1956 г. Июнь Т. LIX, вып. 2

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ И МЕРА ДВИЖЕНИЯ В ФИЗИКЕ

В. С. Сорокин

ВВЕДЕНИЕ

Происходившее в течение последних лет обсуждение смысла закона Эйнштейна (называемого также законом эквивалентности массы и энергии или законом взаимосвязи массы и энергии), несмотря на то, что в нём приняло участие большое число физиков и философов, всё же оставляет впечатление неудовлетворённости. Закон Эйнштейна связывает два, на первый взгляд совершенно различных понятия, — понятия энергии и массы, из которых только понятие энергии кажется достаточно ясным. Понятие же массы при обсуждении закона Эйнштейна обычно не анализируется, может быть, потому, что оно считается привычным. В лучшем случае мимоходом упоминают, что «масса есть мера инертности». В действительности же понятие массы не так просто.

Сказать, что масса есть мера инертности, значит ничего не сказать, так как совершенно не ясно, что такое инертность, и ещё менее ясно, как определяется её мера.

В этой неотчётливости понятия массы и заключается, на наш взгляд, причина того, что обсуждение закона Эйнштейна не привело к выяснению его смысла. На самом деле, масса, по самому её понятию, неразрывно связана с энергией, и смысл обеих этих величин не может быть понят без разбора закона сохранения движения. Этот закон не равносилен закону сохранения энергии, являющемуся лишь одной из его сторон.

Закон же Эйнштейна является лишь одним из следствий закона сохранения движения, и всякое его обсуждение должно исходить из этого закона и понятия меры движения, вовсе не характерных для релятивистской физики и установленных ещё в классической теории.

Вот почему мы считаем полезным изложить закон сохранения движения и неразрывно связанное с этим законом учение о мере движения, как они понимаются в физике. Нам кажется, что излагаемые в этой работе факты, твёрдо установленные современной теорией, должны служить исходным пунктом всякого философствования о массе, энергии и законе сохранения движения.

Чтобы сделать изложение более доступным и яснее обнаружить корни закона эквивалентности, вся теория излагается сначала на основе классических представлений о пространстве и времени, а затем все рассуждения повторяются, учитывая существование критической скорости. Читатель, не знакомый с математической стороной теории относительности, может только проследить за ходом мыслей во второй части (§ 3—4), опуская все вычисления.

§ 1. МЕРА МЕХАНИЧЕСКОГО ДВИЖЕНИЯ В КЛАССИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ

Различные виды движения материи способны без ограничений превращаться друг в друга. Такие превращения могут происходить или в пределах одной физической системы, например, когда механическое движение превращается в тепловое, или движение в одной системе может возбуждать движение в других. Однако *при всех превращениях движение не уничтожается и не возникает*.

Обычно это утверждение считается почти очевидным и совершенно ясным по содержанию. На самом же деле без понятия *меры движения* оно было бы лишено всякого смысла, так как о сохранении движения при его превращениях можно говорить только тогда, когда можно говорить о «количестве» движения каждого вида. Понятие меры неразрывно связано с законом сохранения движения, и если бы не было меры движения, ни о какой его неуничтожимости нельзя было бы говорить.

Таким образом, мы должны допустить и доказать экспериментально, что всякая физическая система, в которой происходят движения различных видов, обладает мерой всего происходящего в ней движения. Если эта система взаимодействует с другими системами и передаёт им (или получает от них) движение, то её мера движения изменяется так же, как и меры движения систем, с которыми она связана; однако общая мера движения всех взаимодействующих систем должна оставаться неизменной. Это утверждение обычно называют принципом сохранения энергии. До сих пор оно оказывалось во всех случаях верным, и его можно считать одним из основных принципов современной науки.

Термин «энергия» в названии этого принципа значит то же, что термин «движение». Но это же слово «энергия» употребляется в физике и в другом смысле — именно в смысле «мера движения». Такое словоупотребление вполне понятно и лишний раз подтверждает, что сохранение движения неразрывно связано с понятием его меры. Но нельзя смешивать эти два совершенно различных понятия, и дальше мы будем говорить о законе сохранения и превращения движения и о мере движения. Термин же «энергия» нецелесообразно вводить до выяснения свойств меры движения.

При изучении любого движения прежде всего встаёт вопрос о численном значении его меры. Но качественно различные виды движения непосредственно количественно несравнимы. Только превратив их в движение одного и того же вида, можно сравнить их меры и, следовательно, определить их численные значения. Поэтому для того, чтобы вообще можно было ввести понятие меры движения, необходимо, чтобы всякое движение могло, хотя бы в принципе, превращаться в движение одного определённого вида; утверждение о способности любого вида движения превращаться в любой другой вид движения входит в содержание закона сохранения движения.

Некоторый определённый вид движения должен быть принят за основной и должен играть роль всеобщего эквивалента движения, воплощая в себе понятие меры. Какой именно вид движения должен быть выбран — принципиально безразлично, но в современной физике основным считается обычно механическое движение. Движение — это, прежде всего, изменение, а механическое движение — изменение положения макроскопических частиц вещества друг относительно друга. Выбор этого вида движения в качестве всеобщего эквивалента не случаен. Для изучения любых физических систем и любых видов движения приходится строить «системы отсчёта», опорными точками которых являются частицы вещества. Любая система (или любое явление) может изменить своё положение по отношению к опорным частицам. Другими словами, пространство и время изучаются в современной физике в тесной связи с механическим движением. Проблема меры этого вида движения приобретает основное значение.

По самому понятию механическое движение относительно в том смысле, что одна частица вещества может двигаться только относительно других, и говорить о механическом движении частицы в отсутствии других частиц бессмысленно. Конечно, действительное движение частиц абсолютно в другом смысле — и сама частица и её движение существуют независимо от того, изучаем мы их или нет. Но механическое движение есть изменение взаимного положения частиц, и потому одна, рассматриваемая изолированно частица не обладает механическим движением, так как нет «взаимного расположения», которое могло бы меняться. Только в этом смысле и будет дальше употребляться термин «относительно».

Так как состояние частицы, поскольку оно определяет её механическое движение, должно определяться относительно других частиц, необходимо прежде всего выбрать систему отсчёта, т. е. опорные частицы, по отношению к которым будет изучаться движение. Опорные частицы можно, конечно, выбрать произвольно; но так как они, вообще говоря, будут передавать движение друг другу, движение изучаемой частицы окажется переплетённым с движением других частиц, и будет очень трудно уловить его закономерности. Поэтому потребуем, прежде всего, чтобы опорные частицы не были связаны ни друг с другом, ни с исследуемой частицей, ни с какими-либо внешними системами. Другими словами, потребуем, чтобы системы отсчёта строились на свободных частицах. Для свободных частиц давно уже установлен закон, согласно которому такие частицы движутся одна относительно другой с постоянными скоростями (закон инерции).

Этот закон даёт возможность поставить второе условие: опорные частицы должны быть неподвижны друг относительно друга. Системы отсчёта, удовлетворяющие этим двум условиям, называются инерциальными.

Более подробно можно было бы следующим образом описать изучение движения частицы относительно инерциальной системы отсчёта: основой системы отсчёта будут какие-либо четыре свободные частицы, неподвижные друг относительно друга и не лежащие в одной плоскости. Одну из них можно взять за начало прямолинейной системы координат и провести оси этой системы через три остальные частицы. Положение изучаемой частицы можно задать теперь её координатами в этой прямолинейной системе.

Если бы мы построили вторую инерциальную систему отсчёта, то по закону инерции каждая из её опорных частиц двигалась бы по отношению к опорным частицам первой инерциальной системы отсчёта с одной и той же постоянной скоростью. Эту скорость можно считать скоростью второй системы отсчёта относительно первой. Таким образом, любая инерциальная система отсчёта движется относительно любой другой с постоянной скоростью. И наоборот, мы получим все инерциальные системы отсчёта, если, взяв любую такую систему, построить для каждой мыслимой скорости u инерциальную систему отсчёта, движущуюся относительно первой с этой скоростью. Следовательно, существует бесчисленное множество инерциальных систем отсчёта, и по их определению ясно, что ни одна из них ничем не выделяется среди других. Важно подчеркнуть, что это не есть чисто логическое положение. В основе его лежит экспериментальный факт — закон инерции. Но из закона инерции и определения инерциальных систем отсчёта уже следует их равноправность.

Всякое явление можно рассматривать в связи с некоторой инерциальной системой отсчёта, которая, конечно, не будет иметь к нему никакого существенного отношения (ведь опорные частицы системы отсчёта предполагаются свободными). Очевидно, что точно такое же явление может происходить точно таким же образом по отношению к любой другой инерциальной системе отсчёта. Всё, что может случиться в одной инерциальной системе отсчёта, в точности так же может произойти во всякой другой. Логически это положение кажется несомненным следствием закона инерции, и в современной физике оно считается также твёрдо установленным опытным фактом с той оговоркой, что явления, о которых идёт речь, должны разыгрываться в не очень больших областях пространства и в течение не очень больших промежутков времени. Это положение выражает, очевидно, некоторое свойство пространства и времени, напоминающее изотропность. Все явления, происходя в пространстве и времени, должны, так сказать, приноравливаться к этим формам существования материи. Как известно, открытие Галилеем этого принципа для механических явлений положило начало современной механике.

Этот принцип называется принципом относительности. Из него вытекает, в частности, что всякий физический закон должен формулироваться так, что в его формулировке не будет указания ни на какую индивидуальную инерциальную систему отсчёта. Это обстоятельство придаёт принципу относительности исключительную эвристическую силу. Требование одинаковости формулировки законов природы по отношению ко всем инерциальным системам отсчёта оказывается часто настолько сильным, что позволяет вывести точные функциональные связи между различными физическими величинами, исходя из самых простых качественных закономерностей. Часто считают такое применение принципа относительности характерным для так называемой релятивистской физики. Однако совершенно ясно, что этот принцип играет совершенно одинаковую роль и в классической и в релятивистской теории. Он не применялся в классической физике только потому, что все существенные результаты в ней были получены раньше, чем было понято его значение. Как мы увидим, из-за этого некоторые существенные закономерности оказались в старой физике не раскрытыми.

Рассмотрим теперь частицу вещества в некоторой инерциальной системе отсчёта. Состояние её движения в любой момент определяется существующим в этот момент в частице распределением скоростей, так как разные точки частицы могут двигаться с разными скоростями. Однако всегда можно мысленно разделить частицу на меньшие, так чтобы внутри каждой из меньших частиц скорость была везде почти одной и той же. Тогда можно говорить просто о скорости частицы, и дальше будет предполагаться, что рассматриваемая частица в этом смысле достаточно мала. Пусть её скорость в выбранной инерциальной системе отсчёта (система отсчёта I) будет $\mathbf{v}$. Скорость эта полностью характеризует состояние движения частицы, ибо положение частицы не имеет значения:

при той же скорости в другом месте движение будет точно таким же, а внутренние движения считаются или отсутствующими, или не имеющими значения. Следовательно, мера механического движения частицы в данной системе отсчёта должна определённым образом зависеть от её скорости и полностью определяться ею.

Большинство читателей, вероятно, сейчас же представит себе эту меру как некоторое число, дающее «количество движения» частицы, и, смешивая неуничтожимость с абсолютностью, будет склонно требовать от этого числа инвариантности, т. е. склонно будет думать, что это число должно быть одним и тем же во всех инерциальных системах отсчёта. Однако это очевидным образом невозможно: мы только что видели, что мера должна определяться скоростью, а скорость одной и той же частицы в один и тот же момент совершенно различна в разных системах отсчёта. Инвариантная мера должна была бы иметь одно и то же значение при всех скоростях, т. е. не могла бы измерять движения.

Итак, мера механического движения частицы должна быть относительной, как и само механическое движение, и следует говорить о мере движения относительно данной инерциальной системы отсчёта или о мере в данной системе отсчёта. В другой инерциальной системе отсчёта мера механического движения той же самой частицы в тот же момент времени будет другой, и это не противоречит неуничтожимости движения.

Какова же мера движения при данной скорости частицы в определённой системе отсчёта? Ясно, что должна существовать характерная для данной частицы функция её скорости

$$\varepsilon(\mathbf{v}), \qquad (1.1)$$

определяющая меру движения. Вид этой функции, т. е. характер зависимости меры движения от скорости, конечно, заранее не известен и может быть разным для разных частиц. Но, какова бы ни была эта зависимость, она выражает некоторый динамический закон — закон, определяющий «количество движения» частицы при данной её скорости, — и, как всякий закон, эта зависимость не должна содержать указания ни на какую индивидуальную инерциальную систему отсчёта. Если частица движется со скоростью $\mathbf{v}$ относительно системы отсчёта I, она должна обладать в этой системе отсчёта точно такой же мерой движения, какой обладала бы относительно другой инерциальной системы отсчёта II точно такая же частица, движущаяся в этой II системе с той же скоростью $\mathbf{v}$. Вид функции $\varepsilon(\mathbf{v})$ должен быть для данной частицы одним и тем же во всех инерциальных системах отсчёта.

Выразим это требование математически. Пусть инерциальная система отсчёта II движется относительно такой же системы отсчёта I со скоростью $\mathbf{u}$. Пусть в системе отсчёта I скорость частицы была $\mathbf{v}$ и, следовательно, мера движения $\varepsilon(\mathbf{v})$. В системе отсчёта II скорость этой же частицы будет уже не $\mathbf{v}$, а по правилу сложения скоростей

$$(\mathbf{v}-\mathbf{u})\,^{*}). \tag{1.2}$$

Мера же движения во II системе отсчёта вычисляется по этой скорости точно так же, как в I системе отсчёта, т. е. она будет

$$\varepsilon(\mathbf{v}-\mathbf{u}) \tag{1.3}$$

с той же самой функцией ε, как и раньше.

Всё последующее уже содержится в этих формулах и в понятии меры. Дело математики — выяснить, что следует из допущения инвариантности связи между скоростью и мерой движения или, точнее, что мы утверждаем, допуская эту инвариантность.

В понятии меры содержится, во-первых, свойство её сохранения: если движение не передаётся другим системам, а только превращается в пределах той же системы, то его мера не должна меняться. Во-вторых, в понятии меры содержится её аддитивность: мера движения системы, состоящей из несвязанных друг с другом частей, равных сумме мер этих частей. Функции $\varepsilon(\mathbf{v})$ (для разных частиц они могут быть разными) должны быть такими, чтобы оба эти свойства выполнялись в системах, состоящих из частиц.

Рассмотрим случай, когда две первоначально не связанные между собой частицы вступают во взаимодействие, передают друг другу движение и вновь расходятся, так что всякая связь между ними прекращается. Пусть при этом движение остаётся механическим и не превращается ни в какие другие виды. Исследуем сначала этот процесс в системе отсчёта I. Пусть до сближения скорости частиц в этой системе отсчёта были $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$, а после сближения $\mathbf{v}_1'$ и $\mathbf{v}_2'$.

Меры движения обеих частиц связаны с их скоростями некоторыми зависимостями, вообще говоря, различными для обеих частиц, но одинаковыми для одной и той же частицы до и после сближения (так как их строение не меняется). Так как до и после сближения частицы не связаны, то, по свойству меры, мера всей системы равна сумме мер обеих частиц. Сохранение движения требует тогда, чтобы выполнялось условие

$$\varepsilon_1(\mathbf{v}_1)+\varepsilon_2(\mathbf{v}_2)=\varepsilon_1(\mathbf{v}_1')+\varepsilon_2(\mathbf{v}_2'). \tag{1.4}$$

---

*) Справедливость этого правила, а следовательно, и справедливость всего последующего в этом параграфе ограничена скоростями, малыми по сравнению со скоростью света; классическая теория это обстоятельство игнорирует.

Теперь этот же самый процесс рассмотрим по отношению ко II системе отсчёта (скорость которой в I, как уже сказано, равна $\mathbf{u}$).

В этой системе отсчёта скорости частиц до сближения будут

$$(\mathbf{v}_1 - \mathbf{u}), \quad (\mathbf{v}_2 - \mathbf{u}),$$

а после сближения

$$(\mathbf{v}_1' - \mathbf{u}), \quad (\mathbf{v}_2' - \mathbf{u}).$$

По этим скоростям можно вычислить меры движения обеих частиц во II системе отсчёта, причём по принципу относительности зависимость меры движения каждой частицы от её скорости будет в новой системе отсчёта точно такая же, как в старой, так что эта зависимость будет выражаться для первой частицы той же функцией ε_1, а для второй — ε_2. Поэтому сохранение движения запишется в новой системе отсчёта так:

$$\varepsilon_1(\mathbf{v}_1 - \mathbf{u}) + \varepsilon_2(\mathbf{v}_2 - \mathbf{u}) = \varepsilon_1(\mathbf{v}_1' - \mathbf{u}) + \varepsilon_2(\mathbf{v}_2' - \mathbf{u}). \qquad (1.5)$$

Скорость же $\mathbf{u}$ совершенно произвольна, так как для любого $\mathbf{u}$ можно построить соответствующую инерциальную систему.

Отсюда видно, что характер функций ε_1 и ε_2 совершенно особенный: при уменьшении всех аргументов в уравнении (1.4) на одну и ту же произвольную величину $\mathbf{u}$ равенство не нарушится.

Из этого факта вытекает одно следствие, которое может показаться неожиданным, хотя оно уже содержится в понятии относительной меры, инвариантно связанной со скоростью. Обозначим явно зависимость меры движения от трёх составляющих скорости

$$\varepsilon(\mathbf{v}) = \varepsilon(v_x, v_y, v_z) \qquad (1.6)$$

и выберем скорость $\mathbf{u}$ так, чтобы она была параллельна оси x

$$u_x = u, \quad u_y = u_z = 0 \qquad (1.7)$$

и притом бесконечно малой.

С точностью до малых второго порядка можно написать

$$\varepsilon_1(\mathbf{v}_1 - \mathbf{u}) = \varepsilon_1(v_{1x} - u, v_{1y}, v_{1z}) = \\ = \varepsilon_1(v_{1x}, v_{1y}, v_{1z}) - u\frac{\partial \varepsilon_1(v_{1x}, v_{1y}, v_{1z})}{\partial v_{1x}} \qquad (1.8)$$

и аналогично для других слагаемых в формуле (1.5). Тогда условие сохранения меры во II системе отсчёта (1.5) будет:

$$\varepsilon_1(\mathbf{v}_1)+\varepsilon_2(\mathbf{v}_2)-u\left[\frac{\partial\varepsilon_1(\mathbf{v}_1)}{\partial v_{1x}}+\frac{\partial\varepsilon_2(\mathbf{v}_2)}{\partial v_{2x}}\right]=$$
$$=\varepsilon_1(\mathbf{v}_1')+\varepsilon_2(\mathbf{v}_2')-u\left[\frac{\partial\varepsilon_1(\mathbf{v}_1')}{\partial v_{1x}'}+\frac{\partial\varepsilon_2(\mathbf{v}_2')}{\partial v_{2x}'}\right]. \qquad (1.9)$$

В силу сохранения меры в системе отсчёта I, т. е. уравнения (1.4), сокращая ещё на u (что можно сделать, так как u произвольно), мы получим отсюда:

$$\frac{\partial\varepsilon_1(\mathbf{v}_1)}{\partial v_{1x}}+\frac{\partial\varepsilon_2(\mathbf{v}_2)}{\partial v_{2x}}=\frac{\partial\varepsilon_1(\mathbf{v}_1')}{\partial v_{1x}'}+\frac{\partial\varepsilon_2(\mathbf{v}_2')}{\partial v_{2x}'}. \qquad (1.10)$$

Ещё два подобных же уравнения мы получим, выбирая $\mathbf{u}$ параллельным осям y и z:

$$\frac{\partial\varepsilon_1(\mathbf{v}_1)}{\partial v_{1y}}+\frac{\partial\varepsilon_2(\mathbf{v}_2)}{\partial v_{2y}}=\frac{\partial\varepsilon_1(\mathbf{v}_1')}{\partial v_{1y}'}+\frac{\partial\varepsilon_2(\mathbf{v}_2')}{\partial v_{2y}'}, \qquad (1.11)$$

$$\frac{\partial\varepsilon_1(\mathbf{v}_1)}{\partial v_{1z}}+\frac{\partial\varepsilon_2(\mathbf{v}_2)}{\partial v_{2z}}=\frac{\partial\varepsilon_1(\mathbf{v}_1')}{\partial v_{1z}'}+\frac{\partial\varepsilon_2(\mathbf{v}_2')}{\partial v_{2z}'}. \qquad (1.12)$$

Все эти три уравнения можно записать короче, если заметить, что три величины

$$\frac{\partial\varepsilon(\mathbf{v})}{\partial v_x},\quad \frac{\partial\varepsilon(\mathbf{v})}{\partial v_y},\quad \frac{\partial\varepsilon(\mathbf{v})}{\partial v_z} \qquad (1.13)$$

образуют три составляющие некоторого вектора (это значит, что при повороте координатных осей такие же три производные, вычисленные в новых осях, будут связаны со старыми производными точно такими же формулами, как составляющие отрезка по новым осям с его составляющими по старым). Обозначим этот вектор

$$\frac{\partial\varepsilon(\mathbf{v})}{\partial\mathbf{v}}.$$

Тогда три уравнения (1.10—1.12) можно записать в виде одного векторного уравнения

$$\frac{\partial\varepsilon_1(\mathbf{v}_1)}{\partial\mathbf{v}_1}+\frac{\partial\varepsilon_2(\mathbf{v}_2)}{\partial\mathbf{v}_2}=\frac{\partial\varepsilon_1(\mathbf{v}_1')}{\partial\mathbf{v}_1'}+\frac{\partial\varepsilon_2(\mathbf{v}_2')}{\partial\mathbf{v}_2'}, \qquad (1.14)$$

которое имеет вид некоторого закона сохранения, именно закона сохранения векторной величины

$$\frac{\partial\varepsilon(\mathbf{v})}{\partial\mathbf{v}}.$$

Величина эта имеет поэтому такое же право на название меры (механического) движения, как и скалярная мера $\varepsilon(\mathbf{v})$, только это будет векторная мера.

Допустив существование скалярной меры, мы, пока только для механического движения, оказываемся вынужденными допустить также и существование векторной меры. Свойства пространства и времени таковы, что мера движения, во всяком случае для механического движения, должна быть двоякой, иначе она, так сказать, не входит в пространство и время.

Скалярную меру движения частицы принято называть кинетической энергией

$$\varepsilon=\varepsilon(\mathbf{v}), \tag{1.15}$$

а векторную меру — импульсом

$$\mathbf{p}=\frac{\partial\varepsilon(\mathbf{v})}{\partial\mathbf{v}}. \tag{1.16}$$

Теперь мы должны остановиться на двух возражениях, которые можно было бы сделать против законности наших выводов.

Во-первых, можно было бы сказать, что в действительности векторной меры не существует, так как производная $\frac{\partial\varepsilon}{\partial\mathbf{v}}$ может быть просто постоянной, и векторный закон сохранения выполняется тождественно — слева и справа всегда стоит одно и то же. Это возражение легко опровергается. Если

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial\mathbf{v}}=\mathbf{a}=\mathrm{const},$$

то

$$\varepsilon(\mathbf{v})=\mathbf{a}\mathbf{v}+b.$$

Но это значило бы, что в пространстве существует некоторое направление (именно направление вектора $\mathbf{a}$), такое, что при данной быстроте движения кинетическая энергия зависит от угла, образуемого скоростью с этим направлением. Опыт же показывает, что энергия зависит только от скорости, но не от направления скорости. Следовательно, импульс зависит от скорости и является настоящей мерой движения.

Второе возражение таково. Сохранение импульса, так же как и сохранение энергии, должно выполняться во всех инерциальных системах отсчёта. Значит, уравнение (1.14) тоже должно оставаться верным при уменьшении всех аргументов на одну и ту же произвольную величину u. Повторяя прежние рассуждения, мы пришли бы к новым законам сохранения для девяти новых величин, которые удобно записать в виде таблицы:

$$\left.\begin{array}{ccc} \dfrac{\partial^2\varepsilon}{\partial v_x^2}, & \dfrac{\partial^2\varepsilon}{\partial v_y \partial v_x}, & \dfrac{\partial^2\varepsilon}{\partial v_z \partial v_x}, \\ \dfrac{\partial^2\varepsilon}{\partial v_x \partial y_y}, & \dfrac{\partial^2\varepsilon}{\partial v_y^2}, & \dfrac{\partial^2\varepsilon}{\partial v_z \partial v_y}, \\ \dfrac{\partial^2\varepsilon}{\partial v_x \partial v_z}, & \dfrac{\partial^2\varepsilon}{\partial v_y \partial v_z}, & \dfrac{\partial^2\varepsilon}{\partial v_z^2}. \end{array}\right\} \tag{1.17}$$

Из этих девяти величин только шесть различных, так как порядок вычисления производных по независимым переменным безразличен. Все эти производные являются составляющими симметричного тензора второго ранга, и казалось бы, кроме скалярного и векторного, должен существовать ещё и тензорный закон сохранения, а следовательно, ещё и тензорная мера движения. Затем, исходя из этого тензорного закона сохранения и рассуждая попрежнему, мы пришли бы к бесконечному множеству тензорных мер любого ранга.

Положение кажется катастрофическим. Ведь каждый закон сохранения ставит некоторые условия, которым должно удовлетворять движение частиц после сближения. Если этих условий слишком много, им вообще нельзя будет удовлетворить, и всякая передача движения станет невозможной. В нашем случае движение частиц после сближения характеризуется двумя векторами — скоростями обеих частиц, т. е. всего шестью величинами:

$$v'_{1x}, \quad v'_{1y}, \quad v'_{1z}; \quad v'_{2x}, \quad v'_{2y}, \quad v'_{2z},$$

и, следовательно, удовлетворить можно, самое большее, шести условиям, т. е. шести законам сохранения. Одно из этих условий — сохранение энергии. Ещё три даёт сохранение импульса. Если тензорная величина (1.17) тоже должна сохраняться, мы получим уже $1+3+6=10$ условий, удовлетворить которым будет невозможно, и частицы вообще не смогут сталкиваться. Однако опыт показывает, что они очень хорошо передают друг другу движение.

Это значит, что *все тензорные законы сохранения, начиная со второго ранга, должны или выполняться тривиальным образом, т. е. тождественно удовлетворяться при любых скоростях, или они должны быть следствием скалярного и векторного законов.*

Это требование позволяет полностью определить характер зависимости меры движения от скорости.

Действительно, во-первых, мы уже видели, что из-за изотропности пространства функция $\varepsilon(\mathbf{v})$ зависит только от величины, но не от направления скорости. Поэтому, меняя обозначения, напишем:

$$\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{v}^2) \tag{1.18}$$

и вычислим первые и вторые производные. Очевидно:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial v_x} &= \varepsilon'(\mathbf{v}^2)\cdot 2v_x, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial v_y \partial v_x} &= \frac{\partial}{\partial v_y}[\varepsilon'(\mathbf{v}^2)\cdot 2v_x] = \varepsilon''(\mathbf{v}^2)\cdot 4v_x v_y, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial v_x^2} &= \frac{\partial}{\partial v_x}[\varepsilon'(\mathbf{v}^2)\cdot 2v_x] = \varepsilon''(\mathbf{v}^2)\cdot 4v_x^2 + 2\varepsilon'(\mathbf{v}^2) \end{aligned}\right\} \tag{1.19}$$

(здесь штрих обозначает производную по v^2) и аналогично для остальных производных.

Во-вторых, сохранение тензора (1.17) должно получиться или автоматически, или как следствие сохранения скаляра $\varepsilon(\mathbf{v}^2)$ и вектора $\frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{v}}$. При этом, для того чтобы из аддитивных законов сохранения (1.4) и (1.14) получился аддитивный же закон сохранения тензора, необходимо, чтобы составляющие тензора выражались линейно через составляющие вектора и скаляр, т. е. чтобы было ($i,\ k = x,\ y,\ z$)

$$\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial v_i \partial v_k} = a_{ik} + b_{ik}\varepsilon + \sum_l c_{ikl}\frac{\partial \varepsilon}{\partial v_l}, \tag{1.20}$$

где a_{ik}, b_{ik} и c_{ikl} — постоянные тензоры, из которых первый может быть различным для разных частиц, а остальные — универсальные, т. е. для всех частиц одинаковые. Если взять $i \neq k$, то, как видно из (1.19), в левую часть формулы (1.20) будет входить произведение $v_i v_k$, а в правой части его не будет. Отсюда следует, что

$$\varepsilon''(\mathbf{v}^2) = 0,$$

т. е. что

$$\varepsilon(\mathbf{v}^2) = \frac{m\mathbf{v}^2}{2} + \varepsilon_0,$$

где m и ε_0 — постоянные, значения которых могут быть различны для различных частиц.

Итак, всякая частица вещества имеет скалярную меру её механического движения (кинетическую энергию), связанную со скоростью законом

$$\varepsilon = \frac{m\mathbf{v}^2}{2} + \varepsilon_0 \tag{1.21}$$

и, кроме того, векторную меру — импульс, зависимость которой от скорости определяется формулой

$$\mathbf{p} = \frac{\partial \varepsilon(\mathbf{v}^2)}{\partial \mathbf{v}} = m\mathbf{v}. \qquad (1.22)$$

Постоянная ε_0 даёт, очевидно, скалярную меру внутренних движений неподвижной частицы. Пока частица не разрушается и не изменяет своей структуры, эта энергия неизменна. Поэтому в механике её просто не рассматривают. Постоянная же m, входящая в выражение обеих мер, называется *инертной массой* частицы. Она характеризует способность частицы иметь при данной скорости определённое «количество движения», двояко измеряемое энергией и импульсом, и является, следовательно, её свойством. То, что это свойство неизменно (в частности, не зависит от состояния движения), получается здесь само собой как следствие принципа относительности и правила сложения скоростей (1.2).

Резюмируя, можно сказать: в нашем пространстве и времени может существовать только двоякая мера механического движения — скалярно-векторная мера, обе составные части которой — кинетическая энергия и импульс — определяются скоростью частицы. Характер их зависимости от скорости определяется с помощью принципа относительности *однозначно*: импульс просто пропорционален скорости, а энергия зависит от скорости квадратично. Масса, т. е. величина, связывающая обе меры со скоростью, оказывается не зависящим от скорости свойством вещества, т. е. постоянной, зависящей только от природы частицы.

§ 2. ОБЩАЯ ТЕОРИЯ МЕРЫ ДВИЖЕНИЯ В КЛАССИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ

Теперь перед нами возникает основной вопрос: являются ли свойства меры, установленные для механического движения, универсальными, или они специфичны для механического движения? В частности, обладает ли всякий вид движения векторной мерой — импульсом? Существование скалярной меры (энергии) любого вида движения, насколько мне известно, никогда не оспаривалось. Но импульс часто считают специфической мерой механического движения. Хотя вопрос этот совершенно ясен и теоретически (работам Эйнштейна уже пятьдесят лет) и экспериментально (опытам П. Н. Лебедева тоже около пятидесяти лет), представление об импульсе как о специально механической величине до сих пор очень распространено.

В действительности же легко доказать, что *любая* физическая система, в которой могут происходить движения *любого* вида, имеет так же, как и простая частица, две меры движения — энергию и импульс. Импульс — столь же универсальная мера движения, как и энергия.

Для доказательства выясним сначала, как связаны друг с другом меры механического движения одной и той же частицы, вычисленные по отношению к двум разным инерциальным системам отсчёта. Пусть в системе I, двигаясь со скоростью $\mathbf{v}$, частица имеет скалярную меру

$$\varepsilon_{\mathrm{I}} = \varepsilon(\mathbf{v}^2) = \frac{m\mathbf{v}^2}{2} + \varepsilon_0 \tag{2.1}$$

и векторную

$$\mathbf{p}_{\mathrm{I}} = \frac{\partial\varepsilon}{\partial\mathbf{v}} = m\mathbf{v}. \tag{2.2}$$

В инерциальной же системе отсчёта II, скорость которой по отношению к I равна $\mathbf{u}$, скорость той же частицы будет $(\mathbf{v} - \mathbf{u})$. При этой скорости скалярная мера будет

$$\varepsilon_{\mathrm{II}} = \varepsilon(\mathbf{v} - \mathbf{u}) = \frac{m}{2}(\mathbf{v} - \mathbf{u})^2 + \varepsilon_0 =$$

$$= \left(\frac{m\mathbf{v}^2}{2} + \varepsilon_0\right) - m\mathbf{v}\mathbf{u} + \frac{m\mathbf{u}^2}{2} = \varepsilon_{\mathrm{I}} - \mathbf{u}\mathbf{p}_{\mathrm{I}} + \frac{m\mathbf{u}^2}{2}, \tag{2.3}$$

а векторная

$$\mathbf{p}_{\mathrm{II}} = m(\mathbf{v} - \mathbf{u}) = \mathbf{p}_{\mathrm{I}} - m\mathbf{u}. \tag{2.4}$$

Эти формулы показывают, что обе меры следует считать скорее двумя составляющими одной сложной меры (вроде того, как, например, компоненты вектора являются составляющими одной более сложной величины), ибо в новой системе отсчёта энергия, например, выражается не только через энергию, но и через импульс в старой системе отсчёта.

Установив «закон преобразования» составляющих меры механического движения, рассмотрим теперь передачу движения от частицы A некоторой **н е м е х а н и ч е с к о й** (или не чисто механической) системе Σ. Пусть эти две системы сначала не связаны друг с другом, а затем, вступив во взаимодействие, передают друг другу движение и снова разделяются. Рассмотрим этот процесс сначала в инерциальной системе отсчёта I. Пусть в ней энергия частицы меняется в результате взаимодействия с ε_{I} на $\varepsilon_{\mathrm{I}}'$, а энергия системы Σ — с $\mathscr{E}_{\mathrm{I}}$ на $\mathscr{E}_{\mathrm{I}}'$. Сохранение энергии требует, чтобы выполнялось равенство

$$\varepsilon_{\mathrm{I}} + \mathscr{E}_{\mathrm{I}} = \varepsilon_{\mathrm{I}}' + \mathscr{E}_{\mathrm{I}}'. \tag{2.5}$$

Энергия немеханической системы Σ зависит от величин, характеризующих состояние её движения, в число которых может и не входить скорость — по той простой причине, что такой величины у сложной немеханической системы может и не быть.

Перейдём теперь к инерциальной системе отсчёта II, движущейся со скоростью $\mathbf{u}$ в первой системе отсчёта. Теперь энергия частицы A до взаимодействия с системой Σ будет ε_{II}, а после взаимодействия ε'_{II}. Энергии же системы Σ также не обязаны быть такими же, как в первой системе отсчёта (хотя знать заранее, так это или нет, мы, конечно, не можем). Сохранение энергии даёт теперь равенство

$$\varepsilon_{II} + \mathscr{E}_{II} = \varepsilon'_{II} + \mathscr{E}'_{II}. \tag{2.6}$$

Выразим в этой формуле энергии частицы A до и после взаимодействия через её энергии и импульсы в системе отсчёта I по формулам (2.3) и (2.4) и, перенеся все величины, относящиеся к частице A, на одну сторону, а относящиеся к системе Σ — на другую, запишем (2.6) в виде

$$\mathscr{E}'_{II} - \mathscr{E}_{II} = (\varepsilon_I - \varepsilon'_I) - \mathbf{u}\,(\mathbf{p}_I - \mathbf{p}'_I). \tag{2.7}$$

Наконец, пользуясь сохранением энергии в системе отсчёта I, заменим изменение энергии частицы A равным ему по величине и противоположным по знаку изменением энергии системы Σ (по уравнению (2.5). Это даст:

$$\mathscr{E}'_{II} - \mathscr{E}_{II} = (\mathscr{E}'_I - \mathscr{E}_I) - \mathbf{u}\,(\mathbf{p}_I - \mathbf{p}'_I). \tag{2.8}$$

Рассматривая это уравнение, мы видим, что изменение энергии немеханической системы Σ будет разным в разных системах отсчёта, если только изменяется импульс взаимодействующей с ней частицы. Но импульс частицы непременно должен меняться — так как если не меняется импульс, то не будет меняться её скорость, а следовательно, и её энергия, т. е. вообще не будет никакой передачи движения. И мы должны заключить, что энергия немеханической системы при одном и том же состоянии её движения будет разной в разных системах отсчёта.

Выбрав какую-нибудь одну инерциальную систему отсчёта в качестве основной, мы можем затем найти энергию системы Σ в любой системе отсчёта, имеющей скорость $\mathbf{u}$ относительно основной. Мы тогда получим энергию нашей немеханической системы в некотором её состоянии в функции скорости $\mathbf{u}$

$$\mathscr{E} = \mathscr{E}(\mathbf{u}). \tag{2.9}$$

Подчеркнём, что $\mathbf{u}$ не есть скорость самой немеханической системы Σ, а скорость той инерциальной системы отсчёта, в которой рассматривается Σ по отношению к произвольно выбранной основной системе отсчёта. Характер зависимости энергии от этой скорости должен определяться природой системы.

Повторим теперь буквально те рассуждения, которые привели нас раньше к закону сохранения импульса для механического движения. Из сохранения энергии в системе отсчёта II, считая систему отсчёта I основной и пользуясь формулой (2.3), мы получим:

$$\left[\varepsilon + \frac{m\mathbf{u}^2}{2} - \mathbf{u}\mathbf{p}\right] + \mathscr{E}(\mathbf{u}) = \left[\varepsilon' + \frac{m\mathbf{u}^2}{2} - \mathbf{u}\mathbf{p}'\right] + \mathscr{E}'(\mathbf{u}),$$

или

$$[\varepsilon - \mathbf{u}\mathbf{p} + \mathscr{E}(\mathbf{u})] = [\varepsilon' - \mathbf{u}\mathbf{p}' + \mathscr{E}'(\mathbf{u})]. \tag{2.10}$$

Считая u бесконечно малым, получаем далее:

$$\varepsilon - \mathbf{u}\mathbf{p} + \mathscr{E}(0) + \mathbf{u}\left(\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial \mathbf{u}}\right)_{u=0} = \varepsilon' - \mathbf{u}\mathbf{p}' + \mathscr{E}'(0) + \mathbf{u}\left(\frac{\partial \mathscr{E}'}{\partial \mathbf{u}}\right)_{u=0}.$$

Если здесь учесть сохранение энергии в основной системе отсчёта и сократить на $\mathbf{u}$ (которое произвольно), то получится уравнение

$$\mathbf{p} + \left[-\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial \mathbf{u}}\right]_{u=0} = \mathbf{p}' + \left[-\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial \mathbf{u}}\right]_{u=0}. \tag{2.11}$$

Уравнение это имеет вид з а к о н а с о х р а н е н и я в е к т о р н о й м е р ы д в и ж е н и я, причём импульсом немеханической системы Σ следует считать вектор

$$\mathbf{P} = \left[-\frac{\partial \mathscr{E}(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}}\right]_{u=0}, \tag{2.12}$$

зависящий при данной основной системе отсчёта (совершенно произвольной) только от состояния самой немеханической системы. В самом деле, именно этот вектор в сумме с импульсом частицы остаётся при взаимодействии неизменным. А то, что он вполне определяется состоянием системы (и, конечно, системой отсчёта, в которой он вычисляется), видно из его определения: при данном состоянии немеханической системы, которое есть нечто, не имеющее никакого отношения ни к каким системам отсчёта, устанавливается зависимость её энергии от того, в какой инерциальной системе отсчёта эта энергия определяется, т. е. вид функции $\mathscr{E}(\mathbf{u})$; затем эта функция дифференцируется по её аргументу, и в результате этот аргумент (т. е. скорость $\mathbf{u}$) полагается равным нулю. Последняя операция снимает зависимость от $\mathbf{u}$.

Итак, движение любого вида имеет и скалярную и векторную меры, так что мера движения по самому своему понятию является двоякой, скалярно-векторной мерой. Импульс ни в какой степени не специфичен для механического движения, но, конечно, импульс измеряет движение с учётом его н а п р а в л е н н о с т и. Перемещаться относительно частиц вещества могут не только такие же частицы, но и состояния немеханических систем, поэтому любая система может двигаться в пространстве относительно некоторой системы отсчёта, и её энергия будет зависеть от «скорости».

В понятии меры движения, несомненно, содержится противоречие: с одной стороны, мера движения должна быть абсолютной, как абсолютно само движение; с другой же стороны, мы видели, что она не может не быть относительной. Разрешается это противоречие тем, что мера движения не есть число, а более сложная величина, имеющая несколько составляющих. Сама она имеет абсолютный характер, а её разделение на составляющие — скалярную и векторную меры — относительно, так как различно в разных инерциальных системах отсчёта.

Если мы хотим подчеркнуть абсолютность движения, мы должны рассматривать его меру как нечто целое, не разделяя её на составляющие. Такая точка зрения не должна казаться странной. Мы привыкли, например, рассматривать вектор как единую сложную величину, а это понятие столь же абстрактно, как и понятие сложной меры движения. В случае вектора эта абстрактность обычно не сознаётся, так как вектор можно наглядно изобразить отрезком. Но даже если бы этого нельзя было сделать, понятие вектора как единой величины, всё-таки существовало бы. Именно, вектор определялся бы его составляющими в какой-нибудь одной координатной системе и законом преобразования его составляющих, т. е. законом, определяющим связь между составляющими вектора в различных координатных системах.

Совершенно так же обстоит дело с мерой движения. Эту сложную величину нельзя изобразить наглядно, но можно задать её составляющие в какой-нибудь инерциальной системе отсчёта и указать закон преобразования этих составляющих, связывающий составляющие меры в разных системах отсчёта друг с другом. Именно закон преобразования составляющих меры движения и определяет математический характер этой сложной величины.

Чтобы найти этот закон, рассмотрим снова две инерциальные системы отсчёта, I и II, и пусть опять II движется в I со скоростью $\mathbf{u}$. Возьмём некоторую физическую систему в некотором её состоянии. В этом состоянии система обладает мерой движения, которая разлагается в каждой из двух наших систем отсчёта на скалярную и векторную составляющие. Пусть эти составляющие будут в первой системе отсчёта $\mathscr{E}_{\mathrm{I}}$ и $\mathbf{P}_{\mathrm{I}}$, а во второй $\mathscr{E}_{\mathrm{II}}$ и $\mathbf{P}_{\mathrm{II}}$. Мы должны найти их связь друг с другом.

Для этого вернёмся к уравнению (2.8), которое мы получили, рассматривая взаимодействие любой системы с частицей вещества. С помощью этого уравнения мы доказали существование импульса у любой физической системы. Теперь же, когда мы уже знаем, что импульс всегда существует и сохраняется, мы можем заменить в уравнении (2.8) изменение импульса частицы противоположным ему изменением импульса самой физической системы. Тогда мы получим уравнение, в которое будут входить только величины, относящиеся к самой системе:

$$(\mathscr{E}'_{\text{II}} - \mathscr{E}_{\text{II}}) = (\mathscr{E}'_{\text{I}} - \mathscr{E}_{\text{I}}) - \mathbf{u}(\mathbf{P}'_{\text{I}} - \mathbf{P}_{\text{I}}). \tag{2.13}$$

Это уравнение выражает закон преобразования изменения энергии любой физической системы. Начальное и конечное состояния системы могут быть любыми, так как можно представить такое столкновение системы с частицей, в котором её состояние изменится произвольным образом.

Если уравнение (2.13) переписать в виде

$$[\mathscr{E}'_{\text{II}} - \mathscr{E}'_{\text{I}} + \mathbf{u}\mathbf{P}'_{\text{I}}] = [\mathscr{E}_{\text{II}} - \mathscr{E}_{\text{I}} + \mathbf{u}\mathbf{P}_{\text{I}}], \tag{2.14}$$

то станет ясно, что величина

$$[\mathscr{E}_{\text{II}} - \mathscr{E}_{\text{I}} + \mathbf{u}\mathbf{P}_{\text{I}}]$$

должна быть одной и той же для всех состояний системы и может зависеть только от природы системы и скорости $\mathbf{u}$. Иначе говоря, мы получим следующий закон преобразования энергии любой системы:

$$\mathscr{E}_{\text{II}} = \mathscr{E}_{\text{I}} - \mathbf{u}\mathbf{P}_{\text{I}} + F(\mathbf{u}), \tag{2.15}$$

где $F(\mathbf{u})$ — некоторая функция скорости $\mathbf{u}$, зависящая только от природы системы (для частицы, как видно из (2.3), эта функция была равна $m\mathbf{u}^2/2$).

Здесь уместно заметить, что сравнение энергий одной и той же системы в одном и том же состоянии, но определённых по отношению к разным системам отсчёта, возможно экспериментально. Именно, в системе отсчёта II энергия $\mathscr{E}_{\text{II}}$ будет энергией некоторого состояния системы, и можно создать другое состояние, которое будет выглядеть в системе отсчёта I точно так, как первое выглядело в II. Энергия этого состояния в системе отсчёта I будет равна энергии первоначального состояния в системе отсчёта II. Разность же энергий двух состояний одной и той же системы в одной и той же системе отсчёта может быть определена экспериментально, так что функция $F(\mathbf{u})$ действительно может быть найдена для каждой физической системы.

Закон преобразования импульса вытекает из закона преобразования энергии. В самом деле, чтобы вычислить импульс во II системе отсчёта, нужно, как описано выше, вычислить энергию в третьей системе отсчёта, скорость которой относительно второй пусть будет $\mathbf{w}$. Затем, по (2.12), надо эту энергию, взятую с обратным знаком, продифференцировать по $\mathbf{w}$ и положить $\mathbf{w}=0$. Скорость третьей системы отсчёта в первой будет:

$$(\mathbf{u}+\mathbf{w}),$$

и, следовательно, энергия системы как функция $\mathbf{w}$ получится из (2.15), если там заменить $\mathbf{u}$ на $(\mathbf{u}+\mathbf{w})$:

$$\mathscr{E}(\mathbf{u}+\mathbf{w})=\mathscr{E}(0)-(\mathbf{u}+\mathbf{w})\,\mathbf{P}(0)+F(\mathbf{u}+\mathbf{w}) \tag{2.16}$$

(мы написали $\mathscr{E}(0)$ вместо $\mathscr{E}_{\mathrm{I}}$ и т. д.). Следовательно,

$$\mathbf{P}_{\mathrm{II}}=\mathbf{P}(\mathbf{u})=\left[-\frac{\partial\mathscr{E}(\mathbf{u}+\mathbf{w})}{\partial\mathbf{w}}\right]_{w=0}=\mathbf{P}(0)-\frac{\partial F(\mathbf{u})}{\partial\mathbf{u}} \tag{2.17}$$

— это и есть закон преобразования импульса.

Остающаяся неопределённой функция $F(\mathbf{u})$ может быть найдена так. Рассмотрим три инерциальные системы отсчёта I, II и III. Пусть скорость II относительно I будет $\mathbf{u}$, скорость III относительно II — $\mathbf{v}$ и скорость III относительно I, очевидно, $\mathbf{w}=(\mathbf{u}+\mathbf{v})$. Переходя от I к II, от II к III и от I к III, мы получим для импульса любой системы по (2.17):

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{P}_{\mathrm{II}}&=\mathbf{P}_{\mathrm{I}}-\frac{\partial F(\mathbf{u})}{\partial\mathbf{u}},\\ \mathbf{P}_{\mathrm{III}}&=\mathbf{P}_{\mathrm{II}}-\frac{\partial F(\mathbf{v})}{\partial\mathbf{v}},\\ \mathbf{P}_{\mathrm{III}}&=\mathbf{P}_{\mathrm{I}}-\frac{\partial F(\mathbf{u}+\mathbf{v})}{\partial(\mathbf{u}+\mathbf{v})}\,.\end{aligned}\right\} \tag{2.18}$$

Подставив во вторую из этих формул $\mathbf{P}_{\mathrm{II}}$ из первой и сравнив с третьей, мы получим:

$$\frac{\partial F(\mathbf{u}+\mathbf{v})}{\partial(\mathbf{u}+\mathbf{v})}=\frac{\partial F(\mathbf{u})}{\partial\mathbf{u}}+\frac{\partial F(\mathbf{v})}{\partial\mathbf{v}} \tag{2.19}$$

— функциональное уравнение, которое показывает, что $\frac{\partial F}{\partial\mathbf{u}}$ есть линейная и однородная функция своего аргумента:

$$\frac{\partial F}{\partial\mathbf{u}}=M\mathbf{u}, \tag{2.20}$$

где M — постоянная, характерная для системы, но не зависящая от её состояния. Для самой функции F, очевидно, получается:

$$F(\mathbf{u})=\frac{M\mathbf{u}^2}{2}\,. \tag{2.21}$$

Окончательно закон преобразования составляющих меры движения выглядит так:

$$\left.\begin{aligned} \mathscr{E}_{\mathrm{II}} &= \mathscr{E}_{\mathrm{I}} - \mathbf{u}\mathbf{P}_{\mathrm{I}} + \frac{M\mathbf{u}^2}{2}, \\ \mathbf{P}_{\mathrm{II}} &= \mathbf{P}_{\mathrm{I}} - M\mathbf{u}. \end{aligned}\right\} \tag{2.22}$$

Смысл постоянной M можно выяснить следующим образом. Если в системе отсчёта I, которая взята совершенно случайно, импульс системы есть $\mathbf{P}_{\mathrm{I}}$, то всегда можно найти такую инерциальную систему отсчёта II, в которой импульс будет нулём. Для этого достаточно взять скорость II по отношению к I равной

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{P}_{\mathrm{I}}}{M}. \tag{2.23}$$

П о о п р е д е л е н и ю мы будем считать, что наша физическая система имеет в этой новой системе отсчёта нулевую скорость (покоится), т. е. мы будем с ч и т а т ь скорость нулевой, если равен нулю импульс. Систему отсчёта, в которой наша физическая система покоится, мы будем дальше считать основной. Тогда энергия и импульс в ней будут:

$$\mathscr{E}(0), \quad \mathbf{P}(0) = 0. \tag{2.24}$$

Если теперь перейти к системе отсчёта II, движущейся в I со скоростью $\mathbf{u}$, то можно считать, опять-таки п о о п р е д е л е н и ю, что скорость нашей физической системы в системе отсчёта II, будет:

$$\mathbf{v} = -\mathbf{u}. \tag{2.25}$$

Это определение совершенно естественно, но это именно определение, ибо совершенно не ясно, что называть скоростью системы, состоящей, например, из нескольких частиц, не говоря уже о системах, вовсе не содержащих вещества. Для энергии и импульса системы при скорости $\mathbf{v}$ (теперь это уже скорость самой системы) мы получим по закону преобразования (2.22):

$$\left.\begin{aligned} \mathscr{E}(\mathbf{v}) &= \mathscr{E}(0) + \mathbf{v}\mathbf{P}(0) + \frac{M\mathbf{v}^2}{2} = \mathscr{E}(0) + \frac{M\mathbf{v}^2}{2}, \\ \mathbf{P}(\mathbf{v}) &= \mathbf{P}(0) + M\mathbf{v} = M\mathbf{v}. \end{aligned}\right\} \tag{2.26}$$

Эти формулы имеют в точности такой же вид, как формулы (1.21) и (1.22) для частицы, и M можно, очевидно, назвать и н е р т н о й м а с с о й физической системы. Итак, для любой физической системы импульс пропорционален её «скорости», а избыток энергии над энергией «покоя» (т. е. состояния с нулевым импульсом) пропорционален квадрату скорости. Энергия и импульс связаны со скоростью одной и той же величиной — инертной массой, которая не зависит от состояния системы (в частности, и от её «скорости») и определяется только природой системы. Существование закона преобразования составляющих меры движения, т. е. связи между этими составляющими в разных инерциальных системах отсчёта, позволяет считать меру движения единой сложной величиной, отражающей абсолютность движения.

§ 3. МЕРА ДВИЖЕНИЯ В ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Метод, применённый в предыдущих параграфах для исследования понятия меры движения, обычно считается характерным для новой, так называемой релятивистской физики. Однако принцип относительности, лежащий в основании этого метода, был известен уже в «классической» физике, и не этот принцип отличает новую физику от старой. Как это часто бывает, открытие новых явлений позволяет глубже понять давно известные закономерности, и кажущиеся совершенно новыми и непонятными особенности новых явлений обнаруживаются в зародыше в явлениях, давно известных и привычных. Рассуждения, изложенные в предыдущих параграфах, и имели целью показать, что метод теории относительности, в сущности, не характерен для неё. Для теории относительности характерны новые свойства пространства и времени, связанные с существованием критической (или максимальной) скорости. Представления о пространстве и времени, лежащие в основании классической физики, оказались только приближённо верными, и только приближённо верны те формулы сложения скоростей, которыми мы пользовались при исследовании меры движения. Поэтому, хотя все качественные выводы, полученные в классической теории, остаются без изменения в теории относительности — а эти качественные выводы наиболее важны, — количественные соотношения должны быть заменены более точными.

В этом и следующем параграфах теория меры движения будет рассмотрена заново, с учётом новых свойств пространства и времени, раскрытых теорией относительности, но всё исследование будет проведено точно таким же методом, как в классической теории. Таким образом, будет ясно, что многие результаты теории относительности по существу давно известны, и если эти результаты оспариваются, то следует оспаривать и классические законы, давно известные и кажущиеся даже очевидными.

Предварительно нужно выяснить, что нового внесла теория относительности в наши представления о пространстве и времени. В классической физике считалось, что, хотя изменение положения какого-либо явления относительно опорных частиц инерциальных систем отсчёта протекает в разных системах отсчёта различно, однако время имеет абсолютный характер, так что можно говорить о месте явления в разных системах отсчёта в один и тот же момент времени. Основанием этого убеждения является уверенность в том, что существует одно мгновение, отделяющее во всём пространстве прошедшее от будущего. Если попытаться выяснить, что при этом имеют в виду, то окажется следующее.

По отношению к некоторому событию A, происходящему в некоторый момент в определённом месте, мы делим все остальные события (происходящие как в этом же месте, так и во всём пространстве) на прошедшие и будущие.

Прошедшее — это то, что может (или принципиально могло бы) повлиять на событие A, но на что A принципиально не может влиять. Будущее же — то, на что A влиять может (или могло бы), но что само принципиально не может влиять на A. Всё прошедшее для события A отделяется от будущего для этого же события одним мгновением и всё, что происходит в это мгновение во всём пространстве, происходит «сейчас». Поскольку это разделение основано на возможности причинной связи между событиями, оно имеет абсолютный характер, т. е. не зависит ни от каких систем отсчёта.

В этих представлениях верно то, что основанием разделения всех событий на прошедшие и будущие относительно события A служит возможность прямой причинной связи между этими событиями и A. Неверно же представление о том, что события, отделяющие прошедшее от будущего, длятся только одно мгновение. Дело в том, что в нашем пространстве и времени все действия передаются со скоростями, которые никогда не бывают *больше некоторой предельной (или критической) скорости* c. (Точно с этой скоростью распространяется свет в пустоте, поэтому её часто называют «скоростью света». Она равна приблизительно 300 000 *км/сек.*) А это значит, что если связывать разделение событий на прошедшие и будущие с возможностью причинной связи между ними, то в какой-нибудь точке пространства, удалённой от места, где происходит событие A, на расстояние l, *прошедшее для A* будет отделено от его будущего не одним мгновением, а целым интервалом длительности $2l/c$. Всё, что происходит в течение этого интервала времени, оторвано от A, так как между этими явлениями и A не может быть никакой прямой причинной связи ни в одном, ни в другом направлении; действия, исходящие от этих событий, просто дойдут до того места, где происходит A, уже после того, как A произойдёт, так же как и исходящие от A действия дойдут до рассматриваемой точки пространства уже после того, как все события этого интервала окончатся. Поэтому «сейчас» относительно A, понимаемое в обычном смысле, в действительности не есть мгновение, а более или менее продолжительный промежуток времени, очень короткий в местах, близких к A, но очень длинный в местах удалённых от A. Любое мгновение этого промежутка времени в каком-нибудь месте ничем не отличается по характеру его связи с A от любого другого мгновения этого же промежутка и поэтому никакого мгновенного «сейчас» в природе нет. Представление об одном для всего пространства мгновенном «сейчас» просто не отражает действительных свойств пространства и времени.

Подробности нам здесь не важны. Проблема измерения времени сводится, очевидно, к тому, как из всех мгновений «интервалов одновременности» выделить одно мгновение, которое было бы «изохронным» относительно A. При этом понятие «изохронности» будет новым понятием, отличающимся от обычного понятия одновременности. Оказывается, что понятие «изохронности», а вместе с тем и измерение времени можно установить в каждой инерциальной системе отсчёта, причём определение этого понятия одинаково для всех инерциальных систем отсчёта, но основанное на этом понятии измерение времени приводит в разных системах отсчёта к различным временам для одних и тех же событий. Повторяем, подробности нам здесь не важны. Нам нужно будет только установить связь между пространственными координатами и временем какого-либо события в одной инерциальной системе отсчёта и соответствующими величинами в другой. Если взять прямоугольные оси координат в обеих системах отсчёта параллельными друг другу, считать время в обеих системах отсчёта с того момента, когда оба начала координат совпадали, и выбрать оси x так, чтобы вторая система двигалась относительно первой вдоль оси x со скоростью u, то связь между координатами и временами любого события в обеих системах отсчёта будет выражаться так называемыми формулами Лоренца. Если считать ещё критическую скорость c равной единице (так что наша скорость u есть отношение скорости, измеренной в обычных единицах, к критической скорости), то эти формулы будут иметь вид:

$$\left.\begin{aligned} t_{\mathrm{II}} &= \frac{t_{\mathrm{I}} - u x_{\mathrm{I}}}{\sqrt{1-u^2}}, \\ x_{\mathrm{II}} &= \frac{x_{\mathrm{I}} - u t_{\mathrm{I}}}{\sqrt{1-u^2}}, \\ y_{\mathrm{II}} &= y_{\mathrm{I}}, \quad z_{\mathrm{II}} = z_{\mathrm{I}}. \end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$

Нашей задачей теперь будет отыскание меры движения частицы в зависимости от её скорости в некоторой инерциальной системе отсчёта. Задача эта решается, по существу, точно так же, как в § 1. Но так как связь между скоростями частицы в различных системах отсчёта («правило сложения скоростей») будет теперь более сложной, чем в классической теории, то и все вычисления становятся более громоздкими*). Все же принципиальные результаты — существование наряду со скалярной ещё и векторной меры движения, их неразрывная связь, выражающаяся в определённой связи обеих мер в разных системах отсчёта друг с другом и пр., — остаются без изменения.

Вычисления же можно провести следующим образом. Прежде всего оказывается неудобным характеризовать состояние движения частицы в данной системе отсчёта её скоростью относительно этой системы. Скорость есть смещение частицы в пространстве за единицу времени системы отсчёта, а так как при переходе к новой системе отсчёта меняется не только смещение, но и время, то *«правило сложения скоростей»* оказывается сложным. Гораздо удобнее характеризовать состояние движения частицы скоростью, вычисленной по собственному времени частицы, т. е. смещением частицы в пространстве за единицу времени, отсчитанного часами, движущимися вместе с частицей (или временем той системы отсчёта, в которой частица в данное мгновение покоится). Обычную скорость частицы мы обозначим через $\mathbf{v}$, эту новую «скорость» через $\mathbf{w}$ и «собственное время частицы» через τ. Тогда

$$\mathbf{w} = \frac{d\mathbf{r}}{d\tau} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \mathbf{v}\frac{dt}{d\tau}. \tag{3.2}$$

Но из (3.1) вытекает, что

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \tag{3.3}$$

(собственное время течёт медленнее времени системы отсчёта). Поэтому

$$\mathbf{w} = \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2}}, \tag{3.4}$$

и, наоборот, если выразить $\mathbf{v}$ через $\mathbf{w}$,

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{w}}{\sqrt{1+\mathbf{w}^2}}. \tag{3.5}$$

Таким образом, новая «скорость» взаимно однозначно связана с обыкновенной скоростью и может, следовательно, так же хорошо характеризовать состояние движения частицы, как и эта последняя.

*) Их можно упростить, внеся некоторые чисто технические изменения в рассуждения. Так как эти изменения совершенно не затрагивают существа дела, то читатель, не интересующийся техническими деталями, может просто пропустить вычисления и перейти прямо к результату — формулам (3.20), дающим более точную связь между скоростью частицы и мерой её движения.

Если в системе отсчёта I частица двигалась со «скоростью» $\mathbf{w}_{\mathrm{I}}$, то в новой системе отсчёта II, движущейся вдоль оси x старой системы отсчёта с (обычной) скоростью $\mathbf{u}$, «скорость» частицы $\mathbf{w}_{\mathrm{II}}$ будет иной. Она легко может быть вычислена по формулам Лоренца, ибо $d\tau$ будет, по его определению, в обеих системах отсчёта одним и тем же, а dx, dy, dz прямо вычисляются по (3.1). Мы получим тогда:

$$\left.\begin{aligned} w_{\mathrm{II}x} &= \frac{w_{\mathrm{I}x} - u\sqrt{1 + w_{\mathrm{I}}^2}}{\sqrt{1 - u^2}}, \\ w_{\mathrm{II}y} &= w_{\mathrm{I}y}, \quad w_{\mathrm{II}z} = w_{\mathrm{I}z}, \end{aligned}\right\} \tag{3.6}$$

и так как эти формулы будут нам нужны только для скоростей u, очень малых по сравнению с критической скоростью, т. е. для $u \ll 1$, мы пренебрежём в них величиной u^2 и получим:

$$\left.\begin{aligned} w_{\mathrm{II}x} &= w_{\mathrm{I}x} - u\sqrt{1 + w_{\mathrm{I}}^2} + \ldots, \\ w_{\mathrm{II}y} &= w_{\mathrm{I}y}, \quad w_{\mathrm{II}z} = w_{\mathrm{I}z}. \end{aligned}\right\} \tag{3.7}$$

Этим «правилом сложения» мы и должны будем пользоваться вместо прежнего правила (1.2).

Обозначим теперь скалярную меру движения частицы (энергию), рассматривая её как функцию «скорости» $\mathbf{w}$, через

$$\varepsilon(\mathbf{w}) \equiv \varepsilon(\mathbf{w}^2) \tag{3.8}$$

(скалярная мера движения зависит, конечно, только от величины «скорости», но не от её направления). Закон сохранения скалярной меры движения при столкновении двух частиц будет иметь вид:

$$\varepsilon_1(\mathbf{w}_1) + \varepsilon_2(\mathbf{w}_2) = \varepsilon_1(\mathbf{w}_1') + \varepsilon_2(\mathbf{w}_2'), \tag{3.9}$$

где индексы 1 и 2 обозначают первую и вторую частицы, а штрих относится к величинам после столкновения. Если рассмотреть теперь это столкновение в новой системе отсчёта, летящей вдоль оси x старой системы с очень малой скоростью $\mathbf{u}$, то по формулам (3.7) мы получим:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1(\mathbf{w}_{1\mathrm{II}}) &= \varepsilon_1\left(w_{1x} - u\sqrt{1 + \mathbf{w}_1^2},\ w_{1y},\ w_{1z}\right) = \\ &= \varepsilon_1(\mathbf{w}_1) - u\sqrt{1 + w_1^2}\,\frac{\partial \varepsilon_1(\mathbf{w}_1)}{\partial w_{1x}} + \ldots \end{aligned} \tag{3.10}$$

и точно так же для других энергий.

Тогда закон сохранения энергии в новой системе отсчёта приведётся к виду

$$\sqrt{1+w_1^2}\,\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial w_{1x}}+\sqrt{1+w_2^2}\,\frac{\partial\varepsilon_2}{\partial w_{2x}}=$$
$$=\sqrt{1+w_1'^2}\,\frac{\partial\varepsilon_1'}{\partial w_{1x}'}+\sqrt{1+w_2'^2}\,\frac{\partial\varepsilon_2'}{\partial w_{2x}'}. \tag{3.11}$$

Ещё два подобных же соотношения получатся, если перейти к системам отсчёта, медленно летящим относительно старой системы отсчёта вдоль осей y и z. Эти соотношения, очевидно, имеют вид закона сохранения векторной меры движения — импульса, для которого получается формула

$$\mathbf{p}=\sqrt{1+w^2}\,\frac{\partial\varepsilon}{\partial\mathbf{w}}, \tag{3.12}$$

заменяющая теперь формулу (1.17).

Дальше можно рассуждать в точности так, как в классической теории. В каждом из трёх законов сохранения составляющих импульса можно снова перейти к новым инерциальным системам отсчёта и получить новые законы сохранения — законы сохранения тензорной меры движения, составляющая по осям i и k которой получится, если в законе сохранения i-й составляющей импульса перейти к системе отсчёта, движущейся вдоль оси k. Так как каждый переход к новой инерциальной системе даёт операцию вида

$$\sqrt{1+w^2}\,\frac{\partial}{\partial w_k},$$

то составляющая (ik) тензорной меры будет иметь вид

$$s_{ik}=\sqrt{1+w^2}\,\frac{\partial}{\partial w_k}\left[\sqrt{1+w^2}\,\frac{\partial\varepsilon}{\partial w_i}\right]. \tag{3.13}$$

Эти новые законы сохранения должны, как и в классической теории, или выполняться тривиальным образом, или быть следствием сохранения скалярной и векторной мер. Кроме того, тензор s_{ik} должен быть изотропным (ибо все направления пространства равноправны, и связь s с w не должна меняться при повороте координатных осей), т. е. он должен иметь вид

$$s_{ik}=\lambda\delta_{ik}=\lambda\begin{cases}1, & i=k,\\ 0, & i\neq k.\end{cases} \tag{3.14}$$

Величина же λ должна быть линейной функцией энергии:

$$s_{ik}=[\alpha\varepsilon(w)+\beta]\,\delta_{ik}. \tag{3.15}$$

Выполним теперь дифференцирование в формуле (3.13). Так как $\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{w}^2)$, то мы получим:

$$s_{ik} = \sqrt{1+w^2}\,\frac{\partial}{\partial w_k}\left[\sqrt{1+w^2}\;\varepsilon'(w^2)\,2w_i\right] =$$
$$= 2(1+w^2)\,\varepsilon'(w^2)\,\delta_{ik} + [4(1+w^2)\,\varepsilon''(w^2) + 2\varepsilon'(w^2)]\,w_i w_k, \quad (3.16)$$

причём штрих обозначает производную ε по её аргументу, т. е. по w^2. Сравнивая это с (3.15), мы получим:

$$\left.\begin{aligned} 2(1+w^2)\,\varepsilon'(w^2) &= \alpha\varepsilon + \beta, \\ 2(1+w^2)\,\varepsilon''(w^2) + \varepsilon'(w^2) &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (3.17)$$

Второе из этих уравнений легко интегрируется и даёт:

$$\varepsilon = m_0\sqrt{1+w^2} + \varepsilon_0, \quad (3.18)$$

где m_0 и ε_0 — постоянные интегрирования, а первое уравнение (3.17) удовлетворяется, если взять $\alpha = 1$ и $\beta = -\varepsilon_0$.

Импульс вычисляется теперь по (3.12):

$$\mathbf{p} = m_0\,\mathbf{w}, \quad (3.19)$$

и если снова вернуться к обыкновенной скорости по формуле (3.4), то мы получим для энергии и импульса частицы формулы

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2}} + \varepsilon_0, \\ \mathbf{p} &= \frac{m_0\,\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2}}\ ^{*)}. \end{aligned}\right\} \quad (3.20)$$

Таким образом, и в релятивистской теории точно так же, как в классической, из существования скалярной меры движения частицы вытекает существование векторной меры и точно так же оказывается возможным однозначно определить характер зависимости обеих этих мер от скорости частицы. Только зависимость эта оказывается иной, чем в классической теории. Но, если считать, как это делается в классической теории, критическую скорость очень большой и, следовательно, v очень малым и пренебречь v^2, то мы получим старые формулы (1.21) и (1.22). Связь импульса со скоростью определяется, как и в классической теории, одной величиной — массой m_0, только эта связь теперь иная. Чтобы не смешивать различные вещи, мы

---

*) Для перехода к обычным единицам надо сделать в этих формулах замены

$$v \to \frac{v}{c}, \qquad p \to \frac{p}{c}, \qquad \varepsilon \to \frac{\varepsilon}{c^2}.$$

будем называть массу m_0 инвариантной инертной массой. Она зависит только от природы частицы, но не от состояния её движения, т. е. от скорости, и одна и та же во всех инерциальных системах отсчёта. Можно было бы определить массу иначе, написав формулу (3.20) в виде

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon &= m + \varepsilon_0, \\ \mathbf{p} &= m\mathbf{v}, \end{aligned}\right\} \tag{3.21}$$

где

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2}}. \tag{3.22}$$

Эта («вариантная») масса зависела бы от скорости частицы.

Постоянную ε_0 теперь нельзя считать энергией неподвижной частицы, так как при $v = 0$ получается:

$$\varepsilon = m_0 + \varepsilon_0.$$

С другой стороны, без дальнейшего исследования постоянную ε_0 нельзя считать равной нулю. Это можно было бы сделать, если бы мы рассматривали только данную частицу и если бы она не могла превращаться в другие частицы или исчезать, так как в конце концов имеет значение только изменение энергии. Но если бы мы положили для одной частицы $\varepsilon_0 = 0$, то для других частиц, например для частицы, которая могла бы получиться в результате слияния двух частиц с $\varepsilon_0 = 0$, ε_0 уже нельзя было бы взять произвольно. Ясно, что вопрос о величине ε_0 связан с вопросом об энергии и импульсе произвольных физических систем. Поэтому мы отложим разбор этого вопроса, но если будем рассматривать какую-либо частицу отдельно, будем для неё считать $\varepsilon_0 = 0$.

В этом случае можно переписать формулы для энергии и импульса так, чтобы стал очевидным «закон преобразования» этих величин, т. е. связь друг с другом составляющих меры движения, вычисленных по отношению к разным системам отсчёта. Для этого введём в формулы (3.20) элемент собственного времени частицы по формуле (3.3), после чего энергия и импульс запишутся так:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon &= m_0 \frac{dt}{d\tau}, \\ \mathbf{p} &= m_0 \frac{d\mathbf{r}}{d\tau}. \end{aligned}\right\} \tag{3.23}$$

Эти формулы замечательны, во-первых, тем, что из них ясен закон преобразования: энергия и импульс при переходе к новой инерциальной системе отсчёта пересчитываются в точности так, как время и радиус-вектор частицы, т. е. просто по формулам Лоренца (3.1), так как $d\tau$ инвариантно:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_{II} &= \frac{\varepsilon_I - up_{Ix}}{\sqrt{1-u^2}}, \\ p_{IIx} &= \frac{p_{Ix} - u\varepsilon_I}{\sqrt{1-u^2}}, \\ p_{IIy} &= p_{Iy}, \ p_{IIz} = p_{Iz}. \end{aligned}\right\} \tag{3.24}$$

В геометрии величины, составляющие которых преобразуются при переходе к новой координатной системе как дифференциалы координат, называются (контравариантными) векторами, ибо их, очевидно, можно изображать отрезками. По аналогии можно сказать, что мера движения частицы, имеющая составляющие (ε, p_x, p_y, p_z), является в пространственно-временном четырёхмерном многообразии мира (контравариантным) вектором. Эта геометрическая аналогия делает очень наглядным представление о мере движения частицы как об абсолютной величине.

Во-вторых, формулы (3.23) показывают, что мера движения частицы просто пропорциональна её сдвигу в пространстве-времени системы отсчёта за единицу её собственного времени. Этот замечательный факт, в сущности совершенно очевидный (так как что же ещё может измерять движение частицы, как не её смещение в многообразии мира?), можно было бы положить в основание всей теории меры движения.

§ 4. ОБЩАЯ ТЕОРИЯ МЕРЫ ДВИЖЕНИЯ В ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ И ЗАКОН ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ МАССЫ И ЭНЕРГИИ

Перейдём теперь к исследованию меры движения любой физической системы. Как и в классической теории, допустим (здесь буквально повторяются рассуждения § 2), что у любой физической системы в любом её состоянии есть скалярная мера движения — энергия, зависящая от состояния системы, но, конечно, не определяемая вполне скоростью системы, которой может и не быть. Однако, от каких бы величин ни зависела энергия, она будет *различной по отношению к разным инерциальным системам отсчёта*. Для доказательства достаточно, как и раньше, рассмотреть передачу движения системой какой-нибудь частице вещества. Уменьшение энергии системы в результате этого процесса будет равно увеличению энергии частицы, а это последнее будет различно по отношению к разным инерциальным системам отсчёта. Поэтому и уменьшение энергии любой системы при её столкновении с частицей будет различным в разных системах отсчёта. Этого не могло бы быть, если бы сама энергия системы в данном её состоянии была бы одинаковой в разных системах отсчёта. Энергия любой физической системы — такая же относительная величина, как и энергия частицы. Только указав, по отношению к какой инерциальной системе отсчёта измеряется движение, можно определить величину его скалярной меры.

Считая какую-либо произвольно выбранную инерциальную систему отсчёта основной и характеризуя все остальные инерциальные системы отсчёта их скоростями $\mathbf{u}$ в основной системе, можно найти энергию любой физической системы в любом её состоянии по отношению к любой системе отсчёта. Эта энергия будет тогда функцией скорости $\mathbf{u}$ (не скорости самой физической системы !), и мы её обозначим

$$\mathscr{E}(\mathbf{u}). \tag{4.1}$$

Дальше можно рассуждать в точности так, как в классической теории. Сохранение энергии при столкновении рассматриваемой системы с частицей даёт в любой инерциальной системе отсчёта:

$$\mathscr{E}(\mathbf{u})+\varepsilon(\mathbf{u})=\mathscr{E}'(\mathbf{u})+\varepsilon'(\mathbf{u}), \tag{4.2}$$

если штрихом обозначать состояния после столкновения, а $\varepsilon(\mathbf{u})$ — энергия частицы также в функции скорости системы отсчёта $\mathbf{u}$. Так как $\mathbf{u}$ произвольно, то, дифференцируя по $\mathbf{u}$ и полагая затем $\mathbf{u}=0$, мы получим:

$$\left[\frac{\partial\mathscr{E}(\mathbf{u})}{\partial\mathbf{u}}\right]_{u=0}+\left[\frac{\partial\varepsilon(\mathbf{u})}{\partial\mathbf{u}}\right]_{u=0}=\left[\frac{\partial\mathscr{E}'(\mathbf{u})}{\partial\mathbf{u}}\right]_{u=0}+\left[\frac{\partial\varepsilon'(\mathbf{u})}{\partial\mathbf{u}}\right]_{u=0}. \tag{4.3}$$

Легко проверить, что для частицы

$$\left[-\frac{\partial\varepsilon(\mathbf{u})}{\partial\mathbf{u}}\right]_{u=0}=\mathbf{p} \tag{4.4}$$

это сразу получается из (3.24), где $\varepsilon_{\text{II}}=\varepsilon(\mathbf{u})$, и ясно, что (4.3) даёт закон сохранения импульса, который для любой физической системы определяется в точности так, как и в классической теории, формулой

$$\mathbf{P}=\left[-\frac{\partial\mathscr{E}(\mathbf{u})}{\partial\mathbf{u}}\right]_{u=0}. \tag{4.5}$$

Итак, и в релятивистской теории мера движения имеет скалярную и векторную составляющие, различные по отношению к разным инерциальным системам отсчёта. Единство этих двух мер выражается в законе их преобразования, который будет, конечно, отличен от классического и который мы должны найти. Кажется очевидным, что этот закон должен быть таким же, как для частицы, т. е.

должен выражаться формулами (3.24). Но так как вопрос о законе преобразования связан с вопросом об аддитивной постоянной в энергии (формулы (3.24) верны только при $\varepsilon_0 = 0$), следует вывести этот закон независимо.

В основной системе отсчёта, которая играет здесь роль первой, законы сохранения энергии и импульса дают:

$$\left.\begin{aligned} \mathscr{E}'(0) - \mathscr{E}(0) &= -[\varepsilon'(0) - \varepsilon(0)], \\ \mathbf{P}'(0) - \mathbf{P}(0) &= -[\mathbf{p}'(0) - \mathbf{p}(0)]. \end{aligned}\right\} \tag{4.6}$$

В какой-либо другой системе отсчета II, движущейся в основной со скоростью u, эти же законы будут:

$$\left.\begin{aligned} \mathscr{E}'(\mathbf{u}) - \mathscr{E}(\mathbf{u}) &= -[\varepsilon'(\mathbf{u}) - \varepsilon(\mathbf{u})], \\ \mathbf{P}'(\mathbf{u}) - \mathbf{P}(\mathbf{u}) &= -[\mathbf{p}'(\mathbf{u}) - \mathbf{p}(\mathbf{u})]. \end{aligned}\right\} \tag{4.7}$$

Далее, пользуясь формулами (3.24), применимыми здесь, так как ε_0 не входит в изменение энергии частицы, получим:

$$\mathscr{E}'(\mathbf{u}) - \mathscr{E}(\mathbf{u}) = \frac{-[\varepsilon'(0) - \varepsilon(0)] + u\,[p_x'(0) - p_x(0)]}{\sqrt{1-u^2}},$$

и по (4.6)

$$\mathscr{E}'(\mathbf{u}) - \mathscr{E}(\mathbf{u}) = \frac{[\mathscr{E}'(0) - \mathscr{E}(0)] - u\,[P_x'(0) - P_x(0)]}{\sqrt{1-u^2}}.$$

Отсюда вытекает, что

$$\mathscr{E}(\mathbf{u}) = \frac{\mathscr{E}(0) - uP_x(0)}{\sqrt{1-u^2}} + F(\mathbf{u}), \tag{4.8}$$

где $F(\mathbf{u})$ — не определённая пока функция скорости $\mathbf{u}$, одна и та же для всех состояний рассматриваемой системы. Она, очевидно, не должна зависеть от направления $\mathbf{u}$, так что можно писать:

$$F(\mathbf{u}^2). \tag{4.9}$$

Совершенно так же, исходя из закона сохранения импульса, можно было бы получить и формулы для преобразования импульса. Но в эти формулы вошли бы новые произвольные функции, связь которых с F оставалась бы неизвестной. Поэтому мы поступим иначе: считая систему отсчёта II за основную, мы перейдём к третьей системе отсчёта, движущейся относительно II с произвольной скоростью v. Её скорость в основной системе отсчёта будет, по правилу сложения скоростей, легко выводимому из формул Лоренца, иметь следующие составляющие:

$$\left.\begin{array}{c}\dfrac{u+v_x}{1+uv_x}, \\ \dfrac{v_y\sqrt{1-u^2}}{1+uv_x}, \\ \dfrac{v_z\sqrt{1-u^2}}{1+uv_x}.\end{array}\right\} \tag{4.10}$$

Затем применим определение импульса (4.5): продифференцируем энергию в системе отсчёта III по $\mathbf{v}$ и положим $v=0$. Несложные вычисления дают тогда:

$$P_x(\mathbf{u})=\frac{P_x(0)-u\mathcal{E}(0)}{\sqrt{1-u^2}}-(1-u^2)\frac{\partial F}{\partial u_x},$$

$$P_y(\mathbf{u})=P_y(0)-\sqrt{1-u^2}\,\frac{\partial F}{\partial u_y},$$

$$P_z(\mathbf{u})=P_z(0)-\sqrt{1-u^2}\,\frac{\partial F}{\partial u_z}.$$

Так как $F=F(u^2)$, а $u_y=u_z=0$, то, обозначая штрихом производную по u^2, мы получим:

$$\frac{\partial F}{\partial u_x}=F'(u^2)\,2u_x=2uF'(u^2),$$

$$\frac{\partial F}{\partial u_y}=F'(u^2)\,2u_y=0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial u_z}=F'(u^2)\,2u_z=0,$$

так что закон преобразования импульса примет более простой вид

$$\left.\begin{array}{l}P_x(\mathbf{u})=\dfrac{P_x(0)-u\mathcal{E}(0)}{\sqrt{1-u^2}}-2u(1-u^2)F'(u^2), \\ P_y(\mathbf{u})=P_y(0);\quad P_z(\mathbf{u})=P_z(0).\end{array}\right\} \tag{4.11}$$

Таким образом, в закон преобразования (4.8) и (4.11) входит только одна не известная пока функция $F(u^2)$. Но и она может быть определена, если принять во внимание, что все переходы от инерциальных систем отсчёта к другим таким же системам образуют группу, или, говоря проще, последовательный переход от одной системы отсчёта к другой, а затем к третьей равносилен прямому переходу от первой к третьей. Поэтому рассмотрим три системы отсчёта: I — основную, II, движущуюся в основной вдоль оси x со скоростью u, и III, движущуюся во II снова вдоль оси x со скоростью v и, следовательно, движущуюся в основной тоже вдоль оси x со скоростью

$$w = \frac{u+v}{1+uv}. \tag{4.12}$$

Пусть теперь в основной системе отсчёта импульс нашей физической системы равен нулю (это нужно только для упрощения вычислений):

$$\mathbf{P}_{\mathrm{I}} = 0.$$

Тогда, переходя к системе отсчета II по формулам (4.8) и (4.11), мы получим:

$$\left.\begin{aligned} \mathscr{E}_{\mathrm{II}} &= \frac{\mathscr{E}_{\mathrm{I}}}{\sqrt{1-u^2}} + F(u^2), \\ P_{\mathrm{II}x} &= -\frac{u\mathscr{E}_{\mathrm{I}}}{\sqrt{1-u^2}} - 2u(1-u^2)F'(u^2). \end{aligned}\right\} \tag{4.13}$$

Затем перейдём от системы отсчёта II к системе III и вычислим энергию $\mathscr{E}_{\mathrm{III}}$ (импульс нам не понадобится). Применяя (4.13), получим:

$$\mathscr{E}_{\mathrm{III}} = \frac{\mathscr{E}_{\mathrm{II}} - vP_{\mathrm{II}x}}{\sqrt{1-v^2}} + F(v^2) =$$

$$= \frac{\mathscr{E}_{\mathrm{I}}(1+uv)}{\sqrt{1-u^2}\cdot\sqrt{1-v^2}} + \frac{F(u^2) + 2uv(1-u^2)F'(u^2)}{\sqrt{1-v^2}} + F(v^2). \tag{4.14}$$

Но эту же энергию можно вычислить, прямо переходя от системы I к системе III:

$$\mathscr{E}_{\mathrm{III}} = \frac{\mathscr{E}_{\mathrm{I}}(1+uv)}{\sqrt{1-u^2}\,\sqrt{1-v^2}} + F\left(\left[\frac{u+v}{1+uv}\right]^2\right), \tag{4.15}$$

получиться же должно то же самое.

Поэтому, сравнивая (4.14) и (4.15), мы получим для F функциональное уравнение

$$\frac{F(u^2) + 2uv(1-u^2)F'(u^2)}{\sqrt{1-v^2}} + F(v^2) = F\left(\left[\frac{u+v}{1+uv}\right]^2\right). \tag{4.16}$$

Разложение обеих его частей по степеням u и сравнение коэффициентов разложений даст ряд уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &F(0) = 0, \\ &F'(0) = (1-v^2)^{3/2} F'(v^2), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \tag{4.17}$$

Интегрируя второе из них и определяя постоянную интегрирования из первого, получим, если обозначить

$$2F'(0) = N, \tag{4.18}$$

для F выражение

$$F(v^2) = N\left[\frac{1}{\sqrt{1-v^2}} - 1\right]. \tag{4.19}$$

Легко проверить, что эта функция удовлетворяет полному уравнению (4.16).

Это выражение мы подставим в формулы (4.8) и (4.11) и после элементарных вычислений запишем закон преобразования составляющих меры движения любой физической системы в виде

$$\left.\begin{aligned} \mathscr{E}_{\rm II} + N &= \frac{(\mathscr{E}_{\rm I} + N) - uP_{{\rm I}x}}{\sqrt{1-u^2}}, \\ P_{{\rm II}x} &= \frac{P_{{\rm I}x} - u\,(\mathscr{E}_{\rm I} + N)}{\sqrt{1-u^2}}, \\ P_{{\rm II}y} &= P_{{\rm I}y}, \quad P_{{\rm II}z} = P_{{\rm I}z}. \end{aligned}\right\} \tag{4.20}$$

Постоянная N, как и функция F, зависит только от природы системы, но не от её состояния. Очевидно, что для каждой системы можно изменить определение энергии, называя энергией $\mathscr{E} + N$. Добавление этой постоянной ничего не изменит в законах сохранения, если в рассматриваемом процессе система остаётся сама собой, так как тогда постоянная N добавится и до и после процесса.

Если же, например, две системы объединяются в одну, и для исходных систем энергия нормирована так, что $N_1 = N_2 = 0$, то для объединённой системы величина N автоматически окажется нулём. В самом деле, в какой-нибудь инерциальной системе отсчёта мы будем иметь закон сохранения

$$\mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2 = \mathscr{E},$$
$$\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 = \mathbf{P},$$

и после перехода к любой другой системе отсчёта из них получится (по (4.20)):

$$\frac{\mathscr{E}_1 - uP_{1x}}{\sqrt{1-u^2}} + \frac{\mathscr{E}_2 - uP_{2x}}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{(\mathscr{E} + N) - uP_x}{\sqrt{1-u^2}} - N,$$

или в силу сохранения энергии и импульса в исходной системе отсчёта

$$0 = \frac{N}{\sqrt{1-u^2}} - N.$$

Так как u произвольно, то $N = 0$ (в частности, для частицы в формуле (1.21) можно взять $\varepsilon_0 = 0$).

Формулы преобразования станут тогда однородными, и энергия и импульс любой системы будут связаны с такими же величинами в другой системе отсчёта, как время и координаты.

Следовательно, мера движения любой физической системы является вектором в четырёхмерном пространственно-временном многообразии мира, и в этом выражается её абсолютный характер. Разделение же меры на скалярную и векторную различно в разных инерциальных системах отсчёта и характеризуется законом преобразования:

$$\left.\begin{aligned} \mathscr{E}_{\mathrm{II}} &= \frac{\mathscr{E}_{\mathrm{I}} - uP_{\mathrm{I}x}}{\sqrt{1-u^2}}, \\ P_{\mathrm{II}x} &= \frac{P_{\mathrm{I}x} - u\mathscr{E}_{\mathrm{I}}}{\sqrt{1-u^2}}, \\ P_{\mathrm{II}y} &= P_{\mathrm{I}y}, \quad P_{\mathrm{II}z} = P_{\mathrm{I}z}. \end{aligned}\right\} \tag{4.21}$$

Заметим, что из этих формул следует, как легко проверить соотношение

$$\mathscr{E}_{\mathrm{II}}^2 - \mathbf{P}_{\mathrm{II}}^2 = \mathscr{E}_{\mathrm{I}}^2 - \mathbf{P}_{\mathrm{I}}^2, \tag{4.22}$$

так что разность квадратов энергии и импульса одинакова во всех системах отсчёта (инвариантна). Позже мы обсудим смысл этого факта.

Теперь введём понятие скорости любой физической системы, так же как это было сделано в классической теории. Очевидно, скорость в обычном смысле существует не у всякой физической системы, так как различные части одной системы могут перемещаться совершенно различно. Следовательно, мы должны определить, что мы будем называть скоростью, и это надо сделать так, чтобы новое определение совпадало с обычным в случаях, когда старое понятие имеет смысл, т. е. для одной частицы.

Рассмотрим какую-нибудь физическую систему, имеющую энергию $\mathscr{E}_{\mathrm{I}}$ и импульс P_{I} в некоторой инерциальной системе отсчёта I. Существует ли такая другая система отсчёта, в которой импульс рассматриваемой системы будет равен нулю? Если существует и если её скорость в I равна u, то формулы преобразования (4.21) дают:

$$0 = \frac{P_{\mathrm{I}x} - u\mathscr{E}_{\mathrm{I}}}{\sqrt{1-u^2}},$$

$$0 = P_{\mathrm{I}y}, \quad 0 = P_{\mathrm{I}z}.$$

Это значит, что новая система отсчёта должна двигаться в старой в направлении импульса нашей системы со скоростью

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{P}_{\mathrm{I}}}{\mathscr{E}_{\mathrm{I}}}. \tag{4.23}$$

Такая скорость существует, если

$$P_{\rm I} < \mathscr{E}_{\rm I}, \tag{4.24}$$

ибо всякая скорость должна быть меньше критической. Условие это инвариантно, т. е. является свойством состояния системы, так как оно означает, что инвариант $\mathscr{E}_{\rm I}^2 - P_{\rm I}^2$ положителен. Выполняется ли оно для всех физических систем во всех состояниях? Можно заметить, что если бы это условие для какой-нибудь системы не выполнялось, т. е. если бы для какой-нибудь системы оказалось, что её энергия меньше импульса, то можно было бы указать такую инерциальную систему отсчёта, в которой энергия была бы равна нулю при отличном от нуля импульсе. Действительно, для этого нужно было бы взять скорость u так, чтобы было

$$\mathscr{E}_{\rm II} = \frac{\mathscr{E}_{\rm I} - uP_{{\rm I}x}}{\sqrt{1-u^2}} = 0,$$

и эта скорость оказалась бы больше критической. Такие системы в современной физике не известны.

Для всякой же «нормальной» системы, для которой всегда $\mathscr{E}^2 - P^2 > 0$ (предельный случай $\mathscr{E}^2 - P^2 = 0$ мы рассмотрим позже), всегда существует система отсчёта, в которой импульс равен нулю. Эту систему отсчёта мы будем называть основной и *по определению* будем считать, что в ней скорость рассматриваемой системы равна нулю, т. е. будем считать, что при

$$\mathbf{P} = 0 \quad \mathbf{v} = 0.$$

Во всякой же другой инерциальной системе отсчёта, движущейся относительно основной со скоростью $(-\mathbf{v})$, мы будем опять-таки по определению приписывать системе скорость $\mathbf{v}$. Тогда любая «нормальная» система в любом её состоянии будет иметь определённую скорость в любой инерциальной системе отсчёта, и её энергия и импульс будут зависеть от этой скорости, так что можно писать:

$$\mathscr{E}(\mathbf{v}), \quad \mathbf{P}(\mathbf{v}).$$

Закон преобразования (4.21) даёт тогда:

$$\left.\begin{aligned} \mathscr{E}(\mathbf{v}) &= \frac{\mathscr{E}(0)}{\sqrt{1-v^2}}, \\ \mathbf{P}(\mathbf{v}) &= \frac{E(0)\,\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-v^2}}. \end{aligned}\right\} \tag{4.25}$$

Из этих формул видно, во-первых, что наше определение скорости совпадает с обычным, если система является просто частицей, — достаточно сравнить (4.25) с (3.20) и заметить, что для частицы $\varepsilon(0) = m_0$. Во-вторых, так как связь энергии и импульса со скоростью оказывается для всех физических систем точно такой же, как для частиц, можно для любых нормальных систем **ввести понятие массы**. Очевидно, что надо определить инвариантную массу любой системы следующим образом:

$$M_0 = \mathscr{E}(0)\,^*), \tag{4.26}$$

а вариантную — соотношением

$$M = \frac{M_0}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{\mathscr{E}(0)}{\sqrt{1-v^2}}. \tag{4.27}$$

Тогда мы получим для любой нормальной системы:

$$\left.\begin{aligned} \mathscr{E}(\mathbf{v}) &= \frac{M_0}{\sqrt{1-v^2}}, \\ \mathbf{P}(\mathbf{v}) &= \frac{M_0\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2}}, \\ \mathscr{E}^2(\mathbf{v}) - \mathbf{P}^2(\mathbf{v}) &= M_0^2, \end{aligned}\right\} \tag{4.28}$$

и понятие массы остаётся прежним: это — величина, определяющая импульс системы при данной её скорости. Но в то же время масса определяет и энергию системы, именно инвариантная масса просто пропорциональна энергии покоя, и всегда энергия пропорциональна вариантной массе. В обычных единицах

$$\mathscr{E} = Mc^2, \quad \mathbf{P} = M\mathbf{v}. \tag{4.29}$$

Это и есть закон эквивалентности Эйнштейна. Очевидно, он есть просто следствие всеобщего закона существования единой меры движения или, другими словами, есть выражение неразрывной связи между скалярной и векторной мерами движения.

В природе существуют системы (например, фотоны), которые можно рассматривать как предельный случай нормальных. Для них

$$\mathscr{E}^2 - \mathbf{P}^2 = 0.$$

Наше определение скорости для них не годится, так как для них не существует основной системы отсчёта. Но для них можно написать:

$$\mathbf{P} = \mathscr{E}\mathbf{c}, \quad c = 1, \tag{4.30}$$

и эта формула совпадает с (4.29), причём $M = \mathscr{E}$, как и для нормальных систем. Поэтому следует приписывать таким системам скорость, по направлению совпадающую с импульсом (как и для нормальных систем), а по величине равную критической. Инвариантную же массу их следует считать равной нулю, ибо для них

$$M_0^2 = \mathscr{E}^2 - \mathbf{P}^2 = 0. \tag{4.31}$$

*) В обычных единицах $M_0c^2 = \mathscr{E}(0)$.

Отметим, что *инвариантная масса* $M_0 = \sqrt{\mathcal{E}^2 - P^2}$ *не аддитивна*: если система состоит из двух невзаимодействующих частей, её инвариантная масса не равна сумме инвариантных масс частей:

$$\sqrt{\mathcal{E}_1^2 - P_1^2} + \sqrt{\mathcal{E}_2^2 - P_2^2} \neq \sqrt{(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2)^2 - (\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2)^2}.$$

Только при очень малых скоростях, когда можно считать $\mathcal{E} \approx M_0$, а $P \ll \mathcal{E}$, получается приближённая аддитивность.

ВЫВОДЫ

1. Движение материи абсолютно, так как оно существует независимо от того, по отношению к чему оно рассматривается, и в то же время оно относительно, так как физические системы движутся относительно других физических систем. Поэтому мера движения также должна быть одновременно и абсолютной и относительной.

2. Материя движется в пространстве и времени, и свойства меры её движения не должны противоречить свойствам пространства и времени. Но пространство и время таковы, что существование относительной скалярной меры движения (энергии) неразрывно связано с существованием относительной же векторной меры движения (импульса). Импульс — столь же универсальная мера движения, как и энергия.

3. Скалярная и векторная меры движения должны рассматриваться как составляющие одной сложной меры, имеющей абсолютный характер, но различно разлагающейся на составляющие в разных системах отсчёта. Абсолютный характер этой сложной меры движения выражается в существовании закона преобразования её составляющих, т. е. в существовании связи между её составляющими в разных системах отсчёта.

Закон преобразования составляющих меры движения таков, что сама эта сложная мера может считаться вектором в четырёхмерном пространственно-временном многообразии мира.

4. Принцип относительности позволяет однозначно определить характер связи между составляющими меры движения любой физической системы и её скоростью в произвольной инерциальной системе отсчёта и позволяет ввести для любой физической системы понятие инертной массы как величины, связывающей скорость и меру движения.

По самому понятию инертная масса связана и с импульсом и с энергией, как с двумя составляющими единой меры движения. Выражением этой связи является закон эквивалентности массы и энергии, корнем которого является существование абсолютной меры движения.