 + 8\bar{\theta}/\theta_{\Phi}}, \\ 3,5 \cdot 10^{-4} T^{1/2} e^{\Delta/T} (1 + 2,15 \cdot 10^{-5} T^{3/2} e^{\Delta/T})^{-1}. \end{cases} \quad (16.29)$$

Отношение времён, характеризующих рассеяние фононов на ротонах ($\bar{\theta}$) и пятифононный процесс θ_{Φ} , вычисляем с помощью формул (16. 13) и (14. 31'). Численные значения этого отношения для различных температур приведены в таблице I.

Таблица I

T°K	2,0	1,8	1,6	1,4	1,2	1,0	0,8	0,7
$\bar{\theta}/\theta_{\Phi}$	1,6	1,41	1,78	2,18	3,10	6,05	20,5	5,6

В подробной работе ³¹, посвящённой рассмотрению вязкости гелия II, вычисление фононной части коэффициента вязкости производилось для двух предельных случаев. В первом предельном случае $T > 1,0^\circ \text{ K}$ отношение $\bar{\theta}/\theta_{\Phi}$ предполагалось настолько малым, что равновесие по числу фононов не успевало устанавливаться за времена, характеризующие рассеяние фонона ротонном. В таком случае интеграл столкновений, обязанный пятифононному процессу, можно было вовсе не учитывать. Наоборот, во втором предельном случае ($T < 0,8^\circ \text{ K}$) указанное отношение предполагалось настолько большим, что равновесие по числу фононов успевало устанавливаться за те же времена, что и характеризуют рассеяние фонона фононом. В связи с получением более точных значений времени θ_{Φ} , которые удалось вычислить, исходя из экспериментальных значений коэффициента поглощения первого звука ³², появилась возможность произвести уточнение теории в этом пункте. При решении кинетического уравнения для фононов с учётом пятифононного процесса, в соответствующих формулах, определяющих величину фононной части коэффициента вязкости при $T > 0,9^\circ \text{ K}$, появляется дополнительный

множитель $\frac{1 + 0,75 \bar{\theta}/\theta_{\text{ф}}}{1 + 8\bar{\theta}/\theta_{\text{ф}}}$. Этот множитель отличен от единицы даже при малых значениях отношения $\bar{\theta}/\theta_{\text{ф}}$ вследствие наличия в его знаменателе большого коэффициента 8 при отношении $\bar{\theta}/\theta_{\text{ф}}$. Указанное обстоятельство заметно меняет величину фоновой части коэффициента вязкости.

В области температур выше $1,4 - 1,5^\circ \text{K}$, где фоновая часть коэффициента вязкости значительно меньше ротонной части, естественно, величина полного коэффициента вязкости η при таком уточнении практически не меняется. При более низких температурах, особенно вблизи 1°K , где прежде значения $\eta_{\text{ф}}$ находились интерполяцией $\left(\frac{\bar{\theta}}{\theta} \text{ порядка единицы}\right)$, формула (16.27), более точно учитывающая пятифононный процесс, даёт значения $\eta_{\text{ф}}$, меньшие чем полученные интерполяцией. Ранее полученные результаты для области температур ниже $0,8^\circ \text{K}$ остаются при этом в силе. Поправочный множитель при $T = 0,8^\circ \text{K}$ всего на 5% отличается от предельного значения $3/32$, получающегося в предельном случае чрезвычайной быстроты пятифононного процесса ($\theta_{\text{ф}} \ll \bar{\theta}$). Значения $\eta_{\text{ф}}$, вычисленные по формуле (16.27), приведены в таблице II.

Таблица II

$T^\circ \text{K}$	2,0	1,8	1,6	1,4	1,2
$\eta_{\text{ф}}$ (пуаз)	$3,1 \cdot 10^{-7}$	$6,5 \cdot 10^{-7}$	$1,5 \cdot 10^{-6}$	$2,55 \cdot 10^{-6}$	$7,2 \cdot 10^{-6}$
$T^\circ \text{K}$	1,0	0,8	0,7	0,6	
$\eta_{\text{ф}}$ (пуаз)	$3,0 \cdot 10^{-5}$	$17,3 \cdot 10^{-5}$	$56 \cdot 10^{-5}$	$175 \cdot 10^{-5}$	

На рис. 8 изображён температурный ход коэффициента вязкости $\eta = \eta_{\text{ф}} + \eta_{\text{р}}$ ($\eta_{\text{р}} = 1,15 \cdot 10^{-5}$ пуаз). Там же для сравнения приведены значения коэффициента вязкости, измерение Э. Андроникашвили³³ по затуханию крутильных колебаний диска, погружённого в гелий II. Эти эксперименты были повторены группой авторов³⁴, полностью подтвердившими результаты Э. Андроникашвили. Следует заметить, что указанные авторы³⁴ допустили ошибку при вычислении поправки на краевые эффекты. В правильной формуле, приведенной в работе³³, они заменили в одном месте $\rho_{\text{н}}$ на ρ .

Если из значений декремента затухания, полученных этими авторами, вычислить значения коэффициента вязкости, пользуясь правильной формулой для соответствующей поправки, то при этом получают значения η , в общем хорошо согласующиеся с данными Э. Андро-

никашвили³³, но при низких температурах, примерно на 10 — 15% меньше, чем в³³.

В последнее время появилась работа Холлис—Халлета^{35, 36}, в которой автор также повторил опыты Э. Андроникашвили. Значения коэффициента вязкости, полученные в этой работе, оказываются несколько ниже даваемых Э. Андроникашвили, за исключением одной температурной точки ($T = 1,255^\circ \text{K}$), для которой автор получил неестественно большое значение η . В целом результаты³⁵ согласуются с другими измерениями коэффициента вязкости гелия II.

Общий вывод, который можно сделать из сравнения всех указанных опытов, состоит в том, что предсказания теории о температурном ходе коэффициента вязкости полностью подтверждаются.

У всех авторов при высоких температурах наблюдается не зависящий от температуры постоянный участок на кривой температурной зависимости η . При понижении же температуры вязкость гелия II возрастает (фононная часть вязкости). Теоретические значения коэффициента вязкости, вычисленные по формуле (16.29), в пределах точности эксперимента согласуются с измерениями в работах^{33, 34} и^{35, 36}.

Коэффициент вязкости гелия II удаётся также получить из наблюдения затухания второго звука. Такой

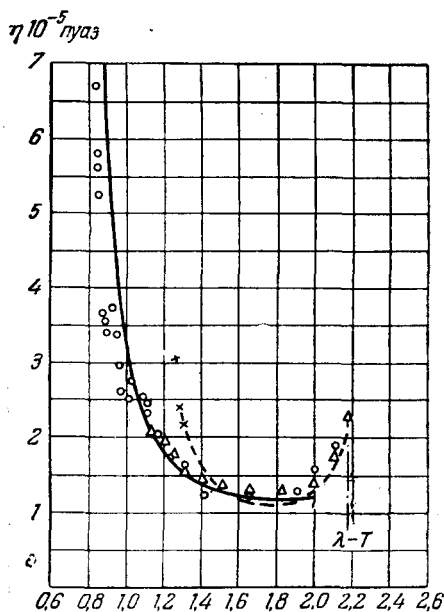


Рис. 8. Температурная зависимость коэффициента первой вязкости:

○ — Зиновьева³⁷, △ — Хейккила и Холлис-Халлет³⁶, × — Холлис-Халлет³⁵, + — Де Тройер и Иттербик³⁴, — — — Андроникашвили³³, — теоретические значения³⁰.

метод был применён К. Зиновьевой³⁷, измерившей поглощение второго звука в цилиндрическом сосуде. Та часть поглощения, которая определяется рассеянием звука на стенках сосуда, зависит в основном от вязкости гелия II и имеет характерную частотную зависимость (коэффициент поглощения пропорционален корню из частоты звука). Выделив из полного поглощения эту часть, К. Зиновьева получила значения коэффициента вязкости вплоть до температуры $0,8^\circ \text{K}$. Полученные в этой работе значения η согласуются с ранее вычисленными теоретическими значениями.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. П. Л. Капица, ДАН **18**, № 1, 29 (1938).
 2. П. Л. Капица, ЖЭТФ **11**, 1 (1941).
 3. П. Л. Капица, ЖЭТФ **11**, 581 (1941).
 4. Л. Д. Ландау, ЖЭТФ **11**, 592 (1941).
 5. Л. Д. Ландау, Journ. of Phys. **11**, 91 (1947).
 6. Н. Н. Боголюбов, Известия АН, сер. физ. **XI**, № 1, 77 (1947).
 7. Н. Боголюбов и Д. Зубарев, ЖЭТФ **29** (1955).
 8. R. Feynman, Phys. Rev. **94**, 262 (1954).
 9. A. Bigl, Physica **7**, 869 (1946).
 10. D. Henshaw a. D. Hurst, Phys. Rev. **91**, 1222 (1953).
 11. R. Hull, K. Wilkinson a. J. Wilks, Proc. Phys. Soc. **64A**, 379 (1951).
 12. В. Пешков, ЖЭТФ **23**, 687 (1952).
 13. K. Atkins a. C. Chase, Proc. Phys. Soc. **64A**, 826 (1951).
 14. Е. Лифшиц, УФН **34**, 512 (1948).
 15. И. Халатников, Диссертация ИФП (1948).
 16. W. Keesom a. W. Westmijze, Physica **8**, 1044 (1941).
 17. Э. Андроникашвили, ЖЭТФ **16**, 780 (1946).
 18. W. Keesom a. miss A. Keesom, Physica **2**, 557 (1935); **3**, 359 (1935).
 19. Kramers, Wasscher a. Gorter, Physica **18**, 329 (1952).
 20. Л. Д. Ландау и И. М. Халатников, ЖЭТФ **19**, 637 (1949).
 21. И. М. Халатников, ЖЭТФ **20**, 243 (1950).
 22. J. G. Daunt, R. S. Smith, Rev. of mod. Phys. **26**, № 2, 172 (1954).
 23. K. Atkins a. M. Edwards, Phys. Rev. **97**, 1429 (1955).
 24. J. Fingley и др., Phys. Rev. **56**, 122 (1939); **54**, 506 (1938).
 25. W. Keesom a. miss A. Keesom, Physica **1**, 128 (1933).
 26. В. Пешков и К. Зиновьева, ЖЭТФ **18**, 438 (1948).
 27. В. Кеэом, Гелий, ИЛ (1949).
 28. И. М. Халатников, Диссертация, ИФП (1952).
 29. И. М. Халатников, ЖЭТФ **23**, 8 (1952).
 30. И. М. Халатников, ЖЭТФ **23**, 21 (1952).
 31. Л. Д. Ландау и И. М. Халатников, ЖЭТФ **19**, 709 (1949).
 32. J. Pellam a. C. Squire, Phys. Rev. **72**, 1245 (1947).
 33. Э. Андроникашвили ЖЭТФ, **18**, 429 (1948), Диссертация ИФП (1948).
 34. A. de Troyer, A van Itterbeek a. G. Van den Berg, Physica **17**, 50 (1951).
 35. A. Hollis—Hallett, Proc. Roy Soc. **210**, 404 (1952).
 36. W. Heikkila a. A. Hollis—Hallett, Can. Journ. of Phys. **33**, 420 (1955).
 37. К. Зиновьева, ЖЭТФ (в печати).
-