

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

ВОПРОСЫ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

II. УСТРАНЕНИЕ РАСХОДИМОСТЕЙ ИЗ МАТРИЦЫ
РАССЕЯНИЯ*)*Н. Н. Боголюбов и Д. В. Ширков*

СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. Расходимости матрицы рассеяния спинорной электродинамики во 2-м и 3-м порядке	3
§ 2. Общие правила устранения расходимостей из S -матрицы	29
§ 3. Классификация ренормируемости теорий	48
§ 4. Общий вид контрчленов спинорной электродинамики	58
§ 5. Ренормировка массы и заряда в спинорной электродинамике	78
Цитированная литература	91

§ 1. РАСХОДИМОСТИ МАТРИЦЫ РАССЕЯНИЯ
СПИНОРНОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ ВО 2-М И 3-М ПОРЯДКЕ

Сформулированные в конце предыдущей статьи¹ правила Фейнмана для матричных элементов позволяют составлять для них выражения в виде интегралов по 4-импульсам промежуточных частиц. В простейших случаях (например, в эффектах комптоновского рассеяния, аннигиляции пар и т. п.) указанные интеграции выполняются тривиальным образом с помощью вершинных δ -функций, выражающих закон сохранения 4-импульса в отдельных вершинах соответствующих диаграмм. При наличии в диаграмме внутренних линий, соответствующих виртуальным частицам, число вершинных δ -функций оказывается недостаточным для сворачивания всех интегралов и функция $F(p', p)$ в (I.6.26)**) представляется в виде многократ-

*) Первую часть статьи см. УФН, т. LV, вып. 2.

**) Римская цифра I перед номером формулы означает, что имеется в виду формула из первой части статьи авторов¹.

ного интеграла. При этом оказывается, что такие интегралы в общем случае расходятся в области больших импульсов. Расходятся, например, матричные элементы комптоновского рассеяния и аннигиляции пар в высших порядках по e^2 (e^4 и выше). Расходятся также матричные элементы второго порядка, соответствующие диаграммам, изображённым на рис. 1.

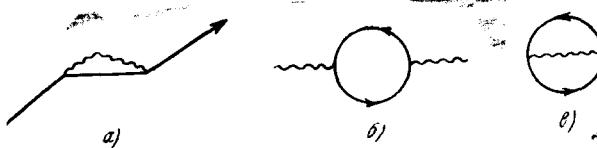


Рис. 1.

Возьмём член матрицы рассеяния, соответствующий диаграмме (рис. 1, a)

$$-4\pi e^2 : \bar{\psi}(x) \sum_n g^{nn} \gamma^n S^c(x - y) \gamma^n D_0^c(x - y) \psi(y) :. \quad (1.1)$$

Представим его в виде

$$: \bar{\psi}(x) \Sigma(x - y) \psi(y) :,$$

где

$$\Sigma(x - y) = -4\pi e^2 \sum_n g^{nn} \gamma^n S^c(x - y) \gamma^n D_0^c(x - y). \quad (1.2)$$

Простым вычислением нетрудно убедиться, что фурье-образ $\Sigma(p)$ матрицы $\Sigma(x - y)$

$$\Sigma(x - y) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{-ip(x-y)} \Sigma(p) dp$$

входит в матричный элемент S -матрицы следующим образом:

$$F(p', p) \sim \bar{u}(p') \Sigma(p) u(p) \quad (p' = p),$$

где \bar{u} и u есть спинорные амплитуды, соответствующие функциям поля $\bar{\psi}$ и ψ . Сходимость матричного элемента F поэтому полностью определяется сходимостью матрицы $\Sigma(p)$. Вспоминая, что в импульсном представлении причинные функции имеют вид (ср. (I.6.15) и (I.6.16))

$$D_0^c(k) = -\frac{1}{k^2 + i\epsilon}, \quad (1.3)$$

$$S^c(p) = \frac{m + \hat{p}}{m^2 - p^2 - i\epsilon}, \quad (1.4)$$

находим для $\Sigma(p)$ выражение

$$\begin{aligned}\Sigma(p) &= -\frac{4\pi e^2}{(2\pi)^4} \sum_n g^{nn} \int dk D_0^c(k) \gamma^n S^c(p-k) \gamma^n = \\ &= -\frac{e^2}{4\pi^3} \sum_n g^{nn} \int \frac{dk}{k^2 + i\epsilon} \gamma^n \frac{\hat{p} - \hat{k} + m}{(p-k)^2 - m^2 + i\epsilon} \gamma^n. \quad (1.5)\end{aligned}$$

При больших k интегрируемая функция убывает как k^{-3} и потому интеграл

$$\int d^4 k \cdot k^{-3}$$

расходится, вообще говоря, линейно.

Мы видим, таким образом, что принятые нами чисто формальные правила обращения с произведениями причинных функций в данном случае приводят к бессмысленному результату.

По существу здесь проявилось то обстоятельство, что мы не определили произведение сингулярных функций как интегрируемую сингулярную функцию. Чтобы решить задачу определения коэффициентов хронологического произведения

$$T\{L(x_1), L(x_2)\}$$

как интегрируемых несобственных функций, воспользуемся, подобно тому, как это было сделано в (I, § 2)*), методом предельного перехода. Для этого рассмотрим сначала вспомогательный фиктивный случай, когда полевые операторные функции удовлетворяют перестановочным соотношениям, в которых причинные Δ^c -функции заменены на $\text{reg}(\Delta^c)$.

В выражение для $\Sigma(p)$ вместо (1.3) и (1.4) должны быть подставлены функции

$$\text{reg}[D_0^c(k)] = -\frac{1}{k^2 + i\epsilon} - \sum_M C_M \frac{1}{k^2 + i\epsilon - M^2}, \quad (1.6)$$

$$\text{reg}[S^c(p)] = (\hat{p} + m) \left[\frac{1}{m^2 - p^2 - i\epsilon} + \sum_M C_M \frac{1}{M^2 - p^2 - i\epsilon} \right]. \quad (1.7)$$

При этом оказывается, что для регуляризации $\Sigma(p)$ достаточно одной вспомогательной массы M . Полагая

$$C_M = -1,$$

находим, что при больших k $\text{reg}[D_0^c(k)]$ убывает как k^{-4} , а $\text{reg}[S^c(p)]$ убывает, как k^{-3} ,

* Т. е. в § 2 предыдущей статьи¹.

и потому интеграл

$$\text{reg } (\Sigma(p)) = \frac{e^2}{4\pi^3} \sum_n g^{nn} \int dk \frac{M^2}{(k^2 + i\epsilon)(M^2 - k^2 - i\epsilon)} \times \\ \times \gamma^n \frac{(\hat{p} - \hat{k} + m)}{[m^2 - (p - k)^2 - i\epsilon] [M^2 - (p - k)^2 - i\epsilon]} \gamma^n \quad (1.8)$$

при больших значениях k сходится как

$$\int^k \frac{d^4 k}{k^4} \sim k^{-3}.$$

Исследуем теперь вопрос о поведении $\text{reg } (\Sigma(p))$ при $M \rightarrow \infty$ в процессе снятия регуляризации. Удобно провести это рассмотрение эффективным образом, вычислив $\text{reg } (\Sigma(p))$ в явном виде.

Для вычисления интеграла (1.8) используем следующий вспомогательный приём.

Сомножители знаменателя (1.8) будем представлять в виде

$$\frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} = \frac{1}{i} \int_0^\infty e^{i\alpha(k^2 - m^2 + i\epsilon)} d\alpha. \quad (1.9)$$

Тогда интегрирование по k сведётся к взятию интегралов типа Гаусса. Установим поэтому общие правила вычисления таких интегралов.

Рассмотрим типичный интеграл

$$\int_{-\infty}^\infty e^{i(at^2 + bt)} dt; \quad a > 0,$$

который мы будем всегда рассматривать как предел выражения

$$\int_{-\infty}^\infty e^{i(at^2 + bt + i\eta t^2)} dt \quad \text{при } \eta > 0, \quad \eta \rightarrow 0. \quad (1.10)$$

Для вычисления (1.10) произведём замену переменных (поворот пути интегрирования в комплексной t -плоскости)

$$it^2 = -\tau^2; \quad = V \bar{t} = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \tau,$$

тогда

$$\int_{-\infty}^\infty e^{i(at^2 + bt) - i\eta t^2} dt = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^\infty e^{-a\tau^2 + \frac{i-1}{\sqrt{2}}b\tau - i\eta\tau^2} d\tau.$$

Переходя к новой переменной

$$x = \tau + \frac{1-i}{\sqrt{2}} \frac{b}{a},$$

в пределе при $\eta \rightarrow 0$ получаем отсюда

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(at^2 + bt)} dt &= \frac{1+i}{\sqrt{2}} e^{-\frac{ib^2}{4a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \\ &= \frac{1+i}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{ib^2}{4a}}; \quad a > 0. \quad (1.11) \end{aligned}$$

Можем теперь вычислить необходимые нам 4-мерные интегралы типа

$$\int e^{i(ak^2 + bk)} dk,$$

где $k^2 = (k^0)^2 - \mathbf{k}^2$; $bk = b^0 k^0 - \mathbf{b}\mathbf{k}$; $dk = dk^0 d\mathbf{k}$.

С помощью (1.11) и формулы, получаемой из (1.11) операцией комплексного сопряжения, находим:

$$\begin{aligned} \int e^{i(ak^2 + bk)} dk &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(a(k^0)^2 - b^0 k^0)} dk^0 \times \\ &\times \prod_{1 \leq \alpha \leq 3} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(a(k^{\alpha})^2 - b^{\alpha} k^{\alpha})} dk^{\alpha} = \\ &= \frac{1+i}{\sqrt{2}} \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}} \right)^3 \frac{\pi^2}{a^2} e^{-\frac{i}{4a} ((b^0)^2 - b^1)}, \end{aligned}$$

т. е.

$$\int e^{i(ak^2 + bk)} dk = \frac{\pi^2}{ia^2} e^{-\frac{ib^2}{4a}}; \quad a > 0. \quad (1.12)$$

Дифференцируя это выражение один и два раза по компонентам b^n и b^m , получаем:

$$\int e^{i(ak^2 + bk)} k^n dk = \frac{ib^n}{2a} \frac{\pi^2}{a^2} e^{-\frac{ib^2}{4a}}; \quad a > 0, \quad (1.13)$$

а также

$$\int e^{i(ak^2 + bk)} k^m k^n dk = \frac{2ag^{mn} - ib^n b^m}{4a^2} \frac{\pi^2}{a^2} e^{-\frac{ib^2}{4a}}; \quad a > 0. \quad (1.14)$$

Вернёмся к вычислению интеграла (1.8). Подставляя в него интегральные представления сингулярных функций типа (1.9)

$$\text{reg} [D_0^c(k)] = i \int_0^{\infty} e^{ia_1 k^2 - \epsilon a_1} (1 - e^{-ia_1 M^2}) d\alpha_1, \quad (1.15)$$

$$\text{reg} [S^c(p)] = i \left(\hat{p} + m \right) \int_0^{\infty} e^{ia_2 p^2 - \epsilon a_2} (e^{-ia_2 M^2} - e^{-ia_2 M^2}) d\alpha_2 \quad (1.16)$$

с помощью формул (1.11) и (1.12) можем выполнить интегрирование по k . Получаем при этом, выполняя суммирование по n ,

$$\text{reg } [\Sigma(p)] = \frac{ie^2}{2\pi} \int_0^\infty d\alpha_1 \int_0^\infty d\alpha_2 \frac{e^{i\frac{\alpha_1 \alpha_2 p^2}{\alpha_1 + \alpha_2} - \epsilon(\alpha_1 + \alpha_2)}}{(\alpha_1 + \alpha_2)^2} \times$$

$$\times (1 - e^{-i\alpha_1 M^2}) (e^{-i\alpha_2 m^2} - e^{-i\alpha_2 M^2}) \left(2m - p \hat{\wedge} \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} \right).$$

Переходя к новым переменным

$$\alpha_1 = \xi \lambda; \quad \alpha_2 = (1 - \xi) \lambda,$$

с учётом якобиана

$$\left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi}, \frac{\partial \alpha_2}{\partial \lambda} \right) = \lambda$$

пронтегрировав по λ , находим в пределе $\epsilon \rightarrow 0$

$$\text{reg } (\Sigma(p)) = \frac{ie^2}{2\pi} \int_0^1 d\xi \left(2m - p \hat{\xi} \right) I(\xi, M),$$

где

$$I(\xi, M) = \ln \frac{|M^2 - \xi p^2| \cdot |\xi M^2 + (1 - \xi) m^2 - \xi(1 - \xi) p^2|}{|m^2 - \xi p^2| \cdot |M^2 - \xi(1 - \xi) p^2|},$$

или после небольшой перегруппировки членов:

$$\text{reg } [\Sigma(p)] = \frac{ie^2}{2\pi} \int_0^1 d\xi \left(2m - p \hat{\xi} \right) \ln \left| \xi \cdot \frac{M^2 - \xi p^2}{m^2} \right| +$$

$$+ \frac{ie^2}{2\pi} \int_0^1 d\xi \left(2m - p \hat{\xi} \right) \ln \left| \frac{m^2}{m^2 - \xi p^2} \cdot \frac{\xi M^2 + (1 - \xi) m^2 - \xi(1 - \xi) p^2}{\xi M^2 - \xi^2(1 - \xi) p^2} \right| \quad (1.17)$$

второй член в (1.17) при $M \rightarrow \infty$ будет сходиться к вполне определённому пределу, равному

$$\Sigma'(p) = \frac{ie^2}{2\pi} \int_0^1 d\xi \left(2m - p \hat{\xi} \right) \ln \left| \frac{m^2}{m^2 - \xi p^2} \right|. \quad (1.18)$$

Разбиение (1.17) выбрано так, что

$$\Sigma'(0) = 0 \quad \text{и} \quad \left. \frac{\partial \Sigma'(0)}{\partial p^n} \right|_{p=0} = 0. \quad (1.19)$$

Первый член в (1.17) при $M \rightarrow \infty$ расходится логарифмически.

Переходя к конфигурационному представлению, мы получаем при достаточно больших M

$$\begin{aligned} \text{reg} [\Sigma(x)] = \frac{ie^2}{4\pi} \left\{ \ln \left(\frac{M}{m} \right)^2 \cdot \left(4m - i \frac{\hat{\partial}}{\partial x} \right) + \right. \\ \left. + \left(\frac{i}{2} \frac{\hat{\partial}}{\partial x} - 4m \right) \right\} \delta(x) + \Sigma'_M(x), \quad (1.20) \\ \frac{\hat{\partial}}{\partial x} \equiv \sum_k \gamma^k \frac{\partial}{\partial x^k}, \end{aligned}$$

причём фурье-образ функции $\Sigma'_M(x)$ представляется вторым членом выражения (1.17). Повторяя рассуждение (I, § 2), убеждаемся, что при $M \rightarrow \infty$ $\Sigma'_M(x)$ сходится в несобственном смысле к интегрируемой функции

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \Sigma'_M(x) = \Sigma'(x),$$

фурье-образ которой представляется выражением (1.18).

Вся в целом функция $\text{reg} (\Sigma(x))$ из-за фактора $\ln \left(\frac{M}{m} \right)^2$ не будет сходиться даже в несобственном смысле.

Ввиду того, что первый член (1.20) исчезает при $x \neq 0$, можем написать

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \text{reg} [\Sigma(x)] = \Sigma'(x) \text{ при } x \neq 0.$$

Мы произвели здесь выделение расходящейся части из сингулярной функции $\Sigma(x)$.

Подчеркнём, однако, что операция выделения сингулярности является неоднозначной.

В самом деле, формулу (1.20) мы могли бы представить, например, в виде

$$\begin{aligned} \text{reg} [\Sigma(x)] = \frac{ie^2}{4\pi} \left\{ \ln \left(\frac{M^2}{\mu^2} \right) \left(4m - i \frac{\hat{\partial}}{\partial x} \right) + \right. \\ \left. + \left(\frac{i}{2} \frac{\hat{\partial}}{\partial x} - 4m \right) \right\} \delta(x) + \Sigma''_M(x), \end{aligned}$$

где

$$\Sigma''_M = \frac{ie^2}{4\pi} \ln \left(\frac{\mu^2}{m^2} \right) \left(4m - i \frac{\hat{\partial}}{\partial x} \right) \delta(x) + \Sigma'_M(x),$$

а μ — произвольная конечная масса.

Мы получили бы для регулярной части Σ_M' выражение, отличающееся от Σ_M' членами, пропорциональными $\delta(x)$ и её первым производным.

Изменение такого же характера в конечной части Σ_M' мы получили бы и при переходе к какому-либо другому способу регуляризации.

Так, например, если регуляризовать $\Sigma(p)$ введением под интеграл (1.5) обрезающего множителя^{2, 3}

$$\frac{M^2}{M^2 - k^2},$$

что эквивалентно у нас регуляризации лишь фотонной D_0^F -функции, то результат может быть представлен в виде

$$\begin{aligned} \text{reg}^F [\Sigma(x)] = \frac{ie^2}{4\pi} \left\{ \ln \left(\frac{M}{m} \right)^2 \left(4m - i \frac{\hat{\partial}}{\partial x} \right) + \right. \\ \left. + \left(\frac{i}{2} \frac{\hat{\partial}}{\partial x} - 4m \right) \right\} \delta(x) + \Sigma_F'(x), \end{aligned}$$

где регулярная функция Σ_F' в импульсном представлении отличается от Σ' на величину

$$\frac{ie^2}{4\pi} \int_0^1 d\xi \left(\hat{p}_\xi - 2m \right) \ln(1 - \xi) = \frac{ie^2}{4\pi} \left(2m - \frac{3}{4} \hat{p} \right).$$

Таким образом можно заметить, что при снятии регуляризации к определённому пределу сходится не $\text{reg}[\Sigma(p)]$, а, например, выражение, получающееся путём вычитания из него двух первых членов ряда Маклорена

$$\text{reg}[\Sigma(p)] - \text{reg}[\Sigma(0)] - \sum_n \left. \frac{\partial \text{reg}[\Sigma(p)]}{\partial p^n} \right|_{p=0} \cdot p^n. \quad (1.21)$$

Данное выражение сходится к пределу, не зависящему от способа регуляризации, так как добавление к $\text{reg}[\Sigma(p)]$ любого полинома первой степени по p не меняет написанного «остаточного» члена (1.21).

Общее выражение для $\Sigma'(p)$ получим, прибавляя к (1.21) произвольный полином первой степени по p .

Из соображений релятивистской ковариантности этот полином должен иметь вид

$$c_1 \hat{(p - m)} + c_2 \cdot m$$

и, следовательно, общее выражение для $\Sigma'(p)$ получим в виде

$$\begin{aligned} \Sigma'(p) = & \frac{ie^2}{2\pi} \left\{ \int_0^1 d\xi (2m - \hat{p}\xi) \ln \left| \frac{m^2}{m^2 - \xi p^2} \right| + \right. \\ & \left. + c_1 (\hat{p} - m) + c_2 m \right\}. \quad (1.22) \end{aligned}$$

Соответственно в x -представлении выражение для Σ' определено с точностью до члена

$$\frac{ie^2}{2\pi} \left[c_1 \left(i \frac{\partial}{\partial x} - m \right) + c_2 m \right] \delta(x),$$

исчезающего при $x \neq 0$.

Таким образом, как и следовало ожидать из общих соображений, произвол в данном члене T -произведения проявляется лишь в бесконечно малой окрестности точки $x = 0$.

Обратимся ко второму расходящемуся члену в $S_2(x, y)$. Член матрицы рассеяния, соответствующий диаграмме (рис. 1, б), можно представить в виде

$$\begin{aligned} -4\pi e^2 : \text{Sp} \{ \hat{A}(x) S^c(x - y) \hat{A}(y) S^c(y - x) \} : = \\ = \sum_{m, n} : A_m(x) \Pi^{mn}(x - y) A_n(y) :, \end{aligned}$$

где

$$\Pi^{mn}(x - y) = -4\pi e^2 \text{Sp} \{ \gamma^m S^c(x - y) \gamma^n S^c(y - x) \}. \quad (1.23)$$

Переходя к импульсному представлению

$$\Pi^{mn}(x - y) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{ik(x-y)} \Pi^{mn}(k) dk,$$

убеждаемся, что интеграл

$$\Pi^{mn}(k) = -\frac{e^2}{4\pi^3} \int dp \text{Sp} \left\{ \gamma^m \frac{\hat{p} + m}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} \gamma^n \frac{\hat{p} - \hat{k} + m}{(p - k)^2 - m^2 + i\varepsilon} \right\} \quad (1.24)$$

расходится в области больших импульсов квадратично

$$\int^p dp \cdot p \sim p^2.$$

Для явного вычисления $\Pi^{mn}(k)$ воспользуемся теми же приемами, которые применялись при вычислении $\Sigma(p)$.

Используя регуляризованные S^c -функции (1.16), с помощью формул (1.12), (1.13) и (1.14) производим интегрирование по p .

Вычисляя шпур, получаем:

$$\begin{aligned}
 \text{reg} [\Pi^{mn}(k)] &= \\
 &= \frac{e^2}{\pi} \int_0^\infty d\alpha_1 \int_0^\infty d\alpha_2 e^{-\epsilon(\alpha_1 + \alpha_2)} (e^{-i\alpha_1 m^2} - e^{-i\alpha_1 M^2}) \times \\
 &\quad \times (e^{-i\alpha_2 m^2} - e^{-i\alpha_2 M^2}) e^{\frac{i\alpha_1 \alpha_2 k^2}{\alpha_1 + \alpha_2}} \frac{1}{(\alpha_1 + \alpha_2)^2} \times \\
 &\quad \times \left\{ \frac{i\alpha_1 \alpha_2}{(\alpha_1 + \alpha_2)^2} [2k^n k^m - g^{mn} k^2] - g^{mn} \left[\frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2} + i m^2 \right] \right\}.
 \end{aligned}$$

Переходя к новым переменным

$$\alpha_1 = \xi \lambda; \quad \alpha_2 = (1 - \xi) \lambda$$

и интегрируя по λ , находим, что в пределе больших M

$$\begin{aligned}
 \text{reg} [\Pi^{mn}(k)] &= \frac{e^2}{2\pi i} g^{mn} (M^2 - m^2) + \\
 &+ \frac{ie^2}{3\pi} \ln \left(\frac{M}{m} \right)^2 (k^n k^m - g^{mn} k^2) + \Pi'^{mn}(k), \quad (1.25)
 \end{aligned}$$

где регуляризованная функция $\Pi'^{mn}(k)$ выражается в виде

$$\begin{aligned}
 \Pi'^{mn}(k) &= \frac{2ie^2}{\pi} (k^n k^m - g^{mn} k^2) \int_0^1 d\xi \xi (1 - \xi) \ln \left| \frac{\xi (1 - \xi) m^2}{m^2 - \xi (1 - \xi) k^2} \right| + \\
 &+ \frac{ie^2}{\pi} g^{mn} \left(m^2 - \frac{k^2}{6} \right). \quad (1.26)
 \end{aligned}$$

Переходя к конфигурационному представлению, мы получаем при достаточно больших M

$$\begin{aligned}
 \text{reg} [\Pi^{mn}(x)] &= \frac{e^2}{2\pi i} g^{mn} (M^2 - m^2) \delta(x) - \\
 &- \frac{ie^2}{3\pi} \ln \left(\frac{M}{m} \right)^2 \left[g^{nn} \frac{\partial}{\partial x^n} g^{mm} \frac{\partial}{\partial x^m} - g^{mn} \square \right] \delta(x) + \Pi'_M(x). \quad (1.27)
 \end{aligned}$$

В пределе $M \rightarrow \infty$ член $\Pi'_M(x)$ сходится в несобственном смысле к интегрируемой функции $\Pi'^{mn}(x)$

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \Pi'_M(x) = \Pi'^{mn}(x),$$

формулою которой даётся формула (1.26).

Выделение сингулярностей из $\Pi^{mn}(x)$, таким образом, закончено. Заметим, что, как и в предыдущем случае, разбиение $\text{reg} [\Pi^{mn}(x)]$ на сингулярную и конечную части, а следовательно, и конечная часть $\Pi'^{mn}(x)$ не является однозначной. К $\Pi'^{mn}(k)$ может быть прибавлено любое выражение, являющееся полиномом

по компонентам k степени не выше 2-й, так как сингулярная часть является в данном случае полиномом k 2-й степени.

Чтобы закончить анализ выражения Π^{mn} , сформулируем ещё условие градиентной инвариантности, которому Π^{mn} должно удовлетворять.

Нетрудно убедиться, что в матричные элементы функция $\Pi^{mn}(k)$, подобно функции $\Sigma(p)$, входит в следующей комбинации с потенциалами:

$$\sum_{m, n} :A_m(k) \Pi^{mn}(k) A_n(k):. \quad (1.27a)$$

Как известно, условие градиентной инвариантности заключается в том, что все физически наблюдаемые величины не меняют своего значения при градиентном преобразовании потенциалов

$$A_m(x) \rightarrow A'_m(x) = A_m(x) + \frac{\partial f(x)}{\partial x^m}$$

или в импульсном представлении

$$A_m(k) \rightarrow A'_m(k) = A_m(k) + ig^{mm}k^m f(k).$$

Поэтому требование инвариантности матричных элементов операторов типа (1.27a)

$$\sum_{m, n} :A'_m(k) \Pi^{mn}(k) A'_n(k): = \sum_{m, n} :A_m(k) \Pi^{mn}(k) A_n(k):$$

приводит нас к условию

$$\sum_m g^{mm}k^m \Pi^{mn}(k) = 0, \quad (1.28)$$

откуда следует, что функция Π^{mn} должна иметь вид

$$\Pi^{mn}(k) = (k^m k^n - g^{mn}k^2) \pi(k^2). \quad (1.29)$$

Возвращаясь к формулам (1.25) и (1.26), мы видим, что ввиду расходности функции $\Pi^{mn}(k)$ требование градиентной инвариантности (1.28) может быть наложено лишь на регулярную часть $\Pi'^{mn}(k)$.

Из формулы (1.26) видно, что для того, чтобы Π'^{mn} удовлетворяла условию (1.28), необходимо отнять от неё, воспользовавшись упоминавшимся произволом, член

$$\frac{ie^2}{\pi} g^{mn} \left(m^2 - \frac{k^2}{6} \right),$$

а также прибавить выражение

$$c_3 (k^n k^m - g^{mn}k^2).$$

Иными словами, разбиение (1.27) нужно заменить на следующее:

$$\text{reg} [\Pi^{mn}(x)] = \frac{e^2}{2\pi i} g^{mn} \left(M^2 - 3m^2 - \frac{\square}{3} \right) \delta(x) - \frac{ie^2}{3\pi} \left[\ln \left(\frac{M}{m} \right)^2 - 3c_3 \right] \left[g^{nn} \frac{\partial}{\partial x^n} g^{mm} \frac{\partial}{\partial x^m} - g^{mn} \square \right] \delta(x) + \Pi'_{\text{инв}}^{mn}(x),$$

где конечная часть $\Pi'_{\text{инв}}^{mn}(x)$ инвариантна по отношению к градиентному преобразованию и в импульсном представлении имеет форму (1.29)

$$\begin{aligned} \Pi'_{\text{инв}}^{mn}(k) &= \\ &= \frac{2ie^2}{\pi} (k^n k^m - g^{mn} k^2) \left[\int_0^1 d\xi \xi (1-\xi) \ln \left| \frac{m^2 \xi (1-\xi)}{m^2 - \xi (1-\xi) k^2} \right| - \frac{c_3}{2} \right]. \end{aligned} \quad (1.30)$$

Подобным же образом может быть исследован член S -матрицы, соответствующий диаграмме (рис. 1, в). Не вдаваясь в подробности, отметим лишь, что соответствующая функция

$$R(x_1 - x_2)$$

после выполнения регуляризации в импульсном представлении может быть представлена в виде

$$R(k) = R'_M(k) + R_{\text{синг}}(Mk),$$

причём при $M \rightarrow \infty$ функция $R'_M(k)$ сходится к интегрируемому пределу

$$\lim_{M \rightarrow \infty} R'_M(k) = R'(k),$$

а $R_{\text{синг}}$ стремится к полиномиальной функции компонент 4-вектора k , расходящейся, как M^4 .

Мы приходим к выводу, что член второго порядка в матрице рассеяния

$$S_2(x_1, x_2) = i^2 T [L(x_1), L(x_2)]$$

в рассматриваемом регуляризованном случае ($M < \infty$) может быть представлен в виде

$$\begin{aligned} S_2(x_1, x_2) &= i^2 T_M [L(x_1), L(x_2)] - \\ &- i \left\{ a_1^M \bar{\psi}(x_1) \left(i \frac{\hat{\partial}}{\partial x_1} - m \right) \delta(x_1 - x_2) \psi(x_2) \right\} - \\ &- a_2^M \bar{\psi}(x_1) \delta(x_1 - x_2) \psi(x_2) + a_3^M \sum_{m,n} :A_m(x_1) \times \\ &\times \left[g^{nn} \frac{\partial}{\partial x_1^n} g^{mm} \frac{\partial}{\partial x_1^m} - \square_{x_1} g^{mn} \right] \delta(x_1 - x_2) A_m(x_2) + \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & + a_4^M \sum_{m, n} g^{mn} : A_m (x_1) \delta (x_1 - x_2) A_n (x_2) : - \\
 & - a_5^M \sum_{m, n} g^{mn} : A_m (x_1) [\square_{x_1} \delta (x_1 - x_2)] A_n (x_2) : + \\
 & + R_{\text{синг}} \left(M, \frac{\partial}{\partial x} \right) \delta (x_1 - x_2) + \\
 & + \text{те же члены с заменой } x_1 \leftrightarrow x_2 \}.
 \end{aligned} \quad (1.31)$$

При этом константы a_1, a_2, a_3, a_4 и a_5 при больших M стремятся к выражениям

$$\begin{aligned}
 a_1 & \sim \frac{e^2}{4\pi} \left[\ln \left(\frac{M}{m} \right)^2 - \frac{1}{2} - c_1 \right]; \quad a_2 \sim \frac{e^2 m}{4\pi} \left[3 \ln \left(\frac{M}{m} \right)^2 - \frac{7}{2} + c_0 \right]; \\
 a_3 & \sim \frac{e^2}{3\pi} \left[\ln \left(\frac{M}{m} \right)^2 - 3c_3 \right]; \quad a_4 \sim \frac{e^2}{2\pi} (M^2 - 3m^2); \quad a_5 \sim \frac{e^2}{6\pi},
 \end{aligned}$$

а в коэффициентных функциях выражения T'_M должны быть использованы в правилах соответствия: для простых линий диаграмм Фейнмана — функция $\text{reg} [\Delta^c]$ вместо Δ^c и для замкнутых диаграмм — соответствующие конечные функции $\Sigma'_M, \Pi'^{mn}_{M, \text{инв}}$ и R'_M .

Очевидно тогда, что все коэффициентные функции выражения $T'_M [L(x_1), L(x_2)]$ сходятся к конечному пределу при снятии регуляризации.

Мы видим также, что все расходимости в $S_2 (x_1, x_2)$ происходят от членов, пропорциональных $\delta (x_1 - x_2)$ и её производным, отличным от нуля лишь в бесконечно малой окрестности точки $x_1 = x_2$. Как раз в окрестности точки $x_1 = x_2$, как об этом упоминалось в (I, § 4), T -произведение

$$T [L(x_1), L(x_2)]$$

не является полностью определённым.

Возникает поэтому возможность определить

$$T [L(x_1), L(x_2)]$$

в окрестности точки $x_1 = x_2$ как предел

$$\lim_{M \rightarrow \infty} T'_M [L(x_1), L(x_2)] = T' [L(x_1), L(x_2)],$$

чем будет обеспечена интегрируемость $S_2 (x_1, x_2)$.

Имеется также и другая, совершенно эквивалентная возможность. Как было установлено в (I, § 4), наиболее общая форма S_2 включает в себя произвольный квазилокальный оператор

$$S_2 (x_1, x_2) = i^2 T [L(x_1), L(x_2)] + i \Lambda_2 (x_1, x_2). \quad (1.32)$$

Действительно, указанные члены пропорциональны e^3 и не содержат факторов, соответствующих свободным электронам и по-

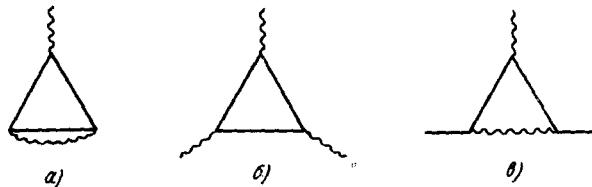


Рис. 3.

зитронам. Поэтому при преобразовании зарядового сопряжения соответствующие матричные элементы изменятся на фактор

$$(-1)^3 = -1$$

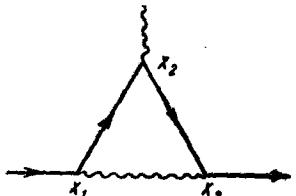


Рис. 4.

и в силу отсутствия реальных электронов и позитронов будут описывать те же самые процессы. Следовательно, они равны нулю*).

Необходимо поэтому рассмотреть лишь член в S_3 , соответствующий диаграмме рис. 4.

Согласно общим правилам этот член имеет вид

$$(i\sqrt{4\pi \cdot e})^3 : \bar{\psi}(x_3) \hat{A}(x_3) \overset{\wedge}{\psi}(x_3) \overset{\wedge}{\psi}(x_2) \hat{A}(x_2) \overset{\wedge}{\psi}(x_2) \overset{\wedge}{\psi}(x_1) \hat{A}(x_1) \overset{\wedge}{\psi}(x_1) := \\ = i\sqrt{4\pi \cdot e} \sum_n : \bar{\psi}(x_3) \Gamma^n(x_3, x_1 | x_3) \psi(x_1) A_n(x_2) :, \quad (1.36)$$

где «вершинная функция» $\Gamma^n(x, y | \xi)$ определена следующим образом:

$$\Gamma^n(x, y | \xi) = i 4\pi e^2 \sum_k g^{kk} \gamma^k S^c(x - \xi) \gamma^n S^c(\xi - y) \gamma^k D_0^c(x - y). \quad (1.37)$$

Переходя к импульльному представлению

$$\Gamma^n(x, y | \xi) = \frac{1}{(2\pi)^8} \int e^{ip(y-x) + ik(x-\xi)} \Gamma^n(p, k) dp dk,$$

*). Это утверждение является частным случаем известной теоремы Фарри (см. § 4).

находим, что

$$\begin{aligned} \Gamma^n(p, k) &= i \frac{e^2}{4\pi^3} \int dq D_0^c(p-q) \sum_l \gamma^l g^{ll} S^c(q) \gamma^n S^c(q+k) \gamma^l = \\ &= \frac{ie^2}{4\pi^3} \sum_l g^{ll} \int \frac{dq}{(p-q)^2 + i\varepsilon} \gamma^l \frac{\hat{q} + m}{q^2 - m^2 + i\varepsilon} \gamma^n \frac{\hat{q} + \hat{k} + m}{(q+k)^2 - m^2 + i\varepsilon} \gamma^l. \end{aligned} \quad (1.38)$$

Интеграл (1.38) при больших q расходится логарифмически. Для его вычисления воспользуемся принятой нами процедурой регуляризации (1.15), (1.16). Подставляя эти выражения для S^c и D_0^c -функций в (1.38), находим после некоторых перестроек матриц Дирака

$$\begin{aligned} \text{reg} [\Gamma^n(p, k)] &= \\ &= -\frac{e^2}{2\pi^3} \int_0^\infty d\alpha_1 \int_0^\infty d\alpha_2 \int_0^\infty d\alpha_3 e^{i\alpha_1 p^2 + i\alpha_3 k^2 - \varepsilon(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)} (1 - e^{-i\alpha_1 M^2}) \times \\ &\times (e^{-i\alpha_2 m^2} - e^{-i\alpha_2 M^2}) (e^{-i\alpha_3 m^2} - e^{-i\alpha_3 M^2}) \int dq e^{iq^2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + 2iq(k\alpha_3 - p\alpha_1)} \times \\ &\times [\gamma^n m^2 + (\hat{k} + \hat{q}) \gamma^n \hat{q} - 2m(k^n + 2q^n)]. \end{aligned}$$

Выполняя интегрирование по q с помощью формул (1.12) — (1.14) и переходя к новым переменным

$$\alpha_1 = \lambda \xi_1; \quad \alpha_2 = \lambda (1 - \xi_1 - \xi_2); \quad \alpha_3 = \lambda \xi_2,$$

получаем отсюда, проинтегрировав по λ в пределе больших M ,

$$\begin{aligned} \text{reg} [\Gamma^n(p, k)] &= \\ &= -\frac{e^2}{2\pi} \gamma^n \int_0^1 d\xi_1 \int_0^{1-\xi_1} d\xi_2 \left\{ \ln \left(\frac{M}{m} \right)^2 + \ln \left| \frac{\xi_1 \xi_2 (1 - \xi_1 - \xi_2)}{(1 - \xi_1)(1 - \xi_2)(\xi_1 + \xi_2)} \right| + \right. \\ &\quad \left. + \ln \left| \frac{m^2}{(1 - \xi_1) - \xi_1 (1 - \xi_1) p^2 - \xi_2 (1 - \xi_2) k^2 - 2\xi_1 \xi_2 (pk)} \right| \right\} - \\ &- \frac{e^2}{2\pi} \int_0^1 d\xi_1 \int_0^{1-\xi_1} d\xi_2 \frac{\gamma^n m^2 - 2mk^n + \hat{k} \gamma^n (p\xi_1 - \hat{k}\xi_2) + 4m(k^n \xi_2 - p^n \xi_1) + (\hat{p}\xi_1 - \hat{k}\xi_2) \gamma^n (p\xi_1 - \hat{k}\xi_2)}{m^2 (1 - \xi_1) - \xi_1 (1 - \xi_1) p^2 - \xi_2 (1 - \xi_2) k^2 - 2\xi_1 \xi_2 (pk)}, \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$\text{reg} [\Gamma^n(p, k)] = -\frac{e^2 \gamma^n}{4\pi} \left[\ln \left(\frac{M}{m} \right)^2 - \frac{1}{2} \right] + \Gamma_M^n(p, k), \quad (1.39)$$

причём член Γ_M^n в пределе больших M сходится к конечному пределу, равному

$$\begin{aligned} \Gamma'^n(p, k) = & -\frac{e^2}{2\pi} \gamma^n \left\{ \int_0^1 d\xi_1 \int_0^{1-\xi_1} d\xi_2 \ln \left| \frac{m^2(1-\xi_1)}{m^2(1-\xi_1) - \xi_1 p^2 - \xi_2 k^2 + (\xi_1 p - \xi_2 k)^2} \right| - 1 \right\} - \\ & - \frac{e^2}{2\pi} \int_0^1 d\xi_1 \int_0^{1-\xi_1} d\xi_2 \frac{\gamma^n m^2 - 2m k^n + k \gamma^n (p\xi_1 - k\xi_2) + 4m k^n \xi_2 - p^n \xi_1 + (p\xi_1 - k\xi_2) \gamma^n (p\xi_1 - k\xi_2)}{m^2(1-\xi_1) - \xi_1 p^2 - \xi_2 k^2 + (\xi_1 p - \xi_2 k)^2}. \end{aligned} \quad (1.40)$$

Разбиение (1.39) выбрано так, что

$$\Gamma'^n(0, 0) = 0. \quad (1.41)$$

Переходя к конфигурационному представлению, находим, что при достаточно больших M

$$\begin{aligned} \text{reg} [\Gamma^n(x, y | \xi)] = & -\frac{e^2}{4\pi} \gamma^n \left[\ln \left(\frac{M}{m} \right)^2 - \frac{1}{2} \right] \delta(x - y) \delta(y - \xi) + \\ & + \Gamma_M^n(x, y | \xi), \end{aligned} \quad (1.42)$$

причём в пределе $M \rightarrow \infty$ член Γ_M^n сходится к интегрируемой функции Γ'^n , которая в импульсном представлении определяется формулой (1.40). Первый член в (1.42) при $M \rightarrow \infty$ расходится логарифмически.

Процедура выделения расходимости из Γ^n как всегда неоднозначна. Степень неоднозначности определяется структурой сингу-

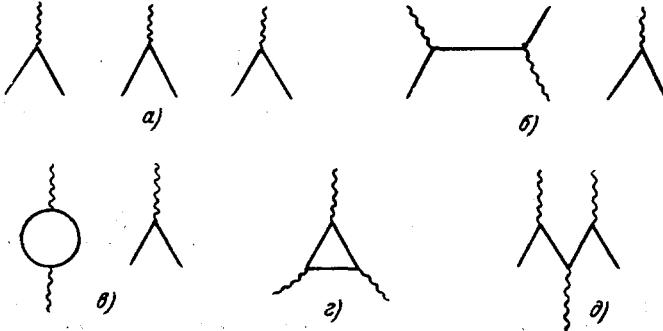


Рис. 5.

лярного члена. К выражению (1.40) поэтому может быть прибавлена постоянная, умноженная на матрицу γ^n . Эта постоянная, однако, не является произвольной и определяется условием градиентной инвариантности.

Рассмотрим это условие применительно к членам третьего порядка матрицы рассеяния. Члены S -матрицы, входящие в S_3 , могут

быть разбиты на две группы. Одну из них составляют члены, содержащие три оператора электромагнитного поля $A(x_1)$, $A(x_2)$, $A(x_3)$ и не содержащие электромагнитных спариваний D_0^c , в другую войдут выражения, содержащие один оператор A и одно спаривание D_0^c . Члены первой группы соответствуют диаграммам типа показанных на рис. 5.

Члены, соответствующие диаграммам рис. 5, *a*, *b*, *v*, являются нормальными произведениями членов S -матрицы низшего порядка и потому явным образом градиентно инвариантны. Член рис. 5, *g* равен нулю по теореме Фарри и, наконец, градиентная инвариантность членов рис. 5, *д* может быть установлена непосредственным вычислением.

Члены второй группы, содержащие собственные расходимости третьего порядка, могут быть в целом записаны в виде

$$\sum_m :A_m(x_1) J^m(x_1, x_2, x_3): + \sum_n :A_n(x_2) J^n(x_2, x_3, x_1): + \\ + \sum_l :A_l(x_3) J^l(x_3, x_1, x_2):.$$

Требование градиентной инвариантности накладывает на каждое из слагаемых этого выражения условие вида

$$\sum_m \int dx_1 \frac{\partial f(x_1)}{\partial x_1^m} J^m(x_1, x_2, x_3) = 0, \quad (1.43)$$

которое ввиду произвольности функции f даёт

$$\sum_m \frac{\partial}{\partial x_1^m} J^m(x, x_1, x_2) = 0. \quad (1.44)$$

Обратимся к структуре функции $J^m(x, x_1, x_2)$.

Эта функция содержит члены, соответствующие четырём диаграммам, изображённым на рис. 6, и ещё четырём диаграммам,

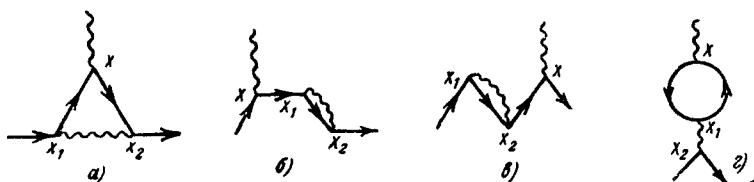


Рис. 6.

отличающимся от диаграмм рис. 6 перестановкой точек x_1 и x_2 . Заметим, во-первых, что члены J^m , соответствующие диаграмме

типа рис. 6, g , т. е.

$$J_{(r)}^m(x, x_1, x_2) \sim \left\{ \sum_{n, l} \Pi^{mn}(x - x_1) g^{nl} : \bar{\psi}(x_2) \gamma^l \psi(x_2) : D_0^c(x_1 - x_2) + \right. \\ \left. + \text{член, отличающийся перестановкой } x_1 \text{ и } x_2 \right\},$$

после устранения расходимостей в силу условия (1.28) дают автоматически

$$\sum_m \frac{\partial}{\partial x^m} J_{(r)}^m(x, x_1, x_2) = 0. \quad (1.45)$$

Поэтому остаётся рассмотреть лишь члены S_3 , соответствующие трём первым диаграммам рис. 6:

$$i \sum_l g^{ll} \left\{ : \bar{\psi}(x_2) \gamma^l S^c(x_2 - x) \gamma^n S^c(x - x_1) \gamma^n \psi(x) : + \right. \\ \left. + : \bar{\psi}(x_2) \gamma^l S^c(x_2 - x_1) \gamma^n S^c(x_1 - x) \gamma^n \psi(x) : + \right. \\ \left. + : \bar{\psi}(x) \gamma^n S^c(x - x_2) \gamma^l S^c(x_2 - x_1) \gamma^l \psi(x_1) : \right\} D_0^c(x_1 - x_2). \quad (1.46)$$

Формально дифференцируя их по x^n и суммируя по n с учётом уравнений

$$\left(i \frac{\hat{\partial}}{\partial x} - m \right) \psi(x) = 0, \quad i \sum_n \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x^n} \gamma^n + m \bar{\psi}(x) = 0, \\ \left(i \frac{\hat{\partial}}{\partial x} - m \right) S^c(x) = i \sum_n \frac{\partial S^c(x)}{\partial x^n} \gamma^n - m S^c(x) = -\delta(x),$$

получаем нуль.

Таким образом, члены S -матрицы, соответствующие диаграммам рис. 6, a , b , c , в сумме действительно градиентно инвариантны.

Проведённая здесь проверка условия (1.44) носила чисто формальный характер, поскольку каждый из членов выражения (1.46) в действительности расходится. На самом деле необходимо проверить условие градиентной инвариантности его конечной части. Для удобства проверки целесообразно воспользоваться сначала методом регуляризации Фейнмана, а затем уже перейти к принятому нами способу регуляризации.

Регуляризую поэтому лишь одну фотонную функцию

$$D_0^c(x_1 - x_2) \rightarrow \text{reg} [D_0^c(x_1 - x_2)],$$

получаем выражение

$$\begin{aligned}
 & i \sum_l g^{ll} \{ : \bar{\psi}(x_2) \gamma^l S^c(x_2 - x) \gamma^n S^c(x - x_1) \gamma^l \psi(x_1) : + \\
 & + : \bar{\psi}(x_2) \gamma^l S^c(x_2 - x_1) \gamma^l S^c(x_1 - x) \gamma^n \psi(x) : + \\
 & + : \bar{\psi}(x) \gamma^n S^c(x - x_2) \gamma^l S^c(x_2 - x_1) \gamma^l \psi(x_1) : \} \operatorname{reg} [D_0^c(x_1 - x_2)], \quad (1.47)
 \end{aligned}$$

которое, в целом, явным образом удовлетворяет условию (1.44), так как подвергающиеся дифференцированию сомножители

$$\bar{\psi}(x), S^c(x - \dots), S^c(\dots - x), \psi(x)$$

здесь не меняются.

Сингулярная часть выражения (1.47) при $M < \infty$ с учётом разложений

$$\begin{aligned}
 \operatorname{reg}^F [\Sigma(x - y)] &= \frac{a_1^F}{i} \left(i \sum_k \gamma^k \frac{\partial}{\partial x^k} - m \right) \delta(x - y) + \\
 &+ i a_2^F \delta(x - y) + \Sigma'_F(x - y), \quad \left. \right\} \quad (1.48) \\
 \operatorname{reg}^F [\Gamma^n(x, y | \xi)] &= a_5^F \gamma^n \delta(x - y) \delta(x - \xi) + \Gamma_F'^n(x, y | \xi)
 \end{aligned}$$

представляется в виде

$$\begin{aligned}
 a_5^F : \bar{\psi}(x_2) \gamma^n \delta(x_2 - x) \delta(x - x_1) \psi(x_1) : + \\
 + a_1^F : \bar{\psi}(x_2) \left[\left(i \frac{\partial}{\partial x_2} - m \right) \delta(x_2 - x_1) \right] S^c(x_1 - x) \gamma^n \psi(x) : - \\
 - a_2^F : \bar{\psi}(x_2) \delta(x_2 - x_1) S^c(x_1 - x) \gamma^n \psi(x) : + \\
 + a_1^F : \bar{\psi}(x) \gamma^n S^c(x - x_2) \left[\left(i \frac{\partial}{\partial x_2} - m \right) \delta(x_2 - x_1) \right] \psi(x_1) : - \\
 - a_2^F : \bar{\psi}(x) \gamma^n S^c(x - x_1) \delta(x_1 - x_2) \psi(x_1) : .
 \end{aligned}$$

Дифференцируя эту комбинацию по x^n , суммируя по n с учётом уравнений для ψ , $\bar{\psi}$ и S^c , приходим к выражению

$$\begin{aligned}
 (a_5^F - a_1^F) \left\{ : \bar{\psi}(x_2) \left[\frac{\partial}{\partial x} \delta(x_2 - x) \right] \delta(x - x_1) \psi(x_1) : + \right. \\
 \left. + : \bar{\psi}(x_2) \delta(x_2 - x) \left[\frac{\partial}{\partial x} \delta(x - x_1) \right] \psi(x_1) : \right\} .
 \end{aligned}$$

Таким образом, для обеспечения градиентной инвариантности син-

гулярной части выражения (1.48) необходимо, чтобы

$$a_5^F = a_1^F. \quad (1.49)$$

В силу градиентной инвариантности всего выражения (1.48) в целом при этом обеспечивается инвариантность его конечной части. Переходя затем к пределу $M \rightarrow \infty$ после перестройки эффективного лагранжиана, мы получим для S_3 градиентно-инвариантное выражение, не содержащее бесконечностей.

Тождество сингулярных констант (1.49), обеспечивающее градиентную инвариантность, впервые установлено в несколько более общей форме Уордом⁷ и известно под названием «тождества Уорда».

Тождество Уорда было получено нами при регуляризации по Фейнману. Покажем, что оно имеет место и при обычно принятом нами способе регуляризации. Для этого, обозначив для сокращения записи

$$\text{reg}^F[\Sigma] = \Sigma_F; \quad \text{reg}^F[\Gamma^n] = \Gamma_F^n,$$

представим соотношения (1.48) в виде

$$\begin{aligned} \Sigma_F(p) + ia_1^F p - i(a_1^F + a_2^F) m = \\ = \Sigma_F(p) - \Sigma_F(0) - \sum_n \frac{\partial \Sigma_F(p)}{\partial p^n} \Big|_{p=0} \cdot p^n + c_0^F + \hat{p} c_1^F, \end{aligned} \quad (1.50)$$

$$\Gamma_F^n(p, k) - a_1^F \gamma^n = \Gamma_F^n(p, k) - \Gamma_F^n(0, 0) + i c_2^F \gamma^n, \quad (1.51)$$

откуда следует

$$a_1^F \gamma^n = i \frac{\partial \Sigma_F(p)}{\partial p^n} \Big|_{p=0} g^{nn} - i c_1^F \gamma^n = \Gamma_F^n(0, 0) - i c_2^F \gamma^n. \quad (1.52)$$

С помощью прямого вычисления легко убедиться, что

$$i g^{nn} \frac{\partial \Sigma_F(p)}{\partial p^n} = \Gamma_F^n(p, 0). \quad (1.53)$$

Поэтому из (1.52) следует, что

$$c_1^F = c_2^F.$$

Вспоминая теперь, что согласно (1.21) комбинация

$$\Sigma_F(p) - \Sigma_F(0) - \sum_n \frac{\partial \Sigma_F}{\partial p^n} \Big|_{p=0} \cdot p^n$$

не зависит от способа регуляризации и, в соответствии с (1.19), равна выражению (1.18), а также, принимая во внимание аналогич-

ные соображения для функции Γ^n , приходим к выводу, что выражения

$$\Sigma'(p) + c_0 + c_1 p^\wedge$$

и

$$\Gamma^n(p, k) + i c_2 \gamma^n$$

удовлетворяют требованию градиентной инвариантности при условии

$$c_1 = c_2.$$

Поэтому вычитаемые при нашем обычном способе регуляризации сингулярные части функций $\Sigma(x)$ и $\Gamma^n(x, y | \xi)$ могут быть записаны в виде

$$-ia_1 \left(i \frac{\partial}{\partial x} - m \right) \delta(x) + ia_2 \delta(x), \quad (1.54)$$

$$-a_1 \gamma^n \delta(x - y) \delta(x - \xi), \quad (1.55)$$

причём

$$a_1 = \frac{e^2}{4\pi} \left[\ln \left(\frac{M}{m} \right)^2 - \frac{1}{2} - C_1 \right], \quad (1.56)$$

$$a_2 = \frac{e^2 m}{4\pi} \left[3 \ln \left(\frac{M}{m} \right)^2 - \frac{7}{2} + C_0 \right]. \quad (1.57)$$

Тождество Уорда, таким образом, имеет место и в нашем способе регуляризации. Ввиду того, что в проведённом рассуждении использовались лишь соотношения

$$\Sigma(0) = 0; \quad \left. \frac{\partial \Sigma}{\partial p^n} \right|_{p=0} = 0; \quad \Gamma^n(0, 0) = 0,$$

тем самым показано, что тождество Уорда вообще не зависит от способа регуляризации.

Мы приходим к заключению, что член третьего порядка в матрице рассеяния может быть представлен в виде

$$\begin{aligned} S_3(x_1, x_2, x_3) &= \\ &= i^3 T'_M [L(x_1), L(x_2), L(x_3)] - i^2 T [L(x_1), \Lambda_2(x_2, x_3)] - \\ &- i^2 T [L(x_2), \Lambda_2(x_1, x_3)] - i^2 T [L(x_3), \Lambda_2(x_1, x_2)] - \\ &- i \Lambda_3(x_1, x_2, x_3), \quad (1.58) \end{aligned}$$

причём T'_M есть регулярная операторная функция, в коэффициентных функциях которой для простых линий должны быть взяты функции $\text{reg}[\Delta^c]$, для замкнутых диаграмм, показанных на рис. 7, —

функции Π'_M и Σ'_M и для вершинной части типа, показанного на рис. 8, — функция Γ'_M .

Очевидно тогда, что при снятии регуляризации все коэффициентные функции оператора T'_M сходятся к конечным пределам,

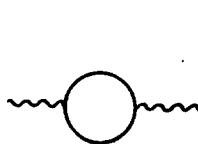


Рис. 7.

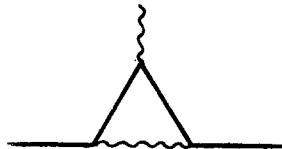
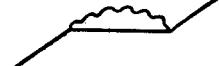


Рис. 8.

зависящим от Δ^c , Π' , Σ' и Γ' . Члены выражения (1.58), содержащие функции

$$i\Lambda_2(x_1, x_2) = T[L(x_1), L(x_2)] - T'_M[L(x_1), L(x_2)],$$

учитывают расходимости второго порядка, соответствующие диаграммам типа рис. 6, а квазилокальный оператор

$$\begin{aligned} \Lambda_3(x_1, x_2, x_3) = & -\sqrt{4\pi \cdot e \cdot a_1} \{ : \bar{\psi}(x_1) \hat{A}(x_2) \psi(x_3) : \delta(x_1 - x_2) \times \\ & \times \delta(x_1 - x_3) + \text{члены, отличающиеся перестановками} \\ & \text{аргументов} \} \quad (1.59) \end{aligned}$$

соответствует расходимостям вершинных частей рис. 3, в.

Члены, содержащие функции Λ_2 , после интегрирования по x_1, x_2, x_3 дают в S -матрицу вклад

$$\frac{1}{2} \int dx_1 dx_2 dx_3 T[L(x_1), \Lambda_2(x_2, x_3)],$$

который компенсируется членами из S_2 , содержащими контрчлены $L^{(2)}(x)$

$$\begin{aligned} & \frac{i^2}{2!} \int T[L(x_1), L^{(2)}(x_2)] dx_1 dx_2 + \\ & + \frac{i^2}{2!} \int T[L(x_2), L^{(2)}(x_1)] dx_1 dx_2 = \\ & = -\frac{1}{2} \int dx_1 dx_2 dx_3 T[L(x_1), \Lambda_2(x_2, x_3)]. \end{aligned}$$

Последний расходящийся член в (1.58) должен быть скомпенсирован добавлением в лагранжиан взаимодействия нового контр-

члена третьего порядка по e

$$\begin{aligned} \int L^{(3)}(x) dx &= \sqrt{4\pi \cdot e a_1} \int dx : \bar{\psi}(x) \hat{A}(x) \psi(x) : = \\ &= \frac{i}{3!} \int \Lambda_3(x, x_1, x_2) dx dx_1 dx_2. \end{aligned} \quad (1.60)$$

Таким образом, после доведения в лагранжиан контрчленов $L^{(2)}(x)$ и $L^{(3)}(x)$ и перехода к пределу $M \rightarrow \infty$ мы получаем для построения членов S -матрицы второго и третьего порядка интегрируемые выражения

$$\begin{aligned} T' [L(x_1), L(x_2)], \\ T' [L(x_1), L(x_2), L(x_3)]. \end{aligned}$$

С учётом контрчленов третьего порядка по e лагранжиан взаимодействия принимает вид

$$\begin{aligned} L(x) &= \sqrt{4\pi \cdot e Z_1} : \bar{\psi}(x) \hat{A}(x) \psi(x) : + \\ &+ a_1 \left\{ \frac{i}{2} \sum_k : \left(\bar{\psi}(x) \gamma^k \frac{\partial \psi}{\partial x^k} - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x^k} \gamma^k \psi \right) : - m : \bar{\psi} \psi : \right\} - \\ &- (a_3 - a_5) \sum_{m, n} g^{mm} g^{nn} : \frac{\partial A_n(x)}{\partial x^m} \frac{\partial A_n(x)}{\partial x^m} : - \\ &- a_3 : \left(\sum_m g^{mm} \frac{\partial A_m}{\partial x^m} \right)^2 - \delta m : \bar{\psi}(x) \psi(x) : + \\ &+ \delta m_\Phi \sum_m g^{mm} : A_m(x) A_m(x) : + R, \end{aligned} \quad (1.61)$$

причём

$$Z_1 = 1 + a_1; \quad \delta m = a_2; \quad \delta m_\Phi = a_4.$$

Ниже будет показано (§ 4), что устранение расходимостей спиральной электродинамики в высших порядках производится с помощью доведения в лагранжиан контрчленов той же операторной структуры, что и контрчлены в (1.61).

Считая основным требованием к теории условие конечности и градиентной инвариантности физически наблюдаемых величин (в данном случае матричных элементов матрицы рассеяния), мы будем допускать такие лагранжианы, которые обеспечивают выполнение этого условия. Как мы уже убедились, для этого оказывается необходимым допустить, что в $L(x)$ входят и расходящиеся члены (a_1, a_2, \dots) и градиентно неинвариантные члены ($\delta m_\Phi, a_5$).

Оказывается, также, что структура контрчленов зависит от «области включения» взаимодействия, описываемой функцией $g(x)$.

До сих пор мы ограничивались рассмотрением случая, когда взаимодействие включено полностью во всём пространстве-времени и

$$g(x) = 1.$$

Именно этот случай и важен при вычислении матричных элементов процессов рассеяния и взаимного превращения частиц, когда фактическое включение и выключение взаимодействия относится к бесконечно удалённым прошедшему и будущему.

Оказывается, однако, что в тех случаях, когда нас интересуют характеристики систем частиц, находящихся в связанных состояниях (энергетические уровни, времена жизни, вероятности переходов между связанными состояниями *)), приходится рассматривать положение, когда взаимодействие включено лишь в некоторой части 4-пространства и функция $g(x)$ возрастает от нуля до единицы в малых областях около поверхностей, ограничивающих эту часть 4-пространства. Имея в виду этот последний случай, когда

$$g(x) \neq 1,$$

исследуем строение контрчленов в эффективном лагранжиане $L(x; g)$, обеспечивающих конечность оператора

$$S(g) = T \left\{ e^{i \int L(x; g) g(x) dx} \right\}.$$

Рассмотрим члены второго порядка.

Контрчлен $L^{(2)}(x; g)$ определяется из условия, являющегося естественным обобщением соотношения (1.33)

$$\begin{aligned} \int L^{(2)}(x; g) g(x) dx = \\ = \frac{1}{2i} \int dx_1 dx_2 g(x_1) g(x_2) \{ T [L(x_1), L(x_2)] - T'_M [L(x_1), L(x_2)] \}. \end{aligned}$$

Подставляя сюда конкретное выражение разности $T - T'_M$ и интегрируя по частям, находим:

$$\begin{aligned} L^{(2)}(x; g) g(x) = L^{(2)}(x) \cdot g^2(x) - \\ - a_3 \sum_{m, n} g^{mm} g^{nn} \left\{ :A_m(x) A_n(x): \frac{\partial g}{\partial x^m} \frac{\partial g}{\partial x^n} + \right. \\ \left. + 2 :A_n(x) \frac{\partial A_m}{\partial x^m} : \frac{\partial g(x)}{\partial x^n} g(x) \right\} - \\ - \left(a_3 - a_5 \right) \sum_{m, n} \left[:A_m(x) A_m(x): \frac{\partial g}{\partial x^m} \frac{\partial g}{\partial x^n} + \right. \\ \left. + 2 :A_m(x) \frac{\partial A_m}{\partial x^m} g(x) \frac{\partial g}{\partial x^n} \right] g^{mm} g^{nn} + \\ + \text{члены, содержащие } R \text{ и её производные, (1.62)} \end{aligned}$$

*) Эти вопросы будут освещены в следующей статье.

причём оператор $L^{(2)}(x)$ определяется соотношением (1.34). Не-трудно также убедиться, что в третьем порядке

$$L^{(3)}(x; g) = L^{(3)}(x) g^2(x),$$

причём $L^{(3)}(x)$ определяется соотношением (1.60).

Таким образом, в процессе интегрирования по частям в $L(x; g)$ появляются члены, содержащие производные функции $g(x)$ и по своей операторной структуре отличающиеся от обычных контрчленов.

Это обстоятельство окажется существенным при устранении расходимостей из уравнения Шредингера.

§ 2. ОБЩИЕ ПРАВИЛА УСТРАНЕНИЯ РАСХОДИМОСТЕЙ ИЗ S -МАТРИЦЫ

В предыдущем параграфе на примере спинорной электродинамики было выполнено построение интегрируемых выражений для S_2 и S_3 . Сейчас мы займёмся формулированием общего способа устранения расходимостей из членов S -матрицы любого порядка, основанного на том же принципе, что и рассмотренные примеры. Прежде всего заменим истинные причинные функции $\Delta^c(x)$ регуляризованными выражениями $\text{reg}[\Delta^c(x)]$ с некоторым надлежащим числом вспомогательных масс M_i . При конечных значениях этих масс обычное T -произведение лагранжианов

$$T [L(x_1), \dots, L(x_n)] \quad (2.1)$$

вполне определено и его коэффициентные функции непрерывны. Однако, как мы только что убедились на конкретных примерах, предельный переход $M \rightarrow \infty$, понимаемый даже в несобственном смысле, осуществить в (2.1) невозможно.

Точнее говоря, коэффициентные функции оператора (2.1) в несобственном смысле будут сходиться лишь в тех областях пространства-времени, в которых все без исключения аргументы x_1, x_2, \dots, x_n отличны друг от друга. Для того чтобы выделить из выражения (2.1) «сходящуюся часть», необходимо, как и в разобраных случаях, применить к нему некоторую вычитательную процедуру.

Для того чтобы её сформулировать, удобно исходить из общей формулы (1.4.32), выражающей $S_n(x_1, \dots, x_n)$ через лагранжиан взаимодействия $L(x) = \Lambda_1(x)$ и квазилокальные операторы Λ_ν ($\nu \geq 2$)

$$S_n(x_1, \dots, x_n) = i^n T [L(x_1), \dots, L(x_n)] +$$

$$+ \sum_{\substack{2 \leq m \leq n-1 \\ \sum \nu_i = n}} \frac{i^m}{m!} P(x_1, \dots, x_{\nu_1} | \dots | \dots | x_n) \times$$

$$\times T [\Lambda_{\nu_1}(x_1, \dots, x_{\nu_1}) \dots \Lambda_{\nu_m}(\dots, x_n)] + i \Lambda_n(x_1, \dots, x_n). \quad (2.2)$$

Как было показано, данное выражение является самым общим

выражением, удовлетворяющим всем наложенным на S_n условиям (симметрии, ковариантности, унитарности и причинности) при произвольном выборе эрмитовских ковариантных квазилокальных операторов Λ_v .

Если нам удастся выбрать квазилокальные операторы Λ_v такими, чтобы выражения S_n оказались сходящимися (сходимость подобного рода выражений мы всегда будем понимать в несобственном смысле), то их предел при $M \rightarrow \infty$, во-первых, будет интегрируемой операторной функцией (в смысле определения I, § 2), а во-вторых, будет удовлетворять всем наложенными на S_n требованиям. В самом деле, условие ковариантности (I.4.4) имеет линейный характер и потому предельный переход в нём тривиален, а возможность перехода к пределу в условиях унитарности (I.4.9) и причинности (I.4.12) обусловлена теоремой (I, § 2) о том, что предел обычного произведения двух операторных функций равен соответствующему произведению пределов.

Таким образом, нам достаточно установить способ построения по заданному лагранжиану $L(x) = \Lambda_1(x)$ цепочки квазилокальных операторов Λ_v ($v \geq 2$), обеспечивающих сходимость выражения (2.2). Для полученных таким путём предельных выражений все наложенные на S_n условия, включая и условие интегрируемости, автоматически выполняются. Для решения этой задачи нам, очевидно, достаточно выбрать в качестве $\Lambda_v(x_1, \dots, x_v)$ квазилокальные операторы того же операторного типа, что и (2.1).

Говоря здесь, что Λ_v принадлежит к тому же операторному типу, что и (2.1), мы подразумеваем, что Λ_v состоит из тех же операторных членов

$$\dots u_\alpha(x_j) \dots,$$

что и (2.1), отличаясь от него лишь коэффициентными функциями. Из (2.2) теперь следует, что $S_n(x_1, \dots, x_n)$ будет выражением того же операторного типа, что и (2.1).

Чтобы упростить формулы, удобно положить

$$\left. \begin{aligned} t^{1-v} \Lambda_v(x_1, \dots, x_n) &= \Delta_v(x_1, \dots, x_v); \\ L(x) &= \Lambda_1(x) = \Delta_1(x), \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

тогда

$$S_n = t^n T_n, \quad (2.4)$$

где

$$\begin{aligned} T'_n &= T [L(x_1), \dots, L(x_n)] + \\ &+ \sum_{\substack{2 \leq m \leq n-1 \\ \sum v_i = n}} \frac{1}{m!} P(x_1, \dots, x_{v_1} | \dots | \dots x_n) \times \\ &\times T [\Delta_{v_1}(x_1, \dots, x_{v_1}), \dots, \Delta_{v_m}(x_{v_m}, \dots, x_n)] + \Delta_n(x_1, \dots, x_n). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Поскольку T'_n принадлежит к тому же операторному типу, что и (2.1), мы, очевидно, можем разработать методику фактического построения T'_n путём некоторого преобразования коэффициентных функций оператора T . При этом оказывается удобным работать с графическими представлениями.

Коэффициентная функция для T -произведения, соответствующая какой-либо данной диаграмме с v вершинами и заданными внутренними линиями, представляется произведением регуляризованных причинных функций типа

$$\prod_l \text{reg} [\Delta_l^c(x_a - x_b)]. \quad (2.6)$$

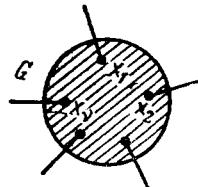


Рис. 9.

Коэффициентные функции квазилокального оператора Δ , для той же диаграммы представляют собой произведение δ -функций и их производных. На диаграмме поэтому вся совокупность точек x_1, \dots, x_v выступает как единое целое, ввиду чего при работе с Δ_v удобно ввести понятие «обобщённого узла G » (рис. 9).

Соответствующую данному обобщённому узлу G коэффициентную функцию оператора Δ_v обозначим через

$$d_G(x_1, \dots, x_v).$$

Рассмотрим теперь выражение вида

$$T [\Delta_v(x_1, \dots, x_v), L(x_{v+1}), \dots, L(x_n)]. \quad (2.7)$$

Ясно, что коэффициентные функции могут быть получены из коэффициентных функций оператора

$$T [L(x_1), \dots, L(x_v), \dots, L(x_n)] \quad (2.8)$$

следующей процедурой.

Рассмотрим какую-либо диаграмму, соответствующую оператору (2.7). Объединяя на ней точки x_1, \dots, x_v в обобщённую вершину G , заменим произведение (2.6), соответствующее внутренним по отношению к G линиям l коэффициентной функцией

$$d_G(x_1, \dots, x_v).$$

Операцию такой замены формально обозначим символом

$$\Delta(G).$$

Тогда коэффициентные функции оператора (2.7) будут получаться из коэффициентных функций оператора (2.8) операцией $\Delta(G)$.

Очевидно также, что в более общем случае коэффициентные функции выражения

$$T[\Delta_{v_1}(x_1, \dots, x_{v_1}), \Delta_{v_2}(x_{v_1+1}, \dots, x_{v_1+v_2}), \dots, \Delta_{v_m}(\dots, x_n)]$$

могут быть получены из коэффициентных функций оператора (2.8) операцией

$$\Delta(G_1) \dots \Delta(G_m),$$

заключающейся в объединении точек

$$x_1, \dots, x_{v_1}, x_{v_1+1}, \dots, x_{v_1+v_2}, \dots, \dots, x_n$$

в обобщённые узлы (вершины)

$$G_1, G_2, \dots, G_m,$$

и замене частей произведения (2.6), соответствующих внутренним линиям G_1, \dots, G_m , на соответственные d_{G_1}, \dots, d_{G_m} при сохранении неизменными факторов, соответствующих линиям, соединяющим различные обобщённые вершины G .

Итак, T'_n можно получить из T применением операции

$$R(G) = 1 + \sum_{\substack{2 \leq m \leq n-1 \\ G = G_1 * G_2 * \dots * G_m}} \frac{1}{m!} \Delta(G_1) \dots \Delta(G_m) + \Delta(G). \quad (2.9)$$

Сумма здесь берётся по всем возможным разбиениям совокупности точек x_1, \dots, x_n из диаграммы G на обобщённые узлы G_1, G_2, \dots, G_n . Оператор симметризации P , входящий в формулу (2.2), при этом учитывается тем, что при таком разбиении точки x_1, \dots, x_n выступают совершенно симметрично.

Операция $R(G)$ определена пока чисто формально. Она получит конкретное содержание, когда будут установлены правила фактического определения функции d_{G_α} для данной диаграммы G_α . Задав d_G , мы тем самым определяем Δ_v и, следовательно, T'_n . Выбор d_G мы сделаем так, чтобы T'_n оказалось интегрируемым при $M \rightarrow \infty$.

Прежде чем приступить к формулированию способа построения d_G , введём понятие связности диаграммы. Мы будем говорить, что данная диаграмма несвязная, если её можно разбить на две части, не соединённые между собой линиями. В противоположном случае диаграмму называем связной. Связную диаграмму будем называть «слабо связной», если снятием одной линии её можно превратить в несвязную, и «сильно связной», если это невозможно.

Заметим теперь, что для несвязной диаграммы коэффициентная функция T -произведения представляется в виде произведения двух коэффициентных функций с различными аргументами. Но произведе-

ние двух функций с различными аргументами является сходящимся, когда каждая функция в отдельности является сходящейся. Отсюда вытекает, что в несвязной диаграмме расходимости автоматически устраняются, после того как они устраниены в её связных частях. Поэтому оператор $\Delta(G)$ для несвязных диаграмм следует считать равным нулю.

При таком выборе $\Delta(G)$ операция $R(G)$, приложенная к коэффициентной функции T -произведения, соответствующей диаграмме G , которая состоит из двух несвязных частей G_1 и G_2 , распадается на произведение

$$R(G_1) R(G_2)$$

двух операций, действующих индивидуально на коэффициентные функции T -произведения, соответствующие диаграммам G_1 и G_2 .

Для слабо связных диаграмм мы приходим к коэффициентным функциям типа

$$K_M(x_1, \dots, x_k) \cdot \text{reg} [\Delta^c(x_a - y_b)] \cdot Q_M(y_1, \dots, y_s).$$

Ввиду трансляционной инвариантности K и Q , положив

$$x - x_a = x'; \quad y - y_b = y'; \quad x_a - y_b = \xi,$$

мы получим произведение коэффициентных функций с независимыми аргументами

$$K_M(x'_1, \dots, x'_k) \text{reg} [\Delta^c(\xi)] \cdot Q_M(y'_1, \dots, y'_s). \quad (2.10)$$

Всё выражение в целом опять будет сходящимся, если будут сходиться в отдельности K и Q . Поэтому для слабо связных диаграмм также следует положить

$$\Delta(G) = 0.$$

Здесь, как и в предыдущем случае, ясно, что при сделанном выборе оператора $\Delta(G)$ коэффициентные функции оператора T'_n для слабо связных диаграмм имеют ту же структуру, что и (2.10).

Итак, в формуле (2.9) можно рассматривать разбиения G лишь на обобщённые вершины G_a , являющиеся сильно связными.

Для конкретизации оператора $\Delta(G)$ введём ещё понятие индекса диаграммы. Переайдём для этого к импульсному представлению. Коэффициентные функции T -произведения в p -представлении, очевидно, будут иметь вид

$$J_M(k) = \int \prod_{1 \leq q \leq n} \delta(\sum p + k_q) \cdot \prod_l \{\text{reg} [\Delta^c_l(p_l)] \cdot dp_l\}. \quad (2.11)$$

Здесь в аргументах δ -функций стоят алгебраические суммы импульсов внутренних линий диаграммы, сходящихся в вершине q , к которым добавлены внешние импульсы k_q .

В соответствии с принятой нами процедурой регуляризации Δ^c -функций имеем также

$$\text{reg } [\Delta^c(p)] = Z(p) \left\{ \frac{1}{m^2 - p^2 - i\epsilon} + \sum_j c_j \frac{1}{M_j^2 - m^2 - i\epsilon} \right\},$$

причём $Z(p)$ — тот же полином, что и в нерегуляризованной Δ^c -функции.

Если бы в (2.11) стояли нерегуляризованные Δ^c -функции, то весь интеграл оказался бы, вообще говоря, расходящимся при больших импульсах. Подсчитаем сейчас суммарную степень его расходимости.

Ввиду того, что мы рассматриваем связные диаграммы, с помощью δ -функций снимается $4(n-1)$ интеграций (одна остающаяся δ -функция выражает закон сохранения полного 4-импульса), и мы имеем всего

$$4(L-n+1)$$

независимых переменных интегрирования, где L обозначает полное число внутренних линий.

Подобно тому, как при интеграции по трёхмерному пространству вводят в качестве переменной интегрирования радиус, введём при выполнении интеграции по $4(L-n+1)$ -мерному пространству соответствующий «радиальный» импульс P . Тогда произведение независимых дифференциалов из

$$\prod_l dp_l$$

даёт фактор

$$P^{4(L-n+1)} \frac{dp}{P}.$$

Учитывая лишь старшие степени P от функций $\Delta^c(p)$, получаем множитель

$$P^{\sum_l r_l - 2L} = P^{\sum_l (r_l - 2)}$$

и поэтому при выполнении интеграции по P множитель при dP/P при больших P будет возрастать или убывать, как

$$P^{\sum_l (r_l + 2) - 4(n-1)}$$

Интеграл по P окажется, таким образом, расходящимся, если

$$\sum_l (r_l + 2) - 4(n-1) \geq 0,$$

и сходящимся при

$$\sum_l (r_l + 2) - 4(n-1) < 0.$$

Число

$$\omega(G) = \sum_l (r_l + 2) - 4(n - 1) \quad (2.12)$$

мы назовём индексом диаграммы G .

Разумеется, из сходимости интеграла по P ещё не следует сходимость всего интеграла типа (2.11) в целом.

Здесь может возникнуть положение, подобное тому, когда при вычислении интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{x}{(y^2 + 1)^2}$$

интеграл по радиальной переменной ρ

$$\rho = \frac{x}{\cos \varphi} = \frac{y}{\sin \varphi};$$

$$\int \frac{\rho^2 d\rho \cos^2 \varphi d\varphi}{(\rho^2 \sin^2 \varphi + 1)^2}$$

сходится, но оставшаяся интеграция по φ из-за особенностей в точках $\varphi = 0, \varphi = \pi$ оказывается расходящейся.

Индекс диаграммы $\omega(G)$ можно связать также с условной степенью роста по импульсу. Для её подсчёта умножим все внешние импульсы и массы на некоторое число a и подсчитаем, на какой множитель изменится интеграл (2.11) без учёта регуляризации и принимая во внимание лишь высшую степень a .

Нетрудно видеть, что этот множитель как раз равен

$$a^{\omega(G)}. \quad (2.13)$$

Таким образом, индекс диаграммы в точности равен степени роста. Заметим, что условной степенью роста называется потому, что оценка (2.13) проводится чисто формально без тщательного анализа сходимости интеграла и не учитывает наличия логарифмически расходящихся факторов.

Обратим теперь внимание на тот факт, что при разбиении G на ряд обобщённых узлов

$$G = G_1 \times G_2 \times \dots G_s$$

мы будем иметь

$$\omega(G) = \sum_{1 \leq j \leq s} \omega(G_j) + \sum_l (r_l + 2) - 4(s - 1). \quad (2.14)$$

Рассмотрим далее коэффициентную функцию d_G . В импульсном представлении она имеет вид

$$\delta(\sum p_i) Z_{G_j}(\dots p \dots),$$

где $Z_{G_j}(\dots p \dots)$ — некоторый полином по компонентам p .

Как мы увидим дальше, для компенсации расходимостей в T -произведении достаточно выбрать в качестве Z_{G_J} полином степени $\omega(G_J)$. Из тождества (2.14) следует, что при таком выборе F ни суммарная степень расходимости, ни условная степень роста по импульсу не увеличивается от приложения операции

$$\Delta(G_1) \dots \Delta(G_m).$$

Индекс $\omega(G)$, следовательно, не увеличивается от приложения операции $R(G)$ в целом.

Как мы уже убедились на рассмотренных выше примерах, при анализе и вычислении интегралов типа (2.11) удобно воспользоваться интегральным представлением причинных функций (мы будем называть его ниже « α -представлением»)

$$\begin{aligned} \Delta^c(p) &= Z(p) \int_0^\infty e^{ia(p^2 - m^2 + ie)} d\alpha, \\ \text{reg} [\Delta^c(p)] &= Z(p) \int_0^\infty e^{ia(p^2 - m^2 + ie)} I(\alpha) d\alpha, \\ I(\alpha) &= 1 + \sum_M C_M e^{-ia(M^2 - m^2)}. \end{aligned}$$

Чтобы избавиться от множителя $Z(p)$, нарушающего чисто экспоненциальную форму зависимости от p , воспользуемся соотношением

$$Z(p) = Z(-i\nabla_q) e^{i(pq)}|_{q=0}.$$

С помощью этого представления интеграция по внутренним импульсам в (2.11) сводится к квадратурам гауссового типа

$$\begin{aligned} \prod_l Z(-i\nabla_{q_l}) \int e^{\frac{i}{m} \sum_m p_m^2 + \frac{i}{m} (p_m q_m)} \prod_{1 \leq q \leq n} \delta\left(\sum p + k_q\right) \prod_l d p_l |_{q_l=0} &= \\ &= f(\dots, k, \dots, \alpha, \dots) \quad (2.15) \end{aligned}$$

и остаются интеграции только по переменным α

$$\begin{aligned} J_M(k) &= \delta\left(\sum_l k_l\right) \int_0^\infty d\alpha_1 \dots \int_0^\infty d\alpha_r f(\dots, k, \dots, \alpha, \dots) \times \\ &\times e^{\frac{-i}{l} \sum_l m_l^2 \alpha_l - \frac{i}{l} \sum_l \alpha_l} \prod_{1 \leq l \leq L} I(\alpha_l). \quad (2.16) \end{aligned}$$

Выполняя интеграцию по p_i , находим, что

$$f(\dots, k, \dots, \alpha, \dots) = F(\dots, k, \dots, \alpha, \dots) e^{\sum_{a,b} A_{ab}(\dots, \alpha, \dots) (k_a k_b)}, \quad (2.17)$$

причём F — полином по k и рациональная функция от α , обладающая неинтегрируемыми полюсами при обращении в нуль некоторых α_i . Ввиду того, что сходимость интеграла (2.16) при больших α обеспечивается факторами $e^{-\epsilon \sum_i \alpha_i}$, возможные расходимости интеграла типа (2.11) в нерегуляризованном случае в данном представлении как раз и обусловливаются наличием этих неинтегрируемых полюсов.

Чтобы выяснить структуру особенности, перейдём к новым переменным

$$\alpha_j = \lambda \xi_j; \quad \sum_j \xi_j = 1$$

и, фиксируя $\xi_j \neq 0$, подсчитаем степень полюса в точке $\lambda = 0$. Переходя для этого в (2.15) к новым «импульсам»

$$p_i \sqrt{\lambda} = P_i; \quad q_i \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = Q_i; \quad k_q \sqrt{\lambda} = K_q,$$

находим, что

$$f(\dots, k, \dots, \alpha, \dots) = \lambda^{-2L+2(n-1)} \prod_l \left\{ Z\left(\frac{\nabla Q_l}{i \sqrt{\lambda}}\right) \right\} \times \\ \times \int e^{\sum_m P_m^2 + \sum_m (P_m Q_m)} \prod_{1 \leq q \leq n} \delta(\Sigma P + K_q) \prod_l dP_l|_{Q=0}.$$

Учитывая в $\prod_l \{Z(\dots)\}$ лишь старшие степени λ , получаем при малых λ

$$f(\dots, k, \dots, \alpha, \dots) = \lambda^{-\frac{\omega(G)}{2} - L} F'(\dots, K, \dots) e^{\sum_{a,b} A'_{ab}(\dots, \alpha, \dots) (k_a k_b)} = \\ = \lambda^{-\frac{\omega(G)}{2} - L} F'(\dots, \sqrt{\lambda} k, \dots) e^{\sum_{a,b} A'_{ab}(\dots, \alpha, \dots) (k_a k_b)}. \quad (2.18)$$

Таким образом, эффективная степень полюса по λ при $\lambda = 0$ с учётом значения детерминанта

$$\left| \frac{(\partial \alpha_1, \dots, \partial \alpha_L)}{(\partial \xi_1, \dots, \partial \xi_{L-1}, \partial \lambda)} \right| = \lambda^{L-1}$$

действительно определяется индексом диаграммы $\omega(G)$.

Рассмотрим теперь структуру квадратичной формы

$$A_{ab}(\dots, \alpha_j, \dots) = \lambda A_{ab}(\dots, \xi_j, \dots).$$

Нетрудно убедиться, что она не зависит от полиномов $Z(-i\nabla_q)$ и является однородной функцией 1-й степени от α_l .

Кроме того, как мы сейчас покажем, она обладает свойством положительности

$$\sum_{a, b} A_{ab} x_a x_b > 0; \quad \sum x^2 \neq 0 \quad (2.19)$$

и удовлетворяет условию

$$\sum_{a, b} A_{ab} x_a x_b < \sum_l \alpha_l \left(\sum_a |x_a| \right)^2. \quad (2.20)$$

Соотношения (2.19) и (2.20) удобно проверить методом индукции, так как их справедливость для простейших диаграмм не вызывает сомнений (см. разобранные примеры в § 1).

Индукцию проведём в два этапа:

- при данном числе вершин добавляется новая внутренняя линия;
- добавляется новая вершина и одна линия, соединяющая эту вершину с одной из старых вершин.

Рассмотрим первый случай.

Будем для определённости считать, что внутренняя линия с импульсом p_0 добавилась между вершинами 1 и 2 (рис. 10).

Пренебрегая факторами типа $Z(-i\nabla_q)$, не влияющими на структуру экспонент, можно сказать, что в выражении (2.15) вместо сомножителей

$$\delta \left(\sum_1 p + k_1 \right) \delta \left(\sum_2 p + k_2 \right)$$

появится фактор

$$e^{i\alpha_0 p_0^2} \delta \left(\sum_1 p + k_1 + p_0 \right) \delta \left(\sum_2 p + k_2 - p_0 \right)$$

и добавится интеграция по p_0 . Таким образом, изменение в интеграле (2.15) может быть записано в виде

$f(k_1, k_2, \dots | \dots \alpha \dots) \rightarrow$

$$\rightarrow \int e^{i\alpha_0 p_0^2} f(k_1 + p_0, k_2 - p_0, \dots | \dots \alpha \dots) dp_0 =$$

$$= \int e^{i\alpha_0 p_0^2} F(k_1 + p_0, k_2 - p_0, \dots | \dots \alpha \dots) \times$$

$$\times e^{\sum_{a, b} A_{ab} \cdot (k_a + e_a p_0) \cdot (k_b + e_b p_0)} dp_0,$$

где символ e_a определён следующим образом:

$$e_1 = 1, \quad e_2 = -1, \quad e_q = 0; \quad (q \geq 0).$$

Представляя полученный интеграл в виде (2.17), заметим, что функция $F(k_1 + p_0, k_2 - p_0, \dots, k, \dots | \dots, \alpha, \dots)$ в силу своего полиномиального характера не влияет на структуру результирующей экспоненты. Вычисляя поэтому интеграл

$$\begin{aligned} \int e^{i\alpha_0 p_0^2 + i \sum A_{ab} (k_a + e_a p_0) (k_b + e_b p_0)} dp_0 = \\ = \int dp_0 \exp i \left[\left(\alpha_0 + \sum A_{ab} e_a e_b \right)^2 p_0^2 + \right. \\ \left. + 2 \sum A_{ab} e_a (p_0 k_b) + \sum A_{ab} k_a k_b \right], \end{aligned}$$

приходим к экспоненте вида

$$\exp i \left[\sum A_{ab} k_a k_b - \frac{(\sum A_{ab} k_b e_a)^2}{\alpha_0 + \sum A_{ab} e_a e_b} \right].$$

Таким образом, при включении в диаграмму новой внутренней линии показатель экспоненты испытывает превращение

$$\sum A_{ab} k_a k_b \rightarrow \sum A_{ab} k_a k_b - \frac{(\sum A_{ab} k_b e_a)^2}{\alpha_0 + \sum A_{ab} e_a e_b}. \quad (2.21)$$

В силу положительности квадратичной формы (2.19) при

$$x_a = k_a t_1 + e_a t_2$$

из условия неотрицательности её дискриминанта находим неравенство

$$(\sum A_{ab} k_a k_b) (\sum A_{ab} e_a e_b) \geq (\sum A_{ab} k_b e_a)^2,$$

подставляя которое в (2.20), получаем;

$$\begin{aligned} \sum A_{ab} k_a k_b \rightarrow \sum A_{ab} k_a k_b - \frac{(\sum A_{ab} k_b e_a)^2}{\alpha_0 + \sum A_{ab} e_a e_b} \geq \\ \geq \sum A_{ab} k_a k_b \frac{\alpha_0}{\alpha_0 + \sum A_{ab} e_a e_b} \geq 0. \end{aligned}$$

Таким образом, свойство (2.19) не нарушается при включении лишней внутренней линии.

Ввиду того, что при переходе (2.21) квадратичная форма уменьшается, условие (2.20) также не нарушается при включении дополнительной внутренней линии.

Рассмотрим теперь процесс включения в диаграмму новой вершины и соединяющей её линии.

Для большей определённости будем считать, что новая вершина O соединяется линией с импульсом p_0 с вершиной I (рис. 11).

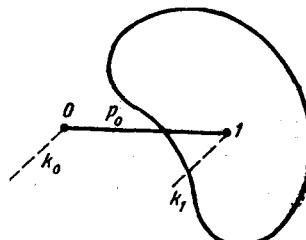


Рис. 11.

В интеграле (2.15) это вызовет следующую замену:

$$\delta\left(\sum p_1 + k_1\right) \rightarrow e^{ia_0 p_0^2} \left(\sum_1 p + k_1 + p_0\right) \delta(p_0 - p_0)$$

и появление дополнительной интеграции по p_0 , что можно также представить в виде

$$f(\dots k \dots \alpha \dots) \rightarrow \int dp_0 e^{ia_0 p_0^2} f(k_1 + p_0, k_2, \dots, \alpha, \dots) \delta(p_0 - k_0) = \\ = e^{ia_0 k_0^2} f(k_1 + k_0, k_2, \dots, \alpha, \dots).$$

Изменения в показателе экспоненты соответственно равны

$$\sum_{a, b} A_{ab} k_a k_b \rightarrow a_0 k_0^2 + \sum_{a, b} A_{ab} (k_a + e_a k_0) (k_b + e_b k_0), \quad (2.22)$$

где

$$e_1 = 1; \quad e_a = 0; \quad (a \geq 2).$$

На основании (2.20) получаем отсюда

$$a_0 x_0^2 + \sum_{a, b} A_{ab} (x_0 + e_a x_0) (x_b + e_b x_0) \leq \\ \leq a_0 \sum_a (x_0 e_a + x_a)^2 + \sum_{1 \leq l} \sum_{1 \leq a} (x_a + e_a x_0)^2 = \\ = \sum_{0 \leq l} \alpha_l \left| \sum_{1 \leq a} (x_a + e_a x_0) \right|^2 = \sum_{0 \leq l} \alpha_l \left(\sum_{0 \leq a} |x_a| \right)^2.$$

Таким образом, условие (2.20) сохраняется при включении нового узла с линией. Свойство (2.19) также сохраняется, так как квадратичная форма при включении узла увеличивается.

Доказательство свойства (2.19) и (2.20) таким образом закончено. Заметим, что при доказательстве был фактически выведен рецепт построения квадратичной формы, который заключается в формулах (2.21) и (2.22).

Рассмотрим теперь изменения, которые произойдут в коэффициентных функциях T -произведений в результате действия операции $\Delta(G_j)$ в принятом нами интегральном « α -представлении» (2.15).

Напомним, что, согласно определению, операция $\Delta(G_j)$ в x -представлении состоит в замене части произведения

$$\prod_l \Delta_l^c (x_a - x_b),$$

соответствующего внутренним линиям из G_j на коэффициентную

функцию квазилокального оператора

$$d_{G_j}(\dots x_a \dots),$$

которая в p -представлении имеет вид полинома, умноженного на δ -функцию

$$\delta(\Sigma p) Z_{G_j}(\dots p \dots).$$

При переходе к интегральному представлению (2.15) для приведения полинома Z_G к экспоненциальному виду воспользуемся соотношением

$$Z_G(\dots p \dots) = Z_G(\dots -i\nabla_q \dots) e^{i\mathfrak{I}(p_a q_a)} \mid_{q=0}, \quad (2.23)$$

представляющим собой естественное обобщение формулы для $Z_l(p)$ из $\Delta_l^c(p)$. Очевидно при этом, что квадратичная форма в экспоненте от Z_G , как и от Z_l , зависит не будет.

Таким образом, в результате применения операции $\Delta(G_j)$ мы получим опять выражение типа (2.17), не содержащее переменных α_l , соответствующих внутренним линиям G_j .

«Новая» квадратичная экспоненциальная форма получается из «старой» путём приравнивания нулю всех α_l , соответствующих внутренним линиям G_j . При этом из квадратичной формы автоматически выпадают импульсы k_a , соответствующие вершинам диаграммы, объединённым в обобщённый узел G_j . Очевидно также, что указанные α_l не войдут и в предэкспоненциальный множитель $F(\dots k \dots \alpha \dots)$.

Для анализа особенности станем теперь пропорционально уменьшать все α_l , положив

$$\alpha_l = \xi_l \lambda; \quad \sum_j \xi_j = 1; \quad \xi_j > 0; \quad \lambda \rightarrow 0,$$

и установим максимальную эффективную степень полюса при $\lambda = 0$ в получающемся интеграле.

Несколько ранее было установлено, что эффективная степень полюса автоматически оказывается равной половине условной степени роста плюс единица, и что условная степень роста не меняется под действием операции $\Delta(G_j)$. Следовательно, и в данном случае эффективная степень полюса равна

$$\frac{\omega(G)}{2} + 1.$$

Вполне аналогичное заключение можно сделать о неизменности эффективной степени полюса при действии операции

$$\Delta(G_1) \dots \Delta(G_m).$$

Установив это важное свойство, приступим к конкретному выбору операции $\Delta(G)$. Рассмотрим прежде всего случай, когда массы частиц всех рассматриваемых полей m_l больше нуля.

Как мы только что выяснили, эффективная степень полюса выражения

$$\Delta(G_1) \dots \Delta(G_m) J(k) = \delta(\Sigma k) I(\dots k \dots)$$

в α -представлении равна

$$\frac{\omega(G)}{2} + 1.$$

С другой стороны, из формулы (2.18) следует, что каждое дифференцирование по компонентам импульсов k_a снижает степень полюса на $1/2$. Поэтому, взяв частную производную N -го порядка по компонентам k_a

$$\frac{\partial^N I(\dots k \dots)}{\partial^{N_1} k_1 \dots \partial^{N_m} k_m} \quad (\Sigma N_i = N)$$

получим выражение, в котором эффективная степень полюса уменьшится на $N/2$ и окажется равной

$$\frac{\omega(G) - N}{2} + 1.$$

Выбирая $N = \omega(G) + 1$, мы получим под интегралом фактор $d\lambda \lambda^{-1/2}$. Так как, однако, все наши функции были рациональными функциями переменных α , они должны быть рациональными и по λ . Поэтому фактор $\lambda^{-1/2}$ фактически отсутствует.

Заметим теперь, что если от функции

$$I(\dots k \dots)$$

отнять сумму всех первых членов её разложения в ряд Маклорена до членов порядка $\omega(G)$ включительно

$$\{I(\dots k \dots)\}_{\omega(G)},$$

то остаточный член

$$I(\dots k \dots) - \{I(\dots k \dots)\}_{\omega(G)} \quad (2.24)$$

по известной формуле Шлемильха выражается в виде интеграла от частных производных порядка $\omega(G) + 1$. Таким образом, в выражении (2.24) эффективная степень полюса $\lambda = 0$ равна нулю.

Определим теперь операцию $\Delta(G)$ следующим образом:

$$\Delta(G) = -M(G) \left\{ 1 + \sum_{\substack{2 \leq m \leq n-1 \\ G = G_1 \dots G_m}} \frac{1}{m!} \Delta(G_1) \dots \Delta(G_m) \right\}, \quad (2.25)$$

где операция $M(G)$ определена соотношением

$$M(G) [\delta(\Sigma k) F(k)] = \delta(\Sigma k) \{F(k)\}_{\omega(G)}.$$

На основании (2.9) имеем:

$$R(G) J_M(k) = \{1 - M(G)\} J'_M(k),$$

где

$$J'_M(k) = \left(1 + \sum_{\substack{2 \leq m \leq n-1 \\ G = G_1 * \dots * G_m}} \frac{1}{m!} \Delta(G_1) \dots \Delta(G_m) \right) J(k)$$

и, поскольку в J'_M особенность по λ не выше, чем в J_M , то $R(G)J_M$ в точке $\lambda = 0$ вообще не имеет особенности.

Доказано таким образом, что приложение последней операции $\Delta(G)$ устраняет особенности при пропорциональном стремлении всех α к нулю. Так как одновременно операции $\Delta(G_1), \dots, \Delta(G_m)$ компенсируют особенности в области стремления к нулю лишь некоторых из α , то ясно, что в $R(G)J_M$ особенностей нет вообще. Последнее утверждение составляет содержание важной теоремы, доказательство которой со всеми необходимыми оценками было недавно проведено Парасюком^{8, 9, 10}.

Окончательный результат теоремы гласит, что после применения операции $R(G)$ функция $J_M(k)$ представляется в виде

$$R(G)J_M(k) = \delta(\Sigma k) \int_0^\infty d\alpha_1 \dots \int_0^\infty d\alpha_L \times \times \prod_{1 \leq l \leq L} \{I(\alpha_l)\} e^{-l \sum_n \alpha_n m_n^2 - \epsilon \sum_n \alpha_n} f(\dots, k, \dots, \alpha, \dots), \quad (2.26)$$

причём функция $f(\dots, k, \dots, \alpha, \dots)$ выражается суммой членов вида

$$F(\dots, k, \dots, \alpha, \dots) e^{i \sum A_{ab}(\dots, \dots) k'_a k'_b}.$$

Здесь k'_a равны либо k_a , либо нулю, а F удовлетворяет оценке *)

$$|F(\dots, k, \dots, \alpha, \dots)| \leq \frac{c}{\prod_l \binom{1 - \frac{1}{2L}}{\alpha_l}}, \quad (2.27)$$

*) Приводимая оценка (2.27), как это всегда бывает в подобных случаях, является завышенной, и всё же она для нас вполне достаточна, так как обеспечивает абсолютную интегрируемость функции F в окрестности точек $\alpha_l = 0$. Тот факт, что в оценке (2.27) не удалось избежать вхождения α_l в знаменатель, связан не только с грубостью оценочного приёма, но и с тем обстоятельством, что при непропорциональном стремлении различных α_l к нулю, когда одни из них стремятся быстрее, чем другие, характер роста функции может измениться.

где L — число всех внутренних линий диаграммы G , а c ограничена полиномиально по переменным k и α .

Из приведённой оценки (2.27) непосредственно следует, что в формуле (2.26) можно перейти к пределу $M \rightarrow \infty$ при фиксированном $\epsilon > 0$. Действительно, фактор $e^{-\epsilon \sum_l \alpha_l}$ делает интеграл (2.26) абсолютно сходящимся при больших α , а при $\alpha \rightarrow 0$ возможные особенности, согласно (2.27), имеют интегрируемый характер.

Таким образом, устремляя в процессе снятия регуляризации факторы $I(\alpha)$ к единице, мы получаем, что $R(G) J_M$ стремится в обычном смысле к выражению

$$R(G) J(k) = \delta(\Sigma k) \int_0^\infty d\alpha_1 \dots \int_0^\infty d\alpha_L e^{-i \sum_l \alpha_l m_l^2 - \epsilon \sum_l \alpha_l} f(\dots k \dots \alpha \dots). \quad (2.28)$$

Рассмотрим теперь свойства аналитичности полученного выражения и возможность перехода к пределу $\epsilon \rightarrow 0$. Поворачивая оси переменных α на 90° в комплексной плоскости, т. е. совершая замену переменных

$$\alpha_k \rightarrow -i\beta_k, \quad (2.29)$$

запишем интеграл (2.28) в виде

$$\int_0^\infty d\beta_1 \dots \int_0^\infty d\beta_L e^{-\sum_l \beta_l m_l^2 + i\epsilon \sum_l \beta_l + \sum A_{ab}(\dots \beta \dots) k_a' k_b'} \times \times F(\dots, k, \dots, \beta \dots). \quad (2.30)$$

Представляя показатель экспоненты следующим образом:

$$A = \sum A_{ab}(\dots \beta \dots) (k_a^0 k_b^0) - \sum A_{ab}(\dots \beta \dots) (k_a k_b) - \sum_l \beta_l m_l^2 + i\epsilon \sum_l \beta_l,$$

находим с помощью условия (2.20)

$$A < \sum_l \beta_l \left(\sum_a k_a^0 \right)^2 - \sum_l \beta_l m_l^2 + i\epsilon \sum_l \beta_l.$$

Очевидно теперь, что при выполнении условия

$$\left(\sum_a k_a^0 \right)^2 < \min_l m_l^2 \quad (2.31)$$

форма A оказывается отрицательной, интеграл (2.30) абсолютно

сходящимся и преобразование (2.29) законным. В полученном выражении можно перейти к пределу при $\epsilon = 0$ и получить функцию, аналитическую в области, определяемой неравенством (2.31).

Это неравенство можно записать в релятивистски-инвариантной форме

$$\left| \sum_a (k_a \xi) \right|^2 < \min m^2,$$

где ξ — временноподобный единичный вектор, направленный в будущее

$$\xi^2 = 1; \quad \xi^\circ > 0.$$

В изложенной процедуре мы сначала устремили M к бесконечности, а потом провели предельный переход $\epsilon \rightarrow 0$. Однако операцию поворота (2.29) можно было здесь провести и до перехода к пределу $M \rightarrow \infty$. Мы получили бы тогда линейную комбинацию интегралов типа (2.30), включающих массы M_i . При одновременном совершении предельных переходов $M \rightarrow \infty$ и $\epsilon \rightarrow 0$ члены, содержащие массы M_i , устремляются к нулю, и мы приходим к тем же самым результатам.

Таким образом, в рассмотренном случае точка $k_a = 0$ оказывается регулярной и разложения в ряд Маклорена допустимыми. Это обстоятельство обусловлено тем, что согласно предположению все массы m_i существенно положительны и

$$\min m_i^2 > 0.$$

В случае, когда некоторые из масс равны нулю, точка $k_a = 0$ может не быть регулярной. В таком случае при определении операции $\Delta(G)$ wybór центра разложения в точке $k_a = 0$ может оказаться недопустимым и его приходится помещать в некоторой точке (k^0, \mathbf{k}) с чисто мнимой временной компонентой

$$k^0 = i\omega.$$

Поскольку, однако, выделение какой-либо точки в импульсном пространстве (кроме точки $k = 0$) не является инвариантным с точки зрения четырёх поворотов, то соответствующий полином необходимо ещё усреднить по сфере

$$\omega^2 + \mathbf{k}^2 = \mu^2, \text{ где } \mu^2 = \text{const}.$$

При таком выборе операции $\Delta(G)$ сделанные нами выше заключения о свойствах коэффициентных функций, получающихся в результате операции $R(G)$, очевидно, сохраняются, с тем, однако, отличием, что аналитичность будет иметь место лишь для точек k с чисто мнимым k_0 .

Пусть теперь импульсы k совершенно произвольны. Пока массы имеют конечные, чисто мнимые отрицательные добавки $-i\epsilon$, в интегралах

содержатся режущие факторы $e^{-\epsilon \sum_l \alpha_l}$, и функции являются

регулярными. При устремлении ϵ к нулю эти функции сходятся лишь в несобственном смысле. Получающиеся при этом предельные выражения, представляющие собой истинные коэффициентные функции T' -произведений оказываются несобственными и могут обладать особенностями в некоторых областях значений своих аргументов.

Однако в силу свойств интегрируемости операторные интегралы

$$\int T' [L(x_1), \dots, L(x_n)] g(x_1) \dots g(x_n) dx_1 \dots dx_n$$

при достаточно регулярных и достаточно быстро убывающих на бесконечности функциях $g(x)$ оказываются сходящимися, и трудности возникают здесь с предельным переходом $g(x) \rightarrow 1$. Соответствующие матричные элементы от $S(1)$ оказываются расходящимися. В этих случаях обычно говорят о расходимостях типа инфракрасной катастрофы или резонансных знаменателях.

Особенности типа инфракрасной катастрофы возникают, как известно, из-за неприменимости метода теории возмущений при описании процессов с квантами очень малой энергии и могут быть исключены из результатов методом Блоха-Нордсика¹¹ или введением в фотонные D_0^c -функции малой константы, играющей роль «фотонной массы».

Сингулярности типа резонансных знаменателей возникают, например, в том случае, когда процесс рассеяния высокого порядка при данных значениях импульсов может быть сведён к более простым независимым процессам низшего порядка.

Следует заметить, что расходимости этих двух типов проявляются и в обычной квантовой механике в тех случаях, когда применение теории возмущений незаконно. Пользуясь случаем, подчеркнём, что условие интегрируемости операторных функций $S_n(x_1, \dots, x_n)$ гарантирует лишь отсутствие расходимостей, специфических для квантовой теории поля — расходимостей «при больших импульсах».

Мы формулировали выше рецепт построения интегрируемых коэффициентных функций для операторов $S_n(x_1, \dots, x_n)$. Заметим теперь, что введение регуляризованных причинных функций

$$\Delta^c \rightarrow \text{reg} [\Delta^c]$$

имело в нашем рассуждении чисто вспомогательный характер и в сущности потребовалось нам лишь для того, чтобы убедиться в том, что полученные для S_n выражения удовлетворяют всем наложенным на них условиям.

Практически, например, при вычислении указанных коэффициентных функций вполне возможно работать с истинными Δ^c -функциями. Переходя тогда в α -представление, можно применять операцию

$R(G)$, исключив лишь из области интеграции по α малую область около точки $\alpha = 0$.

Наш рецепт построения операции $\Delta(G)$ заключает в себе определённый произвол, состоящий в выборе центра разложения в точке $k = 0$ (в случае, когда все $m_i \neq 0$) или фиксировании «радиуса» 4-сферы усреднения μ (в случае, когда некоторые из $m_i = 0$). Поэтому операцию $\Delta(G)$ следует несколько обобщить.

С этой целью рассмотрим систему конечных полиномов

$$Z'_G(\dots k \dots)$$

степени не выше $\omega(G)$ таких, что выражения

$$\delta(\Sigma k) Z'_G(\dots k \dots)$$

являются импульсными представлениями коэффициентных функций некоторых эрмитовых ковариантных квазилокальных операторов $\Lambda'(\dots x \dots)$. Наиболее общее выражение операции $\Delta(G)$ можно получить теперь, определяя её как сумму ранее введённой операции (2.25) и операции добавления полинома Z'_G , т. е. в виде

$$\begin{aligned} \Delta(G) J_G(\dots k \dots) &= \delta(\Sigma k) Z'_G(\dots k \dots) - \\ &- M(G) \left\{ 1 + \sum_{\substack{2 \leq m \leq n-1 \\ G = G_1 * \dots * G_m}} \Delta(G_1) \dots \Delta(G_m) \right\} J_G(\dots k \dots). \end{aligned} \quad (2.32)$$

Соответствующее этой формуле наиболее общее выражение для оператора S_n отличается от ранее полученного включением эрмитовых ковариантных квазилокальных операторов Λ'_n . Но, как мы уже установили ранее, добавление в S_n некоторых Λ_n может быть учтено изменением эффективного лагранжиана взаимодействия. Таким образом, изменение рецептуры построения интегрируемых коэффициентных функций эквивалентно добавлению к эффективному лагранжиану новых конечных контрчленов. Можно поэтому считать, что T' -произведение определено по-старому, но имеется произвол в выборе лагранжиана. Этот произвол состоит в возможности включения в $L(x)$ членов, соответствующих по формуле типа (I. 4.35) квазилокальным операторам, связанным с обобщёнными, сильно связанными узлами G неотрицательного индекса $\omega(G)$.

Итак, для получения операторных функций $S_n(x_1, \dots, x_n)$ мы получили следующий общий рецепт. Взяв коэффициентную функцию обычного T -произведения для какой-то G , преобразуют её к « α -представлению». Временно исключая бесконечно малую область около точек $\alpha_i = 0$, применяют операцию

$$R(G) = 1 + \sum_{\substack{2 \leq m \leq n-1 \\ G = G_1 * \dots * G_m}} \frac{1}{m!} \Delta(G_1) \dots \Delta(G_m) + \Delta(G),$$

причём $\Delta(G_j)$ содержат в себе члены Z'_{G_j} , после чего в интеграл включается область около точек $\alpha_i = 0$. Несобственный предельный переход $\epsilon \rightarrow 0$ в полученных выражениях даёт затем искомые коэффициентные функции операторов S_n .

§ 3. КЛАССИФИКАЦИЯ РЕНОРМИРУЕМОСТИ ТЕОРИЙ

Как мы установили в предыдущем параграфе, изменение эффективного лагранжиана взаимодействия путём введения в него контрчленов обусловлено сильно связанными диаграммами G с неотрицательным индексом $\omega(G)$.

Рассмотрим связь между строением таких диаграмм и структурой соответствующих контрчленов в x -представлении.

Если данная сильно связная диаграмма объединяет n вершин и обладает s внешними линиями, то соответствующий квазилокальный оператор будет иметь вид:

$$:u_{\alpha_1}(x_{i_1}) \dots u_{\alpha_s}(x_{i_s}): Z\left(\dots \frac{\partial}{\partial x} \dots\right) \delta(x_1 - x_2) \dots \delta(x_{n-1} - x_n),$$

причём степень полинома Z равна индексу диаграммы $\omega(G)$. Интегрируя затем по всем переменным x_i , кроме одной, мы получим контрчлен лагранжиана

$$\int dx_2 \dots dx_n :u_{\alpha_1}(x_{i_1}) \dots u_{\alpha_s}(x_{i_s}): Z\left(\dots \frac{\partial}{\partial x} \dots\right) \times \\ \times \delta(x - x_2) \delta(x_2 - x_3) \dots \delta(x_{n-1} - x_n).$$

При выполнении содержащихся здесь тривиальных интеграций производные с δ -функцией перейдут на полевые операторы u и результат интегрирования представится в виде нормального произведения некоторого числа операторных полевых функций и их производных. При этом суммарная степень производных оказывается равной индексу диаграммы $\omega(G)$, а степень «линейности» всего выражения по операторным функциям — числу внешних линий s .

Поэтому если какая-либо данная теория (полностью определяемая основным «затравочным» членом лагранжиана взаимодействия и структурой причинных функций) приводит к сильно связанным диаграммам неотрицательного индекса, у которых числа $\omega(G)$ и s оказываются ограниченными, то для полного исключения всех расходимостей такая теория требует введения контрчленов конечного числа типов. Под типом контрчлена здесь подразумевается его операторный тип и степень производных у каждого полевого оператора. В противоположном случае число типов контрчленов оказывается бесконечным.

Проанализируем теперь зависимость индекса $\omega(G)$ от числа внешних и внутренних линий диаграммы.

Введём для этого понятие индекса вершины, определив его равенством

$$\omega_i = \frac{1}{2} \sum_{l_{\text{внутр}}} (r_l + 2) - 4, \quad (3.1)$$

причём суммирование происходит по всем внутренним линиям, входящим в i -ю вершину. Нетрудно заметить, что индекс диаграммы выражается через индексы входящих в диаграмму вершин следующим образом:

$$\omega(G) = \sum_{1 \leq i \leq n} \omega_i + 4, \quad (3.2)$$

поскольку каждая внутренняя линия входит одновременно в две вершины. Для данного типа вершин индекс ω_i примет своё максимальное значение $\omega_i^{\text{макс}}$ в том случае, когда все линии, входящие в вершину, окажутся внутренними.

Очевидно теперь, что если

$$\omega_i^{\text{макс}} \leq 0, \quad (3.3)$$

то из (3.2) следует, что

$$\omega(G) \leq 4.$$

Наоборот, если для некоторых типов вершин

$$\omega_i^{\text{макс}} > 0, \quad (3.4)$$

то всегда можно построить такую диаграмму G , содержащую достаточное число вершин этого типа, чтобы $\omega(G)$ оказалось большим любого наперёд заданного числа. Таким образом, либо индекс диаграммы не превышает четырёх, либо он может быть сделан сколь угодно большим.

Учитывая, что

$$\omega_i = \omega_i^{\text{макс}} - \frac{1}{2} \sum_{l_{\text{нар}}} (r_l + 2),$$

где $l_{\text{нар}}$ — индексы внешних линий, входящих в данную вершину, зависимость $\omega(G)$ от числа внешних линий может быть записана в виде

$$\omega(G) = \sum_i \omega_i^{\text{макс}} + 4 - \frac{1}{2} \sum_{l_{\text{нар}}} (r_l + 2), \quad (3.5)$$

причём суммирование в последнем члене производится по всем внешним линиям данной диаграммы.

Поэтому в случае (3.3) у диаграммы с положительным индексом число внешних линий не превышает четырёх. В этом случае обе величины $\omega(G)$ и s ограничены числом 4, количество типов

соответствующих контрчленов оказывается конечным и может быть подвергнуто детальной классификации. В противоположном случае (3.4) обе суммы в правой части формулы (3.5) могут быть сделаны сколь угодно большими при неотрицательном $\omega(G)$. Обе характеристики $\omega(G)$ и s оказываются неограниченными, и для компенсации расходимостей возрастающих порядков приходится вводить контрчлены с возрастающей степенью «линейности» и возрастающим количеством производных. Замкнутого выражения для полного эффективного лагранжиана получить не удаётся.

В соответствии с указанными свойствами типы взаимодействий могут быть разделены на два класса¹²:

- а) взаимодействия первого рода (все $\omega_i \leq 0$),
- б) взаимодействия второго рода (некоторые из $\omega_i > 0$).

Соответствующие теории называются «ренормируемыми» и «неренормируемыми».

По поводу данного определения нужно сделать только одну существенную оговорку. Дело в том, что в некоторых случаях отдельные вершинные факторы могут взаимно компенсироваться и тем самым понижать эффективное значение.

Рассмотрим, например, взаимодействие обычного фермионного поля (спин половина) с нейтральным векторным мезонным полем типа

$$\sum_n : \bar{\psi}(x) \gamma^n \psi(x) u_n(x) :. \quad (3.6)$$

При непосредственном счёте ω_i , воспользовавшись тем, что спаривание векторного поля в p -представлении имеет вид

$$i \frac{g^{mn} - \frac{k^m k^n}{m^2}}{m^2 - k^2}$$

и, следовательно, r_i для него равно двум, мы получим, очевидно, $\omega_i = 1$

и отнесём лагранжиан (r_i) к неренормируемому типу.

Можно, однако, показать, что в действительности лагранжиан (3.6) описывает взаимодействие 1-го рода. Для того чтобы в этом убедиться, разобьём векторное поле, следуя Штюкельбергу¹³, на поперечную и продольную части

$$u_n(x) = U_n(x) + \frac{1}{m} \frac{\partial B}{\partial x^n}$$

с соответствующими спариваниями

$$\overline{U_n(x)} \overline{U_m(y)} \sim i g^{mn} \frac{1}{m^2 - k^2},$$

$$\overline{\frac{\partial B(x)}{\partial x^n}} \overline{\frac{\partial B(y)}{\partial y^m}} \sim \frac{i k^m k^n}{k^2 - m^2}.$$

Вспомним теперь, что матрица рассеяния S зависит не от плотности лагранжиана $L(x)$, а от интеграла

$$\int L(x) dx$$

в целом. Подставляя в него произведённое разбиение, имеем:

$$\begin{aligned} \int L(x) dx &= \\ &= \sum_n \int : \bar{\psi}(x) \gamma^n \psi(x) U_n(x) : dx + \frac{1}{m} \sum_n \int : \bar{\psi}(x) \gamma^n \psi(x) \frac{\partial B}{\partial x^n} : dx. \end{aligned}$$

Воспользовавшись законом сохранения (точнее, уравнением непрерывности) спинорного тока, не нарушающего в присутствии нейтральных мезонов

$$\sum_n \frac{\partial}{\partial x^n} : j^n(x) : = \sum_n \frac{\partial}{\partial x^n} : \bar{\psi}(x) \gamma^n \psi(x) : = 0,$$

путём интегрирования второго члена по частям находим, что он равен нулю, т. е.

$$\int L(x) dx = \sum_n \int : \bar{\psi}(x) \gamma^n \psi(x) U_n(x) : dx.$$

Продольное поле $\frac{\partial B}{\partial x^n}$ поэтому из S -матрицы фактически выпадает, эффективные значения r_i и индекса вершины ω_i поникаются до нуля, и лагранжиан (3.6) оказывается ренормируемым.

Итак, не рассматривая здесь детально этих весьма специальных случаев компенсации особенностей, обязанных своим существованием некоторой группе преобразований, дадим сейчас общую классификацию простейших лагранжианов взаимодействия.

При установлении соответствующих индексов ω_i^{\max} примем во внимание, что в соответствии с общей структурой перестановочных и причинных функций степень полинома r_i для скалярного поля и векторного поля с массой нуль (электромагнитного) со скалярной связью равна нулю, для спинорного поля спина половина равна единице, для векторного поля (при $m \neq 0$) со скалярной связью равна двум. В случае градиентной связи с помощью формулы (I. 5.10) находим, что r_i для скалярного и электромагнитного поля равна двум, а для векторного поля — четырём.

Как было отмечено, число внешних линий в сильно связных диаграммах с неотрицательным индексом не может быть более четырёх. Поэтому максимальная степень линейности лагранжиана взаимодействия 1-го рода равна четырём. Из формулы

$$\omega_{i,j}^{\max} = \frac{1}{2} \sum_i (r_i + 2) - 4, \quad (3.7)$$

где суммирование производится по всем линиям, выходящим из данной вершины, находим, что в случае лагранжиана, содержащего четыре оператора, все четыре линии должны иметь индекс $r_i = 0$, т. е. лишь четверные произведения скалярных полей и электромагнитных полей

$$:\varphi_{a_1}\varphi_{a_2}\varphi_{a_3}\varphi_{a_4}:, \quad :\varphi_{a_1}\varphi_{a_2}A_kA_k:, \quad :A_kA_kA_lA_l: \quad (3.8)$$

описывают взаимодействие первого рода ($\omega_i = 0$).

Все остальные четверные взаимодействия, как, например, четверное ферми-взаимодействие спинорных операторных функций *)

$$(\bar{\psi}_{a_1}O\psi_{a_2})(\bar{\psi}_{a_3}O\psi_{a_4}) \quad (\omega_i = 2),$$

используемое для описания бета-процессов, а также четверные взаимодействия, включающие производные и векторные полевые функции, представляют собой взаимодействия 2-го рода.

Кубичные члены в лагранжиане 1-го рода, очевидно, могут иметь следующую структуру:

а) произведение трёх скалярных и электромагнитных функций без производных

$$:\varphi_{a_1}\varphi_{a_2}\varphi_{a_3}:; \quad :A_kA_k: \quad (\omega_i = -1) \quad (3.9)$$

остальные комбинации не образуют скаляра);

б) произведение трёх скалярных и электромагнитных функций с одной первой производной

$$:\varphi_{a_1} \frac{\partial \varphi_{a_2}}{\partial x^k} A_k: \quad (\omega_i = 0). \quad (3.10)$$

По этому типу построено взаимодействие заряженных скалярных мезонов с электромагнитным полем (скалярная электродинамика);

в) произведение одной скалярной функции, одной векторной и одной электромагнитной

$$:\varphi_{a_1}\varphi_{a_2}^k A_k:; \quad (3.11)$$

г) произведение двух спинорных функций и одной скалярной или электромагнитной

$$:(\bar{\psi}_1O\psi_2)\varphi:, \quad :(\bar{\psi}_1O^k\psi_2)A_k: \quad (\omega_i = 0). \quad (3.12)$$

Все остальные кубичные взаимодействия, например взаимодей-

*) Здесь использовано обычное матричное сокращение

$$(uOv) = \sum_{\alpha, \beta} u_\alpha O_{\alpha\beta} v_\beta.$$

ствие спинорного поля со скалярным типа градиентной связи

$$:(\bar{\psi}_1 O^k \psi_2) \frac{\partial \varphi}{\partial x^k}: \quad (\omega_i = 1),$$

приводят к неренормируемым теориям*).

Перечисленными девятью лагранжианами (3.8) — (3.12) и ограничиваются возможные типы взаимодействий 1-го рода **), так как приводимые ниже квадратичные формы, удовлетворяющие условию (3.3), соответствуют вершинам, в которые входит по две линии. Такие формулы не описывают процессов взаимного превращения частиц и представляют поэтому лишь возможные типы контрчленов.

Указанные квадратичные формы могут представляться следующими комбинациями:

а) парные произведения функций одного и того же поля без производных

$$\begin{aligned} & :\varphi\varphi: \quad (\omega_i = -2); \quad :A_k A_k: \quad (\omega_i = -2); \\ & :\bar{\psi} O \psi: \quad (\omega_i = -1); \quad :\varphi^k \varphi^k: \quad (\omega_i = 0); \end{aligned} \quad \left. \right\} \quad (3.13)$$

б) парные произведения функций одного и того же поля, включающие до двух производных:

$$\begin{aligned} & :\frac{\partial \varphi}{\partial x^k} \frac{\partial \varphi}{\partial x^k}: \quad (\omega_i = 0); \quad :\left(\bar{\psi} O^k \frac{\partial \psi}{\partial x^k}\right): \quad (\omega_i = 0); \\ & :\frac{\partial A_m}{\partial x^n} \frac{\partial A_m}{\partial x^n}: \quad (\omega_i = 0); \quad :\left(\frac{\partial A_m}{\partial x^n}\right)^2: \quad (\omega_i = 0). \end{aligned} \quad \left. \right\} \quad (3.14)$$

Все остальные квадратичные комбинации приводят к взаимодействиям второго рода.

Проведённое нами разделение лагранжианов на взаимодействие 1-го и 2-го рода в сущности не является достаточно последовательным. Оно было произведено с точки зрения сходимости отдельных членов разложения S -матрицы в ряд по степеням константы связи. Вполне возможно, что после выполнения суммирования данного ряда аналитическая природа исследуемых функций примет другой характер, что скажется на проведённой выше классификации ¹⁴.

Встает поэтому задача — не прибегая к теории возмущений, установить, какие взаимодействия относятся к 1-му роду, а какие — ко 2-му. Иначе говоря, возникает вопрос о том, при каких лагранжианах локального типа удается построить замкнутую теорию. Важность этой задачи обусловливается тем, что, как мы сейчас

*) Не считая лагранжиана (3.6).

**) На самом деле их число ещё более ограничивается за счёт зарядовой и градиентной инвариантности (см. ниже).

покажем, между теориями 1-го и 2-го рода имеется существенное физическое различие.

Остановимся для этого более подробно на свойствах взаимодействий второго рода. Как мы уже убедились, среди бесконечного числа типов контрчленов, возникающих в таких теориях, содержатся группы членов одинакового операторного типа, но с бесконечно возрастающими степенями производных. Такие ряды по степеням производных фактически представляют собой разложение некоторых нелокальных выражений и потому в сущности и представляют собой нелокальные взаимодействия.

Например, лагранжиан псевдовекторной мезон-нуклонной связи

$$:\bar{\psi} \gamma^5 \gamma^k \psi \frac{\partial u}{\partial x^k}:$$

требует введения в эффективный лагранжиан бесконечного числа контрчленов вида

$$:\bar{\psi} \gamma^5 \gamma^k \psi \frac{\partial^n}{\partial (x^\alpha)^n} \left(\frac{\partial u}{\partial x^k} \right):,$$

которые в сумме могут рассматриваться как разложение нелокального выражения

$$\int dy : \bar{\psi}(x) \gamma^5 \gamma^k \psi(x) \frac{\partial u(y)}{\partial y^k} C(x-y)$$

в ряд по степеням производных функции u .

Таким образом, в случае взаимодействий 2-го рода происходит фактическое исчезновение локализуемости эффективного лагранжиана, который начинает зависеть от поведения полевых функций не только в бесконечно малой окрестности точки x . При этом оказывается, что вне зависимости от малости константы взаимодействия члены высших порядков становятся существенными при достаточно больших импульсах. Действительно, из соображений размерности следует, что контрчлен, содержащий n производных, пропорционален фактору l^n , где l — малый параметр размерности длины («универсальная длина»), степенным образом связанный с константой взаимодействия¹⁵. В p -представлении производные $\frac{\partial}{\partial x}$ превращаются в импульсы, и мы получаем разложение по величине

$$pI = \frac{l}{\lambda}, \quad (3.15)$$

где

$$\lambda = \frac{1}{p}$$

— комптоновская длина волны. При достаточно больших p комптоновская длина волны λ становится сравнимой с универсальной длиной l и параметром разложения (3.15) нелокального лагранжиана в ряд

по производным перестаёт быть малым. Универсальная длина l в этом случае является характеристикой физической размытости частицы и её появление сигнализирует о важности влияния внутренней структуры частицы.

Мы приходим к выводу, что лагранжианы взаимодействия второго рода представляют собой «обломки» нелокализованных взаимодействий, представленные как бы в локализованном виде. Для последовательного построения таких теорий необходимо с самого начала исходить из нелокального лагранжиана, учитывавшего внутреннюю структуру элементарных частиц. Отсюда вытекает, что между взаимодействиями 1-го и 2-го рода существует глубокое физическое различие. Существенным становится вопрос — «принадлежат ли все осуществляемые в природе взаимодействия к 1-му роду?»¹⁶.

Подчеркнём, что достаточно обоснованный ответ на этот вопрос может быть получен путём сравнения с экспериментом результатов расчётов, не основанных на теории возмущений.

В настоящий момент совершенно не ясно, например, являются ли взаимодействия, отнесённые нами на основании теории возмущений к 1-му роду, действительно взаимодействиями 1-го рода.

Если ответ на поставленный вопрос окажется утвердительным, то тогда следует считать, что теория поля уже располагает методами, позволяющими однозначно устранять расходимости и получать однозначные конечные результаты. В настоящий момент, конечно, вычитательная техника основывается на теории возмущений, но её применение в процедурах, не прибегающих к теории возмущений или прибегающих к ней лишь частично, повидимому, не вызывает особых затруднений^{17, 18}.

Наличие бесконечностей в этом случае, конечно, связано с представлением о точечном характере элементарных частиц и формальная процедура устранения бесконечностей фактически является сравнительно недорогой ценой, которую приходится платить за отказ от детального исследования внутренней структуры элементарных частиц. Успех вычитательного метода при этом свидетельствует о том, что детали внутренней структуры элементарных частиц при взаимодействиях 1-го рода не играют большой роли.

В противоположном случае, если хотя бы некоторые истинные взаимодействия принадлежат ко второму роду, приобретает важность вопрос о внутреннем строении элементарных частиц и о последовательном описании их взаимодействий с помощью нелокальных лагранжианов.

При этом ввиду взаимной связности всех частиц окажется, что если даже некоторые взаимодействия между ними, взятые изолированно, и принадлежат к 1-му роду, полное описание любых частиц обязательно должно быть нелокальным.

Так как в настоящий момент фактически не существует методов исследования нелокальных взаимодействий в квантовой теории

поля, мы не будем здесь вообще рассматривать эту вторую возможность. Мы предположим поэтому, хотя, быть может, это и не имеет места, что все существующие взаимодействия относятся к 1-му роду.

Приступим теперь к более тщательному анализу возможностей построения теорий 1-го рода.

Как было недавно установлено, возможные типы членов эффективного лагранжиана взаимодействия ограничиваются тремя формами четвёртого порядка (3.8), шестью кубичными формами (3.9) — (3.12) и восемью квадратичными формами (3.13) — (3.14).

Наиболее общая форма эффективного лагранжиана имеет, следовательно, вид

$$\begin{aligned}
 L(x) = & \sum_{(\alpha)} A_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} : \varphi_{\alpha_1} \varphi_{\alpha_2} \varphi_{\alpha_3} \varphi_{\alpha_4} : + \\
 & + \sum_{(\alpha, k)} B_{\alpha_1 \alpha_2} : \varphi_{\alpha_1} \varphi_{\alpha_2} A_k A_k : g^{kk} + C \sum_{(k, l)} g^{kk} g^{ll} : A_k A_k A_l A_l : + \\
 & + \sum_{(\alpha)} D_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} : \varphi_{\alpha_1} \varphi_{\alpha_2} \varphi_{\alpha_3} : + \sum_{(\alpha, k)} E_{\alpha} g^{kk} : \varphi_{\alpha} A_k A_k : + \\
 & + \sum_{(\alpha, k)} F_{\alpha_1 \alpha_2} : \varphi_{\alpha_1} \frac{\partial \varphi_{\alpha_2}}{\partial x^k} A_k : g^{kk} + \sum_{(\alpha, k)} G_{\alpha_1 \alpha_2} : (\bar{\psi}_{\alpha_1} O^k \psi_{\alpha_2}) A_k : + \\
 & + \sum_{(\alpha, k)} H_{\alpha_1 \alpha_2} : \varphi_{\alpha_1} \varphi_{\alpha_2}^k A_k : + \sum_{(\alpha)} K_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} : (\bar{\psi}_{\alpha_1} O \psi_{\alpha_3}) \varphi_{\alpha_2} : + \\
 & + L \sum_{m, n} g^{mm} g^{nn} : \frac{\partial A_m}{\partial x^m} \frac{\partial A_n}{\partial x^n} : + M \sum_{m, n} g^{mm} g^{nn} : \frac{\partial A_m}{\partial x^n} \frac{\partial A_n}{\partial x^m} : + \\
 & + \sum_{\alpha} N_{\alpha} : (\bar{\psi}_{\alpha} O \psi_{\alpha}) : + \sum_{\alpha} P_{\alpha} : \varphi_{\alpha} \varphi_{\alpha} : + Q \sum_{k} g^{kk} : A_k A_k : + \\
 & + \sum_{\alpha, k} R_{\alpha} g^{kk} : \varphi_{\alpha}^k \varphi_{\alpha}^k : + \sum_{\alpha, k} W_{\alpha} : \bar{\psi}_{\alpha} O^k \frac{\partial \psi_{\alpha}}{\partial x^k} : + \\
 & + \sum_{\alpha, k} V_{\alpha} g^{kk} : \frac{\partial \varphi_{\alpha}}{\partial x^k} \frac{\partial \varphi_{\alpha}}{\partial x^k} : . \quad (3.16)
 \end{aligned}$$

Поэтому в теориях 1-го рода выбор лагранжиана взаимодействия сводится к выбору конечного числа «констант связи»

$$A, B, C, \dots, W, V. \quad (3.17)$$

Число независимых среди них уменьшается в результате учёта требований градиентной инвариантности, сохранения заряда и инва-

риантности по отношению к зарядовому сопряжению. Чтобы полностью фиксировать теорию, необходимо, разумеется, задать ещё массы частиц при отсутствии взаимодействия. Таким образом, любая теория 1-го рода полностью характеризуется конечным набором чисел: массами фиктивных невзаимодействующих частиц и константами связи.

В нашем варианте теории основной величиной, кроме лагранжианов свободных частиц, фиксирующих свойства невзаимодействующих полей, является лагранжиан взаимодействия $L(x)$.

Как мы убедились, выбирая $L(x)$ обычным образом, посредством переопределения T -произведения удается получить интегрируемые выражения для членов S -матрицы:

$$S_n(x_1, \dots, x_n) = i^n T' [L(x_1), \dots, L(x_n)].$$

Хотя рецептура построения оператора T' является неоднозначной, но содержащийся в ней произвол соответствует конечному изменению констант связи в лагранжиане взаимодействия, т. е. доведению в исходный лагранжиан $L(x)$ конечных контрчленов того же типа, что и члены, входящие в выражение (3.15). Таким образом, для полной однозначности расчётов необходимо задавать $L(x)$ применительно к фиксированной рецептуре построения T' -произведения.

С другой стороны, как мы убедились, совершенно эквивалентный результат получается, если вместо переопределения T -произведения использовать обычное T -произведение (с той или иной вспомогательной регуляризацией в промежуточных рассуждениях), но зато вместо $L(x)$ пользоваться некоторым эффективным лагранжианом взаимодействия $L_{\text{эфф}}$, содержащим, кроме исходного лагранжиана взаимодействия, расходящиеся контрчлены вида (3.15), которые и компенсируют расходимости в обычных T -произведениях.

Таким образом, с точки зрения S -матрицы дело обстоит так, как будто вместо исходного полного лагранжиана

$$L_0(x) + L(x)$$

мы имеем лагранжиан

$$L_{\text{полн}} = L_0 + L_{\text{эфф}}.$$

Входящие в него «массы», «заряды», т. е. коэффициенты при соответствующих операторных комбинациях, расходятся, однако вычисляемые с их помощью наблюдаемые величины (в том числе массы, заряды и т. п.) имеют конечные значения.

Мы приходим таким путём к так называемой «ренормализационной» точке зрения, когда для получения конечных значений для рассчитываемых наблюдаемых величин в лагранжиан вводят бесконечные «затравочные» массы, заряды и т. п. Говорят при этом, что устранение бесконечностей из теории достигается путём

«перенормировки» основных констант. Факторы перенормировки содержат расходящиеся выражения.

Эта точка зрения, однако, не проводится достаточно последовательно, так как в $L_{\text{полн}}$ приходится доводить такие контрчлены, появление которых не сводится к перенормировке основных величин (например, в случае спинорной электродинамики явно неградиентно-инвариантные члены фотонной массы *) и член $(\partial A_m / \partial x^m)^2$, четверные члены в мезонных теориях и т. п.).

Кроме того, при рассмотрении обобщённой матрицы рассеяния $S(g)$, как мы убедились в § 2, структура контрчленов меняется и оказывается зависящей от поведения функции $g(x)$. Как будет показано ниже, именно матрицей $S(g)$ определяется эффективный гамильтониан системы. Можно поэтому сказать, что при регуляризации уравнения Шредингера приходится вводить контрчлены, отличные от тех, которые требуются при регуляризации S -матрицы. Наконец, конкретные выражения расходящихся коэффициентов при контрчленах зависят от способа регуляризации.

Ввиду всего этого мы и не придерживаемся «ренормализационной» терминологии, рассматривая процедуру введения контрчленов как формальный приём, обеспечивающий конечность результатов расчётов.

§ 4. ОБЩИЙ ВИД КОНТРЧЛЕНОВ СПИНОРНОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

В качестве примера взаимодействующих квантованных волновых полей рассмотрим практически важный случай спинорной электродинамики, т. е. систему взаимодействующих векторного электромагнитного и фермионного спинорного полей с лагранжианом взаимодействия:

$$L(x) = \sqrt{4\pi \cdot e} \bar{\psi}(x) \hat{A}(x) \psi(x). \quad (4.1)$$

Напомним, что в соответствии со структурой выражения (4.1) на диаграммах Фейнмана в каждой вершине встречаются две фермионные линии и одна фотонная, а причинные функции участвующих полей имеют вид (ср. (I.5.7) и (I.5.8))

$$\frac{1}{i} \overline{A_m(x)} \overline{A_n(y)} = g^{mn} D_0^c(x - y) = -\frac{g^{mn}}{(2\pi)^4} \int \frac{dk e^{ikx}}{k^2 + i\epsilon}, \quad (4.2)$$

$$i \overline{\psi(x)} \overline{\psi(y)} = S^c(x - y) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int dpe^{-ipx} \frac{m + p}{m^2 - p^2 i\epsilon}. \quad (4.3)$$

Поэтому степень полинома $P(k)$ в числителе причинной функции для фотонной линии равна нулю, а для фермионной линии

*) При неградиентно-инвариантном способе регуляризации, подобно использованному в § 1 настоящей статьи.

равна единице. Максимальный индекс вершины, определяемый по формуле

$$\omega_i^{\max} = \frac{1}{2} \sum_l (r_l + 2) - 4, \quad (4.4)$$

оказывается равным нулю и лагранжиан (4.1) относится поэтому к ренормируемому типу.

Проведём теперь классификацию расходящихся диаграмм, основываясь на формуле (3.5). Замечаем прежде всего, что в силу равенства нулю максимального индекса вершины ω_i^{\max} индекс диаграммы $\omega(G)$ от числа вершин не зависит и оказывается зависящим лишь от числа и характера внешних линий

$$\omega(G) = 4 - \frac{1}{2} \sum_{l_{\text{нар}}} (r_l + 2). \quad (4.5)$$

Как указывалось в предыдущем параграфе, максимальное число внешних линий у расходящихся диаграмм не может превышать четырёх. Из (4.5) следует, что единственной диаграммой такого рода в спинорной электродинамике является диаграмма с четырьмя внешними фотонными линиями. Индекс этой диаграммы оказывается равным нулю.

Перейдём к диаграммам с тремя внешними линиями. Из-за свойства непрерывности спинорных линий число спинорных внешних линий всегда чётно. Поэтому достаточно рассмотреть диаграммы с тремя внешними фотонными линиями и диаграммы с двумя внешними фермионными линиями и одной фотонной линией. Суммарные вклады в матричные элементы от диаграмм с нечётным числом внешних фотонных линий при отсутствии внешних спинорных линий оказываются равными нулю на основании приведённой ниже в данном параграфе теоремы Фарри. Диаграмма с двумя внешними спинорными линиями и одной фотонной линией имеет индекс $\omega(G)$, равный нулю.

Диаграмма с двумя внешними спинорными линиями имеет индекс, равный единице, а с двумя внешними фотонными линиями — индекс, равный двум.

Диаграммы с одной внешней фермионной линией отсутствуют из-за принципа непрерывности фермионных линий, а диаграммы с одной фотонной внешней линией запрещены теоремой Фарри.

Перечисление расходящихся диаграмм на этом закончено. Прежде чем переходить к исследованию соответствующих квазилокальных операторов, докажем упоминавшуюся теорему Фарри.

Отметим прежде всего, что проводящаяся нами общая классификация расходящихся диаграмм не учитывает свойств симметрии и инвариантности системы по отношению к различным преобразованиям.

Выполнение указанных свойств ведёт к значительным ограничениям возможных типов диаграмм и, как мы увидим ниже, устанавливает взаимные связи между строением регуляризующих квазилокальных операторов, соответствующих различным расходящимся диаграммам. Отмечавшаяся, например, выше непрерывность спинорных линий является по существу отражением свойства сохранения электрического заряда фермионов.

Важное ограничение на возможные типы диаграмм накладывает свойство зарядовой инвариантности, т. е. инвариантности относительно изменения знака электрического заряда процессов, в начальных и конечных состояниях которых нет электрически заряженных фермионных частиц. Такие процессы как раз и описываются диаграммами, у которых все внешние линии — фотонные. Изменение знака заряда при преобразовании зарядовой инвариантности состоит здесь, очевидно, в изменении знака заряда виртуальных фермионов в промежуточных состояниях. Движение указанных виртуальных частиц на диаграммах Фейнмана описывается замкнутыми спинорными циклами.

Теорема Фарри¹⁹ состоит в утверждении, что соответствующие диаграммам G , содержащим хотя бы один нечётный замкнутый спинорный цикл, матричные элементы взаимно аннулируются. Рассмотрим такую диаграмму G , содержащую нечётный замкнутый цикл L . Очевидно, что матричный элемент, соответствующий этой диаграмме, будет состоять из суммы двух членов, один из которых соответствует движению заряда в L по часовой стрелке, а второй — движению заряда в противоположном направлении. Как мы сейчас покажем (доказательство принадлежит Фейнману²⁰), указанные члены отличаются лишь знаками, а потому в сумме дают нуль.

Сомножитель матричного элемента, соответствующий замкнутому циклу L , содержащему n вершин, по правилам Фейнмана имеет вид

$$\begin{aligned} \text{Sp} [\gamma S^c(1-2)\gamma S^c(2-3)\dots\gamma S^c(n-1)] &= \\ &= \sum_{(\alpha, \dots, \gamma)} \{\gamma_{\alpha\beta} S^c_{\beta\gamma}(1-2)\gamma_{\gamma\delta} S^c(2-3)\dots\gamma_{\mu\nu} S^c_{\nu\alpha}(n-1)\}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Теперь воспользуемся тем, что вся схема спинорного поля и, в частности, соотношение, определяющее матрицы Дирака

$$\gamma^m \gamma^n + \gamma^n \gamma^m = 2g^{mn},$$

так же как и значение шпуроров от произведений любого числа матриц, инвариантны относительно замены

$$\gamma \rightarrow -\gamma^T, \quad \text{т. е.} \quad \gamma_{\alpha\beta} \rightarrow -\gamma_{\beta\alpha}. \quad (4.7)$$

В результате преобразования (4.7) причинная функция

$$S_{\beta\gamma}^c(1-2) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int dpe^{-ip(1-2)} \frac{(m+p)_{\beta\gamma}^{\wedge}}{m^2 - p^2 - ie}$$

примет вид

$$\frac{1}{(2\pi)^4} \int dpe^{-ip(2-1)} \frac{(m+p)_{\gamma\beta}^{\wedge}}{m^2 - p^2 - ie} = S_{\gamma\beta}^c(2-1).$$

Поэтому, производя над выражением (4.6) преобразование (4.7), получаем:

$$\begin{aligned} \text{Sp} [\gamma S^c(1-2) \gamma S^c(2-3) \dots \gamma S^c(n-1)] &= \\ = (-1)^n \sum_{(\alpha, \dots, \nu)} \{ \gamma_{\beta\alpha} S_{\gamma\beta}^c(2-1) \gamma_{\delta\gamma} S_{\epsilon\delta}^c(3-2) \dots \gamma_{\nu\mu} S_{\alpha\nu}^c(1-n) \} &= \\ = (-1)^n \text{Sp} [\gamma S^c(1-n) \gamma \dots S^c(3-2) \gamma S^c(2-1)]. & \end{aligned} \quad (4.8)$$

Мы видим отсюда, что в силу инвариантности шпура по отношению к преобразованию (4.7) при чётном n фактор (4.6) совпадает с множителем

$$\text{Sp} [\gamma S^c(1-n) \gamma \dots \gamma S^c(3-2) \gamma S^c(2-1)], \quad (4.9)$$

соответствующим обходу контура L в противоположном направлении, а при нечётном n отличается от него знаком.

В этом последнем случае сумма матричных элементов, соответствующих различным направлениям обхода нечётного цикла, аннулируется, и теорема Фарри доказана.

Заметим, что приведённое доказательство теоремы Фарри носит формальный характер, поскольку мы имеем здесь дело с сингулярными произведениями нерегуляризованных причинных функций. Нетрудно, однако, увидеть, что и при замене S^c на $\text{reg}[S^c]$ доказательство остаётся в силе и сумма регуляризованных матричных элементов даёт нуль. Поэтому, сопоставляя таким диаграммам квазилокальный оператор, равный нулю:

$$\Lambda_n(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad (4.10)$$

мы получим выполнение теоремы Фарри для полных коэффициентных функций $S_n(x_1, \dots, x_n)$ после устранения расходимостей.

Подчеркнём, что условие (4.10), обеспечивающее зарядовую инвариантность теории после устранения расходимостей, вообще говоря, не является обязательным. Заменив его на какое-либо другое, мы могли бы получить ту или иную зарядово-неинвариантную теорию.

Вернёмся к рассматриваемым нами диаграммам. Ввиду того, что диаграммы, имеющие лишь внешние фотонные линии в нечётном

числе, имеют нечётное число вершин, они обязательно содержат хотя бы один нечётный спинорный цикл и поэтому матричные элементы диаграмм с нечётным числом внешних фотонных линий всегда аннулируются. Это обстоятельство мы использовали выше, запретив диаграммы с тремя и одной внешними фотонными линиями.

Таким образом, с учётом теоремы Фарри мы имеем четыре типа расходящихся диаграмм в спинорной электродинамике, изображённые на рис. 12.

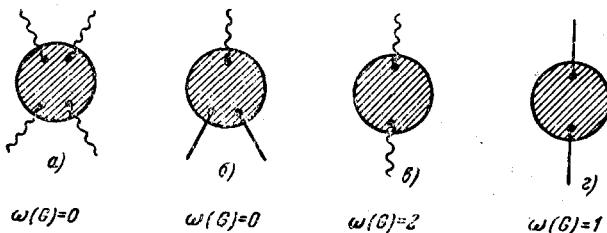


Рис. 12.

Заштрихованные окружности представляют на этих рисунках внутренние части диаграмм, содержащие произвольное*) число вершин. Напомним, что независимость степени расходимости от числа вершин в спинорной электродинамике вытекает из равенства нулю максимального индекса вершины.

Исследуем теперь форму квазилокальных операторов, соответствующих расходящимся диаграммам (рис. 12).

Диаграмме *а*) при каждом чётном n , начиная с $n=4$, соответствует член в $\Lambda_n(x_1, \dots, x_n)$

$$A^n \sum_{k, l} g^{kk} g^{ll} : A_k(x_i) A_k(x_j) A_l(x_m) A_l(x_p) : \times \\ \times \delta(x_1 - x_2) \delta(x_2 - x_3) \dots \delta(x_{n-1} - x_n). \quad (4.11)$$

Степень дифференциального полинома в этом выражении равна нулю в соответствии со значением индекса диаграммы *а*).

Диаграмме *б*) при каждом нечётном n , начиная с $n=3$, соответствует квазилокальный оператор

$$B^n \sum_m : \bar{\psi}(x_i) \gamma^m \psi(x_j) A_m(x_k) : \delta(x_1 - x_2) \times \\ \times \delta(x_2 - x_3) \dots \delta(x_{n-1} - x_n). \quad (4.12)$$

*) В *а*), *в*) и *г*) — чётное, в *б*) — нечётное.

Диаграмме *в)* при каждом чётном n , начиная с $n = 2$, соответствует член в $\Lambda_n(x_1, \dots, x_n)$

$$\sum_{(i \neq j, m, k)} :A_m(x_i) \left\{ \left(C^n g^{mk} + D^n g^{mm} g^{kk} \frac{\partial}{\partial x_i^m} \frac{\partial}{\partial x_j^k} + \right. \right. \\ \left. \left. + E^n g^{mk} \sum_l g^{ll} \frac{\partial}{\partial x_i^l} \frac{\partial}{\partial x_j^l} \right) \times \right. \\ \left. \times \delta(x_1 - x_2) \delta(x_2 - x_3) \dots \delta(x_{n-1} - x_n) \right\} A_k(x_j) :. \quad (4.13)$$

Дифференциальный полином здесь имеет вторую степень в соответствии с индексом соответствующей диаграммы. В полиноме отсутствует член первой степени ввиду невозможности построить с ним инвариантную комбинацию.

Наконец, диаграмме *г)* при каждом чётном n , начиная с $n = 2$, соответствует оператор

$$\sum_{(i \neq j)} : \bar{\psi}(x_i) \left[\left[F^n + \frac{i}{2} G^n \left(\frac{\hat{\partial}}{\partial x_i} - \frac{\hat{\partial}}{\partial x_j} \right) \right] \times \right. \\ \left. \times \delta(x_1 - x_2) \delta(x_2 - x_3) \dots \delta(x_{n-1} - x_n) \right] \psi(x_j) :. \quad (4.14)$$

Из приведённых выражений видно, что квазилокальные операторы Λ_n содержат довольно много произвольных констант. Заметим, однако, что нами до сих пор не принято во внимание требование градиентной инвариантности.

Чтобы сформулировать это требование, рассмотрим сначала бесконечно малое градиентное преобразование потенциалов электромагнитного поля

$$A_m(x) \rightarrow A'_m(x) = A_m(x) + \frac{\partial f}{\partial x^m},$$

где f — произвольная бесконечно малая функция. При этом преобразовании член n -го порядка матрицы рассеяния $S(1)$

$$\int S_n(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \quad (4.15)$$

с учётом линейной зависимости S_n от потенциалов A_n с различными аргументами получит приращение

$$\sum_{m, i} \int \frac{\partial S_n}{\partial A_m(x_i)} \frac{\partial f}{\partial x_i^m} dx_1 \dots dx_n.$$

Интегрируя это выражение по частям, получаем, что оно обра-

щается в нуль, если тождественно

$$\operatorname{div}_{x_i} \frac{\partial S_n(x_1, \dots, x_n)}{\partial A(x_i)} \equiv \sum_m \frac{\partial}{\partial x_i^m} \frac{\partial S^n(x_1, \dots, x_n)}{\partial A^m(x_i)} = 0. \quad (4.16)$$

Нетрудно убедиться, что при выполнении этого условия выражение (4.15) не будет изменяться и при конечном градиентном преобразовании. Это обусловлено тем, что коэффициенты при старших степенях по $\frac{\partial f}{\partial x}$ в приращении подинтегрального выражения выражаются через производные по $A(x_i)$ от (4.16).

Исходя из указанных соображений, мы и примем в качестве условия градиентной инвариантности теории условие (4.16). Ниже мы увидим (см. следующую статью), что кроме инвариантности это условие обеспечивает также выполнение дифференциального закона сохранения электрического тока.

Проанализируем теперь степень произвола в выборе коэффициентов $A^n, B^n, \dots, F^n, G^n$ в выражениях (4.11) — (4.14), остающуюся после наложения условия градиентной инвариантности в форме (4.16).

Рассмотрим, например, вершинную часть операторной функции $S_n(x_1, \dots, x_n)$

$$\sum_{(i \neq j \neq k, m)} : \bar{\psi}(x_i) \Gamma^m(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n | x_k) \times \\ \times \psi(x_j) A_m(x_k) :. \quad (4.17)$$

В соответствии с условием градиентной инвариантности вершинная часть должна удовлетворять условию

$$\operatorname{div}_{x_k} : \bar{\psi}(x_i) \Gamma^m(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n | x_k) \psi(x_j) : = 0.$$

Сравнивая с (4.12), мы видим, что функция Γ^m определена с точностью до члена

$$b^n \gamma^m \delta(x_1 - x_2) \delta(x_2 - x_3) \dots \delta(x_{n-1} - x_n), \quad (4.18)$$

причём введение b^n соответствует изменению коэффициента B^n . Однако нетрудно заметить, что если вершинная часть (4.17) удовлетворяет условию (4.16), то с добавлением к Γ^m члена (4.18) она это свойство теряет, так как

$$\operatorname{div}_{x_k} \bar{\psi}(x_i) \gamma \psi(x_j) \delta(x_1 - x_2) \delta(x_2 - x_3) \dots \delta(x_{n-1} - x_n) \neq 0$$

при

$$k \neq i, j.$$

Поэтому, если мы подобрали квазилокальные операторы (4.12) так, что результат градиентно-инвариантен, то этот выбор вполне

однозначен и неопределённость устранена требованием градиентной инвариантности.

Совершенно аналогично можно убедиться в однозначности коэффициентов A^n в выражениях (4.11) и C^n в выражениях (4.13). Ясно также, что выражения (4.14), не содержащие потенциалов электромагнитного поля, допускают произвол в выборе коэффициентов F^n и G^n .

Рассмотрим ещё неоднозначность операторных выражений типа

$$\sum_{(m, k, i \neq j)} :A_m(x_i) \prod^{mk} (x_1, \dots, x_n) A_k(x_j):$$

относительно членов той же структуры, что и члены с коэффициентами D^n и E^n в выражении (4.13).

Подставляя такой член

$$\sum_{(m, k, i \neq j)} :A_m(x_i) \left\{ \left(d^n g^{mm} g^{kk} \frac{\partial}{\partial x_i^m} \frac{\partial}{\partial x_j^k} + \right. \right. \\ \left. \left. + e^n g^{mk} \sum_l g^{ll} \frac{\partial}{\partial x_i^l} \frac{\partial}{\partial x_j^l} \right) \times \right. \\ \left. \times \delta(x_1 - x_2) \delta(x_2 - x_3) \dots \delta(x_{n-1} - x_n) \right\} A_k(x_j):$$

в условие (4.16) с учётом свойства дифференцируемости δ -функций

$$\frac{\partial}{\partial x} \delta(x - y) = - \frac{\partial}{\partial y} \delta(x - y),$$

находим соотношение между d^n и e^n

$$d^n + e^n = 0, \quad (4.19)$$

оставляющее одну степень произвола в выборе этих коэффициентов.

Таким образом, при каждом n всего имеется три неоднозначные константы F^n , G^n и, например, D^n . С точки зрения контричленов лагранжиана неоднозначными оказываются всего три числа (ср. (I.4.35))

$$D = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} D^n; \quad F = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} F^n; \quad G = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} G^n.$$

В дальнейшем мы увидим, что эти три числа входят в результаты всего лишь в двух комбинациях и неоднозначность полностью устраняется выбором массы и заряда спинорной частицы.

Нам нужно теперь показать, что подбором соответствующих контрчленов действительно можно получить градиентно-инвариантную теорию. Как нам известно, контрчлены лагранжиана служат для описания того или иного вычитательного процесса, применённого к теории.

Напомним, что принятая нами вычитательная процедура состоит в вычитании из расходящегося выражения достаточного числа членов его ряда Маклорена с центром разложения в точке $p = 0$ и добавлении к результату произвольного конечного полинома определённой степени. На основании только что полученных результатов этот произвол сводится к двум константам в членах типа (4.14) и одной константе в членах типа (4.13).

Покажем, что в результате такого способа устранения расходимостей получается градиентно-инвариантная теория.

При доказательстве используем следующий вариант регуляризации с помощью вспомогательных масс. Фотонные причинные функции (4.2) будем регуляризовать обычным образом (см. (1.6)), а спинорные причинные функции будем регуляризовать не по отдельности, а заменяя их произведения, соответствующие замкнутым циклам

$$\text{Sp} [\gamma S^c(x_1 - x_2) \gamma S^c(x_2 - x_3) \gamma \dots S^c(x_{n-1} - x_n) \times \times \gamma S^c(x_n - x_1)], \quad (4.20)$$

на выражения

$$\sum_M C_M \text{Sp} [\gamma S_M^c(x_1 - x_2) \gamma S_M^c(x_2 - x_3) \dots S_M^c(x_n - x_1)], \quad (4.21)$$

где $S_M^c(x)$ — причинная спинорная функция с массой M

$$S_M^c(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int dp e^{-ipx} \frac{\hat{p} + M}{M^2 - p^2 - i\epsilon}. \quad (4.22)$$

Указанный способ регуляризации спинорных причинных функций представляет собой один из вариантов регуляризации Паули — Вилларса²¹.

Покажем, во-первых, что регуляризация по Паули — Вилларсу устраняет расходимости из матричных элементов, соответствующих замкнутым циклам. Рассмотрим для этого результат интегрирования выражения (4.20), записанный в импульсном представлении. Имеем тогда

$$\int dp \frac{\text{Sp} [\gamma (\hat{p} + m) \gamma (\hat{p} + \hat{k}_1 + m) \dots \gamma (\hat{p} + \hat{k}_{n-1} + m)]}{(m^2 - p^2 - i\epsilon)(m^2 - (p + k_1)^2 - i\epsilon) \dots (m^2 - (p + k_{n-1})^2 - i\epsilon)}. \quad (4.23)$$

Подинтегральное выражение при больших p ведёт себя как p^{-n} .

и при n , меньшем пяти, интеграл расходится как

$$\int \frac{p^3 dp}{p^n} = \int \frac{dp}{p^{n-3}}. \quad (4.24)$$

Замечаем теперь, что при больших p подинтегральное выражение в (4.23)

$$\begin{aligned} \frac{P_n(p) + m^2 P_{n-2}(p) + \dots + m^n}{P_{2n}(p) + m^2 P_{2n-2}(p) + \dots + m^{2n}} &\approx \\ &\approx \left\{ \frac{P_n(p)}{P_{2n}(p)} + m^2 \frac{P_n(p)}{P_{2n}(p)} \left(\frac{P_{n-2}(p)}{P_n(p)} - \frac{P_{2n-2}(p)}{P_{2n}(p)} \right) + \dots \right\} \quad (4.25) \end{aligned}$$

(где $P_i(p)$ полином i -й степени по компонентам p) может быть представлено в виде степенного ряда по m^2 , причём степень роста по p при $p \rightarrow \infty$ при m^2 в степени k равна p^{-n-2k} .

Ясно поэтому, что если коэффициенты C_M в сумме (4.21) удовлетворяют соотношениям типа

$$\sum_M C_M = 0; \quad \sum_M C_M M^2 = 0; \quad \dots \quad \sum_M C_M M^{2k-2} = 0, \quad (4.26)$$

то подинтегральное выражение для (4.21) при $p \rightarrow \infty$ ведёт себя, как

$$p^{-2k-n},$$

и процедура Паули — Вилларса регуляризует рассматриваемые выражения вместе с их $2k+n-5$ первыми производными по x_i . Это свойство процедуры Паули — Вилларса можно было бы также непосредственно установить, перейдя к « α -представлению» причинных функций.

Таким образом, мы будем вводить вспомогательные массы лишь в фотонные линии и замкнутые спинорные циклы. Незамкнутые спинорные циклы мы вообще не будем подвергать регуляризации. Легко увидеть, что фотонные функции достаточно регуляризовать одной вспомогательной массой, а замкнутые спинорные циклы — двумя вспомогательными массами.

Действительно, максимальная степень расходимости диаграмм с замкнутыми спинорными циклами равна двум (диаграммы типа рис. 12, в), т. е. $n = 2$, а введение двух вспомогательных масс снижает степень на четыре единицы. В результате этой процедуры интеграл при $p \rightarrow \infty$ начинает сходиться, как

$$\int \limits_{-\infty}^{\infty} dp \cdot p^{-3}.$$

С другой стороны, максимальная степень расходимости диаграмм с внутренними фотонными линиями равна единице (диаграммы типа рис. 12, г). Введение в фотонную линию одной вспомогательной массы снижает степень расходимости на две единицы, и интеграл

начинает сходиться, как

$$\int_0^\infty dp \cdot p^{-2}.$$

Недобходимости в регуляризации незамкнутых спинорных циклов, таким образом, не возникает.

Мы видим отсюда, что при конечных значениях вспомогательных масс M_i все матричные элементы оказываются сходящимися. Напомним, однако, что регуляризация методом вспомогательных масс является лишь техническим вспомогательным приёмом, проводимым на промежуточной стадии рассуждений, и что фактическое устранение расходимостей производится путём вычитательной процедуры.

Поэтому к полученному регуляризованному выражению для матрицы рассеяния мы применим теперь обычную процедуру вычитания ряда Маклорена в импульсном представлении при одновременном добавлении трёх произвольных конечных констант. Ввиду установленной ранее инвариантности результатов такого вычитания относительно способа введения вспомогательных масс нам остаётся лишь установить градиентную инвариантность регуляризации Паули — Вилларса и следующей за ней процедуры вычитания.

Докажем теперь градиентную инвариантность регуляризованной матрицы $S(1)$ до применения к ней вычитательной процедуры. При этом мы воспользуемся тем обстоятельством, что совокупность диаграмм n -го порядка с k ($k \geq 1$) внешними фотонными линиями может быть получена из диаграмм $(n-1)$ -го порядка с $k-1$ внешними фотонными линиями посредством процесса вставки дополнительной n -й вершины ξ в любую внешнюю или внутреннюю спинорную линию. Этот процесс вставки (который для краткости будем именовать ξ -процессом) одновременно устанавливает графическое соответствие между выражениями

$$\sum \frac{\partial S_n(x_1, \dots, x_n)}{\partial A(\xi)} \Big|_{\xi=x_1} \quad \text{и} \quad S_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}). \quad (4.27)$$

Рассмотрим сначала процесс вставки во внутреннюю спинорную линию. Вставляя ξ -вершину в линию (x_1, x_2) , получим картину, изображённую на рис. 13.

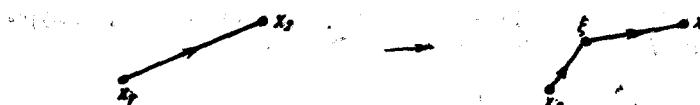


Рис. 13.

Вычисляя интересующую нас в условии (4.16) дивергенцию по ξ от фактора $S^c(x_3 - \xi) \gamma S^c(\xi - x_1)$,

находим, пользуясь уравнениями для S^c ,

$$\operatorname{div}_\xi [S^c(x_2 - \xi) \gamma S^c(\xi - x_1)] =$$

$$= \frac{1}{i} [\delta(x_2 - \xi) - \delta(\xi - x_1)] S^c(x_2 - x_1). \quad (4.28)$$

Процесс ξ -вставки во внутренние линии сложного фермионного цикла может быть изображен схемой, показанной на рис. 14.

Вычисляя дивергенцию от суммы членов, соответствующих правой части рис. 14, с помощью (4.28), без труда убеждаемся,

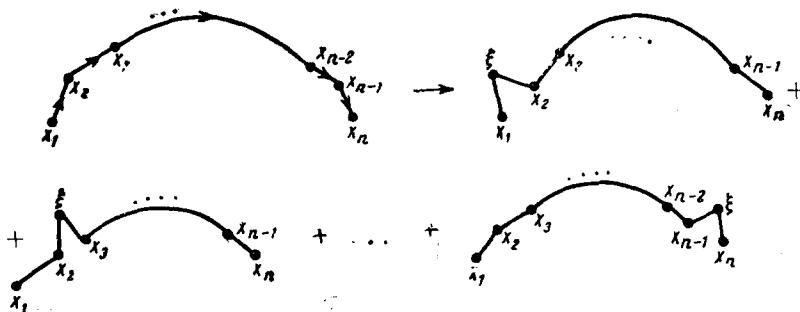


Рис. 14.

что она пропорциональна члену, соответствующему диаграмме в левой части рис. 14 с множителем пропорциональности, равным

$$\frac{1}{i} [\delta(x_n - \xi) - \delta(x_1 - \xi)]. \quad (4.29)$$

Отсюда следует, что указанная дивергенция обращается в нуль для замкнутых циклов (при $x_1 = x_n$).

Применяя это рассуждение к более сложным диаграммам, состоящим из внутренних фотонных линий и произвольного числа замкнутых и незамкнутых фермионных циклов, приходим к соотношению

$$\operatorname{div}_\xi K^{n+1}(x_1, \dots, x_n | \xi) =$$

$$= \frac{1}{i} \left[\sum_a \delta(\xi - x_a) - \sum_b \delta(\xi - x_b) \right] K^n(x_1, \dots, x_n), \quad (4.30)$$

где суммирования \sum_a и \sum_b распространяются на все вершины диаграммы,

в которые входят (x_a) и из которых выходят (x_b) внешние фермионные линии, $K^n(x_1, \dots, x_n)$ — коэффициентная функция n -го порядка, а $K^{n+1}(x_1, \dots, x_n | \xi)$ — полученная из неё ξ -процессом коэффициентная функция $n+1$ -го порядка.

Для завершения доказательства градиентной инвариантности регуляризованной матрицы $S(1)$ рассмотрим ещё процесс ξ -вставки в наружные (входящую и выходящую) фермионные линии, показанный на рис. 15.

Вычисляя соответствующие дивергенции, находим:

$$\operatorname{div}_\xi S^c(x_1 - \xi) \gamma \psi(\xi) = \frac{1}{i} \delta(x_1 - \xi) \psi(x_1), \quad (4.31)$$

$$\operatorname{div}_\xi \bar{\psi}(\xi) \gamma S^c(\xi - x_n) = i \delta(\xi - x_n) \bar{\psi}(x_n). \quad (4.32)$$

Сравнивая эти выражения с фактором (4.26), убеждаемся, что операторные функции $S_n(x_1, \dots, x_n)$ действительно удовлетворяют

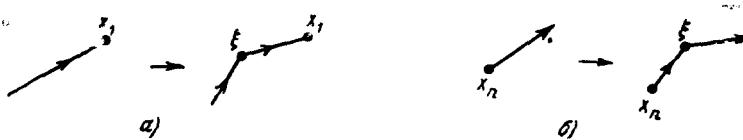


Рис. 15.

условию градиентной инвариантности (4.16), ибо, по только что доказанному, дивергенция факторов, описывающих замкнутые циклы, равна нулю, а дивергенция оператора, соответствующего разомкнутому циклу, слагается из дивергенций суммы ξ -вставок в коэффициентную функцию и вставок во внешние линии, которые также обращаются в нуль ввиду того, что фактор (4.32) компенсирует первый член в (4.29), а фактор (4.31) — второй член.

Этим самым формально доказана градиентная инвариантность матрицы $S(1)$ до процесса регуляризации. Заметим, однако, что по Паули — Вилларсу регуляризации подвергаются лишь замкнутые фермионные циклы, причём в каждом из дополнительных членов в выражениях (4.21) у всех причинных функций S^c масса имеет одинаковое значение.

Ввиду этого указанные дополнительные члены после ξ -процесса обладают также нулевой дивергенцией, и мы приходим к выводу, что и после применения процедуры Паули — Вилларса регуляризованная матрица $S(1)$ также удовлетворяет условию градиентной инвариантности.

Отметим здесь, что указанное свойство сохранения градиентной инвариантности является важным преимуществом регуляризации по Паули — Вилларсу, которое мы и имели в виду, отступив от принятого нами ранее способа введения вспомогательных масс.

Покажем теперь, что включение квазилокальных операторов Λ_n не нарушает свойства градиентной инвариантности. В ходе рассуждений нам окажется полезным уравнение (4.30), которое с по-

мощью формул

$$K^n(x_1, \dots, x_n) = \int e^{i \sum_{l=1}^n p_l x_l} K_n(p_1, \dots, p_n) dp_1 \dots dp_n,$$

$$K^{n+1}(x_1, \dots, x_n | \xi) = \int e^{i \sum_{l=1}^n p_l x_l + i \pi \xi} K_{n+1}(p_1, \dots, p_n | \pi) dp_1 \dots dp_n d\pi,$$

$$\delta(\xi - x_a) = (2\pi)^{-4} \int e^{i\pi(\xi - x_a)} d\pi$$

в импульсном представлении принимает вид

$$\pi K_{n+1}(p_1, \dots, p_n | \pi) = \sum_a K_n(p_1, \dots, p_a + \pi, \dots, p_n) -$$

$$- \sum_b K_n(p_1, \dots, p_b + \pi, \dots, p_n). \quad (4.33)$$

Ввиду трансляционной инвариантности коэффициентных функций K^n и K^{n+1} в x -представлении все величины, входящие в последнее

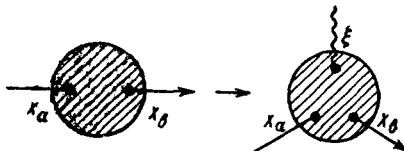


Рис. 16.

соотношение, пропорциональны δ -функции суммарного импульса $\delta(\Sigma p + \pi)$

$$K_{n+1}(p_1, \dots, p_n | \pi) = \delta(\Sigma p + \pi) K'_{n+1}(p_1, \dots, p_n | \pi),$$

$$K_n(p_1, \dots, p_i + \pi, \dots, p_n) = \delta(\Sigma p + \pi) K'_n(p_1, \dots, p_i + \pi, \dots, p_n).$$

Выделяя эту δ -функцию, имеем, очевидно,

$$\pi K'_{n+1}(p_1, \dots, p_n | \pi) = \sum_a K'_n(p_1, \dots, p_a + \pi, \dots, p_n) -$$

$$- \sum_b K'_n(p_1, \dots, p_b + \pi, \dots, p_n). \quad (4.34)$$

В качестве иллюстрации заметим, что диаграмма типа рис. 12, б может быть получена из рис. 12, г ξ -процессом, показанным на рис. 16.

Соответствующие коэффициентные функции Σ и Γ , входящие в операторные выражения

$$:\bar{\psi}(x_b)\Sigma^{(n)}(x_1, \dots, x_n)\psi(x_a):,$$

$$:\bar{\psi}(x_b)\Gamma^{(n+1)}(x_1, \dots, x_n)\psi(x_a)A(\xi):,$$

согласно (4.34) удовлетворяют соотношению

$$\begin{aligned} \pi\Gamma'_{n+1}(p_1, \dots, p_n | \pi) &= i\Sigma'_n(p_1, \dots, p_a + \pi, \dots, p_n) - \\ &- i\Sigma'_n(p_1, \dots, p_b + \pi, \dots, p_n). \end{aligned} \quad (4.35)$$

Выполняя затем интеграцию по всем импульсам, кроме внешних (π, p_a, p_b),

$$\int \Gamma'_{n+1}(p_1, \dots, p_n | \pi) [dp]_n^{a, b} = \Gamma_{n+1}(p_a, p_b | \pi),$$

$$\int \Sigma'_n(p_1, \dots, p_a + \pi, \dots, p_n) [dp]_n^{a, b} = \Sigma_n(p_a + \pi, p_b),$$

$$\int \Sigma'_n(p_1, \dots, p_b + \pi, \dots, p_n) [dp]_n^{a, b} = \Sigma_n(p_a, p_b + \pi)$$

(здесь $[dp]_n^{a, b} = dp_1 \dots dp_{a-1} dp_{a+1} \dots dp_{b-1} dp_{b+1} \dots dp_n$), дифференцируя по π и полагая $\pi = 0$, находим:

$$\Gamma_{n+1}(p_a, p_b | 0) = i \frac{\partial \Sigma_n(p_a, p_b)}{\partial p_a} - i \frac{\partial \Sigma_n(p_a, p_b)}{\partial p_b}$$

или

$$\Gamma_{n+1}(p, 0) = i \frac{\partial \Sigma_n(p)}{\partial p}, \quad (4.36)$$

где положено

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_{n+1}(p, 0) &= \Gamma_{n+1}(p, -p | 0), \\ \Sigma_n(p) &= \Sigma_n(p, -p). \end{aligned} \right\} \quad (4.37)$$

Формула (4.36) устанавливает связь между коэффициентной функцией, соответствующей диаграмме собственной энергии в n -м приближении, и коэффициентной функцией вершинной диаграммы $n+1$ -го приближения, имеющую место как в нерегуляризованной теории (формально), так и после регуляризации по Паули — Вилларсу.

Перейдём теперь к доказательству градиентной инвариантности вычитательной процедуры. Ввиду выполнения условия (4.16) до вычитательного процесса, нам, очевидно, следует убедиться в градиентной инвариантности вычитаемых квазилокальных операторов Λ_n . Если при этом окажется, что вычитаемые операторы, соответствующие диаграммам рис. 12, a —12, b , по отдельности градиентно-инвариантны, а операторы, соответствующие диаграммам рис. 12, b и рис. 12, z , удовлетворяют соотношению (4.34), то гра-

диентная инвариантность вычитательной процедуры будет установлена. Покажем, что такое положение действительно имеет место.

Воспользовавшись тем, что условие градиентной инвариантности вычитательной процедуры во 2-м и 3-м порядках по e было нами установлено (см. § 1), доказательство проведём методом индукции.

Предположим, что квазилокальные операторы Λ_n удовлетворяют указанным требованиям вплоть до некоторого нечётного

$$n - 1 = 2v - 1.$$

Рассмотрим элемент матрицы рассеяния

$$S_n(x_1, \dots, x_n)$$

до вычитания из него квазилокального оператора

$$\Lambda_n(x_1, \dots, x_n).$$

В соответствии с доказанной градиентной инвариантностью S -матрицы до процесса вычитания и предположенной градиентной инвариантностью квазилокальных операторов низших порядков

$$\Lambda_v(x_1, \dots, x_n) \quad v = 1, \dots, n - 1,$$

выражение S_n будет градиентно-инвариантным. Специфические рас-

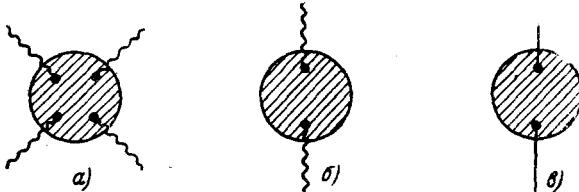


Рис. 17.

ходимости n -го порядка при чётном n имеют вид, показанный на рис. 17.

Ввиду градиентной инвариантности самого S_n будут также градиентно-инвариантными его части, соответствующие трём указанным диаграммам:

$$\left. \begin{aligned} & \sum_{\substack{(p, q, r, s) \\ (a, b, c, d)}} :A_p(x_a) A_q(x_b) A_r(x_c) A_s(x_d): \square^{pqrs}(x_1, \dots, x_n); \\ & \sum_{(p, q, a, b)} :A_p(x_a) A_q(x_b): \Pi^{pq}(x_1, \dots, x_n); \\ & \sum_{(a, b)} :\bar{\psi}(x_b) \Sigma(x_1, \dots, x_n) \psi(x_a): \end{aligned} \right\} (4.38)$$

Свойство градиентной инвариантности последнего выражения очевидно, а четырёх- и двухфотонные части дают:

$$\sum_p k_a^p \square^{pqrs} (k_1, \dots, k_a, \dots, k_n) g^{pp} = 0, \quad (4.39)$$

$$\sum_p g^{pp} k_a^p \Pi^{pq} (k_1, \dots, k_a, \dots, k_n) = 0. \quad (4.40)$$

Дифференцируя (4.39) по k_a^p и полагая $k_a = 0$, находим:

$$\square^{pqrs} (k_1, \dots, k_{a-1}, 0, k_{a+1}, \dots, k_n) = 0. \quad (4.41)$$

Соотношение (4.41) весьма важно. Благодаря всего лишь логарифмической расходимости ($\omega(G) = 0$) диаграммы рис. 17, а вычитание ряда Маклорена сводится к вычитанию из \square^{pqrs} его значения при нулевых значениях импульсов внешних фотонов.

Вследствие (4.41) эта величина оказывается равной нулю, а сама \square^{pqrs} сходящейся. Поэтому из диаграммы рис. 17, а вообще не нужно устранять расходимости.

Обратимся к двухфотонной диаграмме.

Дифференцируя левую часть соотношения (4.40) один, два и три раза по компонентам k_a и полагая затем $k_a = 0$, находим, что обращаются в нуль соответственно первый, второй и третий коэффициенты разложения в ряд Маклорена от Π^{pq} , умноженные на k_a^p (суммирование по p). В результате получаем:

$$\left. \begin{aligned} \sum_p g^{pp} k_a^p \Pi_{(0, k_a)}^{pq} (k_1, \dots, k_n) &= 0, \\ \sum_p g^{pp} k_a^p \Pi_{(1, k_a)}^{pq} (k_1, \dots, k_n) &= 0, \\ \sum_p g^{pp} k_a^p \Pi_{(2, k_a)}^{pq} (k_1, \dots, k_n) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (4.42)$$

где символом $\Pi_{(l, k)}$ обозначен l -й член ряда Маклорена по переменной k . Разлагая в свою очередь полученные выражения в ряд Маклорена по переменной k_b до второго, первого и нулевого порядка соответственно, получаем в сумме

$$\sum_p g^{pp} k_a^p \{ \Pi^{pq} (k_1, \dots, k_n) \}_{3, a, k_b}^k = 0, \quad (4.43)$$

где символом $\{ \dots \}_{l, x, y, z, \dots}^k$ как обычно обозначена сумма членов ряда Маклорена по переменным x, y, z, \dots до $(l-1)$ -го порядка включительно. Но входящий в (4.43) ряд Маклорена как раз и является

коэффициентной функцией вычитаемого из S_n оператора Λ_n , соответствующего двухфотонной диаграмме. Соотношение (4.43) является выражением его градиентной инвариантности. Указанный оператор Π определён с точностью до произвольного конечного полинома второй степени по компонентам $k = k_a = k_b$. Исходя из соображений релятивистской ковариантности, установленной однозначности коэффициента C^n в выражении (4.13) и соотношения (4.19) получаем, что этот полином, удовлетворяющий требованию градиентной инвариантности, имеет вид

$$d^n(g^{pq}k^2 - g^{pp}g^{qq}k^p k^q). \quad (4.44)$$

Градиентная инвариантность оператора Λ_n , соответствующего диаграмме собственной массы электрона (рис. 17, 8), очевидна. В соответствии с установленной произвольностью конечного полинома этот оператор определён с точностью до выражения

$$f^n m + g^n \cdot \hat{p}. \quad (4.45)$$

Рассмотрение членов Λ_n таким образом закончено.

Переходим к следующему порядку $n+1 = 2v+1$. В силу его нечётности, единственной диаграммой, из которой необходимо устраниć расходимость, является диаграмма вершинного типа, показанная на рис. 18.

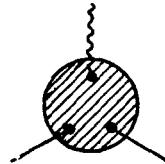


Рис. 18.

Как было установлено, нам необходимо лишь проверить выполнение соотношения (4.34) (или ему эквивалентного соотношения (4.35)). Вследствие линейности коэффициентных функций квазилокальных операторов $\Sigma_n^{\text{вычит}}$ и $\Gamma_{n+1}^{\text{вычит}}$ относительно импульсов соотношение (4.35) для них принимает вид

$$\begin{aligned} \Gamma_{n+1}^{\text{вычит}}(p_1, \dots, p_n | \pi) = & i \frac{\partial \Sigma_n^{\text{вычит}}(p_1, \dots, p_a + \pi, \dots, p_n)}{\partial p_a} - \\ & - i \frac{\partial \Sigma_n^{\text{вычит}}(p_1, \dots, p_b + \pi, \dots, p_n)}{\partial p_b}. \quad (4.46) \end{aligned}$$

Ввиду того, что с точностью до произвольных полиномов вычитаемые части Γ и Σ являются их рядами Маклорена нулевого и первого порядка

$$\Gamma_{n+1}^{\text{вычит}}(p_1, \dots, p_n | \pi) = \Gamma_{n+1}^{\text{вычит}}(p_1, \dots, p_n | \pi)|_{p_a = p_b = \pi = 0} + i b_{n+1} \gamma,$$

$$\begin{aligned} \Sigma_n^{\text{вычит}}(p_1, \dots, p_a + \pi, \dots, p_n) = & \{ \Sigma_n^{\text{вычит}}(p_1, \dots, p_a + \pi, \dots, p_n) \}_{2}^{p_a} + \\ & + f^n + \frac{g^n}{2} (\hat{p}_a + \hat{\pi}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Sigma_n' \text{ вычит} (p_1, \dots, p_b + \pi, \dots, p_n) = \\ = \{ \Sigma_n' (p_1, \dots, p_b + \pi, \dots, p_n) \}_{2^b}^{p_b} + f^n + \frac{g^n}{2} (\hat{p}_b + \hat{\pi}), \end{aligned}$$

непосредственной подстановкой убеждаемся, что условие (4.46) с учётом соотношения (4.36) сводится к требованию

$$b_{n+1} = g_n. \quad (4.47)$$

Ввиду установленной однозначности константы b_n она и определяется этим соотношением. Процедура вычитания в $(n+1)$ -м порядке при соблюдении (4.47) также оказывается градиентно-инвариантной. Индукция на этом закончена и тем самым установлена градиентная инвариантность матрицы $S(1)$ после устранения расходимостей.

Заметим ещё, что совокупность соотношений (4.36) и (4.47) устанавливает в каждом порядке по n равенство констант G_n и B_{n+1} в операторах (4.12) и (4.14), т. е. представляет собой полное тождество Уорда⁷.

Выпишем теперь контрчлены лагранжиана, регуляризующие матрицу $S(1)$.

Подставляя в формулу (I.4.35) выражения (4.12), (4.13) и (4.14), получаем после интегрирования по частям и суммирования по полный лагранжиан взаимодействия в виде

$$\begin{aligned} L(x) = L(x; 1) = \sqrt{4\pi} \cdot e Z_1 : \bar{\psi}(x) \hat{A}(x) \psi(x) : + \\ + \delta m : \bar{\psi}(x) \psi(x) : + (Z_2 - 1) \left\{ \frac{i}{2} \sum_k : \left(\bar{\psi}(x) \gamma^k \frac{\partial \psi}{\partial x^k} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x^k} \gamma^k \psi(x) \right) : - m : \bar{\psi} \psi : \right\} - (Z_3 - 1) \left\{ \frac{1}{2} \sum_{m, n} g^{mm} g^{nn} : \frac{\partial A_n(x)}{\partial x^m} \times \right. \\ \times \frac{\partial A_n(x)}{\partial x^m} : - \frac{1}{2} : \left(\sum_n g^{nn} \frac{\partial A_n}{\partial x^m} \right)^2 : \right\}, \quad (4.48) \end{aligned}$$

где использованы обозначения

$$\left. \begin{aligned} Z_1 = 1 + \sum_{v=1}^{\infty} \frac{B_{2v+1}}{2v!}, \quad Z_2 = 1 + \sum_{v=1}^{\infty} \frac{G_{2v}}{2v!}, \\ Z_3 = 1 + \sum_{v=1}^{\infty} \frac{D_{2v}}{2v!}, \quad \delta m = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{F_{2v} + G_{2v}}{2v!}. \end{aligned} \right\} \quad (4.49)$$

Ввиду установленного ранее соотношения

$$B_{2s} + 1 = G_{2s}$$

тождество Уорда в данных обозначениях принимает вид

$$Z_1 = Z_{2s} \quad (4.50)$$

Константы Z_1 , Z_2 , Z_3 , δm , определённые соотношениями (4.49), зависят от вспомогательных масс M_i , причём при устремлении этих масс к бесконечности коэффициенты в их разложениях расходятся логарифмически. Однако матричные элементы матрицы

$$S(1) = T \left\{ e^{\int L(x; 1) dx} \right\}$$

в пределе $M_i \rightarrow \infty$ стремятся к конечным значениям.

Ввиду градиентной инвариантности процедуры Паули — Вилларса лагранжиан (4.48) в отличие от лагранжиана (1.61), полученного с помощью градиентно-неинвариантной регуляризации не содержит членов фотонной массы δm_ϕ и a_5 и потому явным образом градиентно-инвариантен.

Мы видим отсюда, что вид контрчленов существенно зависит от способа регуляризации. Матрица $S(1)$ после предельного перехода $M_i \rightarrow \infty$ от него, конечно, не зависит.

Подставляя выражение квазилокальных операторов в формулу (I.4.31), получим контрчлены, регуляризующие матрицу в виде

$$\begin{aligned}
 L(x; g) g(x) = & \sqrt{4\pi} \cdot e g(x) Z_1(g) : \bar{\psi}(x) \hat{A}(x) \psi(x) : + \\
 & + \delta m(g) : \bar{\psi}(x) \psi(x) : + (Z_2(g) - 1) \left\{ \frac{i}{2} \sum_k : \left(\bar{\psi}(x) \gamma^k \frac{\partial \psi}{\partial x^k} - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x^k} \gamma^k \psi(x) \right) : - m : \bar{\psi}(x) \psi(x) : \right\} - (Z_3(g) - 1) \times \\
 & \times \left\{ \frac{1}{2} \sum_{m, n} g^{mm} g^{nn} : \frac{\partial A_m(x)}{\partial x^n} \frac{\partial A_m(x)}{\partial x^n} : - \frac{1}{2} : \left(\sum_n g^{nn} \frac{\partial A_n}{\partial x^n} \right)^2 : \right\} + \\
 & + \frac{Z_3(g) - 1}{g^2(x)} \cdot \frac{1}{2} \sum_{m, n} g^{mm} g^{nn} : \left\{ A_m(x) A_n(x) \frac{\partial g}{\partial x^m} \frac{\partial g}{\partial x^n} + \right. \\
 & + 2 \frac{\partial A_n(x)}{\partial x^m} A_n(x) g(x) \frac{\partial g}{\partial x^m} + A_n(x) A_m(x) \frac{\partial g}{\partial x^n} \frac{\partial g}{\partial x^m} - \\
 & \left. - 2 A_n(x) \frac{\partial A_m(x)}{\partial x^m} \frac{\partial g}{\partial x^n} g(x) \right\}, \quad (4.51)
 \end{aligned}$$

причём

$$\left. \begin{aligned} Z_1(g) &= 1 + \sum_{v=1}^{\infty} \frac{[g(x)]^{2v} B_{2v} + 1}{2v!}; \\ Z_2(g) &= 1 + \sum_{v=1}^{\infty} \frac{[g(x)]^{2v} G_{2v}}{2v!}; \\ Z_3(g) &= 1 + \sum_{v=1}^{\infty} \frac{[g(x)]^{2v} D_{2v}}{2v!}; \\ \delta m(g) &= \sum_{v=1}^{\infty} \frac{[g(x)]^{2v} (F_{2v} + G_{2v})}{2v!}. \end{aligned} \right\} \quad (4.52)$$

Выражение (4.51) уже неградиентно-инвариантно, неградиентно-инвариантна также и матрица $S(g)$.

§ 5. РЕНОРМИРОВКА МАССЫ И ЗАРЯДА В СПИНОРНОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

Перейдём теперь к более подробному рассмотрению матрицы рассеяния $S(1)$. В предыдущем параграфе была установлена её градиентная инвариантность. Заметим, предварительно, что свойство градиентной инвариантности позволяет прибавлять к спариванию электромагнитных потенциалов

$$\overline{A_m(k) A_n(k')},$$

используемому в процессе приведения членов матрицы $S(1)$ к нормальному виду, выражение типа

$$k^m k'^n f(k^2) \delta(k + k'),$$

где $f(k^2)$ — произвольная функция от k^2 . Иными словами, матричные элементы матрицы рассеяния не меняют своих значений при замене

$$i \overline{A_m(k) A_n(k')} \equiv i \langle T(A_m(k) A_n(k')) \rangle_0 = g^{mn} \frac{1}{k^2} \delta(k - k')$$

на выражение *)

$$\left(g^{mn} \frac{1}{k^2} + k^m k'^n f(k^2) \right) \delta(k + k'). \quad (5.1)$$

Для доказательства рассмотрим градиентное преобразование

$$A_n \rightarrow A'_n = A_n + g^{nn} k^n F(k^2) (k \cdot A(k)).$$

*) Впервые замечено Ландау с сотрудниками ²².

Определяя хронологическое спаривание новых операторов A' , находим:

$$i \overline{A'_n(k)} \overline{A'_m(k')} = -\frac{1}{k^2} [g^{mn} + g^{nn} k^n g^{mm} k^m (2F(k^2) + k^2 F(k^2) F(k^2))] \delta(k + k').$$

Ввиду градиентной инвариантности $S(1)$ её матричные элементы не будут зависеть от функции

$$f(k^2) = 2F(k^2) + k^2 F(k^2) F(k^2)$$

и требуемое доказано. Заметим ещё, что, полагая

$$F(k^2) = -\frac{1}{k^2},$$

мы получим выражение для спаривания электромагнитного поля

$$i \overline{A'_n(k)} \overline{A'_m(k)} = \frac{1}{k^2} \left(g^{mn} - \frac{g^{mm} g^{nn} k^m k^n}{k^2} \right) \delta(k + k'), \quad (5.2)$$

обладающее свойством поперечности

$$\sum_n k^n \overline{A'_n(k)} \overline{A'_m(k')} = 0. \quad (5.3)$$

Ниже будет установлено, что спаривание (5.2) играет особенную роль в теории перенормировок.

Покажем теперь, что введение пяти контрчленов (4.48) в лагранжиан взаимодействия эквивалентно некоторой перенормировке массы и заряда свободного фермиона*). С этой целью полный эффективный лагранжиан взаимодействия за вычетом члена $\delta m : \bar{\psi} \psi$:

$$\begin{aligned} L'(x) = & Z_1 \sqrt{4\pi} \cdot e : \bar{\psi}(x) \hat{A}(x) \psi(x) : + \\ & + (Z_2 - 1) \left\{ \frac{i}{2} \sum_n : \left(\bar{\psi}(x) \gamma^n \frac{\partial}{\partial x^n} - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x^n} \gamma^n \psi(x) \right) : - \right. \\ & - m : \bar{\psi}(x) \psi(x) : \left. \right\} - (Z_3 - 1) \left\{ \frac{1}{2} \sum_{m,n} g^{mm} g^{nn} : \frac{\partial A_m(x)}{\partial x^n} \times \right. \\ & \times \left. \frac{\partial A_m(x)}{\partial x^n} : - \frac{1}{2} : \left(\sum_m g^{mm} \frac{\partial A_m}{\partial x^m} \right)^2 : \right\} \quad (5.4) \end{aligned}$$

*) Подчеркнём, что приводимое ниже рассуждение не имеет вполне последовательного характера. Строго говоря, оно относится лишь к изучению влияния на функции Грина конечных добавок к лагранжиану взаимодействия, имеющих ту же операторную структуру, что и (5.5). Соответственно этому получаемые ниже мультиплекативные соотношения имеют реальный смысл лишь при конечных ренормировках и являются чисто формальными при рассмотрении расходящихся контрчленов.

запишем в импульсном представлении

$$L'(p) = Z_1 \sqrt{4\pi \cdot e} : \bar{\psi} \hat{A} \psi : + (Z_2 - 1) : \bar{\psi} (p) \times \\ \times \left(\hat{p} - m \right) \psi (-p) : - \frac{Z_3 - 1}{2} \sum_{m, n} : A_m (p) (g^{mn} p^2 - p^m p^n) A_n (-p) : \quad (5.5)$$

Лагранжиану (5.5), в отличие от случая обычного «затравочного» лагранжиана взаимодействия (4.1) на диаграммах Фейнмана будут соответствовать вершины трёх типов. Члену $(Z_2 - 1)$ будут отвечать вершины, в которых встречаются две фермионные линии и которые мы для краткости будем именовать Z_2 -вершинами. Члену $(Z_3 - 1)$ будут соответствовать Z_3 -вершины, соединяющие две фотонные линии. Наконец, члену Z_1 будет соответствовать вершина обычного типа (Z_1 -вершина).

Рассмотрим теперь структуру «факторов распространения», соответствующих внутренним линиям новых усложнённых диаграмм. Начнём рассмотрение с внутренних фермионных линий. Относя фактор

$$(Z_2 - 1) \left(\hat{p} - m \right)$$

к Z_2 -вершине, а фактор $\sqrt{4\pi \cdot e \cdot Z_1}$ к Z_1 -вершине, получим, что простым внутренним фермионным линиям будет отвечать спаривание*)

$$\psi (-p) \bar{\psi} (p) = \frac{i}{\hat{p} - m}$$

независимо от типа вершин, которые соединяет данная внутренняя линия. Подсчитаем теперь «полный фактор распространения», соответствующий движению частицы между двумя Z_1 -вершинами. Очевидно, он будет представляться суммой факторов, соответствующих открытым фермионным циклам, имеющим начало и конец в вершинах типа Z_1 и содержащим в себе произвольное число вершин типа Z_2 . Вычисляя последовательно эти факторы с учётом появления множителя i в каждом лишнем порядке S -матрицы и в силу компенсации факториала $n!$ в знаменателе при переходе к импульсному представлению, находим:

$$\frac{i}{\hat{p} - m} \cdot i (Z_2 - 1) \left(\hat{p} - m \right) \frac{i}{\hat{p} - m} = - (Z_2 - 1) \frac{i}{\hat{p} - m},$$

что введению каждой лишней Z_2 -вершины соответствует появление множителя $Y_2 = 1 - Z_2$.

Поэтому, суммируя факторы, соответствующие различному числу Z_2 -вершин, от нуля до бесконечности, находим:

$$\frac{i}{\hat{p} - m} (1 + Y_2 + Y_2^2 + \dots) = \frac{i}{\hat{p} - m} \frac{1}{1 - Y_2} = \frac{1}{Z_2} \frac{i}{\hat{p} - m}.$$

*) Для краткости мы опустим в этом равенстве δ -функцию суммарного импульса.

Мы приходим к выводу, что появление в лагранжиане взаимодействия контрчлена $(Z_2 - 1)$, с точки зрения внутренних фермионных линий, эквивалентно следующей перенормировке фермионной причинной функции:

$$S^c(p) \rightarrow S'^c(p) = Z_2^{-1} S^c(p). \quad (5.7)$$

Совершенно аналогичной процедурой убеждаемся, что учёт контрчлена $(Z_2 - 1)$ во внешних фермионных линиях ведёт к появлению фактора Z_2^{-1} при операторах $\bar{\psi}$ и ψ , соответствующих свободным концам линии

$$\psi(p) \rightarrow Z_2^{-1} \psi(p); \quad \bar{\psi}(p) \rightarrow Z_2^{-1} \bar{\psi}(p). \quad (5.8)$$

Обратимся к внутренним фотонным линиям. Будем относить к вершине Z_3 фактор

$$\frac{1 - Z_3}{2} (g^{mn} p^2 - p^m p^n) = \frac{Y_3}{2} (g^{mn} p^2 - p^n p^m).$$

Тогда любым внутренним фотонным линиям попрежнему будет соответствовать спаривание

$$\overline{A_m(p)} \overline{A_n(p)} = \frac{-i}{p^2} g^{mn}.$$

Рассмотрим теперь структуру факторов, соответствующих движению фотона между двумя Z_1 -вершинами. Рассматривая последовательные включения Z_3 -вершин с учётом тождества

$$\sum_{l, k} (g^{ml} p^2 - p^m p^l) \frac{g^{lk}}{p^2} (g^{kn} p^2 - p^k p^n) = g^{mn} p^2 - p^m p^n,$$

получаем сумму членов вида

$$\begin{aligned} & - \frac{i}{p^2} g^{mn} ; \sum_{k, l} \frac{i}{p^2} g^{mk} \left(\frac{Y_3}{2} \right) (g^{kl} p^2 - p^k p^l) 2i \cdot \frac{i}{p^2} g^{ln} = \\ & = - Y_3 \frac{i}{p^2} \left(g^{mn} - \frac{p_m p_n}{p^2} \right); - Y_3^2 \frac{i}{p^2} \left(g^{mn} - \frac{p_m p_n}{p^2} \right); \dots, \end{aligned}$$

где

$$p_m = g^{mm} p^m.$$

Здесь фактор 2 в сомножителе, относящемся к вершине Z_3 , обязан своим появлением двум различным порядкам спаривания операторов $A(p)$, входящих в контрчлен Z_3 . Выполняя суммирование по всем возможным числам вершин Z_3 , приходим к выражению

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{Z_3} \frac{i}{p^2} g^{mn} - \frac{Z_3 - 1}{Z_3} \frac{i}{p^2} \cdot \frac{p_m p_n}{p^2} = \\ & = - \frac{1}{Z_3} \frac{i}{p^2} \left(g^{mn} - \frac{p_m p_n}{p^2} \right) - \frac{i}{p^2} \frac{p_m p_n}{p^2}. \end{aligned}$$

Таким образом, контрчлен $(Z_3 - 1)$ не приводит к простой перенормировке фотонной функции Грина. Кроме перенормированной затравочной функции появляется не полностью ренормированный «продольный» добавок. При обычном рассмотрении матрицы рассеяния этим членом пренебрегают, используя отмеченный выше факт независимости матричных элементов S -матрицы от членов подобного типа. Поэтому факт «неполной перенормировки» фотонной функции здесь оказывается несущественным.

Положение меняется при переходе к общей теории функций Грина, являющихся суммами диаграмм, составленных лишь из внутренних линий, так как в этом случае основной аппарат формулируется без какого бы то ни было обращения к матричным элементам и условию Лоренца.

В этом случае пренебрегать продольным членом уже нельзя, однако, возникающее затруднение можно обойти, если в качестве нулевого приближения для фотонной функции Грина выбрать поперечное спаривание (5.2). Проводя в этом случае суммирование вкладов от вершин типа Z_3 легко убедиться, что учёт контрчлена $Z_3 - 1$ приводит уже к простой мультиплекативной перенормировке фотонной функции:

$$D_{mn}^{tr}(k) = \frac{1}{ik^2} \left(g^{mn} - \frac{k_m k_n}{k^2} \right) \rightarrow \frac{1}{Z_3} \frac{1}{ik^2} \left(g^{mn} - \frac{k_m k_n}{k^2} \right) = \\ = \frac{1}{Z_3} D_{mn}^{tr}(k). \quad (5.9)$$

Рассматривая далее процесс вставки Z_3 -вершин во внешние фотонные линии диаграмм, убеждаемся, с учётом ослабленного условия Лоренца, наложенного на допустимые состояния, что квадратичные по $A(p)$ контрчлены ведут к преобразованию

$$A_m(p) \rightarrow Z_3^{-1} A_m(p). \quad (5.10)$$

Подытоживая результаты рассуждения на основании (5.7), (5.8), (5.9) и (5.10), мы приходим к выводу, что переход от «затравочного» лагранжиана взаимодействия (5.6) к выражению (5.5) эквивалентен следующему преобразованию факторов распространения и свободных операторов в «матрице»:

$$\left. \begin{aligned} S^c(p) &\rightarrow Z_2^{-1} S^c(p); & D^{tr}(p) &\rightarrow Z_3^{-1} D^{tr}(p); \\ \bar{\psi}(p) &\rightarrow Z_2^{-1} \psi(p); & \psi(p) &\rightarrow Z_2^{-1} \bar{\psi}(p); & A(p) &\rightarrow Z_3^{-1} A(p) \end{aligned} \right\} \quad (5.11)$$

и заряда фермиона

$$e \rightarrow Z_1 e. \quad (5.12)$$

Для того чтобы перейти к обычным причинным функциям, достаточно произвести перенормировку операторов $\bar{\psi}$, ψ и A .

Полагая,

$$\tilde{\psi}' = Z_2^{1/2} \psi; \quad \psi' = Z_2^{1/2} \psi; \quad A' = Z_3^{1/2} A, \quad (5.13)$$

мы получаем из (5.11) обычные причинные функции для внутренних линий.

Если мы учтём перенормировку (5.13) в операторах амплитуд состояний, то обнаружим, что внешним фотонным и спинорным линиям будут теперь соответствовать операторы ψ' и A' без каких-либо дополнительных множителей.

Вводя в L член $\delta m \bar{\psi} \psi$, приходим к выражению

$$L = Z_1 \sqrt{4\pi} \cdot e : \bar{\psi} \hat{A} \psi : - \delta m : \bar{\psi} \psi : = \sqrt{4\pi} e' : \bar{\psi}' \hat{A}' \psi' : - \delta m' : \bar{\psi}' \psi' :, \quad (5.14)$$

где с учётом тождества Уорда (4.50)

$$e' = e Z_1 Z_2^{-1} Z_3^{-1/2} = e Z_3^{-1/2}; \quad \delta m' = \delta m Z_2^{-1}. \quad (5.15)$$

Отметим здесь, что в противоположность всем остальным квадратичным контратчленам выражение $\delta m \bar{\psi} \psi$ не может быть сведено к какой-либо перенормировке или замене причинных функций и потенциалов и потому обязательно должно быть оставлено в лагранжиане взаимодействия. В самом деле, нетрудно убедиться, что включение вершин типа $\delta m'$ во внутренние фермионные линии приводит к новой массе фермиона

$$\frac{1}{\hat{p} - m} \rightarrow \frac{1}{\hat{p} - m'}; \quad m' = m + \delta m.$$

Однако включение $\delta m'$ -вершин во внешние фермионные линии приводит к выражению

$$\psi(p) \rightarrow \frac{\hat{p} - m}{\hat{p} - m'} \psi(p),$$

которое при вычислении матричного элемента даёт нуль. Таким образом, с точки зрения матричных элементов S -матрицы, введение контратчлена $\delta m \bar{\psi} \psi$ не может быть последовательно описано изменением массы фермиона.

На основании формулы (5.14) мы приходим к выводу, что в процессе устранения расходимостей мы имеем две произвольные константы e' и $\delta m'$, которые могут быть определены из условия совпадения величин e и m с экспериментальными значениями заряда и массы электрона.

Проанализируем теперь несколько подробнее элементы произвола, содержащиеся в использованном нами вычитательном формализме.

Рассмотрим сначала подлежащие вычитательной процедуре сильно связные диаграммы с двумя внешними спинорными линиями (диаграммы собственной энергии фермиона), показанные на рис. 19.

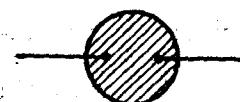


Рис. 19.

Обозначим сумму всех таких диаграмм (точнее, сумму соответствующих коэффициентных функций) через $\Sigma(p)$. Тогда полный фактор распространения фермиона может быть представлен суммой членов типа изображённых на рис. 20 и включающих любое число элементов Σ . Выполняя указанное суммирование, находим:

$$\frac{1}{\hat{p} - m} + \frac{1}{\hat{p} - m} \Sigma \frac{1}{\hat{p} - m} + \frac{1}{\hat{p} - m} \Sigma \frac{1}{\hat{p} - m} \Sigma \frac{1}{\hat{p} - m} + \dots = \frac{1}{\hat{p} - m} \left[1 - \frac{1}{\frac{\Sigma(p)}{\hat{p} - m}} \right]^{-1}$$

Полный фактор распространения фермиона в виде

$$G(p) = i(\hat{p} - m - \Sigma(p))^{-1}. \quad (5.16)$$

Аналогичным образом суммируя вклад в фотонные линии от собственно энергетических частей фотона $\Pi(k)$

$$\Pi^{mn}(p) = \pi(p) \left(g^{mn} - \frac{p^m p^n}{p^2} \right),$$

приходим к полному фактору распространения фотона

$$\mathfrak{G}_{mn}(p) = \frac{i}{p^2 - \pi(p)} \left(g^{mn} - \frac{p^m p^n}{p^2} \right). \quad (5.17)$$

Рассматривая диаграммы вершинного типа, т. е. диаграммы с двумя внешними фермионными и одной внешней фотонной линией



Рис. 20.

введём их сумму $\Gamma(p, k)$, которую будем представлять в виде

$$e\Gamma^n(p, k) = e\gamma^n + \Lambda^n(p, k). \quad (5.18)$$

Заметим теперь, что соотношения типа (5.16), (5.17) и (5.18) справедливы как до процедуры вычитания, так и после неё. Установим сейчас вид трансформации величин G , \mathfrak{G} и Γ при добав-

лении в лагранжиан контрчленов (5.5), т. е. всех контрчленов, кроме $\delta m\bar{\psi}\psi$.

Как было ранее установлено, факторы внутренних линий диаграммы и вершинные факторы e испытывают превращение вида (5.11), (5.12). Относя факторы ренормировки к вершинам, мы получим преобразование заряда фермиона (5.15) во всех внутренних вершинах собственно энергетических частей Σ и Π , кроме пары вершин в каждом случае, в которые входят внешние линии. Поэтому в $\Sigma(p)$ будет не хватать двух корней $\sqrt{Z_2}$, а в $\Pi(p)$ двух корней $\sqrt{Z_3}$. Домножая, получаем закон преобразования Σ и Π :

$$\Sigma_{\text{непен}}(p) = \Sigma(p, e) \rightarrow Z_2 \Sigma_{\text{пен}}(p) = Z_2 \Sigma(p, e'), \quad (5.19)$$

$$\Pi_{\text{непен}}(k) = \Pi(k, e) \rightarrow Z_3 \Pi_{\text{пен}}(k) = Z_3 \Pi(k, e'). \quad (5.20)$$

Переходя к трансформации G и \mathfrak{G} , заметим, что в процессе суммирования, приводящем к выражениям (5.16) и (5.17), нам необходимо лишь заменить

$$\Sigma(p, e) \rightarrow Z_2 \Sigma(p, e'); \quad \pi(k, e) \rightarrow Z_3 \pi(k, e');$$

$$\frac{1}{\hat{p} - m} \rightarrow Z_2^{-1} \frac{1}{\hat{p} - m}; \quad \frac{1}{k^2} \rightarrow Z_3^{-1} \frac{1}{k^2},$$

что даёт

$$G(p, e) \sim (\hat{p} - m - \Sigma(p, e))^{-1} \rightarrow Z_2^{-1} G(p, e'), \quad (5.21)$$

$$\mathfrak{G}(k, e) \sim (k^2 - \pi(k, e))^{-1} \rightarrow Z_3^{-1} \mathfrak{G}(k, e'). \quad (5.22)$$

Аналогичными рассуждениями легко убедиться, что в результате процедуры вычитания мы получим вместо

$$e\Gamma^n(p, k, e) = e\gamma^n + \Lambda^n(p, k, e)$$

выражение

$$\begin{aligned} e\gamma^n + Z_1^{-1} Z_2 Z_3^{1/2} \Lambda^n(p, k, e') = \\ = Z_1^{-1} Z_2 Z_3^{1/2} (e'\gamma^n + \Lambda^n(p, k, e')) = Z_1^{-1} Z_2 Z_3^{1/2} e'\Gamma^n(p, k, e') \end{aligned} \quad (5.23)$$

или, с учётом тождества Уорда,

$$e\Gamma^n(p, k, e) \rightarrow Z_3^{1/2} e'\Gamma^n(p, k, e'). \quad (5.24)$$

Заметим ещё, что с помощью факторов G , \mathfrak{G} и Γ вычисления любого процесса сколь угодно высокого порядка можно производить с помощью так называемых «скелетных» диаграмм Фейнмана. Совокупность скелетных диаграмм получается из совокупности

всех связных диаграмм устраниением из них диаграмм, включающих элементы, изображённые на рис. 21. Поэтому в скелетных диаграммах не содержится самоэнергетических частей и вершинных частей. Зато при подсчёте соответствующих коэффициентных функций мы должны использовать не обычные факторы распространения S^c и D^c , а полные факторы распространения G и \mathfrak{G} и вершинам скелетной

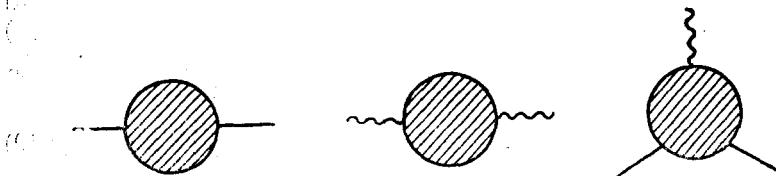


Рис. 21.

диаграммы сопоставлять не γ^n , а Γ^n . Очевидно при этом, что факторы G и \mathfrak{G} являются полными функциями влияния, т. е. полными функциями Грина, включающими все радиационные поправки. Подчеркнём, что при такой схеме вычисления, работая с ренормированными функциями G , \mathfrak{G} и Γ , нам уже не придётся более прибегать к вычитательной процедуре, поскольку, как было ранее показано, вычитание должно применяться лишь к элементам диаграммы типа показанной на рис. 21.

Зайдёмся теперь конкретизацией процедуры вычитания и окончательным устраниением произвола в вычитаемых полиномах. При общем определении вычитательной операции (§ 2) мы условились вычесть из расходящихся выражений (в данном случае Σ , Π и Λ) первые члены разложения в нулевой точке. Для практических целей, однако, оказывается более удобным взять центр разложения собственно энергетической части фермиона в точке $\hat{p} = m$.

Мы положим поэтому

$$\begin{aligned} \Sigma_{\text{рен}}(\hat{p}) = \Sigma(\hat{p}) - \Sigma(\hat{p}) \Bigg|_{\hat{p} = m} - \frac{\partial \Sigma(\hat{p})}{\partial \hat{p}} \Bigg|_{\hat{p} = m} (\hat{p} - m) + \\ + A(\hat{p} - m). \quad (5.25) \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались тем обстоятельством, что Σ зависит от \hat{p} лишь через \hat{p} и $\hat{p}^2 = (\hat{p})^2$. При таком способе вычитания

$$\Sigma_{\text{рен}}(\hat{p}) \Big|_{\hat{p} = m} = 0 \quad (5.26)$$

и масса m оказывается равной экспериментальной массе фермиона.

Это можно непосредственно заметить либо из того, что полюс полной функции Грина

$$G_{\text{пер}}(p) = \frac{i}{\hat{p} - m - \Sigma_{\text{пер}}(p)}$$

оказывается совпадающим с полюсом функции

$$S^c(p) = \frac{i}{\hat{p} - m},$$

либо из того, что радиационные поправки во внешние фермионные линии дают нулевой вклад в силу свойства (5.26).

Рассмотрим, далее, процесс вычитания для вершинной части $\Gamma^n(p, k)$. Как было показано в предыдущем параграфе, из требования градиентной инвариантности вытекает, что процедура вычитания для Λ полностью определяется вычитанием для Σ^*). Из (5.25) получаем непосредственно:

$$\begin{aligned} \Lambda_{\text{пер}}^n(p, k) &= \Lambda^n(p, k) - \Lambda_{(1)}^n + A\gamma^n, \\ e\Gamma_{\text{пер}}^n(p, k) &= e(1 + A)\gamma^n + \Lambda^n(p, k) - \Lambda_{(1)}^n, \end{aligned} \quad (5.27)$$

причём

$$\begin{aligned} \Lambda^n(p, 0) &= i \frac{\partial \Sigma(p)}{\partial p^n} g^{nn}, \\ \Lambda_{\text{пер}}^n(p, 0) &= i g^{nn} \frac{\partial \Sigma_{\text{пер}}(p)}{\partial p^n} \end{aligned} \quad (5.28)$$

и, следовательно,

$$\Lambda_{(1)}^n = i \frac{\partial \Sigma(p)}{\partial p^n} \Bigg|_{\substack{\hat{p} = m}} \cdot \gamma^n.$$

Приступая к конкретному определению постоянной A , заметим, с одной стороны, что по способу введения этой постоянной её значение не влияет на величину массы фермиона m . Кроме того, в силу тождества Уорда значение A не влияет на величину заряда фермиона e . Для того чтобы в этом убедиться, заметим, что исключение A из выражений (5.25) и (5.27) может быть произведено с помощью конечной перенормировки полевых операторов и заряда e . Однако в силу тождества Уорда соответствующие конечные константы z_1 и z_2 окажутся равными друг другу и значение e не изменится (ср. (5.15)).

*) Ввиду того, что разложение Λ по e начинается с члена порядка e^3 , произвольная постоянная определяется видом Σ в предыдущем порядке по e . Для члена $e\gamma^n$ такое соответствие места не имеет.

Поэтому может показаться удобным определить A из требования, чтобы радиационные поправки во внешние фермионные линии были равны нулю:

$$\left[\frac{1}{\hat{p} - m} \Sigma_{\text{рен}}(\hat{p}) \right]_{\hat{p} = m} = 0. \quad (5.29)$$

Ввиду того что совокупность первых трёх членов в правой части (5.25) имеет нуль в точке $\hat{p} = m$ порядка выше первого, указанное условие даёт:

$$A = 0. \quad (5.30)$$

Нам осталось определить ещё операцию вычитания для собственной энергетической части фотона. Помещая, как обычно, центр разложения в точке $k = 0$, имеем:

$$\begin{aligned} \Pi_{\text{рен}}^{mn}(k) &= \Pi^{mn}(k) - \Pi^{mn}(0) - \sum_l \frac{\partial \Pi^{mn}}{\partial k^l} \Big|_{k=0} k^l - \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{l, s} \frac{\partial^2 \Pi^{mn}}{\partial k^l \partial k^s} \Big|_{k=0} \cdot k^l k^s + C(g^{mn} k^2 - k^m k^n). \end{aligned} \quad (5.31)$$

Конечная постоянная C не может быть непосредственно определена из требования, подобного требованию сохранения массы фермиона, ибо член

$$C(g^{mn} k^2 - k^m k^n) \quad (5.32)$$

не меняет полюса функции \mathfrak{F} (при $k = 0$). Выражение (5.30), однако, можно убрать из лагранжиана взаимодействия, произведя одновременно конечную перенормировку заряда на фактор

$$(1 + C)^{-1/2}. \quad (5.33)$$

Мы приходим, таким образом, к возможности определить произвольную конечную постоянную C из условия совпадения e с экспериментальным значением заряда фермиона. Принимая, что экспериментальное значение заряда определяется в акте рассеяния на фермионе фотона нулевой энергии, мы получим, что такой процесс описывается выражением

$$e\bar{\psi}(p) \Gamma_{\text{рен}}^n(p, 0) \psi(p). \quad (5.34)$$

При вычислении (5.34) вклад входящей в $\Gamma_{\text{рен}}^n$ разности

$$\Lambda^n(p, 0) - \Lambda_{(1)}^n = ig^{nn} \frac{\partial \Sigma(\hat{p})}{\partial p^n} - i\gamma^n \frac{\partial \Sigma(\hat{p})}{\partial \hat{p}} \Big|_{\hat{p} = m} \quad (5.34a)$$

оказывается равным нулю. Чтобы в этом убедиться, заметим, что $\hat{\Sigma}(p)$ можно представить в виде

$$i\hat{\Sigma}(p) = (\hat{p} - m)f(p^2) + m\varphi(p^2).$$

Вычисляя (5.34a), находим:

$$\begin{aligned} \Lambda^n(p, 0) - \Lambda_{(1)}^n &= (\hat{p} - m)2p^n \frac{\partial f}{\partial p^2} + 2p^n \frac{\partial \varphi}{\partial p^2} m + \\ &+ \gamma^n [f(p^2) - f(m^2)] - 2p^n m \frac{\partial \varphi}{\partial p^2}. \end{aligned}$$

Определяя матричный элемент

$$\bar{\psi}(p)(\Lambda^n(p, 0) - \Lambda_{(1)}^n)\psi(p)$$

с учётом уравнений поля

$$\bar{\psi}(p)(\hat{p} - m) = 0; \quad (\hat{p} - m)\psi(p) = 0$$

и с помощью преобразования

$$2(p^n - m\gamma^n) = (\hat{p} - m)\gamma^n + \gamma^n(\hat{p} - m)$$

убеждаемся, что он равен нулю.

С учётом перенормировки (5.33) получаем окончательно

$$e\bar{\psi}(p)\Gamma_{\text{пер}}^n(p, 0)\psi(p) = \frac{e}{\sqrt{1+C}}\bar{\psi}(p)\gamma^n\psi(p),$$

откуда следует, что условие совпадения e с экспериментальным значением заряда имеет вид

$$C = 0. \quad (5.35)$$

Нетрудно убедиться, что условие (5.35) обеспечивает также отсутствие радиационных поправок во внешних фотонных линиях. Мы можем формулировать теперь следующий рецепт вычитательной процедуры, обеспечивающий совпадение «затравочных» констант m и e с экспериментальными значениями массы и заряда фермиона.

Для устранения бесконечностей из собственно энергетических частей фермиона $\Sigma(p)$ и фотона $\Pi(k)$, из них вычитаются первые члены полиномов Тейлора с центрами разложения около точек $\hat{p} = m$ и $k = 0$ соответственно,

$$\Sigma_{\text{пер}}(\hat{p}) = \hat{\Sigma}(\hat{p}) - \Sigma(m) - \frac{\partial \hat{\Sigma}(\hat{p})}{\partial \hat{p}} \Big|_{\hat{p}=m} \cdot (\hat{p} - m), \quad (5.36)$$

$$\Pi_{\text{пер}}(k) =$$

$$= \Pi(k) - \Pi(0) - \sum_n \frac{\partial \Pi}{\partial k^n} \Big|_{k=0} \cdot k^n - \frac{1}{2} \sum_{n,m} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial k^n \partial k^m} \Big|_{k=0} \cdot k^n k^m. \quad (5.37)$$

При этом вычитаемая часть Λ_1 вершинной функции

$$\Lambda_{\text{рен}}^n(p, k) = \Lambda^n(p, k) - \Lambda_{(1)}^n \quad (5.38)$$

имеет вид

$$\Lambda_{(1)}^n = i \frac{\partial \Sigma^{\wedge}(p)}{\partial p} \Bigg|_{p=m} \cdot \gamma^n. \quad (5.39)$$

Приведём в заключение конкретные выражения функций Σ , Π и Λ в первом неисчезающем приближении, удовлетворяющие суммированным условиям.

Соответствующее выражение для собственно энергетической части фермиона Σ может быть получено подстановкой (1.22) в формулу (5.36). При этом, вычисляя производную от (1.22) по p в точке $p = m$, мы придём к логарифмически расходящемуся выражению вида

$$\int \frac{dx}{m^2 - x p^2} \Bigg|_{m^2 \rightarrow p^2} \sim \ln(p^2 - m^2) \Bigg|_{p^2 \rightarrow m^2},$$

являющемуся проявлением инфракрасной катастрофы. Для уничтожения указанной расходимости, как известно, вводят в промежуточные этапы рассуждений исчезающую малую массу фотона λ_0 . Модифицируя соответствующие выкладки § 1, получаем вместо (1.22)

$$\begin{aligned} \Sigma^{(2)}(p) = \frac{ie^2}{2\pi} \left\{ c_1(p^{\wedge} - m) + c_2 m + \right. \\ \left. + \int_0^1 dx (2m - p^{\wedge} x) \ln \frac{m^2(1-x)}{(m^2 - x p^2)(1-x) + x \lambda_0^2} \right\}. \quad (5.40) \end{aligned}$$

Определяя здесь постоянные c_1 и c_2 из условий

$$\Sigma^{(2)}(m) = 0; \quad \frac{\partial \Sigma^{(2)}(p)}{\partial p^{\wedge}} \Bigg|_{p=m} = 0 \quad (5.41)$$

и вычисляя интеграл по x , приходим к выражению

$$\begin{aligned} \Sigma^{(2)}(p) = \frac{e^2}{2\pi i} \left\{ \frac{p^2 - m^2}{p^2} \ln(p^2 - m^2) \left[\frac{p^2 + m^2}{2p^3} p^{\wedge} - 2m \right] + \right. \\ \left. + \frac{p^{\wedge}}{2} \frac{p^2 - m^2}{p^2} + (p^{\wedge} - m) \left(1 + \ln \frac{\lambda_0^2}{m^2} \right) \right\}. \quad (5.42) \end{aligned}$$

Поступая аналогичным образом, построим величину $\Pi^{(2)}(k)$, определив постоянную c_3 в формуле (1.30) в соответствии с (5.29),

т. е. из условия обращения в нуль вторых производных

$$\left. \frac{\partial^2 \Pi^{(2)} m n (k)}{\partial k^p \partial k^q} \right|_{k=0}.$$

Получаем этим путём

$$\Pi^{(2)} m n (k) = \frac{2e^2}{\pi i} (k^n k^m - g^{mn} k^2) \int_0^1 dx \cdot x (1-x) \ln \left| \frac{m^2 - x(1-x)k^2}{m^2} \right|. \quad (5.43)$$

Наконец, выражение для вершинной части

$$\sqrt{4\pi e} \Gamma^{(3) n} (p, k) = \sqrt{4\pi e} (\gamma^n + \tilde{\Lambda}^{(3) n} (p, k))$$

получим из условия (5.28)

$$\tilde{\Lambda}^{(3) n} (p, 0) = i g^{nn} \frac{\partial \Sigma^{(2)} (p)}{\partial p^n}, \quad (5.44)$$

что даёт следующее выражение:

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda}^{(3) n} (p, k) = & \frac{e^2 \gamma^n}{2\pi} \left\{ \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \ln \left| \frac{(1-x)m^2}{(1-x)m^2 - x p^2 - y k^2 + (x p - y k)^2} \right| + \right. \\ & \left. + \ln \frac{\lambda_0^2}{m^2} - \frac{3}{4} \right\} + \frac{e^2}{2\pi} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \times \\ & \times \frac{\gamma^n m^2 - 2 k^n m^2 + \hat{k} \gamma^n (x p - y k) + 4 m (k^n y - p^n x) + (\hat{p} x - \hat{k} y) \gamma^n (\hat{p} x - \hat{k} y)}{(1-x)m^2 - x p^2 - y k^2 + (x p - y k)^2}. \end{aligned} \quad (5.45)$$

Величины $\Sigma^{(2)}$, $\Pi^{(2)}$ и $\tilde{\Lambda}^{(3)}$, выражаемые соотношениями (5.42), (5.43) и (5.45), позволяют непосредственно вычислять радиационные поправки низших порядков.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Н. Боголюбов и Д. В. Ширков, УФН 55, № 2, 149 (1955).
2. R. P. Feynman, Phys. Rev. 74, № 10, 1430 (1948).
3. R. P. Feynman, Phys. Rev. 76, № 6, 769 (1949). Русский перевод в сборнике «Новейшее развитие квантовой электродинамики» (НРКЭ), ИЛ, 1954 г., стр. 161.
4. F. J. Dyson, Phys. Rev. 75, № 11, 1736 (1949). Русский перевод в «НРКЭ», стр. 204.
5. G. Takeda, Prog. Theor. Phys. 7, № 4, 359 (1952).
6. P. T. Matthews and A. Salam, Phys. Rev. 94, № 1, 185 (1954).
7. J. C. Ward, Phys. Rev. 78, 182 (1950).
8. Н. Боголюбов, О. Парасюк, ДАН 100, № 1, 25 (1955).

9. Н. Богоявленский, О. Парасюк, ДАН 100, № 3, 429 (1955).
10. О. Парасюк, Докторская диссертация, МИАН СССР, 1955.
11. F. Bloch and A. Nordsieck, Phys. Rev. 52, № 2, 54 (1937).
12. S. Sakata, H. Umezawa, S. Kamefuchi, Prog. Theor. Phys. 7, 377 (1952).
13. E. G. Stueckelberg et T. A. Green, Helv. Phys. Acta 24, № 2, 153 (1951).
14. S. Okubo, Prog. Theor. Phys. 11, № 1, 80 (1954).
15. W. Heisenberg, Solvay Ber. Kap. II, III (1939).
16. H. Umezawa, Prog. Theor. Phys. 7, № 5—6, 551 (1952).
17. S. P. Edwards, Phys. Rev. 90, № 2, 284 (1953). Русский перевод в «НРКЭ», стр. 378.
18. Е. С. Фрадкин, ЖЭТФ 26, № 6, 751 (1954).
19. W. Furry, Phys. Rev. 51, 125 (1937).
20. R. P. Feynman, Phys. Rev. 76, № 6, 749 (1949). Русский перевод в «НРКЭ», стр. 138.
21. W. Pauli and F. Villars, Rev. Mod. Phys. 21, 434 (1949).
22. Л. Д. Ландау, А. А. Абрикосов, И. М. Халатников, ДАН 95, № 4, 773 (1954).