1955 г. Август *Т. LVI, вып. 4*

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

МЕТОД ТАММА — ДАНКОВА

В. П. Силин и В. Я. Файнберг

ВВЕДЕНИЕ

Развитие квантовой теории поля за последние несколько лет привело к несомненному успеху квантовой электродинамики. В настоящее время все доступные экспериментальной проверке выводы квантовой электродинамики полностью подтверждаются опытом, хотя последовательная трактовка теории наталкивается на ряд затруднений. Успех теории связан с малостью константы тонкой структуры $e^2/\hbar c$ и возможностью применения теории возмущений. В отличие от электродинамики теория возмущений заведомо не пригодна в случае квантовой мезодинамики. Однако вполне возможно, что современная мезонная теория окажется применимой в определённой области энергий. Для ответа на этот вопрос необходимо использовать методы, не связанные с разложением по степеням константы взаимодействия. Одним из таких методов, исследованию которого в последние 3—4 года посвящено много работ, является метод Тамма — Данкова *).

Настоящая статья посвящена изложению основ этого метода и его применению к различным конкретным проблемам квантовой теории мезонов. Главное внимание уделено общим вопросам формулировки метода и анализу трудностей, возникающих при попытке перенормировать уравнения, полученные согласно методу Т. Д.

Метод Тамма — Данкова был сформулирован первоначально (1945 г.) в нековариантном виде И. Е. Таммом [1], а затем, в 1950 г., Данковым [2] в применении к проблемам квантовой мезодинамики **). Необходимо отметить, что аналогичный метод ещё в 1934 году был применён Фоком к некоторым вопросам квантовой электродинамики [3]. Сущность метода Т. Д. состоит в обрыве, по числу частиц, системы

*) В дальнейшем сокращённо: метод Т. Д.

**) По общепринятой терминологии первоначальная формулировка метода носит название старого метода Т. Д.

строгих уравнений квантовой мезодинамики и в последующем точном решении такой приближённой системы уравнений. Вопросы, связанные с нековариантной формулировкой старого метода Т. Д., обсуждаются в § 1. Попытки решать уравнения непосредственно в нековариантной записи сталкиваются с двоякого рода трудностями: во-первых, не ясно, как однозначно устранить бесконечности собственно энергетического типа и, во-вторых, в уравнениях появляются дополнительные бесконечности, связанные с замкнутыми вакуумными петлями. Ковариантная формулировка старого метода Т. Д., предложенная Чини[4], излагается в § 2. Здесь же обсуждается вопрос о граничных условиях и переход к импульсному представлению.

В § 3, на примере уравнений для двух нуклонов и для нуклона и мезона, анализируются трудности, возникающие при попытке перенормировать уравнения старого метода Т. Д., записанные в ковариантной форме. Показано, что метод перенормировки, предложенный Чини[4], является ошибочным. В случае собственной энергии нуклона (массовый оператор) метод Чини приводит к неправильным конечным добавкам, а в случае собственной энергии мезона (поляризационный оператор) — к дополнительным расходимостям при переходе к импульсному представлению[5].

Ковариантная форма записи уравнений старого метода Т. Д. не устраняет также затруднений, связанных с вакуумными петлями.

В § 4 обсуждаются различные попытки, связанные с применением старого метода Т. Д. к взаимодействию нуклонов.

§ 5 посвящён решению задачи рассеяния π-мезонов на нуклонах в состоянии с $I = {}^3/_2$ *) в рамках старого метода Т. Д., без учёта вклада от вакуумных петель и членов собственной энергии. Эта задача была решена в работе[6] для случая симметричной псевдоскалярной теории с псевдоскалярной связью. При этом оказалось, что в отличие от теории возмущений метод Т. Д. даёт хорошее согласие с опытом.

В §§ 6—8 рассматривается новая формулировка метода Т. Д. **), предложенная Дайсоном[7-9], с целью избежать указанные выше затруднения с перенормировкой в старом методе Т. Д.

В § 6 излагается связь между амплитудами старого и нового метода Т. Д. Показано, каким образом, исходя из этой связи, можно сформулировать правильные граничные условия в уравнениях нового метода[10], и дана ковариантная формулировка этого метода. Существенным преимуществом уравнений нового метода Т. Д. яв-

---

*) I — изотопический спин системы π-мезон + нуклон. При решении этой задачи в состоянии с $I = {}^1/_2$ возникают дополнительные трудности, обусловленные недопустимой сингулярностью ядра в этом состоянии (см. конец § 3).

**) В дальнейшем: новый метод Т. Д.

ляется отсутствие в них бесконечностей, связанных с вакуумными петлями.

В § 7 рассматривается перенормировка собственной энергии нуклона в уравнении для двух нуклонов, полученном в низшем приближении нового метода Т. Д. Исследование показывает, что все бесконечности, возникающие в таком уравнении, могут быть устранены путём ковариантной перенормировки масс обоих нуклонов и константы связи g. Проблема перенормировки поляризационного оператора, возникающего в уравнении для системы мезон + нуклон в новом методе Т. Д., оказывается более сложной. Исследованию этого вопроса посвящён § 8. Анализ показывает, что несмотря на то, что поляризационный оператор преобразуется к ковариантной форме, выделение из него бесконечных величин приводит к появлению двух перенормированных зарядов [11]. Кроме того, учёт конечных добавок, остающихся после перенормировки, приводит к возникновению в уравнении дополнительных полюсов, не имеющих прямого физического смысла [10, 12]. Наличие таких полюсов в перенормированных уравнениях является общим свойством приближённых уравнений современной квантовой теории поля и свидетельствует об ограниченной области их применимости [13–16].

Наконец, в § 9 кратко рассмотрен вопрос о связи уравнений типа Т. Д. с ковариантными уравнениями [17, 18].

§ 1. ТРЁХМЕРНАЯ ФОРМУЛИРОВКА СТАРОГО МЕТОДА ТАММА — ДАНКОВА

В этом параграфе мы кратко остановимся на первоначальной [1, 2] нековариантной форме старого метода Т. Д. Это облегчит, с одной стороны, понимание дальнейшего изложения, и, с другой стороны, позволит лучше уяснить сущность этого метода (обрыв уравнений по числу частиц, смысл амплитуд, вопросы нормировки и ортогональности). Здесь необходимо подчеркнуть, что все конкретные расчёты в рамках метода проще делать именно в трёхмерной форме, в то время как для понимания природы трудностей, связанных с устранением из уравнений расходящихся величин (перенормировка), более удобна ковариантная форма записи, предложенная Чини [4].

Сформулируем метод Т. Д. на примере взаимодействия мезонного и нуклонного полей. Будем исходить из уравнения Шредингера для стационарных состояний

$$(H_0 + H')\Psi = W\Psi, \tag{1.1}$$

где H_0 и H' — соответственно гамильтонианы свободных полей и взаимодействия, Ψ — вектор состояния (функционал) во вторично квантованном представлении, а W — собственное значение оператора полной энергии в этом состоянии.

Решение (1.1) будем искать в виде разложения по собственным функциям $\Phi_\lambda(N)$ свободного гамильтониана:

$$\Psi = \sum_{\lambda, N} \alpha_\lambda(N)\Phi_\lambda(N), \tag{1.2}$$

$$\Psi_0 = \sum_{\lambda, N} \beta_\lambda(N)\Phi_\lambda(N).$$

Здесь Ψ_0 — вектор физического вакуума, индекс N характеризует число свободных мезонов, нуклонов и антинуклонов в состоянии $\Phi_\lambda(N)$; λ — остальные переменные этих частиц (например, импульсы и спины), а коэффициенты разложения $\alpha_\lambda(N)$ имеют смысл амплитуд вероятности найти в состоянии Ψ N свободных частиц.

Функции $\Phi_\lambda(N)$ образуют полный набор нормированных и взаимно ортогональных собственных функций оператора H_0. В явном виде можно написать

$$\Phi_\lambda(N) = [\Pi(N)]^{-1/2} C_\lambda(N)\Phi_0. \tag{1.3}$$

Здесь $C_\lambda(N)$ — произведение N операторов рождения; например, $C_\lambda(N) = Q^*(\mathbf{k}_1)Q^*(\mathbf{k}_2)\ldots Q(\mathbf{k}_n)\overset{*}{B}{}^{n_1}(\mathbf{p}_1)\overset{*}{B}{}^{n_2}(\mathbf{p}_2)\ldots\overset{*}{B}{}^{n_m}(\mathbf{p}_m)$, где $Q^*(\mathbf{k})$ — оператор рождения мезона с импульсом $\mathbf{k}$, $B^{n*}(\mathbf{p})$ — оператор рождения нуклона с импульсом $\mathbf{p}$ ($n = 1$, 2 и характеризует направление спина нуклона) и $B^{n*}(\mathbf{p})$ — тоже для антинуклона с импульсом $\mathbf{p}$, когда $n = 3,4$; операторы Q, Q^* и B^n, B^{n*} подчиняются обычным правилам коммутации:

$$[Q(\mathbf{k}_1),\ Q^*(\mathbf{k}_2)]_- = \delta_{k_1k_2};\quad [B^{n_1}(\mathbf{p}_1), \overset{*}{B}{}^{n_2}(\mathbf{p}_2)]_+ = \delta_{n_1n_2}\delta_{p_1p_2}, \tag{1.3'}$$

где $[\ \ ]_\mp$ означает соответственно коммутатор и антикоммутатор; Φ_0 — вектор состояния вакуума невзаимодействующих полей. По определению вакуума

$$Q(\mathbf{k})\Phi_0 = B^n(\mathbf{p})\Phi_0 = 0. \tag{1.4}$$

$\Pi(N) = (N_1!)(N_2!)\ldots$ — нормировочная постоянная, где N_1, N_2 и т. д. — числа заполнения. Условие ортогональности для $\Phi_\lambda(N)$ гласит:

$$(\Phi^*_{\lambda'}(N'),\ \Phi_\lambda(N)) = \delta_{\lambda\lambda'}\delta_{NN'}. \tag{1.5}$$

Воспользовавшись (1.3) и (1.5), можно написать явное выражение для амплитуд $\alpha_\lambda(N)$ через операторы поглощения Q и B^n:

$$\alpha_\lambda(N) = (\Phi_0^* Q(\mathbf{k}_1)\ldots Q(\mathbf{k}_n)B^{n_1}(\mathbf{p}_1)\ldots\overset{n}{B}{}^{m}(\mathbf{p}_m)\Psi). \tag{1.6}$$

Если предположить, что вектор состояния Ψ нормирован, например на единицу,

$$(\Psi^*,\ \Psi) = 1, \tag{1.7}$$

то отсюда, с учётом (1.2) и (1.5), сразу вытекает условие нормировки для амплитуд $\alpha_\lambda(N)$:

$$\sum_{\lambda, N} |\alpha_\lambda(N)|^2 = 1. \tag{1.8}$$

Подставим теперь разложение (1.2) в (1.1). Тогда, принимая во внимание формулы (1.3) — (1.5), получим следующую бесконечную систему интегральных уравнений для амплитуд (уравнение Шредингера в представлении чисел заполнения):

$$(W - E_{\lambda, N})\alpha_\lambda(N) = \sum_{\lambda', N}(\lambda, N|H'|\lambda', N')\alpha_{\lambda'}(N'), \tag{1.9}$$

где $(\lambda, N|H'|\lambda', N') = (\Phi^*_\lambda(N), H'\Phi_{\lambda'}(N'))$ — матричный элемент H', а $E_{\lambda, N}$ — собственное значение H_0 в состоянии $\Phi_\lambda(N)$

$$H_0\Phi_\lambda(N) = E_{\lambda, N}\Phi_\lambda(N) = \left(\sum_{i=1}^{n}\omega_{k_i} + \sum_{i=1}^{m} E_{p_i}\right)\Phi_\lambda(N),$$

причём $\omega_\mathbf{k} = +\sqrt{\mu^2 + \mathbf{k}^2}$ и $E_\mathbf{p} = +\sqrt{M^2 + \mathbf{p}^2}$ — соответственно энергия свободного мезона с импульсом $\mathbf{k}$ и свободного нуклона (или антинуклона) с импульсом $\mathbf{p}$ *).

Система уравнений (1.9) является точной системой уравнений квантовой теории мезонного поля.

До сих пор не найдено способов точного решения этой системы уравнений. В случае электродинамики оказывается вполне достаточным решить систему (1.9) с помощью теории возмущений в соответствующем для каждой конкретной задачи приближении. Однако в случае мезонной теории благодаря сильному взаимодействию полей решение по методу теории возмущений приводит к совершенно неправильным результатам. Возникает необходимость в построении иного метода решения системы (1.9). Таким методом, существенно отличающимся от теории возмущений, является метод Тамма — Данкова. Сущность метода Т. Д. заключается в следующем.

Для построения приближённого решения уравнений (1.9), или, что то же самое, уравнения (1.1), предполагается, что вектор состояния представляет собой не бесконечную, как это, повидимому, имеет место в случае точного решения, а конечную суперпозицию состояний свободных частиц. Другими словами, в разложении (1.2) принимаются отличающимися от нуля лишь амплитуды $\alpha(N)$, соответствующие числу виртуальных частиц N, меньшему некоторого N_0. Для системы уравнений (1.9) это соответствует отбрасыванию всех уравнений, в левых частях которых содержатся амплитуды для числа частиц, превышающих N_0, и пренебрежению такими амплитудами в оставшихся уравнениях.

*) Всюду в дальнейшем $\hbar = c = 1$.

С физической точки зрения такой обрыв основан на предположении, что состояния с числом виртуальных частиц $> N_0$ вносят пренебрежимо малый вклад в рассматриваемый процесс. С математической точки зрения метод Тамма — Данкова представляет использование в квантовой мезодинамике метода Ритца — Галеркина в функциональном пространстве.

Действительно, здесь, как и в методе Ритца — Галеркина, точный функционал системы (1.2), зависящий от бесконечного числа функций $\alpha_\lambda(N)$, апроксимируется конечным числом таких функций.

Исследование вопросов о сходимости последовательных приближений этого метода (в мезодинамике) является очень сложной и пока не решённой проблемой. Физические надежды в этом отношении связаны главным образом с успешным применением метода к ряду конкретных физических проблем, в которых удалось в ряде случаев получить качественное, а иногда (рассеяние мезонов на нуклонах в состоянии с $I = {}^3/_2$) неплохое количественное согласие с опытом [6].

Математически условия применимости метода Тамма — Данкова можно сформулировать так:

$$\sum_{\lambda,\ N>N_0} |\alpha_\lambda(N)|^2 \ll 1. \tag{1.10}$$

Уравнения (1.9) записаны в явно релятивистки неинвариантной форме. В связи с этим, при попытке решать эти уравнения по методу Т. Д., уже в низших приближениях возникают существенные затруднения. Во-первых, не ясно, как однозначно производить перенормировку расходящихся членов типа собственной э ергии, которые появляются в этих уравнениях. По этой причине в большинстве исследований тех или иных конкретных вопросов, произведённых до сих пор старым методом Т. Д., собственно энергетические члены просто зачёркивались. Во-вторых, в оборванных уравнениях (1.9) появляются дополнительные бесконечные члены, обусловленные вакуумными петлями. В отличие от теории S-матрицы, в старом методе Т. Д. не удаётся устранить бесконечности вакуумного типа с помощью перенормировки функционала системы *). Для исследования этих вопросов Чини [4] предложил ковариантную формулировку метода Тамма — Данкова.

§ 2. КОВАРИАНТНАЯ ФОРМА СТАРОГО МЕТОДА ТАММА — ДАНКОВА

Для ковариантной формулировки метода Т. Д. удобно исходить из представления взаимодействия. В этом представлении вектор состояния $\Psi(\sigma)$, зависящий от пространственно-подобной поверхности σ, подчиняется уравнению

$$i\frac{\delta\Psi(\sigma)}{\delta\sigma(x)} = H'(x)\Psi(\sigma), \tag{2.1}$$

*) См. также § 3.

или в интегральной форме

$$\Psi(\sigma) = \Psi(-\infty) - i \int_{-\infty}^{\sigma} H'(x') \Psi(\sigma') dx', \tag{2.2}$$

где $H'(x)$ — гамильтониан взаимодействия.

В случае псевдоскалярной симметричной мезонной теории с псевдоскалярной связью *)

$$\begin{aligned} H'(x) &= (ig/2)\,(\bar{\psi}_\alpha(x)\psi_\beta(x) - \psi_\beta(x)\bar{\psi}_\alpha(x))(\gamma_5\tau_i)_{\alpha\beta}\varphi_i(x) = \\ &= ig\bar{\psi}_\alpha(x)(\gamma_5\tau_i)_{\alpha\beta}\psi_\beta(x)\varphi_i(x)\,{}^{**}). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Здесь $\psi_\beta(x)$ и $\varphi_i(x)$ $(i = 1, 2, 3)$ — операторы свободных нуклонного и мезонного полей; τ_i — операторы изотопического спина нуклона; индексы α и β пробегают каждый восемь значений и характеризуют как спинорные, так и изотопические компоненты нуклонного оператора.

Фурье-разложение операторов имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} \psi_\alpha^{(+)}(x) &= \sum_{n=1}^{2} \int u_\alpha^n(\mathbf{p})\, b^n(\mathbf{p})\,\delta(p^2+M^2)\,\eta^+ e^{ipx} d^4p = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{n=1}^{2} \int u_\alpha^n(\mathbf{p})\, B^n(\mathbf{p}) \exp\,[i(\mathbf{pr} - E_\mathbf{p}t)]\; d^3p, \\ \psi_\alpha^{(-)}(x) &= \sum_{n=3}^{4} \int v_\alpha^n(\mathbf{p})\, b^n(p)\,\delta(p^2+M^2)\,\eta^-(p)\, e^{ipx} d^4p = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{n=3}^{4} \int v_\alpha^n(\mathbf{p})\, B^{n*}(\mathbf{p}) \exp\,[-i(\mathbf{pr} - E_\mathbf{p}t)\; d^3p, \\ \varphi_i^{(+)}(x) &= \int q_i(k)\,\delta(k^2+\mu^2)\,\eta^+(k)\, e^{ikx} d^4k = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int Q_i(\mathbf{k})\,(2\omega_\mathbf{k})^{-1/2} \exp\,[i(\mathbf{kr} - \omega_\mathbf{k}t)]\; d^3k, \\ \varphi_i^{(-)}(x) &= \int q_i^*(k)\,\delta(k^2+\mu)\,\eta^-(k)\, e^{ikx} d^4k = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int Q_i^*(\mathbf{k})\,(2\omega_\mathbf{k})^{-1/2} \exp\,[-i(\mathbf{kr} - \omega_k t)]\; d^3k, \end{aligned}\right\} \tag{2.4}$$

*) Все дальнейшие выкладки будут производиться с гамильтонианом (2.3).

**) Это следует из того факта, что $\mathrm{Sp}\,(\gamma_5 S_{\alpha\beta}(0)) = 0$, где $S_{\alpha\beta}(x)$ — перестановочная нуклонная функция.

где

$$\left.\begin{array}{l}\eta^{+}(k)=1\\ \eta^{-}(k)=0\end{array}\right\} k_0>0 \qquad \left.\begin{array}{l}\eta^{+}(k)=0\\ \eta^{-}(k)=1\end{array}\right\} k_0<0.$$

$\psi^{(+)}$ является оператором поглощения нуклона, $\psi^{(-)}$ — оператором рождения антинуклона, $\varphi^{(+)}$ — оператором поглощения мезона, $\varphi^{(-)}$ — оператором рождения мезона. Индекс n в формулах (2.4) соответствует номеру решения уравнения Дирака с заданными спином, изотопическим спином и энергией. При этом

$$u^{n*}(\mathbf{p})\,u^{n'}(\mathbf{p})=\delta_{nn'}, \qquad v^{n*}(\mathbf{p})\,v^{n'}(\mathbf{p})=\delta_{nn'},$$

u^n — решение уравнения Дирака в состоянии с положительной энергией, а v^n — то же для антинуклонов в состоянии с положительной энергией. Далее,

$$\psi(x)=\psi^{(+)}(x)+\psi^{(-)}(x); \quad \bar\psi(x)=\overline{\psi^{(+)}}+\overline{\psi^{(-)}},$$
$$\varphi(x)=\varphi^{(+)}(x)+\varphi^{(-)}(x).$$

Между операторами имеют место обычные соотношения коммутации [1]

$$\left.\begin{array}{l}
[\psi_\alpha(x),\ \bar\psi_\beta(x')]_+=-iS_{\alpha\beta}(x-x'),\\
[\psi_\alpha^{(+)}(x),\overline{\psi_\beta^{(+)}}(x')]_+=[\psi_\alpha^{(+)}(x),\overline{\psi_\beta^{(-)}}(x')]_+=-iS_{\alpha\beta}^{(+)}(x-x'),\\
[\varphi_i(x),\ \varphi_j(x')]_-=i\delta_{ij}\Delta(x-x'),\\
[\varphi_i^{(+)}(x),\varphi_j^{(-)}(x')]_-=i\delta_{ij}\Delta^{(+)}(x-x')=-i\delta_{ij}\Delta^{(-)}(x'-x).
\end{array}\right\} \qquad (2.5)$$

Остальные скобки равны нулю. Входящие в (2.5) инвариантные перестановочные функции равны

$$\left.\begin{array}{l}
\Delta(x)=-\dfrac{2i}{(2\pi)^3}\displaystyle\int e^{ikx}\delta(k^2+\mu^2)\,\varepsilon(k)\,d^4k=\\
\qquad=\dfrac{-1}{(2\pi)^3}\displaystyle\int e^{i\mathbf{kr}}(\omega_{\mathbf{k}})^{-1}\sin\omega_{\mathbf{k}}t\,d^3k;\\
\Delta^{(\pm)}(x)=\dfrac{-i}{(2\pi)^3}\displaystyle\int e^{ikx}\delta(k^2+\mu^2)\dfrac{2\varepsilon(k)\pm1}{2}\,d^4k=\\
\qquad=\dfrac{\pm i}{2(2\pi)^3}\displaystyle\int(\omega_{\mathbf{k}})^{-1}\exp\left[i(\mathbf{kr}\pm\omega t)\right]d^3k;\\
\Delta(x)=\Delta^{(+)}(x)+\Delta^{(-)}(x),\\
S(x)=\left(\gamma_\mu\dfrac{\partial}{\partial x_\mu}-M\right)\Delta(x);\\
S^{(\pm)}=\left(\gamma_\mu\dfrac{\partial}{\partial x_\mu}-M\right)\Delta^{(\pm)}(x);\\
\varepsilon(k)=\pm\,{}^1/_2 \quad \text{при} \quad k_0\gtrless0.
\end{array}\right\} \qquad (2.6)$$

Выпишем также инвариантные функции $\Delta^{(1)}$, $\overline{\Delta}$, Δ_F, $S^{(1)}$, $\overline{S}$ и S_F, которые нам понадобятся в дальнейшем:

$$\left.\begin{aligned}
&\Delta^{(1)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{ikx}\delta(k^2+\mu^2)\,d^4k,\\
&\overline{\Delta}(x) = -\varepsilon(x)\,\Delta(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\,p\int\frac{\exp(ikx)}{k^2+\mu^2}\,d^4k,\\
&\Delta_F(x) = \Delta^{(1)}(x) - 2i\overline{\Delta}(x);\\
&S^{(1)}(x) = \left(\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu} - M\right)\Delta^{(1)}(x) \quad \text{и т. д.}
\end{aligned}\right\} \tag{2.7}$$

Ковариантные амплитуды в старом методе Тамма — Данкова определяются следующим образом *):

$$\left.\begin{aligned}
&(\Phi_0,\ \varphi^{(+)}(x)\,\Psi(\sigma)) \equiv {}_{0}\!\!<\varphi^{(+)}(x)>_{\sigma},\\
&(\Phi_0,\ \psi^{(+)}(x)\,\Psi(\sigma)) \equiv {}_{0}\!\!<\psi^{(+)}(x)>_{\sigma},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&(\Phi_0,\ \overline{\psi^{(-)}}(x_1)\dots\overline{\psi^{(-)}}(x_n)\,\psi^{(+)}(y_1)\dots\psi^{(+)}(y_m)\times\\
&\times\varphi^{(+)}(z_1)\dots\varphi^{(+)}(z_r)\Psi(\sigma)) \equiv {}_{0}\!\!<\overline{\psi^{(-)}}(x_1)\dots\overline{\psi^{(-)}}(x_n)\times\\
&\times\psi^{(+)}(y_1)\dots\psi^{(+)}(y_m)\,\varphi^{(+)}(z_1)\dots\varphi^{(+)}(z_r)>_{\sigma}.
\end{aligned}\right\} \tag{2.8}$$

Здесь ${}_{0}\!\!<\varphi^{(+)}(x)>_{\sigma}$ — одномезонная амплитуда, ${}_{0}\!\!<\psi^{(+)}(x)>_{\sigma}$ — однонуклонная амплитуда; ${}_{0}\!\!<\overline{\psi^{(-)}}(x_1)\dots\overline{\psi^{(-)}}(x_n)\,\psi^{(+)}(y_1)\dots\psi^{(+)}(y_m)\,\varphi^{(+)}(z_1)\dots\varphi^{(+)}(z_r)>_{\sigma}$ есть $n+m+r$-частичная амплитуда (m — нуклонов, n — антинуклонов и r — мезонов).

Φ_0 — вектор состояния математического вакуума. По определению

$$\psi^{(+)}\Phi_0 = \overline{\psi^{(-)}}\Phi_0 = \varphi^{(+)}\Phi_0 = 0; \tag{2.9}$$

$\Psi(\sigma)$ — вектор состояния, подчиняющийся уравнению (2.1).

Отметим, что в (2.8) четырёхмерные точки $x_1\dots x_n$, $y_1\dots y_m$, $z_1\dots z_r$, вообще говоря, не обязаны лежать на σ.

Благодаря (2.9) в старом методе Тамма — Данкова все амплитуды, содержащие справа операторы рождения $\varphi^{(-)}$, $\psi^{(-)}$ и $\overline{\psi^{(+)}}$, тождественно равны нулю.

*) Связь ковариантных амплитуд (2.8) с трёхмерными (1.6) см. ниже (2.17) и (2.18).

Из (2.1), (2.2) и (2.8) легко получается бесконечная система уравнений для амплитуд типа (2.8)

$$i\frac{\delta}{\delta\sigma(x)}\,{}_{0}\!\left\langle \overline{\psi^{(-)}}(x_1)\ldots\overline{\psi^{(-)}}(x_n)\,\psi^{(+)}(y_1)\ldots\psi^{(+)}(y_m)\times\right.$$
$$\left.\times\,\varphi^{(+)}(z_1)\ldots\varphi^{(+)}(z_r)\right\rangle_{\sigma}=(\Phi_0,\ \overline{\psi^{(-)}}(x_1)\ldots\overline{\psi^{(-)}}(x_n)\times$$
$$\times\,\psi^{(+)}(y_1)\ldots\psi^{(+)}(y_m)\,\varphi^{(+)}(z_1)\ldots\varphi^{(+)}(z_r)\,H'(x)\,\Psi(\sigma)),\qquad(2.10)$$

или в интегральной форме

$${}_{0}\!\left\langle\overline{\psi^{(-)}}(x_1)\ldots\varphi^{(+)}(z_r)\right\rangle_{\sigma}={}_{0}\!\left\langle\overline{\psi^{(-)}}(x_1)\ldots\varphi^{(+)}(z_r)\right\rangle_{-\infty}-$$
$$-\,i\int\limits_{-\infty}^{\sigma}dx'\,(\Phi_0,\ \overline{\psi^{(-)}}(x_1)\ldots\varphi^{(+)}(z_r)\,H'(x')\,\Psi(\sigma')).\qquad(2.11)$$

Чтобы выразить правую часть уравнений (2.10) и (2.11) явно через амплитуды типа (2.8), необходимо, используя перестановочные соотношения (2.5), расположить все операторы поглощения справа от операторов рождения (N — упорядочивание [20, 21]). В простейших случаях имеем:

$$i\frac{\delta}{\delta\sigma(x)}\,{}_{0}\!\left\langle\varphi_k^{(+)}(x_1)\right\rangle_{\sigma}=$$
$$=-g(\tau_i\gamma_5)_{\alpha\beta}\Big\{\delta_{ik}\Delta^{(+)}(x_1-x)\,{}_{0}\!\left\langle\overline{\psi_\alpha^{(-)}}(x)\,\psi_\beta^{(+)}(x)\right\rangle_{\sigma}-$$
$$-\,i\,{}_{0}\!\left\langle\overline{\psi_\alpha^{(-)}}(x)\,\psi_\beta^{(+)}(x)\,\varphi_k^{(+)}(x_1)\,\varphi_i^{(+)}(x)\right\rangle_{\sigma}\Big\}\qquad(2.12)$$

для одномезонной амплитуды и

$$i\frac{\delta}{\delta\sigma(x)}\,{}_{0}\!\left\langle\psi_\lambda^{(+)}(x_1)\right\rangle_{\sigma}=$$
$$=g(\tau_i\gamma_5)_{\alpha\beta}\Big\{S_{\lambda\alpha}^{(+)}(x_1-x)\,{}_{0}\!\left\langle\psi_\beta^{(+)}(x)\,\varphi_i^{(+)}(x)\right\rangle_{\sigma}-$$
$$-\,i\,{}_{0}\!\left\langle\overline{\psi_\alpha^{(-)}}(x)\,\psi_\lambda^{(+)}(x_1)\,\psi_\beta^{(+)}(x)\,\varphi_i^{(+)}(x)\right\rangle_{\sigma}\Big\}\qquad(2.13)$$

для однонуклонной амплитуды.

В (2.12) и (2.13) мы для определённости ввели спинорные (α, β, λ) и изотопические (i, k) индексы.

Система уравнений (2.10) (или (2.11)) распадается на независимые подсистемы по величине ядерного заряда: разность числа операторов $\psi^{(+)}$ и числа сопряжённых операторов $\overline{\psi^{(-)}}$ в каждой подсистеме постоянна.

Чтобы получить приближённую оборванную систему уравнений (см. § 1), следует в точной системе уравнений (2.10), (2.11) отбросить все амплитуды с числом частиц, большим некоторого N_0. В результате получится полная и, как можно показать, совместная система уравнений старого метода Т. Д. для определения амплитуд типа (2.8) с числом частиц, не превышающем числа N_0.

Здесь важно подчеркнуть, что многие авторы [22–25], работавшие с уравнениями старого метода Т. Д., понимают под этим термином одно уравнение для одной из амплитуд типа (2.8), соответствующей реально имеющейся в данной задаче системе частиц (например, нуклон + мезон в теории рассеяния или два нуклона в теории дейтрона), причём это уравнение получается из системы уравнений (2.10) или (2.11) исключением из неё всех амплитуд, кроме искомой *). Это исключение обычно сводится к тому, что ядро точного интегрального уравнения для выделенной амплитуды разлагается в ряд по степеням константы взаимодействия и, практически, обрывается на некоторой степени этой константы. Поскольку, однако, такое разложение, вообще говоря, расходится, то подобное упрощение системы оборванных уравнений может привести к неправильным результатам. Поэтому систему уравнений типа (2.10), возникающую после обрыва, необходимо решать точно. Это требование является существенной составной частью метода Тамма — Данкова. Заметим, что в первом приближении уравнения, получающиеся при указанных двух различных подходах, совпадают.

Рассмотрим переход к импульсному представлению в уравнениях (2.10) и (2.11). Используем для этого явную зависимость $\Psi(\sigma)$ от времени для стационарных состояний. Выберем в качестве σ плоскую поверхность $t = \text{const}$. Векторы состояний в представлении взаимодействия — $\Psi(t)$ — и в представлении Шредингера — $\breve{\Psi}(t)$ — связаны соотношением вида

$$\Psi(t) = \exp[iH_0t]\,\breve{\Psi}(t), \tag{2.14}$$

где H_0 — гамильтониан свободных полей.

Для стационарного состояния с полной энергией W (в системе центра инерции) имеем:

$$\breve{\Psi}(t) = \exp[-iWt]\,\Psi. \tag{2.15}$$

Из (2.14) и (2.15) следует

$$\Psi(t) = \exp[-i(W - H_0)t]\,\Psi. \tag{2.16}$$

---

*) Так называемый метод Леви — Клейна [22, 23].

Ψ совпадает с вектором состояния в гейзенберговском представлении, с помощью которого первоначально были определены (см. (1.2)) амплитуды старого метода Тамма — Данкова.

С помощью формул (2.4) и (2.16) можно выразить зависящие от времени ковариантные амплитуды (2.8) через не зависящие от времени амплитуды типа (1.6). Для простейших случаев получаем:

$$\underset{0}{<}\varphi_i^{(+)}(x)>_t=$$
$$=\int\frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}(2\omega_{\mathbf{k}})^{-1/2}\exp\left[ikx-i(W-\omega_{\mathbf{k}})t\right](\Phi_0,\ Q_i(\mathbf{k})\Psi),\quad(2.17)$$

$$\underset{0}{<}\psi^+(x)>_t=\sum_{n=1}^{2}\int\frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3}u^n(\mathbf{p})\exp\left[ipx-i(W-E_{\mathbf{p}})t\right](\Phi_0,B^n(\mathbf{p})\Psi).\quad(2.18)$$

С помощью соотношений, аналогичных (2.17) и (2.18), а также выражений для перестановочных функций (2.6) система ковариантных уравнений (2.10) или (2.11) может быть преобразована в системе уравнений (1.9) для стационарных амплитуд типа (1.6) в трёхмерном импульсном пространстве. Так, например, уравнения (2.12) и (2.13) в импульсном представлении примут вид

$$(W-\omega_{\mathbf{k}})\underset{0}{<}Q_i(\mathbf{k})>=$$
$$=\frac{ig}{(2\pi)^3(2\omega_{\mathbf{k}})^{1/2}}\sum_{n=1}^{2}\sum_{n'=3}^{4}\int d\mathbf{p}\bar{v}^{n'}(\mathbf{p}+\mathbf{k})(\tau_i\gamma_5)\times$$
$$\times u^n(\mathbf{p})\underset{0}{<}B^{n'}(\mathbf{p}+\mathbf{k})B^n(\mathbf{p})>+ig(2\pi)^{-6}\sum_{n=1}^{2}\sum_{n'=3}^{4}\int\bar{v}^{n'}(\mathbf{p}+\mathbf{k}')\times$$
$$\times(\tau_j\gamma_5)u^n(\mathbf{p})(2\omega_{\mathbf{k}'})^{-1/2}\underset{0}{<}B^{n'}(\mathbf{p}+\mathbf{k}')B^n(\mathbf{p})Q_i(\mathbf{k})Q_j(\mathbf{k}')>d\mathbf{p}\,d\mathbf{k}',\ (2.19)$$

$$(W-E_{\mathbf{p}})\underset{0}{<}B^{n'}(\mathbf{p})>=ig(2\pi)^{-3}\sum_{n'=1}^{2}\int\overline{u^n}(\mathbf{p})(\gamma_5\tau_i)u^{n'}(\mathbf{p}-\mathbf{k})\times$$
$$\times(2\omega_{\mathbf{k}})^{-1/2}\underset{0}{<}B^{n'}(\mathbf{p}-\mathbf{k})Q_i(\mathbf{k})>d\mathbf{k}+$$
$$+ig\int\sum_{n_1=1}^{2}\sum_{n'=3}^{4}\overline{v^{n'}}(\mathbf{p}'+\mathbf{k}')(\gamma_5\tau_i)u^{n_1}(-\mathbf{p}')(2\omega_{\mathbf{k}'})^{-1/2}\times$$
$$\times\underset{0}{<}B^{n'}(\mathbf{p}'+\mathbf{k}')B^{n_1}(-\mathbf{p}')B^n(\mathbf{p})Q_i(\mathbf{k}')>d\mathbf{k}'d\mathbf{p}'.\quad(2.20)$$

Остановимся кратко на вопросе о выборе граничных условий для уравнений (1.9), (2.10)*) и (2.11). Будем исходить из импульсного представления. В общем случае решение уравнения типа (1.9) можно записать в виде суммы решений однородного (свободного) и неоднородного уравнений. В случае связанных состояний решение однородного уравнения отсутствует, поскольку множитель $(W - E_{\lambda, N})$ не может обратиться в нуль ни при каких значениях импульсов частиц, а решение неоднородного уравнения можно записать в виде

$$\frac{\sum\limits_{\lambda' N'} (\lambda, N \,|\, H' \,|\, \lambda', N')\, a_{\lambda'}(N')}{(W - E_{\lambda, N})}. \qquad (2.21)$$

В случае задачи рассеяния для тех уравнений, для которых $(W - E_{\lambda, N})$ может обращаться в нуль, к решению, помимо члена (2.21), можно добавить слагаемое вида $\delta(W - E_{\lambda, N})$, умноженное на произвольный множитель[26]. Если деление в (2.21) в этом случае понимать в смысле главного значения, то этот множитель выбирается, например, так, чтобы асимптотическое решение уравнения описывало (в $\mathbf{r}$-пространстве) падающую и расходящуюся волны.

Отсюда вытекает, что в ковариантной форме граничные условия при переходе от (2.10) к (2.11) формулируются следующим образом. Для связанных состояний необходимо положить

$$\underset{\circ}{<} \overline{\psi^{(-)}}(x_1) \ldots \varphi^{(+)}(z_r) \underset{-\infty}{>} = 0.$$

Формально этого можно достигнуть, если добавить к W положительную мнимую добавку. В случае процессов рассеяния $\underset{\circ}{<} \ldots \underset{-\infty}{>}$ должно описывать падающую и расходящуюся волны.

§ 3. ПЕРЕНОРМИРОВКА В УРАВНЕНИЯХ СТАРОГО МЕТОДА ТАММА — ДАНКОВА

Устранение расходящихся выражений, возникающих в уравнениях старого метода Тамма — Данкова, наталкивается на серьёзные трудности. Ковариантная формулировка этого метода, предложенная Чини, позволила сделать значительный шаг вперёд в смысле понимания природы этих трудностей, но не смогла полностью преодолеть их.

Возникающие здесь вопросы мы рассмотрим на примере уравнения для двух нуклонов и уравнения для системы нуклон + мезон, взятых в первом неисчезающем приближении метода.

Выбор этих двух уравнений не является случайным. Во-первых, в этих уравнениях в полной мере проявляются характерные затруд-

*) Более подробно этот вопрос обсуждается в § 6.

нения, связанные с перенормировкой, и во-вторых, системы нуклон + + нуклон и нуклон + мезон являются простейшими физическими системами, исследование которых открывает наиболее прямой путь для выяснения как ценности самого метода, так и пределов применимости современной мезонной теории к действительности.

Начнём с двухнуклонной задачи.

Уравнение для амплитуды двух нуклонов $\underset{0}{<}\psi_\gamma^+(x_1)\psi_\delta^+(x_2)\underset{\sigma}{>}$ согласно (2.10) имеет следующий вид:

$$
\begin{aligned}
i\frac{\delta}{\delta\sigma(x)}\underset{0}{<}\psi_\gamma^+(x_1)\psi_\delta^+(x_2)\underset{\sigma}{>} &= ig(\gamma_5\tau_k)_{\alpha\beta}\times \\
&\times\Big\{\underset{0}{<}\psi_\gamma^+(x_1)\psi_\delta^+(x_2)\overline{\psi_\alpha^{(-)}}(x)\psi_\beta^+(x)\varphi_k^+(x)\underset{\sigma}{>}- \\
&- iS_{\delta\alpha}^{(+)}(x_2-x)\underset{0}{<}\psi_\gamma^+(x_1)\psi_\beta^+(x)\varphi_k^+(x)\underset{\sigma}{>}+ \\
&+ iS_{\gamma\alpha}^{(+)}(x_1-x)<\psi_\delta^+(x_2)\psi_\beta^+(x)\varphi_k^+(x)\underset{\sigma}{>}\Big\}. \qquad (3.1)
\end{aligned}
$$

Напишем далее уравнения для амплитуд, стоящих справа в (3.1), и отбросим в правых частях этих уравнений все амплитуды, содержащие более чем два нуклона и нуль мезонов. В результате получим:

$$
\begin{aligned}
i\frac{\delta}{\delta\sigma(x')}&\underset{0}{<}\psi_\gamma^+(x_1)\psi_\delta^+(x_2)\overline{\psi_\alpha^-}(x)\overline{\psi_\beta^+}(x)\varphi_x^+(x)\underset{\sigma}{>}= \\
&= -g(\gamma_5\tau_l)_{\mu\nu}\delta_{kl}\Delta^{(+)}(x-x')\Big\{-S_{\beta\mu}^{(+)}(x-x')S_{\nu\alpha}^{(-)}(x'-x)\times \\
&\times\underset{0}{<}\psi_\gamma^+(x_1)\psi_\sigma^+(x_2)\underset{\sigma}{>}+S_{\delta\mu}^{(+)}(x_2-x')S_{\nu\alpha}^{(-)}(x'-x)\times \\
&\times\underset{0}{<}\psi_\gamma^{(+)}(x_1)\psi_\beta^+(x)\underset{\sigma}{>}-S_{\gamma\mu}^{(+)}(x_1-x)S_{\nu\alpha}^{(-)}(x'-x)\times \\
&\times\underset{0}{<}\psi_\delta^+(k_2)\psi_\beta^+(x)\underset{\sigma}{>}\Big\}; \qquad (3.2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
i\frac{\delta}{\delta\sigma(x')}\underset{0}{<}\psi_\gamma^+(x_1)\psi_\beta^+(x)\varphi_k^+(x)\underset{\sigma}{>} &= -ig(\gamma_5\tau_l)_{\mu\nu}\delta_{kl}\Delta^{(+)}(x-x')\times \\
&\times\Big\{-S_{\beta\mu}^{(+)}(x-x')\underset{0}{<}\psi_\gamma^+(x_1)\psi_\nu^+(x')\underset{\sigma}{>}+ \\
&+S_{\gamma\mu}^{(+)}(x_1-x')\underset{0}{<}\psi_\beta^+(x)\psi_\nu^+(x')\underset{\sigma}{>}\Big\}; \qquad (3.3)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
i\frac{\delta}{\delta\sigma(x')}\underset{0}{<}\psi_\delta^+(x_2)\psi_\beta^+(x)\varphi_k^+(x)\underset{\sigma}{>} &= -ig(\gamma_5\tau_l)_{\mu\nu}\delta_{kl}\Delta^{(+)}(x-x')\times \\
&\times\Big\{-S_{\beta\mu}^{(+)}(x-x')\underset{0}{<}\psi_\delta^+(x_2)\psi_\nu^+(x')\underset{\sigma}{>}+ \\
&+S_{\delta\mu}^{(+)}(x_2-x')\underset{0}{<}\psi_\beta^+(x)\psi_\nu^+(x')\underset{\sigma}{>}\Big\}. \qquad (3.4)
\end{aligned}
$$

Интегрируя эти уравнения с учётом граничных условий *)

$$\underset{0}{<}\psi_\gamma^+(x_1)\psi_\delta^+(x_2)\overline{\psi_\alpha^-}(x)\psi_\beta^+(x)\varphi_k^+\underset{-\infty}{>}=$$
$$=\underset{0}{<}\psi_\gamma^+(x)\psi_\beta^+(x)\varphi_k^+(x)\underset{\infty-}{>}=\underset{0}{<}\psi_\delta^+(x_2)\psi_\beta^+(x)\varphi_k^+(x)\underset{-\infty}{>}=0$$

и подставляя полученный результат в (3.1), находим искомое уравнение для амплитуды $\underset{0}{<}\psi_\gamma^+(x_1)\psi_\delta^+(x_2)\underset{\sigma}{>}$:

$$\begin{aligned}
i\frac{\delta}{\delta\sigma(x)}\underset{0}{<}\psi_\gamma^+(x_1)\psi_\delta^+(x_2)\underset{\sigma}{>}&=-g^2\int_{-\infty}^{\sigma}dx'\Delta^{(+)}(x-x')\times\\
\times\Big\{-6Sp(\gamma_5S^{(+)}(x-x')\gamma_5S^{(-)}(x'-x))&\underset{0}{<}\psi_\gamma^+(x_1)\psi_\delta^+(x_2)\underset{\sigma'}{>}-\\
-3(S^{(+)}(x_1-x)\gamma_5S^{(+)}(x-x'))_{\gamma\beta}&\underset{0}{<}\psi_\beta^+(x')\psi_\delta^+(x_2)\underset{\sigma'}{>}+\\
+3(S^{(+)}(x_1-x')\gamma_5S^{(-)}(x'-x))_{\gamma\beta}&\underset{0}{<}\psi_\beta^+(x)\psi_\delta^+(x_2)\underset{\sigma'}{>}-\\
-3(S^{(+)}(x_2-x)\gamma_5S^{(+)}(x-x'))_{\delta\beta}&\underset{0}{<}\psi_\gamma^+(x_1)\psi_\beta^+(x')\underset{\sigma'}{>}+\\
+3(S^{(+)}(x_2-x')\gamma_5S^{(-)}(x'-x))_{\delta\beta}&\underset{0}{<}\psi_\gamma^+(x_1)\psi_\beta^+(x)\underset{\sigma'}{>}+\\
+(S^{(+)}(x_2-x)\gamma_5\tau_k)_{\delta\beta}(S^{(+)}(x_1-x')\gamma_5\tau_k)_{\gamma\nu}&\underset{0}{<}\psi_\beta^+(x)\psi_\nu^+(x')\underset{\sigma'}{>}-\\
-(S^{(+)}(x_1-x)\gamma_5\tau_k)_{\gamma\beta}(S^{(+)}(x_2-x')\gamma_5\tau_k)_{\delta\nu}&\times\\
\times\underset{0}{<}\psi_\beta^+(x)\psi_\nu^+(x')\underset{\sigma'}{>}\Big\}.&\qquad(3.5)
\end{aligned}$$

На рис. 1 изображены диаграммы, соответствующие каждому члену ядра в этом уравнении.

Первый член в ядре уравнения (3.5) (см. рис. 1 (*1*)) соответствует вакуумной петле; 2-й и 3-й — собственной энергии первого нуклона; 4-й и 5-й — собственной энергии второго нуклона. Все эти члены содержат бесконечности. 6-й и 7-й члены представляют вклад обычных цепочек рассеяния, которые не содержат расходимостей.

Рассмотрим сначала собственно энергетические члены (ограничимся для простоты первым нуклоном). В интегральной форме вклад этих членов в ядро уравнения (3.5) запишется в виде

$$\begin{aligned}
3g^2\int_{-\infty}^{\sigma}dx'\int_{-\infty}^{\sigma'}dx''\Delta^{(+)}(x'-x'')&\times\\
\times\Big\{(S^{(+)}(x_1-x')\gamma_5S^{(+)}(x'-x'')\gamma_5)_{\gamma\beta}&\underset{0}{<}\psi_\beta^+(x'')\psi_\delta^+(x_2)\underset{\sigma''}{>}-\\
-(S^{(+)}(x_1-x'')\gamma_5S^{(-)}(x''-x')\gamma_5)_{\gamma\beta}&\underset{0}{<}\psi_\beta^+(x')\psi_\delta^+(x_2)\underset{\sigma''}{>}\Big\}.\qquad(3.6)
\end{aligned}$$

*) Мы предполагаем, что полная энергия W системы не достаточна для рождения частиц.

Изменение во 2-м члене порядка интегрирования и замена переменных $x' \rightleftarrows x''$ даёт:

$$3g^2 \left\{ \int\limits_{-\infty}^{\sigma} dx' \int\limits_{-\infty}^{\sigma'} dx'' \Delta^{(+)}(x'-x'') (S^{(+)}(x_1-x')\,\gamma_5 S^{(+)}(x'-x'')\,\gamma_5)_{\gamma\beta} \times \right.$$

$$\times \underset{0}{<} \psi_\beta^+(x'')\,\psi_\delta^+(x_2) \underset{\sigma''}{>} + \int\limits_{-\infty}^{\sigma} dx' \int\limits_{\sigma'}^{\sigma} dx'' \Delta^{(-)}(x'-x'') \times$$

$$\left. \times (S^{(+)}(x_1-x')\,\gamma_5 S^{(-)}\gamma_5)_{\gamma\beta} \underset{0}{<} \psi_\beta^+(x')\,\psi_\delta^+(x_2) \underset{\sigma''}{>} \right\}. \tag{3.7}$$

В работе Чини[4] сделана попытка произвести перенормировку выражения (3.7) непосредственно в ковариантной форме записи.

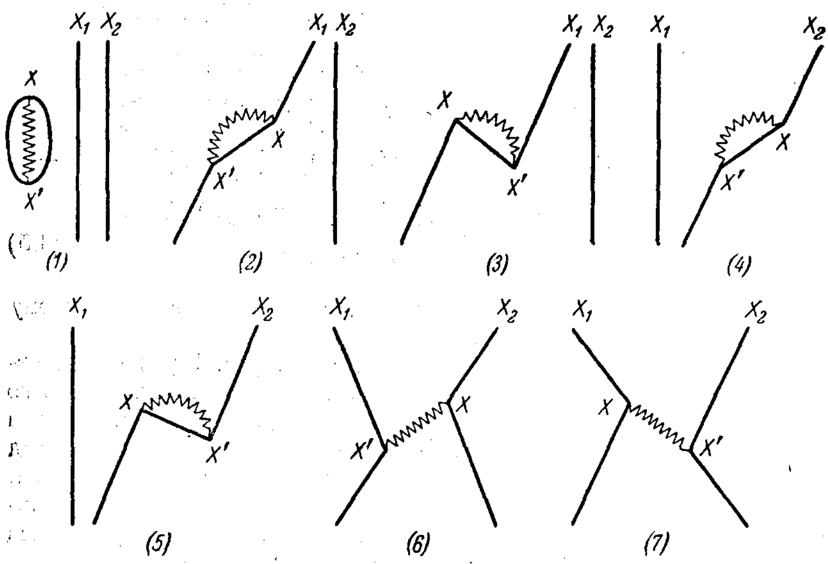

Рис. 1.

Для этой цели Чини, используя связь (см. 2.7) между причинными ($\Delta_F(x)$ и $S_F(x)$) и перестановочными функциями

$$\Delta_F(x_1-x_2) = \begin{cases} 2i\Delta^{(+)}(x_1-x_2) & \text{при } x_1 > x_2, \\ -2i\Delta^{(-)}(x_1-x_2) & \text{при } x_1 < x_2, \end{cases}$$

$$S_F(x_1-x_2) = \begin{cases} 2iS^{(+)}(x_1-x_2) & \text{при } x_1 > x_2, \\ -2iS^{(-)}(x_1-x_2) & \text{при } x_1 < x_2, \end{cases} \tag{3.8}$$

сделал в (3.7) следующую замену:

в первом члене $(x' > x'')$

$$\Delta^{(+)}(x'-x'')\,S^{(+)}(x'-x'') \text{ на } -\frac{1}{4}\,\Delta_F(x'-x'')\,S_F(x'-x'') \tag{3.9}$$

и во втором члене $(x' \leqslant x'')$

$$\Delta^{(-)}(x'-x'')\,S^{(-)}(x'-x'') \text{ на } -\frac{1}{4}\,\Delta_F(x'-x'')\,S_F(x'-x''). \tag{3.10}$$

В полученном вместо (3.7) выражении

$$-\frac{3}{4}g^2\Bigg\{\int\limits_{-\infty}^{\sigma}dx'\int\limits_{-\infty}^{\sigma'}dx''\,(S^{(+)}(x_1-x')M_F(x'-x''))\times$$
$$\times \underset{0}{<}\psi_\beta^+(x'')\,\psi_\delta^+(x_2)\underset{\sigma''}{>}+\int\limits_{-\infty}^{\sigma}dx'\int\limits_{\sigma'}^{\sigma}dx''\,(S^{(+)}(x_1-x')\,M_F(x'-x''))_{\gamma\beta}\times$$
$$\times \underset{0}{<}\psi_\beta^+(x')\;\psi_\delta^+(x_2)\underset{\sigma''}{>}\Bigg\}, \tag{3.11}$$

где

$$M_{F_c}(x'-x'')=\Delta_F(x'-x'')\,\gamma_5 S_F(x'-x'')\,\gamma_5, \tag{3.12}$$

Чини произвёл перенормировку обычным ковариантным способом

$$M_{F_c}(x)=A\delta(x)+B\left(\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu}+M\right)\delta(x)+M_{F_c}(x), \tag{3.13}$$

где $M_{F_c}(x)$ — величина, уже не обладающая недопустимыми сингулярностями и являющаяся конечной. Мы покажем сейчас, что предложенный Чини метод перенормировки является ошибочным. Причина ошибки коренится в том, что замена (3.9) и (3.10) в (3.7) является незаконной, поскольку функции $\Delta_F(x)$ и $\Delta^{(\pm)}(x)$ (соответственно $S_F(x)$ и $S^{(\pm)}(x)$) обладают совершенно различными особенностями как раз в той точке $(x=0)$, которая ответственна за расходимость выражения (3.7). Для доказательства нашего утверждения мы перейдём в уравнении (3.5) к импульсному представлению, выписывая явно только интересующие нас 2-й и 3-й члены. Предварительно напишем Фурье-разложение для амплитуды двух нуклонов

$$\underset{0}{<}\psi_\alpha^+(x_1)\,\psi_\beta^+(x_2)\underset{\sigma}{>}=(2\pi)^{-6}\sum_{n_1,\,n_2=1}\int d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2\,u_\alpha^{n_1}(\mathbf{p}_1)\,u_\beta^{n_2}(\mathbf{p}_2)\times$$
$$\times\exp\left[i\mathbf{p}_1x_1+i\mathbf{p}_2x_2-i(W-E_{\mathbf{p}_1}-E_{\mathbf{p}_2})t\right]\times$$
$$\times(\Phi_0,\;B^{n_1}(\mathbf{p}_1)B^{n_2}(\mathbf{p}_2)\,\Psi). \tag{3.14}$$

Принимая далее во внимание формулы (2.6), после простых преобразований получим из (3.5):

$$
\begin{aligned}
(W - E_{\mathbf{p}_1} - E_{\mathbf{p}_2}) \langle B^{n_1}(\mathbf{p}_1) B^{n_2}(\mathbf{p}_2) \rangle = \\
= 3g^2 \sum_{n_1'=1}^{2} \overline{u^{n_1}}(\mathbf{p}_1) M^{(1)}(\mathbf{p}_1, W - E_{\mathbf{p}_2}) u^{n_1'}(\mathbf{p}_1) \times \\
\times \langle B^{n_1'}(\mathbf{p}_1) B^{n_2}(\mathbf{p}_2) \rangle_0 + R(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2).
\end{aligned} \tag{3.15}
$$

Здесь $M^{(1)}(\mathbf{p}_1, W - E_{\mathbf{p}_2})$ — массовый оператор первого нуклона

$$
\begin{aligned}
M^{(1)}(\mathbf{p}_1, W - E_{\mathbf{p}_2}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d\mathbf{k}}{2\omega_{\mathbf{k}}} \gamma_5 \times \\
\times \left\{ \frac{\Lambda_+^{(1)}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{k})}{E_{\mathbf{p}_1+\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{k}} - (W - E_{\mathbf{p}_2})} - \right. \\
\left. - \frac{\Lambda_-^{(1)}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{k})}{E_{\mathbf{p}_1+\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{k}} + 2E_{\mathbf{p}_1} - (W - E_{\mathbf{p}_2})} \right\} \gamma_4 \gamma_5,
\end{aligned} \tag{3.16}
$$

где

$$
\Lambda_\pm(\mathbf{p}) = [E_{\mathbf{p}} \pm (\alpha \mathbf{p} + \beta M] (2E_{\mathbf{p}})^{-1}
$$

— проекционный оператор, $R(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$ — вклад остальных членов.

Ковариантный массовый оператор нуклона

$$
M_F(p_1) = - \frac{i}{(2\pi)^4} \int dk \gamma_5 S_F(p_1 + k) \gamma_5 \Delta_F(k)\,^*), \tag{3.17}
$$

который возникает, например, в уравнении для двух нуклонов в новом методе Т. Д. (см. § 7), после интегрирования по dk_0 можно записать в виде (положив $p_{10} = W - E_{\mathbf{p}_2}$)

$$
\begin{aligned}
M_F(\mathbf{p}_1, W - E_{\mathbf{p}_2}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\omega_{\mathbf{k}})} \gamma_5 \times \\
\times \left\{ \frac{\Lambda_+^{(1)}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{k})}{E_{\mathbf{p}_1+\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{k}} - (W - E_{\mathbf{p}_2})} - \frac{\Lambda_-^{(1)}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{k})}{E_{\mathbf{p}_1+\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{k}} + (W - E_{\mathbf{p}_2})} \right\} \gamma_4 \gamma_5.
\end{aligned} \tag{3.18}
$$

---

*) $S_F(p) = \left(i\hat{p} + M\right)^{-1}, \quad \Delta_F(k) = (k^2 + \mu^2)^{-1};$

$$
\Delta_F(x) = \frac{2}{i(2\pi)^4} \int e^{ikx} \Delta_F(k)\, dk.
$$

Сравнивая формулы (3.16) и (3.18), мы видим, что в $M^{(1)}(\mathbf{p}_1, W - E_{\mathbf{p}_2})$ $\mathbf{p}_1$ и $(W - E_{\mathbf{p}_2})$ не образуют 4-вектора и, следовательно, массовый оператор в старом методе Тамма — Данкова в отличие от $M_F(\mathbf{p}_1, W - E_{\mathbf{p}_2})$ не может быть преобразован к ковариантной форме.

Нетрудно проверить, что замена (3.9) и (3.10), которую сделал в своей работе Чини, чтобы преобразовать массовый оператор к ковариантной форме, приводит в импульсном представлении к следующему массовому оператору в уравнении (3.15):

$$\tilde{M}(\mathbf{p}_1, W - E_{\mathbf{p}_2}) = M_F(\mathbf{p}_1, W - E_{\mathbf{p}_2}) + M_F(\mathbf{p}_1, -W + E_{\mathbf{p}_2}), \quad (3.19)$$

где M — ковариантный массовый оператор (3.18). Этот массовый оператор существенным образом отличается от такового (см. (3.16)), полученного прямым переходом в уравнении (3.5) к импульсному представлению.

Подчеркнём различие между выражениями (3.16) и (3.19). Во-первых, (3.16) в отличие от (3.19) нельзя преобразовать к ковариантной форме; во-вторых, перенормировка заряда в выражении (3.19) равна нулю, в то время как выражение (3.16) приводит к конечной перенормировке заряда; наконец, в-третьих, оба эти выражения приводят к различным конечным добавкам. Поясним второй пункт. Разложение массового оператора в ковариантной форме (см. (3.13)) эквивалентно разложению величины M в трёхмерной записи по степеням $W - E_{\mathbf{p}_1} - E_{\mathbf{p}_2}$. Поскольку (3.19) есть симметричная функция $W - E_{\mathbf{p}_2}$, то первая производная

$$\left.\frac{\partial \tilde{M}}{\partial (W - E_{\mathbf{p}_2})}\right|_{W - E_{\mathbf{p}_2} = E_{\mathbf{p}_1}}$$

исчезает и перенормировка заряда в этом случае отсутствует. Если перенормировку выражения (3.16) производить аналогичным способом, то, как легко видеть,

$$\left.\frac{\partial M^{(1)}}{\partial (W - E_{\mathbf{p}_2})}\right|_{W - E_{\mathbf{p}_2} = E_{\mathbf{p}_1}}$$

будет конечной величиной.

Таким образом сравнение выражений (3.16) и (3.19) показывает, что замена (3.8) и (3.9), сделанная Чини, является незаконной, а возникающий после такой замены массовый оператор оказывается неверным.

Отметим, что здесь выявляется также существенное различие между массовыми операторами нуклона в старом и новом методах Т. Д., так как в последнем случае (см. § 6) перенормировка заряда совпадает с ковариантной и является бесконечной.

Рассмотрим теперь вклад в ядро уравнения (3.5) от первого (вакуумного) члена. Решающее отличие от теории возмущений (S-матрицы) проявляется здесь в том, что в импульсном представлении этот член зависит от W. Поэтому бесконечный вклад, соответствующий этому члену, нельзя по аналогии с S-матрицей устранить с помощью некоторого унитарного преобразования (перенормировки) амплитуды

$$\underset{\circ}{<}\psi^+(x_1)\psi^+(x_2)\underset{\sigma}{>} \to <\psi^+(x_1)\psi^+(x_2)>\exp[i\alpha],$$

где α (вообще говоря, бесконечная) действительная константа. Простое вычёркивание вакуумных членов в старом методе Т. Д., которое делается во всех работах, является произвольной и по существу ничем не оправданной операцией.

Отметим, что именно трудности, связанные с появлением вакуумных бесконечностей в старом методе Т. Д., представляют собой наиболее ощутимый недостаток этого метода и послужили одной из главных причин для формулировки нового метода Т. Д., свободного от этих трудностей.

Выпишем далее уравнение (3.5) в импульсном представлении. Обозначим через

$$a(\mathbf{p}) = (\Phi_0,\ B^{n_1}(\mathbf{p})B^{n_2}(-\mathbf{p})\Psi) \tag{3.20}$$

($\mathbf{p}$ — импульс в системе центра инерции) амплитуду двух нуклонов в системе центра инерции. Тогда после несложных преобразований получим из (3.5):

$$\begin{aligned}(W-2E_{\mathbf{p}})\,a(\mathbf{p}) = 3g^2\left[\overline{u^{(1)}}(\mathbf{p})\,M^{(1)}(\mathbf{p},\ W-E_{\mathbf{p}})\,u^{(1)}(\mathbf{p})\right] + \\ + 3g^2\left[\overline{u^{(2)}}(-\mathbf{p})\,M^{(2)}(-\mathbf{p},\ W-E_{\mathbf{p}})\,u^{(2)}(-\mathbf{p})\right]a(\mathbf{p}) + \\ + \frac{g^2}{(2\pi)^3}\int\frac{d\mathbf{k}}{\omega_{\mathbf{k}}}\times \\ \times\left\{\frac{[\overline{u}^{(1)}(\mathbf{p})\,\gamma_5\tau_k u^{(1)}(\mathbf{p}+\mathbf{k})]\,[\overline{u}^{(2)}(\mathbf{p})\,\gamma_5\tau_k u^{(2)}(-\mathbf{p}-\mathbf{k})]}{(E_{\mathbf{p}}+E_{\mathbf{p}+\mathbf{k}}+\omega_{\mathbf{k}}-W)}\right\}a(\mathbf{p}+\mathbf{k}).\end{aligned} \tag{3.21}$$

Здесь мы опустили вакуумный член.

Перейдём к исследованию вопросов перенормировки в уравнении мезон + нуклон.

По аналогии с уравнением для двух нуклонов в этом случае необходимо выписать уравнения типа (2.10) для амплитуд

$$\underset{\circ}{<}\psi^+(x_1)\,\varphi_i^+(x_2)\underset{\sigma}{>},\quad \underset{\circ}{<}\psi^+(x)\underset{\sigma}{>},\quad \underset{\circ}{<}\psi^+(x_1)\,\overline{\psi^-}(x)\,\psi^+(x)\underset{\sigma}{>},$$

$$\underset{\circ}{<}\psi^+(x)\,\varphi_i^+(x_2)\,\varphi_k^+(x)\underset{\sigma}{>} \quad\text{и}\quad \underset{\circ}{<}\psi^+(x_1)\,\overline{\psi^-}(x)\,\psi^+(x)\,\varphi_i^+(x_2)\,\varphi_k^+(x)\underset{\bullet}{>}$$

и отбросить в правых частях уравнений для последних четырёх амплитуд все амплитуды, кроме первой. Тогда, после исключения из уравнения для амплитуды $\underset{\circ}{<}\psi^+(x_2)\,\psi_i^+(x_2)\underset{\sigma}{>}$ всех остальных амплитуд, получим следующее уравнение*) для системы мезон + + нуклон (в первом приближении метода):

$$
\begin{aligned}
i\frac{\delta}{\delta\sigma(x)}\underset{\circ}{<}\psi^+(x_1)\,\varphi_i^+(x_2)\underset{\sigma}{>} = -g^2\int_{-\infty}^{\sigma}dx'\,\{&-6\Delta^{(+)}(x-x')\times\\
&\times P(x-x')\underset{\circ}{<}\psi^+(x_1)\,\varphi_i(x_2)\underset{\sigma'}{>}-\\
&-2\Delta^{(+)}(x_2-x)\,P(x-x')\underset{\circ}{<}\psi^+(x_1)\,\varphi_i^+(x')\underset{\sigma'}{>}-\\
&-2\Delta^{(+)}(x_2-x')\,P(x-x')\underset{\circ}{<}\psi^+(x_2)\,\varphi_i^+(x)\underset{\sigma'}{>}+\\
&+3\Delta^{(+)}(x-x')\,S^{(+)}(x_1-x')\,\gamma_5\,S^{(-)}(x'-x)\gamma_5\underset{\circ}{<}\psi^+(x)\,\varphi_i^+(x_2)\underset{\sigma'}{>}-\\
&-3\Delta^{(+)}(x-x')\,S^{(+)}(x_1-x)\,\gamma_5 S^{(+)}(x-x')\,\gamma_5\times\\
&\times\underset{\circ}{<}\psi^+(x')\,\varphi_i^+(x_2)\underset{\sigma'}{>}+\\
&+\Delta^{(+)}(x_2-x')\,S^{(+)}(x_1-x')\,\gamma_5 S^{(-)}(x'-x)\,\gamma_5\,(\tau_i\tau_k)\times\\
&\times\underset{\circ}{<}\psi^+(x)\,\varphi_k^+(x)\underset{\sigma'}{>}-\Delta^{(+)}(x_2-x)S^{(+)}(x_1-x)\times\\
&\times\gamma_5\,S^{(+)}(x-x')\,\gamma_5\,(\tau_i\tau_k)\underset{\circ}{<}\psi^+(x')\,\varphi_k^+(x')\underset{\sigma'}{>}+\Delta^{(+)}(x_2-x)\times\\
&\times S^{(+)}(x_1-x')\,\gamma_5 S^{(-)}(x'-x)\,\gamma_5\,(\tau_k\tau_i)\underset{\circ}{<}\psi^+(x)\,\varphi_k^+(x')\underset{\sigma'}{>}-\\
&-\Delta^+(x_2-x')\,S^{(+)}(x_1-x)\,\gamma_5 S^{(+)}(x-x')\,\gamma_5\times\\
&\times(\tau_k\tau_i)\underset{\circ}{<}\psi^+(x')\,\varphi_k^+(x)\underset{\sigma'}{>}\},
\end{aligned}
\qquad (3.21')
$$

где

$$
P(x-x') = \mathrm{Sp}\,\{S^{(+)}(x-x')\,\gamma_5 S^{(-)}(x'-x)\,\gamma_5\}.
$$

Цепочки, соответствующие каждому члену ядра этого уравнения, изображены на рис. 2.

Первый член в ядре уравнения (3.21) отвечает вакуумной петле (рис. 2 (*1*)) и в точности совпадает с соответствующим членом

---

*) Как и в случае двух нуклонов, мы предполагаем, что полная энергия системы W недостаточна для образования новых частиц.

в уравнении нуклон + нуклон. Перенормировка этого члена затруднена по указанным выше причинам; поэтому в дальнейшем мы не будем возвращаться к его рассмотрению. 4-й и 5-й члены соответствуют собственной энергии нуклона (см. рис. 2 (*4*) и (*5*)). Эти члены совпадают с членами собственной энергии в уравнении нуклон + нуклон. Поэтому всё сказанное там справедливо и в этом случае. Члены 6-й и 7-й соответствуют цепочкам с первоначальным поглощением мезона (цепочки с пглощением), а члены 8-й

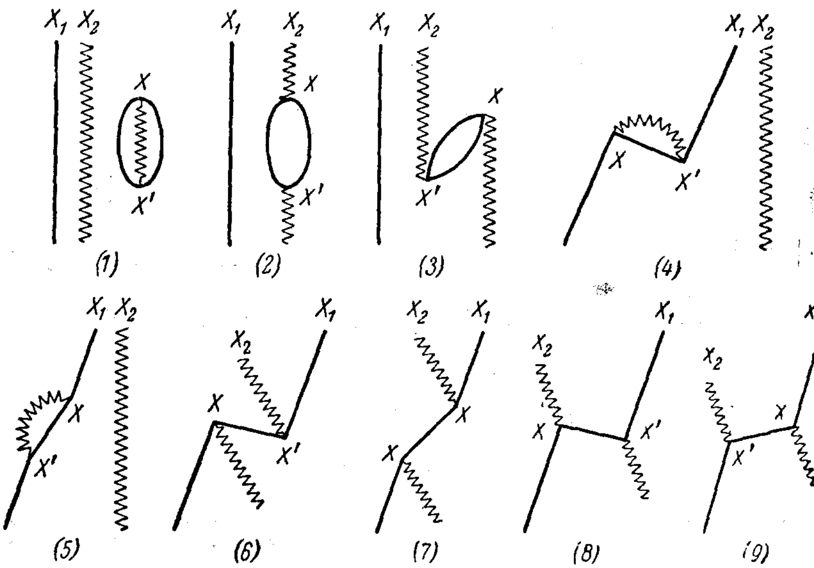

Рис. 2.

и 9-й — цепочкам с первоначальным испусканием мезона (цепочки с испусканием). Наибольший интерес с точки зрения перенормировок в уравнении (3.21) представляют 2-й и 3-й члены, отвечающие собственной энергии мезона (или поляризации вакуума; см. рис. 2 (*2*) и (*3*)). Попытка перенормировать аналогичные члены по методу, предложенному Чини, была сделана в работе Лемана[5]. Недопустимость замены перестановочных функций $S^{(\pm)}(x)$ $(\Delta^{(\pm)}(x))$ в точке $x=0$ причинными функциями $S_F(x)$ $(\Delta_F(x))$ проявилась в этом случае особенно наглядно. Из-за недостатка места мы кратко сформулируем только основной результат. Леман показал, что вычисленные в x-представлении конечные добавки, возникающие после перенормировки массового (поляризационного) оператора мезона по методу Чини, приводят к новым бесконечностям при переходе к импульсному представлению. Этот парадоксальный результат по существу обусловлен тем, что конечное выражение $\int P(x)\, e^{ipx} dx$

заменяется в методе Чини на бесконечную величину, равную

$$\frac{1}{4}\,\mathrm{Sp}\int S_F(x)\,\gamma_5 S_F(-x)\,\gamma_5 e^{ipx}dx.$$

Ниже мы покажем, что члены, соответствующие собственной энергии мезона, в старом методе Т. Д. не могут быть перенормированы однозначным образом.

В импульсном представлении вклад членов собственной энергии мезона в уравнение (3.21) запишется в виде (в системе центра инерции)

$$(W-E_{\mathbf{p}}-\omega_{\mathbf{p}})\langle B(\mathbf{p})\,Q(-\mathbf{p})\rangle_0=(\omega_{\mathbf{p}})^{-1}g^2P(\mathbf{p},W-E_{\mathbf{p}})\langle B(\mathbf{p})\,Q(-\mathbf{p})\rangle_0+\text{ост. члены}, \tag{3.22}$$

где

$$P(\mathbf{p},W-E_{\mathbf{p}})=\frac{1}{(2\pi)^3}\,\mathrm{Sp}\int d\mathbf{p}\left\{\frac{\Lambda_+(\mathbf{p}+\mathbf{p}')\,\gamma_4\gamma_5\Lambda_-(\mathbf{p}')}{E_{\mathbf{p}+\mathbf{p}'}+E_{\mathbf{p}'}-(W-E_{\mathbf{p}})}+\frac{\Lambda_-(\mathbf{p}+\mathbf{p}')\,\gamma_4\gamma_5\Lambda_+(\mathbf{p}')}{E_{\mathbf{p}+\mathbf{p}'}+E_{\mathbf{p}'}+2\omega_{\mathbf{p}}-(W-E_{\mathbf{p}})}\right\}\gamma_4\gamma_5 \tag{3.23}$$

— поляризационный (или массовый) оператор мезона.

Ковариантное выражение для поляризационного оператора (ср. также § 7)

$$P_F(p)=-\frac{i}{(2\pi)^4}\,\mathrm{Sp}\int dp'S_F(p+p')\,\gamma_5\cdot S_F(p') \tag{3.24}$$

после интегрирования по dp_0' (в 3-мерной форме) равно

$$P_F(\mathbf{p},p_0=W-E_{\mathbf{p}})=\frac{1}{(2\pi)^3}\,\mathrm{Sp}\int d\mathbf{p}'\left\{\frac{\Lambda_+(\mathbf{p}+\mathbf{p}')\,\gamma_4\gamma_5\Lambda_-(\mathbf{p}')}{E_{\mathbf{p}+\mathbf{p}'}+E_{\mathbf{p}'}-(W-E_{\mathbf{p}})}+\frac{\Lambda_-(\mathbf{p}+\mathbf{p}')\,\gamma_4\gamma_5\Lambda_+(\mathbf{p}')}{E_{\mathbf{p}+\mathbf{p}'}+E_{\mathbf{p}'}+(W-E_{\mathbf{p}'})}\right\}\gamma_4\gamma_5. \tag{3.25}$$

Подчеркнём различие между (3.23) и (3.25). Во-первых, в первом выражении, в отличие от второго, $\mathbf{p}$ и $W-E_{\mathbf{p}}$ не образуют 4-вектора, и, во-вторых, (3.25) является симметричной функцией $(W-E_{\mathbf{p}})$, в то время как (3.23) не обладает какой-либо явной симметрией относительно этой величины. Благодаря первому различию выражение для (3.23) не может быть преобразовано к ковариантному виду и, следовательно, перенормировку нельзя произвести ковариантно. Второе различие приводит к весьма серьёзным трудностям при попытке провести перенормировку поляризационного оператора $P(\mathbf{p},W-E_{\mathbf{p}})$ в старом методе Т. Д. Сущность этой трудности состоит в следующем. Ковариантная перенормировка P_F сводится к разложению этой величины по степеням $p^2 = \mathbf{p}^2 - p_0^2 = \mathbf{p}^2 - (W - E_\mathbf{p})^2$ в точке $p^2 = -\mu^2$. В трёхмерной форме (3.25) это разложение эквивалентно разложению по степени $(W - E_\mathbf{p})^2$ в точке $(W - E_\mathbf{p})^2 = \omega_\mathbf{p}$. Если попытаться провести аналогичное разложение величины $P(\mathbf{p}, W - E_\mathbf{p})$, то первые члены разложения (3.23) и (3.25) окажутся равными

$$P_F(\mathbf{p}, \omega_\mathbf{p}) = P(\mathbf{p}, \omega_\mathbf{p}).$$

Однако первая производная

$$\left.\frac{\partial P(\mathbf{p}, W - E_\mathbf{p})}{\partial (W - E_\mathbf{p})}\right|_{W - E_\mathbf{p} = \omega_\mathbf{p}}$$

не исчезает (из-за отсутствия симметрии) и обладает линейной расходимостью. Вторая производная расходится логарифмически (перенормировка заряда). Сумма остальных членов даёт сходящийся остаток. Линейно-расходящуюся первую производную нельзя интерпретировать как перенормировку заряда. Простое вычёркивание этого члена не оправдано. Поэтому выделение конечного остатка из поляризационного оператора в старом методе Т. Д. является неоднозначной операцией.

В этом одно из главных различий между перенормировкой массового и поляризационного операторов в старом методе Тамма — Данкова.

Подчеркнём, что между перенормировкой уравнения для двух нуклонов и уравнения мезон + нуклон имеется ещё одно существенное отличие. В случае уравнения для двух нуклонов перенормировка собственно энергетических ядер достаточна для того, чтобы решение уравнения было конечным. Это не так в случае уравнения мезон + нуклон. Здесь уже нельзя ограничиться перенормировкой расходящихся ядер. Благодаря полевой природе мезона решение уравнения мезон + нуклон с конечным ядром оказывается расходящимся и требует дополнительной перенормировки. Подробно об этом см.[27–35].

Сейчас мы отметим только, что наглядно это различие можно понять, если представить решение в виде ряда, вычисленного по теории возмущений. Решение уравнения нуклон + нуклон после перенормировки расходящихся ядер соответствует только конечным цепочкам, которые в высших приближениях по g^2 получаются последовательной итерацией цепочек (*6*) и (*7*) рис. 1. Решение уравнения мезон + нуклон соответствует сумме всевозможных цепочек, которые возникают при последовательной итерации цепочек ( )—(*9*) рис. 2. В частности, в этой сумме содержатся расходящиеся цепочки сложного вершинного и собственно-энергетического типа, которые дают в решение бесконечный вклад. Для рассеяния с полным изотопическим моментом $I = {}^3/_2$, когда в уравнении (3.21) остаётся только цепочка с испусканием, решение будет конечным и с точки зрения теории возмущений соответствовать учёту только так называемых изобарных цепочек. Задача перенормировки решения для случая $I = {}^1/_2$ в старом методе Т. Д. пока не решена.

Недостатки старого метода Т. Д. послужили основным толчком к формулировке нового метода Т. Д., которая была дана Дайсоном[7–9] и разбирается подробно в §§ 6—8.

§ 4. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ НУКЛОНОВ В СТАРОМ МЕТОДЕ ТАММА — ДАНКОВА

Метод Тамма — Данкова первоначально был сформулирован применительно к задаче двух нуклонов, иными словами, применительно к задаче ядерных сил. Действительно, чрезвычайно большая величина ядерных сил делает применение теории возмущений заведомо неприемлемым, что заставляет искать другие методы решения уравнений квантовой теории поля. Использование для задачи двух нуклонов первого приближения метода Т. Д., аналогичного принятому в § 3, т. е. учитывающего, кроме амплитуды двух нуклонов, также амплитуду двух нуклонов и одного мезона, позволяет получить сравнительно простое интегральное уравнение для амплитуды двух нуклонов. Такое уравнение изучалось в ряде работ для различных мезонных теорий: скалярной[1, 2], псевдоскалярной с псевдоскалярной[36, 22] и с псевдовекторной связями[36, 37]. Отметим, что если при получении оператора энергии взаимодействия частиц ограничиться первым неисчезающим членом разложения по степеням v/c, где v — скорость нуклона, то псевдоскалярная и псевдовекторная связь дают одинаковый оператор энергии взаимодействия*)

$$V(\mathbf{r}) = \left(\frac{g}{2M}\right)^2 (\boldsymbol{\tau}_1\boldsymbol{\tau}_2)(\boldsymbol{\sigma}_1\nabla)(\boldsymbol{\sigma}_2\nabla)\,\frac{e^{-r}}{r}; \tag{4.1}$$

$V(\mathbf{r})$ — оператор, возникающий при использовании псевдоскалярной связи. Соответствующий псевдовекторный оператор отличается множителем $(2M)^2$.

Однако указанное выше разложение, в результате которого возникает адиабатический потенциал (4.1), законно лишь на больших расстояниях. В области же малых расстояний ($\ll \hbar/\mu c$) псевдоскалярные и псевдовекторные ядерные силы резко различаются. Псевдовекторные силы обладают при этом недопустимой сингулярностью, что, в частности, не допускает последовательно использовать псевдовекторную связь.

Попытки сравнения с опытом теоретических результатов, получающихся для ядерных сил в первом приближении метода Т. Д. в случае псевдоскалярной связи, показали существенное расхожде-

*) Ниже используется система единиц, в которой $\mu = 1$.

ние теории и эксперимента. Это указало на необходимость учёта более высоких приближений. До сих пор в рамках метода Т. Д. в сколько-нибудь последовательной форме такой учёт не проведён. Поэтому ниже мы кратко остановимся лишь на некоторых, фактически незаконченных попытках учёта высших приближений.

Одну из первых таких попыток представляют работы Леви[22], в которых рассматривался оператор энергии взаимодействия в виде ряда по степени g^2. Следует указать, что интерес к методу Т. Д. в зарубежной литературе особенно возрос после работ Леви, получившего потенциал ядерных сил, согласующийся с экспериментом и приводящий к сильному отталкиванию на малых расстояниях.

Однако потенциал Леви в использованном им приближении получен не точно. Последующие работы Клейна[23] и др.[38–40, 42, 43], в которых были проведены нужные уточнения, привели к адиабатическому потенциалу ядерных сил, который существенно отличается от потенциала Леви. Однако такое отличие отнюдь не означает, что псевдоскалярная связь противоречит эксперименту. Прежде всего потенциал указанных выше работ получен в адиабатическом приближении, а анализ неадиабатических поправок указывает на их существенную роль[41, 44–46], приводящую к значительному изменению оператора энергии взаимодействия. Кроме того, построение потенциала в виде ряда по степеням g^2 является существенно приближённым. Такое приближение может быть довольно неточным благодаря плохой сходимости получающегося ряда[47–48] *). Нам представляется целесообразным для построения правильной теории ядерных сил рассматривать систему интегральных уравнений для нескольких амплитуд и во всяком случае не ограничиваться адиабатическим приближением.

Необходимо отметить ещё один недостаток, общий почти для всех работ, посвящённых взаимодействию двух нуклонов, и особенно существенный для задачи связанного состояния — дейтона.

Дело в том, что при нормировке волновой функции, а также при вычислении средних величин или значений матричных элементов в большинстве работ учитывается лишь амплитуда двух нуклонов, а, например, вклад амплитуды двух нуклонов и мезона вовсе не учитывается. Этот вклад, например, в норму бесконечен. Поэтому для того, чтобы правильно проводить нормировку функций, следует сформулировать правила обращения с возникающими расходимостями. В последнее время появились работы, в которых делаются попытки решить эту задачу[54–55]. Однако какой-либо законченности в решении этой проблемы пока не достигнуто.

---

*) В связи с этим представляют интерес приближённые методы построения оператора взаимодействия двух нуклонов, близкие к методу Тамма — Данкова, т. е. не использующие разложения по степеням константы связи[41, 49–53].

§ 5. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ π-МЕЗОНА И НУКЛОНА В СТАРОМ МЕТОДЕ ТАММА — ДАНКОВА

Как уже говорилось выше, успех теории мезонов в объяснении экспериментальных данных по рассеянию π-мезонов нуклонами, достигнутый с помощью метода Т. Д., является одним из оснований для надежд на успешное приложение метода Т. Д. также и к другим задачам. В настоящем параграфе мы подробно рассмотрим применение метода Т. Д. к рассеянию π-мезонов нуклонами. Наибольший интерес представляют в этом отношении результаты работы [6], которые мы изложим сравнительно подробно. В этой работе рассеяние π-мезонов рассматривалось согласно симметричной псевдоскалярной теории с псевдоскалярной связью. Аналогичное рассмотрение, правда, значительно более грубое, было проделано в работе [56]. Наконец, в работах [57–65] рассеяние π-мезонов, а также некоторые другие вопросы рассмотрены согласно симметричной псевдоскалярной теории с псевдовекторной связью.

Прежде чем переходить к изложению результатов теории, напомним основные результаты опытов по рассеянию π-мезонов нуклонами в области энергий до 200 *Мэв* (см. подробнее [66–68]). Во-первых, оказывается, что экспериментальные данные не противоречат гипотезе изотопической инвариантности, что позволяет характеризовать состояния системы π-мезон + нуклон собственными значениями оператора изотопического спина, равными половине или трём вторым. Во-вторых, угловые распределения и энергетическая зависимость рассеяния мезонов могут быть хорошо интерпретированы с помощью учёта лишь состояний с орбитальным моментом нуль и единица, т. е. $S_{1/2}$-, $P_{1/2}$- и $P_{3/2}$-состояний. Благодаря тому, что система может обладать двумя различными значениями изотопического спина, общее число состояний, учитываемых при интерпретации экспериментальных данных, равно шести. В-третьих, в области энергий 150—200 *Мэв* сдвиг фазы состояния с изотопическим и механическим моментами, равными $^3/_2$, оказывается значительно больше сдвигов фаз всех других состояний и при энергии ~ 195 *Мэв* проходит через значение, равное $\pi/2$, достигая, таким образом, в этой точке резонанса [69, 70]. Этот факт является наиболее ярким и, можно сказать, основным результатом экспериментов по рассеянию мезонов, приведшим к появлению различных феноменологических и полуфеноменологических теорий рассеяния π-мезонов (см., например, [71–73]).

Необходимо подчеркнуть следующее. Симметричная псевдоскалярная теория как с псевдовекторной, так и с псевдоскалярной связью в нерелятивистском приближении дают эквивалентные результаты для взаимодействия в P-состояниях. При этом для состояния $^{3/2}P_{3/2}$, в отличие от других состояний, учитываемых в интерпретации рассеяния, различные приближённые методы приводят к потенциалу притяжения [74–77]. Такой закон взаимодействия позволяет надеяться получить в состоянии ${}^{3/2}P_{3/2}$ резонанс рассеяния.

Однако теория возмущений, как известно, такого резонанса не даёт [78—81]. Именно этот факт в первую очередь заставляет обратиться к методам, отличающимся от теории возмущений.

Рассмотрение рассеяния π-мезонов, проведённое в работе [6] (см. также [82—85]), соответствует приближению, использованному в § 3 для описания системы π-мезона и нуклона. Поэтому в нашем изложении мы будем использовать результаты этого параграфа. Прежде всего, учитывая трудность перенормировок в старом методе Т. Д., мы, следуя работе [6], полностью опустим выражения, соответствующие диаграммам собственной энергии нуклона, поляризации вакуума и собственной энергии вакуума. Тогда уравнение для амплитуды мезона и нуклона принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} i\frac{\delta}{\delta\sigma(x)}\,{}_{\circ}\!\left\langle \psi^{(+)}(x_1)\,\varphi_i^{(+)}(x_2)\right\rangle_{\sigma} = g^2\int\limits_{-\infty}^{\sigma} dx'\,\{\Delta^{(+)}(x_2-x)\,\times \\ \times S^{(+)}(x_1-x)\,\gamma_5\,S^{(+)}(x-x')\,\gamma_5 N_2\,{}_{\circ}\!\left\langle \psi^{(+)}(x')\,\varphi_k^{(+)}(x')\right\rangle_{\sigma'} - \\ -\Delta^{(+)}(x_2-x')\,S^{(+)}(x_1-x')\,\gamma_5 S^{(-)}(x'-x)\,\gamma_5 N_2\,\times \\ \times\,{}_{\circ}\!\left\langle \psi^{(+)}(x)\,\varphi_k^{(+)}(x)\right\rangle_{\sigma'} + \\ +\Delta^{(+)}(x_2-x')\,S^{(+)}(x_1-x)\,\gamma_5 S^{(+)}(x-x')\,\gamma_5 N_1\,\times \\ \times\,{}_{\circ}\!\left\langle \psi^{(+)}(x')\,\varphi_k^{(+)}(x)\right\rangle_{\sigma'} - \\ -\Delta^{(+)}(x_2-x)\,S^{(+)}(x_1-x')\,\gamma_5 S^{(-)}(x'-x)\,\gamma_5 N_1\,\times \\ \times\,{}_{\circ}\!\left\langle \psi^{(+)}(x)\,\varphi_k^{(+)}(x')\right\rangle_{\sigma'}\}, \end{aligned} \tag{5.1}$$

где N_1 и N_2 — операторы в пространстве изотопического спина:

$$N_1 = \tau^k_{\lambda\nu}\tau^i_{\nu\mu}, \qquad N_2 = \tau^i_{\lambda\nu}\tau^k_{\nu\mu} \tag{5.2}$$

со следующими собственными значениями:

$$\left.\begin{aligned} N_1 &= -1, \quad N_2 = 3 \quad \text{при } I = {}^1/_2, \\ N_1 &= 2, \quad\;\; N_2 = 0 \quad \text{при } I = {}^3/_2, \end{aligned}\right\} \tag{5.3}$$

где I означает полный изотопический спин системы нуклон $+$ π-мезон. Ниже мы будем рассматривать состояния с определёнными значениями изотопического момента, в которых операторы N_1 и N_2 диагональны, и поэтому изотопические индексы λ и i выписывать не будем.

Уравнение (5.1) удобно исследовать в импульсном представлении в системе центра инерции. Для этого необходимо, следуя формулам (2.18), ввести не зависящую от времени амплитуду двух частиц мезона и нуклона

$$\underset{\circ}{<} B^n(\mathbf{p})\, Q^{(+)}(-\mathbf{p}) > \equiv a_n(\mathbf{p}). \tag{5.4}$$

Здесь индекс n соответствует двум решениям уравнения Дирака с различными спинами и положительной энергией; ниже мы будем использовать матрицы Паули σ_{mn}, которые будут действовать на a_n как на обычный спинор. Тогда в импульсном представлении уравнение (5.1) может быть записано следующим образом:

$$(W - E - \omega)\, a(\mathbf{p}) = \frac{g^2}{32\pi^3} \int d\mathbf{p}' R(\mathbf{p}, \mathbf{p}')\, a(\mathbf{p}'), \tag{5.5}$$

$$R(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = \varphi(p, p') \{N_1 S(\mathbf{p}, \mathbf{p}') + N_2 T(\mathbf{p}, \mathbf{p}')\}, \tag{5.6}$$

где

$$\varphi(p, p') = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(E+M)(E'+M)}{EE'\omega\omega'}},$$

$$S(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = [(W - M)m + (E + E' + \omega + \omega' - M - W)n] + \\ + \frac{\sigma\mathbf{p}}{E+M} \frac{\sigma\mathbf{p}'}{E'+M} \times \\ \times [(W+M)m + (E+E' + \omega + \omega' + M - W)n], \tag{5.7}$$

$$T(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = \frac{2}{W+M} + \frac{2}{W-M} \frac{\sigma\mathbf{p}}{E+M} \frac{\sigma\mathbf{p}'}{E'+M}, \tag{5.8}$$

$$m = \{E_q(E_q + E + E' - W)\}^{-1}, \quad n = \{E_q(E_q + \omega + \omega' - W)\}^{-1},$$

$$E_q = \sqrt{(\mathbf{p} + \mathbf{p}')^2 + M^2}.$$

Для интересующей нас задачи рассеяния асимптотическое поведение $a(\mathbf{p})$ имеет следующий вид:

$$a(\mathbf{p}) = \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0) + f(\mathbf{p})\, \delta_+(E + \omega - W), \tag{5.9}$$

где $\delta_+(x) = i\pi\delta(x) - x^{-1}$, а $\mathbf{p}_0$ — импульс падающей волны, соответствующий $E_0 + \omega_0 = W$. Тогда для амплитуды расходящейся волны получаем следующее уравнение:

$$f(\mathbf{p}) = \frac{g^2}{32\pi^3} R(\mathbf{p}, \mathbf{p}_0) + \frac{ig^2}{32\pi^2} \int d\mathbf{p}' R(\mathbf{p}, \mathbf{p}') f(\mathbf{p}')\, \delta(E' + \omega' - W) + \\ + \frac{g^2}{32\pi^3} \int d\mathbf{p}' \frac{R(\mathbf{p}, \mathbf{p}') f(\mathbf{p}')}{W - E' - \omega'}. \tag{5.10}$$

Для решения уравнения (5.10) необходимо провести отделение угловых переменных. Для этого разложим амплитуду расходящейся волны в ряд по ортогональным полиномам

$$f(\mathbf{p}) = \sum L_l^{\pm} \left(\frac{\mathbf{p}}{p}, \frac{\mathbf{p}_0}{p_0}\right) f_{jl}(p). \tag{5.11}$$

Аналогичное разложение необходимо провести и для ядра $R(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$. В соотношении (5.11) $L^{\pm}$ имеют вид [73]:

$$\left.\begin{aligned} L_l^{+}(\mathbf{n}, \mathbf{n}') &= (l+1)P_l(\cos\theta) - i\sigma\,[\mathbf{n}\mathbf{n}']\,P_l^1(\cos\theta) \\ &\qquad \text{при } j = l + \frac{1}{2}, \\ L_l^{-}(\mathbf{n}, \mathbf{n}') &= lP_l(\cos\theta) + i\sigma\,[\mathbf{n}, \mathbf{n}']\,P_l^1(\cos\theta) \\ &\qquad \text{при } j = l - \frac{1}{2}. \end{aligned}\right\} \tag{5.12}$$

В результате отделения угловых переменных получаем следующее уравнение для амплитуды расходящейся волны в состоянии с заданными значениями полного и орбитального моментов:

$$f_{jl}(p) = \frac{g^2\,{}^{jl}}{32\pi^3} R(p, p_0)\left\{1 + i\,\frac{g^2}{2}\,\frac{p_0E_0\omega_0}{E_0+\omega_0} f_{jl}(p_0)\right\} + \\ + \frac{g^2}{8\pi^2}\int \frac{p'^2dp'\,{}^{jl}R(p, p')\,f_{jl}(p')}{W - E' - \omega'}. \tag{5.13}$$

В уравнении (5.13) ядро ${}^{jl}R$ связано с ${}^{jl}S$ и ${}^{jl}T$ формулой (5.6). При этом:

$${}^{jl}S = [(W-M)J_{k_1}(E+E'-W) + \\ + (E+E'+\omega+\omega'-M-W)J_{k_1}(\omega+\omega'-W)] + \\ + \frac{p}{E+M}\,\frac{p}{E'+M}\,[(W+M)J_{k_2}(E+E'-W) + \\ + (E+E'+\omega+\omega'+M-W)J_{k_2}(\omega+\omega'-W)], \tag{5.14}$$

$${}^{jl}T = \delta_{j,\,1/2}\,\delta_{l,\,0}\,\frac{1}{W+M} + \delta_{j,\,1/2}\,\delta_{l,\,1}\,\frac{1}{W-M}\,\frac{p}{E+M}\,\frac{p'}{E'+M}, \tag{5.15}$$

где

$$J_k(z) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} P_k(x)\,\frac{dx}{E_q(E_q+z)}, \quad E_q = \sqrt{M^2+p^2+p'^2+2pp'x},$$

$P_k(x)$ — полиномы Лежандра. Для состояния $j = 1/2$ и $l = 0$ ($S_{1/2}$) $k_1 = 0$, $k_2 = 1$; для $j = 1/2$, $l = 1$ ($P_{1/2}$) $k_1 = 1$, $k_2 = 0$; для $j = 1/2$, $l = 1$ ($P_{3/2}$) $k_1 = 1$, $k_2 = 2$ и т. д. Ядро ${}^{jl}T$ соответствует цепочке с поглощением. Это ядро обладает при больших p недопустимой сингулярностью, приводящей, как об этом говорилось в § 3, к отсутствию конечных решений. Поэтому, следуя работе [6], мы ограничимся рассмотрением состояний, для которых ядро T не даёт никакого вклада. Отметим, что ядро T возникает лишь в состояниях с изотопическим и механическим спинами, равными половине [см. (5.2) и (5.15)].

Функция f_{jl} удовлетворяет уравнению (5.13), которое содержит комплексные выражения. Можно перейти к уравнению с действительными коэффициентами и для действительной функции. Для этого проделаем следующее преобразование *):

$$u_{jl}=f_{jl}\left[1+\frac{ig^2}{2}\frac{p_0\omega_0E_0}{E_0+\omega_0}f_{jl}(p_0)\right]^{-1}. \tag{5.16}$$

Тогда для функции u_{jl} получаем следующее уравнение:

$$u_{jl}(p)=\frac{g^2}{32\pi^3}R(p,p_0)+\frac{g^2}{8\pi^2}\int\frac{p'^2dp'}{W-E'-\omega'}\,{}^{jl}R(p,p')\,u_{jl}(p'). \tag{5.17}$$

Функция $u_{jl}(p_0)$ определяет значение сдвига фазы рассеяния π-мезона на нуклоне с помощью следующей формулы:

$$\delta_{jl}=-\operatorname{arc\,tg}\frac{4\pi^2p_0\omega_0E_0}{E_0+\omega_0}u_{jl}(p_0). \tag{5.18}$$

В работе [6] уравнение (5.17) было решено численно для состояний с изотопическим спином $I=3/2$ и $j=1/2$, $l=0$ (${}^{3/2}S_{1/2}$-состояние) и $j=3/2$, $l=1$ (${}^{3/2}P_{3/2}$-состояние). Однако прежде чем излагать результаты численного решения, сделаем несколько замечаний относительно уравнения (5.17). Нерелятивистское рассмотрение уравнения (5.17) приводит к выводу, что для $I=3/2$ в ${}^{3/2}S_{1/2}$- и ${}^{3/2}P_{1/2}$-состояниях эффективный потенциал взаимодействия нуклона и мезона соответствует отталкиванию частиц. Напротив, в состоянии ${}^{3/2}P_{3/2}$ эффективный потенциал соответствует силам притяжения, что соответствует результатам, упомянутым в начале настоящего параграфа. Отметим также, что первое слагаемое правой части уравнения (5.17) представляет собой борновское приближение функции $u_{jl}(p)$. Поэтому обозначим:

$$u^{\text{Б}}_{jl}(p)=\frac{g^2}{32\pi^3}\,{}^{jl}R(p,p_0). \tag{5.19}$$

В состояниях с эффективным потенциалом притяжения R отрицательно, напротив, для случая отталкивания R положительно. Далее знаменатель подинтегрального выражения в уравнении (5.17) для большинства значений p' отрицателен. Всё это приводит к тому, что для состояний с отталкиванием решение уравнения (5.17) оказывается меньше борновского приближения, и, напротив, для состояний с притяжением — больше приближения Борна.

*) Введённая таким образом функция u связана с функцией f работы [6] следующим соотношением:

$$u=4\pi\frac{p_0\omega_0E_0}{E_0+\omega_0}\sqrt{\frac{E+M}{E_0+M}}f.$$

Укажем, наконец, каким образом можно определить асимптотическое поведение решений уравнения (5.17). Для этого в качестве

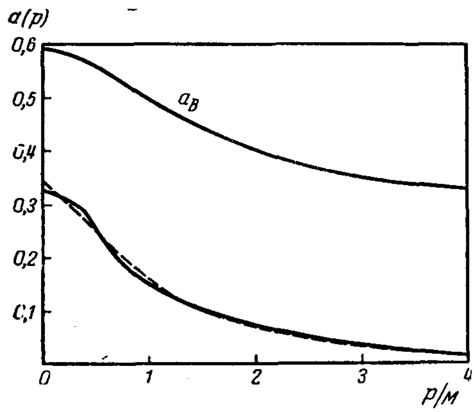

Рис. 3. Волновая функция[6] и её борновское приближение для $S_{1/2}$, $I = {}^3/_2$ при $\frac{g^2}{4\pi} = 10$.

примера рассмотрим, следуя[84], асимптотическое поведение решения

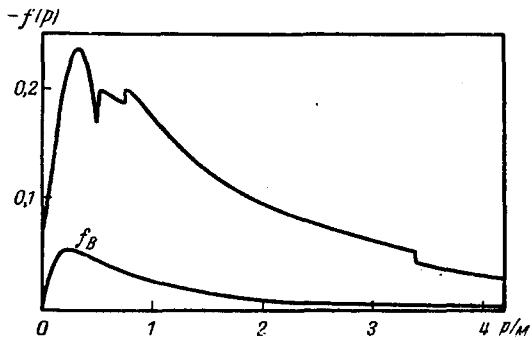

Рис. 4. Волновая функция[6] и её борновское приближение для $P_{3/2}$, $I = {}^3/_2$ при $\frac{g^2}{4\pi} = 4{,}6\,\pi$ и $P_0 = 0{,}22\,M$.

уравнения (5.17) для состояния ${}^3/_2P_{3/2}$. В области $p \gg M$ уравнение (5.17) можно приближённо представить в следующем виде:

$$u_{ass}(p) = \frac{C}{p^{5/2}} + \frac{g^2}{32\pi^2}\int\limits_q^p dp' \frac{p'^{3/2}}{p^{5/2}}\, u_{ass}(p') + \frac{g^2}{32\pi^2}\int\limits_p^\infty \frac{dp'}{p'^{3/2}}\, p^{1/2} u_{ass}(p'), \tag{5.20}$$

где $p \gg q \gg M$, C — постоянная, возникшая от борновского члена и от интеграла по p' от нуля до q. Уравнение (5.20) легко может быть сведено к дифференциальному уравнению

$$\left(\frac{1}{p^2}(p^{5/2}u_{ass})'\right)' = -\frac{3g^2}{32\pi^3}\frac{u_{ass}}{p^{3/2}}. \tag{5.21}$$

Легко видеть, что

$$u_{ass} \sim p^n,$$

где

$$n = -1 \pm \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{3g^2}{32\pi^2}}. \tag{5.22}$$

Решение, соответствующее знаку $+$ в (5.22), должно быть отброшено, так как оно соответствует сингулярному решению. Таким образом,

$$u_{ass} \sim p^{-1-\frac{3}{2}\sqrt{1-\frac{g^2}{24\pi^2}}}. \tag{5.23}$$

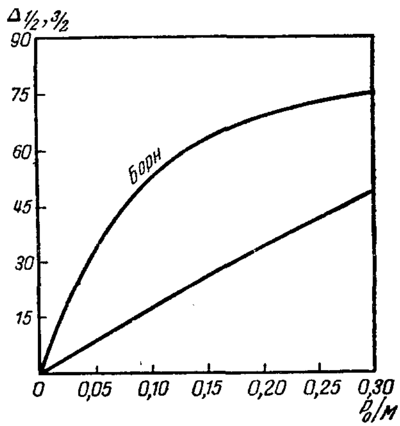

Рис. 5. Зависимость фазового сдвига для $S_{1/2}$-волны от импульса P_0 в системе центра инерции; $\frac{g^2}{4\pi} = 15$.

Аналогичное исследование асимптотического поведения волновой функции может быть проведено и для других состояний.

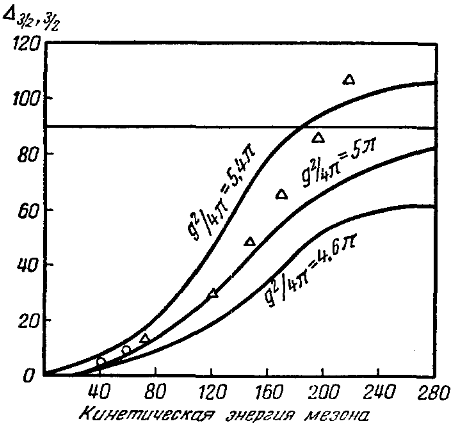

Рис. 6. Зависимость фазового сдвига для $P_{3/2}$ волны от кинетической энергии мезона в лабораторной системе.

В результате численных расчётов в работе [6] были получены волновые функции в ${}^{3/2}S_{1/2}$- и ${}^{3/2}P_{3/2}$- состояниях и соответствующие сдвиги фаз как функции энергии (см. рис. 3—6). В остальных состояниях оценки дают малые сдвиги фаз, не превышающие нескольких градусов. Из рис. 3 видно, что точная волновая функция ${}^{1/2}S_{1/2}$-состояния меньше волновой функции борновского приближения. Это, как говорилось выше, связано с наличием эффективного потенциала отталкивания в ${}^{3/2}S_{1/2}$-состоянии. Напротив (рис. 4), точная волновая функция ${}^{3/2}P_{3/2}$-состояния оказывается больше полученной в приближении Борна, что соответствует силам притяжения.

Сравнение с экспериментальными данными для ${}^{3/2}P_{3/2}$-состояния, как это видно из рис. 6, показывает, что теория даёт вполне удовлетворительный энергетический ход сдвига фазы. Наилучшее согласие получается при $g^2/4\pi = 16$. Сложнее обстоит дело с ${}^{3/2}S_{1/2}$-состоянием. Экспериментальная зависимость соответствующей фазы (δ_3) от энергии может быть описана следующей формулой:

$$\delta_3 = 11^\circ - 130^\circ \left(\frac{p_0}{M}\right). \tag{5.24}$$

Теория при $g^2/4\pi = 13$ даёт [ср. также рис. 5]

$$\delta_3 = -160^\circ \left(\frac{p_0}{M}\right). \tag{5.25}$$

Таким образом, линейно зависящий от импульса член формулы (5.24) близок к получаемому из теории. Однако не зависящего от энергии члена теория не даёт. Такое различие обусловлено тем фактом, что эффективный радиус действия сил, соответствующих уравнению (5.25), оказывается значительно меньше $\hbar/\mu c$ и соответствует потенциалу отталкивания. Напротив, (5.24) соответствует силам притяжения на больших расстояниях ($\sim \hbar/\mu c$), что даёт не зависящий от энергии член, и на малых расстояниях силам отталкивания, которые приводят к зависимости от энергии. Следует отметить, что экспериментальное значение радиуса сил отталкивания равно $4{,}8 \cdot 10^{-14}$ *см*, а теоретическое — равно $5{,}9 \cdot 10^{-14}$ *см*. Таким образом, можно сказать, что силы отталкивания в ${}^{3/2}S_{1/2}$-состоянии правильно описываются изложенной выше теорией, напротив, для получения сил притяжения в этом состоянии, повидимому, необходимо более детальное рассмотрение [86–87].

Исследованию вопроса о поведении S-фаз рассеяния π-мезонов с использованием метода Т. Д. посвящена работа [88], в которой рассматривалось нерелятивистское приближение. Для двух вариантов обрезания (при $p = M$ и при $p = 2M$) были вычислены S-фазы. Сдвиг фазы для ${}^{1/2}S_{1/2}$-состояния при малых энергиях меняет знак.

Однако в этой работе не проведены перенормировки и поэтому результаты для состояния с изотопическим спином $^1/_2$ могут быть существенно изменены перенормировкой. Близкие расчёты проводились в работах [89–90].

Метод Т. Д. применительно к рассеянию мезонов в симметричной псевдоскалярной теории с псевдовекторной связью использовался в работах [57–65]. Как говорилось в начале параграфа, нерелятивистское приближение псевдоскалярной и псевдовекторной связи дают совпадающие выражения для взаимодействия в P-состояниях, в связи с чем на этих работах мы не останавливаемся подробно. Отметим, что псевдовекторная связь, так же, как это было показано выше, даёт резонансный ход рассеяния π-мезонов *).

В целом применение метода Т. Д. к рассеянию мезонов позволяет сказать, что современная мезонная теория не противоречит эксперименту, и, во всяком случае, ещё далеко не исчерпана.

§ 6. НОВЫЙ МЕТОД ТАММА — ДАНКОВА

Для того чтобы избежать затруднений, характерных для первоначальной формулировки метода Т. Д. (см. § 3), Дайсон [7—9] предложил некоторую модификацию метода Т. Д., называемую в литературе «новый метод Тамма — Данкова» (Н. Т. Д.). Особенность Н. Т. Д. заключается в использовании представления о состоянии вакуума взаимодействующих полей. Вместо того, чтобы рассматривать амплитуды (1.6), как это делалось в старом методе Т. Д. (С. Т. Д), Дайсон предложил рассматривать матричные элементы следующего вида:

$$a(N, N') = [\Pi(N)\,\Pi(N')]^{-1/2}\,(\Psi_0^* C(N)\,A(N')\,\Psi), \tag{6.1}$$

где в отличие от соотношения (1.6) вместо Φ_0 используется Ψ_0'—вектор вакуумного состояния взаимодействующих полей. Благодаря использованию Ψ_0 формула (6.1) соответствует матричным элементам не только от операторов поглощения частиц $A(N')$, как это имело место в С. Т. Д., но также и матричным элементам от операторов образования частиц. Следует иметь в виду, что при вычислении матричных элементов (6.1) операторы поглощения частиц должны располагаться справа от операторов рождения. Таким образом, выражение (6.1) представляет собой матричный элемент от N-упорядоченного произведения операторов поля [20, 21]. Матричные элементы (6.1), следуя принятой в литературе терминологии, мы будем называть Н. Т. Д.-амплитудами. Смысл Н. Т. Д.-амплитуд менее очевиден, чем амплитуд старого метода Т. Д. Поэтому прежде всего мы рассмотрим взаимную связь тех и других амплитуд.

Подставляя выражения (1.2) для векторов состояний в формулу (6.1), легко получить следующее соотношение:

$$a(N, N') = \\ = \sum_M \beta^*(N+M)\,\alpha(N'+M)\binom{N+M}{M}^{1/2}\binom{N'+M}{M}^{1/2}, \tag{6.2}$$

где

$$\binom{N_1}{N} = \Pi(N_1)\,[\Pi(N)\,\Pi(N_1-N)]^{-1}. \tag{6.3}$$

---

*) Существенно, что все расчёты в случае псевдовекторной связи проводятся с помощью введения обрезания при больших импульсах.

Соотношение (6.2) позволяет выразить Н. Т. Д.-амплитуду через С. Т. Д.-амплитуды. Обратное соотношение, как это нетрудно проверить непосредственной подстановкой *), имеет следующий вид:

$$\beta^*(N_1)\,\alpha(N_2)=\sum_M(-1)^M a(N_1+M,\ N_2+M)\times$$

$$\times\binom{N_1+M}{M}^{1/2}\binom{N_2+M}{M}^{1/2}, \tag{6.4}$$

где $(-1)^M$ означает $(-1)^{\Sigma M}$, а $\sum M$ представляет собой сумму чисел заполнений M. С помощью соотношения (6.4) можно, зная все $a(N,\ N')$, соответствующие данному состоянию, определить все С. Т. Д.-амплитуды этого состояния, а также все С. Т. Д.-амплитуды вакуума взаимодействующих полей. Таким образом, знание Н. Т. Д.-амплитуд позволяет полностью описать как состояние Ψ, так и состояние Ψ_0.

Дайсоном было получено условие нормировки для Н. Т. Д.-амплитуд:

$$\sum_N\sum_{N'}|a(N,\ N')|^2=\text{const}. \tag{6.5}$$

Следует, однако, отметить, что при получении формулы (6.5) использовалось предположение об ограниченности сумм

$$\sum_N|\alpha(N)|^2 \quad \text{и} \quad \sum_N|\beta(N)|^2.$$

В современной теории поля этого фактически нет. Для получения сходящихся выражений необходимо провести перенормировку амплитуд $\alpha(N)$ и $\beta(N)$. Задача такой перенормировки пока ещё не решена. Условие нормировки (6.5) получено также в предположении, что С. Т. Д.-амплитуды обнаружения числа частиц больше некоторого ограниченного числа (скажем N_0), равны нулю как для состояния Ψ, так и для Ψ_0. Такое предположение, как об этом подробно говорилось выше (см. § 3), всегда имеет место в С. Т. Д. Кроме того, благодаря соотношению (6.2) предположение о равенстве нулю амплитуд старого метода

$$\alpha(N>N_0)=0, \qquad \beta(N'>N'_0)=0$$

соответствует условию $a(N'>N'_0,\ N>N_0)=0$.

---

*) При этом следует учесть тот факт, что для фиксированного $M+M'$ сумма $\sum_M(-1)^M\binom{M+M'}{M}$ равна нулю всегда, кроме случая $M+M'=0$.

Совершенно аналогично тому, как это делалось в С. Т. Д., в новом методе Тамма — Данкова для каждого конкретного приближения предлагается считать Н. Т. Д.-амплитуды для чисел заполнения больше некоторых равными нулю. Сходимость решений, получающихся в результате таких последовательных аппроксимаций, так же как и в старом методе, пока не исследована (ср. [91]).

Рассмотрим далее общий вопрос о граничных (или соответственно начальных) условиях для Н. Т. Д.-амплитуд [9, 10]. При этом сначала рассмотрим этот вопрос для нековариантных уравнений движения. Пусть имеется стационарное состояние с энергией W. Тогда уравнение движения для амплитуды $a(N, N')$ имеет следующий вид:

$$(W+E_N-E_{N'})\,a(N, N') = [\Pi(N)\,\Pi(N')]^{-1/2}\times \\ \times(\Psi_0^*[C(N)A(N'), H]\,\Psi). \tag{6.6}$$

Общий вид решения такого уравнения можно представить следующим образом (см., например, [26]):

$$a(N, N') = P\frac{f(N, N')}{W+E_N-E_{N'}} + c\delta(W+E_N-E_{N'}), \tag{6.7}$$

где P означает, что сингулярность следует понимать в смысле главного значения, а c — неопределённая константа, которую следует определить из граничных условий задачи. Такой вопрос возникает, вообще говоря, и для амплитуд старого метода. Однако для С. Т. Д.-амплитуд этот вопрос решается просто. Именно наличие δ-функции соответствует, например в задаче рассеяния, наличию на бесконечности падающей плоской волны, а также (в соответствующей комбинации с первым членом правой части формулы (6.7)) расходящейся сферической волны. При этом появление или непоявление δ-функций определяется в первую очередь энергетическими соображениями. Именно энергия должна быть достаточно велика для того, чтобы вообще возник вопрос о появлении δ-функций.

В случае же Н. Т. Д.-амплитуд имеется усложнение, связанное с появлением амплитуд «минус-частиц», т. е. амплитуд, для которых в формуле (6.2) N отлично от нуля. В этом случае энергетические соображения не всегда могут запретить появление δ-функций. Возникает неоднозначность решений. Чтобы такую неоднозначность устранить, обратимся к формуле (6.2), из которой следует, что если установить граничные условия для α и β, то тем самым будут установлены граничные условия для $a(N, N')$. О граничных условиях для α говорилось выше (§ 3). Рассмотрим теперь вопрос о граничных условиях для амплитуд вакуума. Можно утверждать, что для амплитуд вакуума невозможно появление δ-функций. В пользу этого можно привести следующий аргумент. Прежде всего из соображений релятивистской инвариантности энергия состояния вакуума. W_0 должна равняться нулю. Благодаря этому не возникает неоднозначности при решении системы уравнений для амплитуд $\beta(N)$.

Из изложенного вытекает, что согласно формуле (6.2) δ-функции вида $\delta(W+E_N-E_{N'})$ возникать не могут, если только N не равно нулю. Если же $N=0$, то δ-функции могут возникать, и их появление или непоявление в этом случае определяется обычными граничными условиями.

Перейдём теперь к ковариантной формулировке нового метода Т. Д. Чтобы избежать неоднозначности в выделении расходящихся величин, мы будем рассматривать уравнение в координатном представлении, а матричные элементы будем строить от операторов в представлении взаимодействия с помощью волновых функционалов этого же представления (ср. § 2).

Таким образом, ниже будут рассматриваться матричные элементы от N-упорядоченных произведений операторов следующего вида (ср. также [92]):

$$\begin{aligned}(\Psi_0^*(\sigma)\,N\{\bar\psi_{\nu_1}(x_1)\ldots\bar\psi_{\nu_n}(x_n)\,\psi_{\mu_1}(y_1)\ldots\psi_{\mu_m}(y_m)\times\\ \times\varphi_{\alpha_1}(z_1)\ldots\varphi_{\alpha_r}(z_r)\}\,\Psi(\sigma))=\\ =\langle\bar\psi_{\nu_1}(x_1)\ldots\bar\psi_{\nu_n}(x_n)\,\psi_{\mu_1}(y_1)\ldots\psi_{\mu_m}(y_m)\times\varphi_{\alpha_1}(z_1)\ldots\varphi_{\alpha_r}(z_r)\rangle_a.\end{aligned}\qquad(6.8)$$

Благодаря тому, что волновые функционалы $\Psi(\sigma)$ и $\Psi_0(\sigma)$ подчиняются уравнению (2.1), для матричного элемента (6.8) возникает следующее уравнение движения:

$$i\frac{\delta}{\delta\sigma(\xi)}\left(\Psi_0^*(\sigma)\,N\{\quad\}\,\Psi(\sigma)\right)=(\Psi_0^*(\sigma)\,[N\{\quad\},\,H(\xi)]\,\Psi(\sigma)).\qquad(6.9)$$

В результате N-упорядочения коммутатора, возникающего в правой части уравнения (6.9), получаются, вообще говоря, матричные элементы, отличающиеся от Н. Т. Д.-амплитуды, стоящей в левой части уравнения (6.9). Полная система уравнений для связанных таким образом друг с другом амплитуд оказывается бесконечной. Такую систему уравнений мы ниже будем рассматривать совершенно аналогично тому, как это делалось в предыдущем параграфе при рассмотрении системы уравнений для С. Т. Д.-амплитуд, т. е. в каждом конкретном приближении будут считаться отличными от нуля лишь несколько амплитуд, уравнения для которых должны решаться точно.

Укажем, наконец, на отличие уравнения (6.9) от соответствующего уравнения (2.10), получаемого в старом методе Т. Д. Благодаря наличию в уравнении (6.9) коммутатора, число операторов в N-произведениях правой части может превышать число операторов в N-произведении левой части лишь на единицу (для $H\sim\bar\psi O\psi\varphi$).

Это приводит к тому, что диаграмм, соответствующих вакуумным замкнутым петлям типа, показанного на рис. 7, и подобным им, не возникает[7]. Действительно, для получения таких петель необходимо возникновение трёх частиц: кванта поля и пары. В случае же уравнения (2.10) старого метода Т. Д. возможно возникновение сразу трёх частиц, что и приводило там к появлению вакуумных расходимостей. Отсутствие таких расходимостей в Н. Т. Д. является существенным достоинством этого метода. Согласно изложенному ранее для нековариантных уравнений движения можно сформулировать граничные условия для уравнения (6.9). Удобно это проделать, перейдя от (6.9) к интегральному уравнению, учитывающему граничные условия. Такое уравнение имеет следующий вид:

Рис. 7.

$$i(\Psi_0^*(\sigma_x) N\{\quad\} \Psi(\sigma_x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \varepsilon(x-\xi) \times$$
$$\times (\Psi_0^*(\sigma_\xi)[N\{\quad\}, H(\xi)] \Psi(\sigma_\xi)) + a(x_1, \ldots, z_r), \tag{6.10}$$

где интегрирование проводится по всему пространству — времени, $\varepsilon(x) = \pm {}^1/_2$ $(x_0 \gtrless 0)$. При этом интеграл следует понимать так, что при $t = \pm\infty$ подинтегральное выражение стремится достаточно быстро к нулю.

В импульсном представлении интеграл от $-\infty$ до $+\infty$ и $\varepsilon(x-\xi)$ приводят к появлению сингулярного знаменателя, точнее, к появлению главного значения такой сингулярности. Функция $a(x_1, \ldots, z_r)$ соответствует δ-функциям импульсного представления. Согласно изложенному ранее для случая минус-частиц $a(x_1, \ldots, z_r)$ должно быть опущено. Дла случая же плюс-частиц появление $a(x_1, \ldots, z_r)$ определяется энергетическими соображениями и конкретными условиями каждой задачи*).

В заключение настоящего параграфа остановимся на связи амплитуд (6.8) координатного представления с не зависящими от времени амплитудами импульсного представления. Для простоты рассмотрим случай $t = \mathrm{const}$. Благодаря тому, что зависимость от времени векторов состояний определяется формулами (ср. формулу (2.16)):

$$\Psi(\sigma) = e^{i(H_0 - \mathcal{E})t}\Psi \quad \text{и} \quad \Psi_0(\sigma) = e^{i(H_0 - \mathcal{E}_0)t}\Psi_0, \tag{6.11}$$

где $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}_0$ — соответственно энергия рассматриваемого состояния

*) Отметим следующий факт. В методе Т. Д. при рассмотрении задач столкновения (или вообще взаимодействия) частиц можно формулировать задачу таким образом, что, например, две сталкивающиеся частицы, будучи достаточно далеко друг от друга, не взаимодействуют между собой, но взаимодействуют с собственным полем. Иными словами, можно рассматривать задачу взаимодействия реальных, а не «голых» частиц.

и энергия физического вакуума, можно представить, например, амплитуду одного нуклона в следующем виде:

$$\langle\psi(x_1)\rangle_t = \frac{1}{L^{3/2}}\sum_n\sum_{\mathbf{p}} u^n_\alpha(\mathbf{p})\, e^{ipx_1 + i(p_0 - W)t}\langle B_n(\mathbf{p})\rangle. \qquad (6.12)$$

Аналогично для амплитуды одного мезона можно написать следующее разложение:

$$\langle\varphi_s(x_1)\rangle_t = \frac{1}{L^{3/2}}\sum_{\mathbf{k}}\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}\, e^{ikx_1 + i(\omega_k - W)t}\langle Q_s(\mathbf{k})\rangle. \qquad (6.13)$$

В приведённых формулах $W = \mathscr{E} - \mathscr{E}_0$ и равно наблюдаемому значению энергии системы.

Введённые в формулах (6.12), (6.13) амплитуды $\langle B\rangle$ и $\langle Q\rangle$ не зависят от времени и определяются формулами:

$$\langle B_n(\mathbf{p})\rangle \equiv (\Psi_0^* B_n(\mathbf{p})\Psi), \qquad \langle Q(\mathbf{k})\rangle \equiv (\Psi_0^* Q(\mathbf{k})\Psi). \qquad (6.14)$$

Для более сложных амплитуд можно также ввести не зависящие от времени амплитуды по формулам, аналогичным (6.12)—(6.14).

Наконец, для не зависящих от времени амплитуд уравнение (6.7) приводит, как это легко видно из вида функций $\Psi(\sigma)$ и $\Psi_0(\sigma)$, определяемых формулой (6.11), к уравнению движения (6.6).

В последующих двух параграфах мы рассмотрим конкретные проблемы взаимодействия двух нуклонов и нуклона и мезона в симметричной псевдоскалярной теории. На этих задачах будут показаны достоинства нового метода Т. Д., а также и те затруднения, стоящие на пути применения метода, решение которых ещё не найдено.

§ 7. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ДВУХ НУКЛОНОВ СОГЛАСНО НОВОМУ МЕТОДУ ТАММА — ДАНКОВА

В настоящем параграфе мы рассмотрим задачу взаимодействия двух нуклонов согласно новому методу Тамма — Данкова. В принятом ниже приближении полученные уравнения можно полностью перенормировать, что является существенным преимуществом нового метода. Кроме того, учёт «минус-частиц» позволяет просто получить фактически более высокое приближение по числу частиц, чем это было в старом методе.

Для задачи взаимодействия двух нуклонов примем отличными от нуля следующие амплитуды:

$$\langle\psi(x_1)\psi(x_2)\rangle_\sigma, \quad \langle\psi(x_1)\psi(x_2)\varphi_\alpha(x_3)\rangle_\sigma. \qquad (7.1)$$

Остальными амплитудами в этом приближении мы пренебрежём.

Тогда согласно уравнению (6.9) получаем:

$$i\frac{\delta}{\delta\sigma(x)}<\psi_\rho(x_1)\psi_\lambda(x_2)>_\sigma = g(S(x_2-x)\gamma_5\tau_\alpha)_{\lambda\mu}\times$$
$$\times<\varphi_\alpha(x)\psi_\rho(x_1)\psi_\mu(x)>_\sigma + g(S(x_1-x)\gamma_5\tau_\alpha)_{\rho\mu}\times$$
$$\times<\varphi_\alpha(x)\psi_\mu(x)\psi_\lambda(x_2)>_\sigma, \tag{7.2}$$

$$i\frac{\delta}{\delta\sigma(x')}<\varphi_\alpha(x)\psi_\rho(x_1)\psi_\mu(x)>_\sigma =$$
$$= -ig(ZS(x-x')\Delta(x'-x)\gamma_5\tau_\alpha)_{\mu\varkappa}<\psi_\rho(x_1)\psi_\varkappa(x')>_\sigma +$$
$$+ ig(ZS(x_1-x')\Delta(x'-x)\gamma_5\tau_\alpha)_{\rho\varkappa}<\psi_\mu(x)\psi_\varkappa(x')>_\sigma. \tag{7.3}$$

Знак Z имеет следующий смысл:

$$(ZS(x')\Delta(x'')) = S^{(+)}(x')\Delta^{(-)}(x'') - S^{(-)}(x')\Delta^{(+)}(x''). \tag{7.4}$$

При получении уравнения (7.2) не делалось никаких пренебрежений, а в уравнении (7.3) пренебрежено матричными элементами от четырёх операторов нуклонного поля вида

$$<\psi_\rho(x_1)\psi_\mu(x)\bar\psi_\nu(x')\psi_\varkappa(x')>_\sigma.$$

Полученную систему уравнений следует согласно методу Тамма — Данкова решать точно. Выше, при рассмотрении С. Т. Д., говорилось, что существует приближённый способ исключения всех амплитуд, кроме одной [22–25] (так называемый метод Леви — Клейна). Сравнительная простота такого подхода привела к появлению ряда работ, в которых с помощью нового метода Тамма — Данкова строятся потенциалы ядерных сил [93–95]. Однако из-за плохой сходимости полученного ряда законность такого способа сомнительна [23].

Ограничимся энергиями, при которых невозможно тормозное излучение мезонов сталкивающимися нуклонами. В этом случае при интегрировании уравнения (7.3), согласно соотношению (6.10), можно, как об этом говорилось выше, опустить член, соответствующий $a(x_1,\ldots)$. Проинтегрировав уравнение (7.3) и подставив определённую таким образом амплитуду двух нуклонов и мезона в уравнение (7.2), получаем следующее уравнение для амплитуды двух нуклонов:

$$i\frac{\delta}{\delta\sigma(x)}<\psi_\rho(x_1)\psi_\lambda(x_2)>_\sigma = -3g^2\int dx'\varepsilon(x-x')\times$$
$$\times\{(S(x_2-x)\gamma_5[ZS(x-x')\Delta(x'-x)]\gamma_5)_{\lambda\varkappa}<\psi_\rho(x_1)\psi_\varkappa(x')>_{\sigma'} +$$
$$+(S(x_1-x)\gamma_5[ZS(x-x')\Delta(x'-x)]\gamma_5)_{\rho\varkappa}<\psi_\varkappa(x')\psi_\lambda(x_2)>_{\sigma'}\} +$$
$$+g^2\int dx'\varepsilon(x-x')\{-(S(x_1-x)\gamma_5\tau_\alpha)_{\rho\mu}([ZS(x_2-x')\Delta(x'-x)]\times$$
$$\times\gamma_5\tau_\alpha)_{\lambda\varkappa} + (S(x_2-x)\gamma_5\tau_\alpha)_{\lambda\mu}([ZS(x_1-x')\Delta(x'-x)]\gamma_5\tau_\alpha)_{\rho\varkappa}\}\times$$
$$\times<\psi_\mu(x)\psi_\varkappa(x')>_{\sigma'}. \tag{7.5}$$

Два слагаемых в первом интеграле правой части (7.5) соответствуют диаграммам собственной энергии нуклонов (рис. 8, *а*, *б*). Второй интеграл соответствует диаграммам рассеяния (рис. 8, *в*, *г*).

Выражения, соответствующие диаграммам *а* и *б*, бесконечны и подлежат перенормировке. Поэтому прежде всего мы займёмся рассмотрением этих выражений.

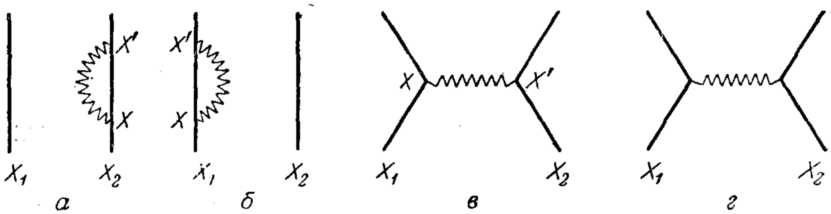

Рис. 8.

Прежде всего с помощью формул (2.7) можно получить следующее соотношение:

$$M(x-x') \equiv -\varepsilon(x-x')\gamma_5[ZS(x-x')\Delta(x'-x)]\gamma_5 = \\ = \frac{1}{8}\{-\gamma_5 S_F(x-x')\gamma_5\Delta_F(x-x') + [\gamma_4\gamma_5 S_F(x'-x)\gamma_5\gamma_4 \times \\ \times \Delta_F(x'-x)]^*\}, \tag{7.6}$$

где знак * означает эрмитовское сопряжение. Таким образом, соотношение (7.6) позволяет выразить $M(x)$ через сингулярные функции, встречающиеся обычно в теории возмущений. Для выделения из $M(x)$ расходящихся выражений можно поэтому использовать способы, развитые в теории возмущений. Именно,

$$M(x) = A_N\,\delta(x) + B_N\left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + M\right)\delta(x) + M_c(x). \tag{7.7}$$

Здесь A_N и B_N — неопределённые (бесконечные) константы, а $M_c(x)$ уже не содержит расходящихся величин и имеет следующий вид:

$$M_c(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int e^{ipx} M_c(p)\,dp, \tag{7.8}$$

где

$$M_c(p) = (i\mathbf{p} + M)\,A(p^2) + B(p^2), \tag{7.9}$$

$$A(p^2) = -\frac{i}{16\pi^2}\int_0^1 du\,(1-u)\left\{\frac{2M^2u^2}{\mu^2(1-u)+M^2u^2} + \right. \\ \left. + \ln\left|\frac{\mu^2(1-u)+M^2u^2}{\mu^2(1-u)+p^2u(1-u)+uM^2}\right|\right\}, \tag{7.10}$$

$$B(p^2) = -\frac{iM}{16\pi^2}\int_0^1 du\,u\ln\left|\frac{\mu^2(1-u)+M^2u^2}{\mu^2(1-u)+p^2(u-u^2)+uM^2}\right|. \tag{7.11}$$

Соотношения (7.6) — (7.7) позволяют записать первый интеграл правой части уравнения (7.5) в следующем виде:

$$\left\{3g^2A_NS_{\lambda\varkappa}(x_2-x)+3g^2B_N\left(S(x_2-x)\left(\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu}+M\right)_{\lambda\varkappa}\right)\right\}\times$$

$$\times\langle\psi_\rho(x_1)\psi_\varkappa(x)\rangle_\sigma+\left\{3g^2A_NS_{\rho\varkappa}(x_1-x)+\right.$$

$$\left.+3g^2B_N\left(S(x_1-x)\left(\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu}+M\right)_{\rho\varkappa}\right)\right\}\langle\psi_\varkappa(x)\psi_\lambda(x_2)\rangle_\sigma+$$

$$+3g^2\int dx'\,\{(S(x_2-x)M_c(x-x'))_{\lambda\varkappa}\langle\psi_\rho(x_1)\psi_\varkappa(x')\rangle_{\sigma'}+$$

$$+(S(x_1-x)M_c(x-x'))_{\rho\varkappa}\langle\psi_\varkappa(x')\psi_\lambda(x_2)\rangle_{\sigma'}\}. \qquad (7.12)$$

Оператор $\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu}$ действует не только на $\psi_\varkappa(x)$, но также должен применяться к σ. В частном случае σ, соответствующей $t=\mathrm{const}$, применение $\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu}$ к σ соответствует $\gamma_4\frac{\partial}{\partial x_4}$.

Расходящиеся члены в (7.12), содержащие A_N, можно исключить с помощью перенормировки массы нуклона. Действительно, если добавить к гамильтониану (2.3) выражение $\delta M\bar{\psi}\psi$, то, согласно формуле (6.9), в уравнении (7.2) и, следовательно, в уравнении (7.5) возникнут выражения, подобные членам в (7.12), пропорциональные A_N. При этом, положив $\delta M=i3g^2A_N$, можно исключить неопределённую константу A_N. Далее, исключение B_N производится с помощью перенормировки заряда. Прежде всего отметим, что так как для оператора $\psi_\varkappa(x)$ используется представление взаимодействия, то (для простоты примем σ соответствующей $t=\mathrm{const}$)

$$\left(\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu}+M\right)\langle\psi_\rho(x_1)\psi_\varkappa(x)\rangle_t=-i\gamma_4\frac{\partial}{\partial t}\langle\psi_\rho(x_1)\psi_\varkappa(x)\rangle_t. \qquad (7.13)$$

В правой части оператор дифференцирования применяется лишь к аргументу векторов состояний и не применяется к аргументу $\psi(x)$. Если теперь мы проинтегрируем обе стороны уравнения (7.5) по трёхмерному пространству $\mathbf{x}$, то в левой части возникнет производная по времени, а в правой части члены, содержащие B_N, приведут к следующему:

$$3g^2B_Ni\frac{\partial}{\partial t}\int d\mathbf{x}\,(\Psi_0^*(t)\,N\{\psi_\rho(x_1)\,(S(x_2-x)\,\gamma_4\psi(x))_\lambda+$$

$$+(S(x_1-x)\,\gamma_4\psi(x))_\rho\,\psi_\lambda(x_2)\}\,\Psi(t)). \qquad (7.14)$$

В выражении (7.14) оператор $\frac{\partial}{\partial t}$ применяется так же, как в формуле (7.13), только к аргументам векторов состояний. Учтя соотношение

$$\psi(x) = \int S(x - x')\gamma_4 \psi(x')\,d\mathbf{x}', \tag{7.15}$$

получаем вместо (7.14) следующее выражение:

$$6g^2 B_N i \frac{\partial}{\partial t} \langle \psi_\rho(x_1)\psi_\lambda(x_2)\rangle_t . \tag{7.16}$$

Поэтому можно исключить неопределённую константу B_N с помощью введения перенормированного заряда:

$$g'^2 = \frac{g^2}{1 + 6g^2 B_N} . \tag{7.17}$$

Таким образом, после перенормировки массы нуклонов и после перенормировки константы связи уравнение для амплитуды двух нуклонов принимает вид:

$$\begin{gathered}
i\frac{\delta}{\delta\sigma(x)} \langle \psi_\rho(x_1)\psi_\lambda(x_2)\rangle_\sigma = \\
= 3g'^2 \int dx' (S(x_2 - x) M_c(x - x'))_{\lambda\varkappa} \langle \psi_\rho(x_1)\psi_\varkappa(x')\rangle_{\sigma'} + \\
+ 3g'^2 \int dx' (S(x_1 - x) M_c(x - x'))_{\rho\varkappa} \langle \psi_\varkappa(x')\psi_\lambda(x_2)\rangle_{\sigma'} + \\
+ g'^2 \int dx' \varepsilon(x - x') \{ -(S(x_1 - x)\gamma_5\tau_\alpha)_{\rho\mu} \times \\
\times ([ZS(x_2 - x')\Delta(x' - x)]\gamma_5\tau_\alpha)_{\lambda\varkappa} + (S(x_2 - x)\gamma_5\tau_\alpha)_{\lambda\mu} \times \\
\times ([ZS(x_1 - x')\Delta(x' - x)]\gamma_5\tau_\alpha)_{\rho\varkappa} \} \langle \psi_\mu(x)\psi_\varkappa(x')\rangle_{\sigma'} .
\end{gathered} \tag{7.18}$$

Это уравнение уже не содержит расходящихся величин и может быть использовано для анализа взаимодействия двух нуклонов. Отметим, что фактически (7.18) представляет собой систему четырёх уравнений для четырёх амплитуд

$$\langle \psi_\rho^{\varepsilon_1}(x_1)\psi_\lambda^{\varepsilon_2}(x_2)\rangle_\sigma ,$$

где ε_1 и ε_2 суть $+$ или $-$. Практически нельзя исключить три амплитуды и получить одно уравнение. Это исключение можно провести, используя теорию возмущений. Именно теорией возмущений, т. е. последовательными итерациями, приводящими к оператору взаимодействия в виде ряда по степеням константы связи, пользуются в методе Леви—Клейна. В нулевом приближении при этом можно пренебречь амплитудами для минус-частиц и уравнениями для них. Тогда вместо (7.18) получаем:

$$i\frac{\delta}{\delta\sigma(x)}\left\langle\psi_\rho^{(+)}(x_1)\psi_\lambda^{(+)}(x_2)\right\rangle_\sigma=$$
$$=3g'^2\int dx'\left(S^{(+)}(x_2-x)M_c(x-x')\right)_{\lambda\varkappa}\left\langle\psi_\rho^{(+)}(x_1)\,\psi_\varkappa^{(+)}(x')\right\rangle_{\sigma'}+$$
$$+3g'^2\int dx'\left(S^{(+)}(x_1-x)M_c(x-x')\right)_{\rho\varkappa}\left\langle\psi_\varkappa^{(+)}(x')\,\psi_\lambda^{(+)}(x_2)\right\rangle_{\sigma'}+$$
$$+g'^2\int dx'\varepsilon(x-x')\left\{\left(S^{(+)}(x_1-x)\gamma_5\tau_\alpha\right)_{\rho\mu}\times\right.$$
$$\times\left(S^{(+)}(x_2-x')\Delta^{(+)}(x-x')\gamma_5\tau_\alpha\right)_{\lambda\varkappa}-\left(S^{(+)}(x_2-x)\gamma_5\tau_\alpha\right)_{\lambda\mu}\times$$
$$\left.\times\left(S^{(+)}(x_1-x')\Delta^{(+)}(x-x')\gamma_5\tau_\alpha\right)_{\rho\varkappa}\left\langle\psi_\mu^{(+)}(x)\,\psi_\varkappa^{(+)}(x')\right\rangle_{\sigma'}\right\}.\tag{7.19}$$

Последний интеграл в уравнении (7.19) в точности совпадает с оператором взаимодействия двух нуклонов, полученным в уравнении для двух частиц согласно старому методу Т. Д. Единственное отличие заключается в том, что в уравнении (7.19) перед соответствующим членом стоит перенормированная константа, в то время как в уравнении (3.5) была не перенормированная. Другое отличие уравнения (7.19) от (3.5) состоит в различных собственно-энергетических членах. Именно, в старом методе собственно-энергетические члены были бесконечными и не были перенормированы. В уравнении нового метода перенормировка проведена, и в (7.13) имеются лишь конечные выражения.

§ 8. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ π-МЕЗОНА И НУКЛОНА СОГЛАСНО НОВОМУ МЕТОДУ ТАММА — ДАНКОВА

Новый метод Т. Д. позволяет, в принципе, несколько дальше продвинуться в изучении рассеяния π-мезонов нуклонами, чем это было достигнуто в старом методе. Следует отметить, что, как это будет показано ниже, несмотря на определённый успех в трактовке собственно энергетических членов, новый метод Т. Д. пока ещё не даёт полного решения возникающих проблем перенормировки. Однако ценным является то, что новый метод позволяет всё же рассмотреть более высокое приближение и таким образом оценить правильность результатов, полученных в старом методе применительно к рассеянию мезонов.

В первом приближении нового метода Т. Д. для задачи рассеяния π-мезона на нуклоне примем равными нулю все амплитуды, кроме

$$\left\langle\psi(x)\right\rangle_\sigma,\quad\left\langle\psi(x_1)\varphi_\alpha(x_2)\right\rangle_\sigma,\quad\left\langle\psi(x_1)\varphi_\alpha(x_2)\varphi_\beta(x_3)\right\rangle_\sigma,$$
$$\left\langle\bar\psi(x_1)\,\psi(x_2)\psi(x_3)\right\rangle_\sigma.\tag{8.1}$$

Благодаря учёту минус-частиц это приближение охватывает значительно больше амплитуд, чем первое приближение С. Т. Д.

Тогда с помощью уравнения (6.9) легко получить следующую систему уравнений:

$$i\frac{\delta}{\delta\sigma(x')}\langle\psi(x)\rangle_\sigma = gS(x-x')\gamma_5\tau_\alpha\langle\psi(x')\varphi_\alpha(x')\rangle_\sigma, \tag{8.2}$$

$$\begin{gathered} i\frac{\delta}{\delta\sigma(x)}\langle\psi_\rho(x_1)\varphi_\alpha(x_2)\rangle_\sigma = -ig(ZS(x_1-x)\Delta(x-x_2))\times \\ \times(\gamma_5\tau_\alpha)_{\rho\delta}\langle\psi_\delta(x)\rangle_\sigma + g(S(x_1-x)\gamma_5\tau_\beta)_{\rho\delta}\langle\psi_\delta(x)\varphi_\beta(x)\varphi_\alpha(x_2)\rangle_\sigma - \\ - g\Delta(x_2-x)(\gamma_5\tau_\alpha)_{\varepsilon\delta}\langle\bar\psi_\varepsilon(x)\psi_\delta(x)\psi_\rho(x_1)\rangle_\sigma, \end{gathered} \tag{8.3}$$

$$\begin{gathered} i\frac{\delta}{\delta\sigma(x')}\langle\psi(x)\varphi_\beta(x)\varphi_\alpha(x_2)\rangle_\sigma = -ig[ZS(x-x')\Delta(x'-x_2)]\times \\ \times\gamma_5\tau_\alpha\langle\psi(x')\varphi_\beta(x)\rangle_\sigma - ig[ZS(x-x')\Delta(x'-x)]\times \\ \times\gamma_5\tau_\beta\langle\psi(x')\varphi_\alpha(x_2)\rangle_\sigma, \end{gathered} \tag{8.4}$$

$$\begin{gathered} i\frac{\delta}{\delta\sigma(x')}\langle\bar\psi_\varepsilon(x)\psi_\delta(x)\psi_\rho(x_1)\rangle_\sigma = \\ = -ig[ZS(x-x')\gamma_5\tau_\alpha S(x'-x)]_{\delta\varepsilon}\langle\psi_\rho(x_1)\varphi_\alpha(x')\rangle_\sigma + \\ + ig[ZS(x_1-x')\gamma_5\tau_\alpha S(x'-x)]_{\rho\varepsilon}\langle\varphi_\delta(x)\varphi_\alpha(x')\rangle_\sigma. \end{gathered} \tag{8.5}$$

В системе уравнений (8.2) — (8.5) уравнения (8.2) и (8.3) являются точными, напротив, уравнения (8.4) и (8.5) — приближённые — получены при пренебрежении четырёхчастичными амплитудами, иными словами, матричными элементами, содержащими N-произведение четырёх операторов. Согласно методу Тамма — Данкова приближённую систему уравнений (8.2) — (8.5) следует решать точно.

Для решения системы уравнений (8.2) — (8.5) необходимо использовать граничные условия. Рассматривая область энергии, в которой невозможно образование нуклон-антинуклонных пар и невозможно (или пренебрежимо мало) образование мезонов, можно в уравнениях (8.2), (8.4) и (8.5) избавиться от вариационной производной по σ, перейдя согласно формуле (6.10) к интегральному уравнению. При этом согласно сказанному выше для всех этих уравнений следует опустить в формуле (6.10) член, соответствующий $a(x_1,\ldots,z_l)$. Это позволяет выразить амплитуды $\langle\psi(x)\rangle_\sigma$, $\langle\psi(x_1)\varphi_\alpha(x_2)\varphi_\beta(x_3)\rangle_\sigma$ и $\langle\bar\psi(x_1)\psi(x_2)\psi(x_3)\rangle_\sigma$ через $\langle\psi(x_1)\varphi_\alpha(x_2)\rangle_\sigma$.

Поэтому можно получить одно уравнение для амплитуды $\langle\psi(x_1)\varphi_\alpha(x_2)\rangle_\sigma$. Это уравнение имеет следующий вид:

$$i\frac{\delta}{\delta\sigma(x)}\langle\psi(x_1)\varphi_\alpha(x_2)\rangle_\sigma = g^2\int dx'\varepsilon(x-x')\times$$
$$\times\{N_1Y_1+N_2Y_2+Y_H+Y_M\}, \tag{8.6}$$

где

$$Y_1 = S(x_1-x)\gamma_5(ZS(x-x')\Delta(x_2-x'))\gamma_5\langle\psi(x')\varphi_\beta(x)\rangle_{\sigma'} -$$
$$-\Delta(x_2-x)(ZS(x_1-x')\gamma_5S(x'-x)\gamma_5)\langle\psi(x)\varphi_\beta(x')\rangle_{\sigma'}, \tag{8.7}$$

$$Y_2 = (ZS(x_1-x)\Delta(x_2-x))\gamma_5S(x-x')\gamma_5\langle\psi(x')\varphi_\beta(x')\rangle_{\sigma'}, \tag{8.8}$$

$$Y_H = 3S(x_1-x)\gamma_5(ZS(x-x')\Delta(x'-x))\gamma_5\langle\psi(x')\varphi_\alpha(x_2)\rangle_{\sigma'}, \tag{8.9}$$

$$Y_M = -2\Delta(x_2-x)\,\mathrm{Tr}\,[ZS(x'-x)\gamma_5S(x-x')\gamma_5]\times$$
$$\times\langle\psi(x_1)\varphi_\alpha(x')\rangle_{\sigma'}. \tag{8.10}$$

Знак «Tr» означает след матрицы по спинорным индексам. N_1 и N_2 — операторы в пространстве изотопического спина (5.2) с собственными значениями (5.3). I — значение полного изотопического спина системы мезон + нуклон. Ниже мы будем рассматривать состояния такой системы при определённом значении полного изотопического

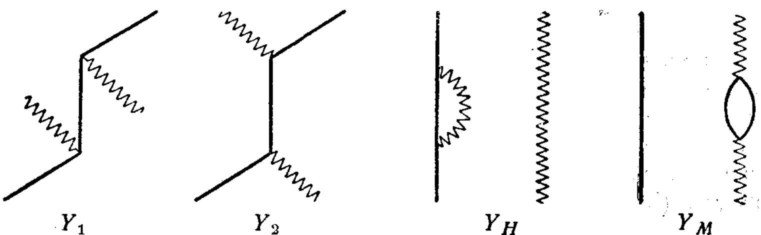

Рис. 9.

спина. Так как в таких состояниях операторы N_1 и N_2 диагональны, то мы нигде не будем выписывать изотопических индексов и будем понимать под операторами N_1 и N_2 их собственные значения. Выражениям (8.7) — (8.10) могут быть поставлены в соответствие следующие диаграммы (рис. 9).

Первые два выражения соответствуют рассеянию мезона на нуклоне, причём Y_1 — рассеянию с первоначальным испусканием мезона («цепочка с испусканием»), Y_2 — с первоначальным поглощением («цепочка с поглощением»). Y_H и Y_M соответствуют собственной энергии нуклона и мезона. Последние выражения бесконечны и подлежат перенормировке. К появлению расходимостей приводит также и Y_2 (см. ниже). Сколько-нибудь последовательное устранение расходящихся выражений в уравнении (8.6) наталкивается на ряд затруднений. Во-первых, перенормировка собственно-энергетических ядер приводит к появлению двух перенормированных зарядов [11]; во-вторых, конечные добавки, возникающие после выделения бесконечностей из собственно-энергетических членов, приводят к появлению в уравнениях дополнительных полюсов [10, 12] и, наконец, в-третьих, для состояний с изотопическим спином половина ядро уравнения (8.6) оказывается обладающим сингулярностью, приводящей к отсутствию конечных решений, что приводит к необходимости дополнительной перенормировки [27–34, 68].

Начнём с рассмотрения ядер Y_H и Y_M. Ядро Y_H, соответствующее собственно-энергетическому оператору нуклона, совпадает с таким же оператором в уравнении двух нуклонов. Поэтому перенормировка расходящихся выражений, возникающих в ядре Y_H, проводится совершенно аналогично тому, как это делалось в задаче двух нуклонов. В результате такой перенормировки в уравнении (8.6) следует сделать следующую замену:

$$g^2 \to g_1^2 = \frac{g^2}{1+3g^2B_N}, \tag{8.11}$$

$$\begin{aligned}\int dx'\varepsilon(x-x')\,Y_H \to 3\int dx' S(x_1-x)\,M_c(x-x')\times \\ \times\langle\psi(x')\,\varphi_\alpha(x_1)\rangle_{\sigma'}.\end{aligned} \tag{8.12}$$

Перенормировка расходимостей от поляризационного оператора, соответствующего Y_M, выше нами не рассматривалась. Как оказывается, в выбранном нами приближении такая перенормировка встречается с некоторыми трудностями. Аналогично тому, как это делалось выше для собственно-энергетического оператора нуклона, используя формулы (2.7), можно получить следующее соотношение:

$$\begin{aligned}P(x-x') &\equiv \varepsilon(x-x')\,\mathrm{Tr}\,\{Z\gamma_5 S(x'-x)\,\gamma_5 S(x-x')\} = \\ &= -\frac{i}{4}\,\mathrm{Im}\,\mathrm{Tr}\,\{S_F(x'-x)\,\gamma_5 S_F(x-x')\,\gamma_5\},\end{aligned} \tag{8.13}$$

позволяющее выразить $P(x)$ через обычно возникающий в первом неисчезающем приближении теории возмущений поляризационный оператор. Поэтому для выделения расходимостей можно использовать результаты теории возмущений. Тогда $P(x)$ можно представить в виде

$$P(x) = A_M\delta(x) + B_M(\Box-\mu^2)\,\delta(x) + P_c(x), \tag{8.14}$$

где A_M и B_M суть неопределённые (бесконечные) константы. $P_c(x)$

уже не содержит расходящихся величин и имеет следующий вид:

$$P_c(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{ipx} P_c(p^2)\, dp, \tag{8.15}$$

где

$$P_c(p^2) = \frac{i}{4\pi^2} \int_0^1 du \left\{ [3p^2(u-u^2) + M^2] \ln \left| \frac{M^2 + p^2(u-u^2)}{M^2 - \mu^2(u-u^2)} \right| - \right.$$
$$\left. - \frac{(p^2+M^2)(u-u^2)[M^2 - 3\mu^2(u-u^2)]}{M^2 - \mu^2(u-u^2)} \right\}. \tag{8.16}$$

Аналогично тому, как при перенормировке бесконечностей, возникающих от собственно-энергетического интеграла, A_N соответствовало перенормировке массы нуклона, так и для (8.14) A_M соответствует перенормировке массы мезона. Поэтому, добавляя к гамильтониану выражение $\delta\mu^2 \varphi_\alpha \varphi_\alpha$, можно исключить из уравнения (8.6) расходящуюся константу A_M. Для этого следует принять, что $\delta\mu^2 = ig^2 A_M$. Роль неопределённой постоянной B_M удобнее рассмотреть в импульсном представлении. Согласно общим формулам (2.18) вводим, используя систему покоя центра инерции, следующие не зависящие от времени амплитуды:

$$\langle B^n(\mathbf{p}) Q^\xi(-\mathbf{p}) \rangle \equiv b^{\varepsilon\xi}_{\nu\alpha}(\mathbf{p}) = \left(\frac{\sigma\mathbf{p}}{p}\right)^{\frac{1-\varepsilon}{2}}_{\nu\mu} a^{\varepsilon\xi}_{\mu\alpha}(\mathbf{p}). \tag{8.17}$$

Индекс ε принимает значения $+1$ для $n=1, 2$ (плюс-нуклоны) и -1 для $n=3, 4$ (минус-антинуклоны); ξ равно ± 1 соответственно для плюс- или минус-мезона; ν характеризует направление механического спина нуклона (или антинуклона), α — изотопический спиновый индекс. $\sigma_{\nu\mu}$ — спиновые матрицы Паули. Как говорилось выше, мы будем рассматривать состояния с определённым изотопическим спином, и поэтому индекс α ниже будем опускать.

Уравнение (8.6) можно тогда представить в следующем виде:

$$(W - \varepsilon E - \xi\omega)\, b^{\varepsilon\xi} = \xi g_1^2 B_M \frac{(W-\varepsilon E)^2 - \omega^2}{\omega} [b^{\varepsilon\xi} + b^{\varepsilon, -\xi}] + g_1^2 V_C^{\varepsilon\xi}, \tag{8.18}$$

где $V_C^{\varepsilon\xi}$ содержит конечные члены, возникшие от Y_H и Y_M, а также соответствующие выражения от Y_1 и Y_2. С помощью простых преобразований (8.18) можно представить в следующем виде:

$$(W - \varepsilon E - \xi\omega)\, b^{\varepsilon\xi} = g_{11}^2 V_C^{\varepsilon\xi} + \frac{W - \varepsilon E - \xi\omega}{\xi\omega}(g_{11}^2 - g_1^2)[V_C^{\varepsilon\xi} + V_C^{\varepsilon, -\xi}], \tag{8.19}$$

где

$$g_{11}^2 = \frac{g_1^2}{1 - 2g_1^2 B_M} = \frac{g^2}{1 - 3g^2 B_N - 2g^2 B_M}. \tag{8.20}$$

Таким образом, можно сказать, что попытка исключить B_M приводит к появлению двух перенормированных констант связи g_1 и g_{11}. Это делает величину B_M наблюдаемой. Таким образом, можно сказать, что рассматриваемое нами приближённое уравнение для мезона и нуклона не является перенормируемым. Отметим, что ниже, рассматривая влияние собственно энергетических добавок, мы будем пренебрегать разницей между этими двумя константами связи. Такое пренебрежение может найти некоторое оправдание лишь постольку, поскольку в рассматриваемых нами уравнениях с самого начала отброшены все члены, приводящие к ядрам более высокого порядка, чем g^2. Однако, как это читателю, повидимому, уже ясно, проведение последовательной программы перенормировок для задачи мезон + нуклон требует специального исследования.

Отметим, что в ряде работ [12, 31, 32], посвящённых рассмотрению уравнения взаимодействующих частиц, с расходящимися константами типа A_N, B_N, A_M и B_M обращаются значительно более вольно, чем в предлагаемсм изложении. Часто под перенормировкой понимают просто выделение таких констант и отбрасывание их. Нам не представляется такой подход полностью оправданным. Однако в пользу отбрасывания расходящихся констант можно привести следующий аргумент. В перенормируемой теории все расходящиеся константы в конце концов могут быть исключены перенормировкой константы связи и масс частиц, поэтому все н блюдаемые величины теории могут быть получены в результате выбрасывания расходящихся констант и замены константы связи и масс частиц их наблюдаемыми значениями.

Система уравнений для четырёх амплитуд двух частиц, мезона и нуклона, получающаяся в результате выбр сывания расходящихся констант или в результате проделанной выше перенормировки и пренебрежения разностью g_1^2 и g_{11}^2, имеет в импульсном представлении следующий вид:

$$\sum_{\varepsilon'\xi'} r_{\varepsilon'\xi'}^{\varepsilon\xi} a^{\varepsilon'\xi'}(\mathbf{p}) = \frac{g^2}{32\pi^3} \sum_{\varepsilon'\xi'} \int d\mathbf{p}' R_{\varepsilon'\xi'}^{\varepsilon\xi}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') a^{\varepsilon'\xi'}(\mathbf{p}'), \tag{8.21}$$

$$r_{\varepsilon'\xi'}^{\varepsilon\xi} = \delta_{\varepsilon\varepsilon'} \delta_{\xi\xi'} \{(W - \varepsilon E - \xi\omega)[1 + A'(\xi)] - \varepsilon \frac{M}{E} B'(\xi) + \xi C'(\varepsilon)\} + \\ + \delta_{\varepsilon\varepsilon'} \delta_{\xi, -\xi'} \xi C'(\varepsilon) + \delta_{\varepsilon, -\varepsilon'} \delta_{\xi, \xi'} B'(\xi), \tag{8.22}$$

$$R_{\varepsilon'\xi'}^{\varepsilon\xi}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = \varphi(p, p') \{N_1 S_{\varepsilon'\xi'}^{\varepsilon\xi}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') + N_2 T_{\varepsilon'\xi'}^{\varepsilon\xi}(\mathbf{p}, \mathbf{p}')\}, \tag{8.23}$$

где

$$\left.\begin{aligned} A'(\xi) &= 3ig^2 A\,[\mathbf{p}^2-(W-\xi\omega)^2],\\ B'(\xi) &= -\frac{3ig^2}{M}B(\mathbf{p}^2-[W-\xi\omega]^2),\\ C'(\varepsilon) &= 2ig^2 P_c\,[\mathbf{p}^2-(W-\varepsilon E)^2], \end{aligned}\right\} \tag{8.24}$$

$$\varphi(p,\ p')=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(E+M)(E'+M)}{EE'\omega\omega'}}, \tag{8.25}$$

$$\begin{aligned} S^{\varepsilon\xi}_{\varepsilon'\xi'}(\mathbf{p},\ \mathbf{p}') &= \varepsilon\varepsilon'\xi\left(\frac{p}{E+M}\right)^{\frac{1-\varepsilon}{2}}\left(\frac{p'}{E'+M}\right)^{\frac{1-\varepsilon'}{2}}[(W-M)\,m_{\varepsilon\varepsilon'}+\\ &+(\varepsilon E+\varepsilon' E'+\xi\omega+\xi'\omega'-M-W)\,n_{\xi\xi'}]+\\ &+\left(\frac{E+M}{p}\right)^{\frac{1-\varepsilon}{2}}\left(\frac{E'+M}{p'}\right)^{\frac{1-\varepsilon'}{2}}\frac{\sigma\mathbf{p}}{E+M}\,\frac{\sigma\mathbf{p}'}{E'+M}\times\\ &\times[(W+M)\,m_{\varepsilon\varepsilon'}+(\varepsilon E+\varepsilon' E'+\xi\omega+\xi'\omega'+M-W)\,n_{\xi\xi'}], \end{aligned} \tag{8.26}$$

$$\begin{aligned} T^{\varepsilon\xi}_{\varepsilon'\xi'}(\mathbf{p},\ \mathbf{p}') &= (\varepsilon+\xi)\left\{\frac{1}{W+M}\left(\frac{M-E}{p}\right)^{\frac{1-\varepsilon}{2}}\left(\frac{M-E'}{p'}\right)^{\frac{1-\varepsilon'}{2}}+\right.\\ &\left.+\frac{1}{W-M}\left(\frac{E+M}{p}\right)^{\frac{1-\varepsilon}{2}}\left(\frac{E'+M}{p'}\right)^{\frac{1-\varepsilon'}{2}}\frac{\sigma\mathbf{p}}{E+M}\,\frac{\sigma\mathbf{p}'}{E'+M}\right\}. \end{aligned} \tag{8.27}$$

$$\begin{aligned} m_{\varepsilon\varepsilon'} &= \{E_q(\varepsilon E_q+\varepsilon E+\varepsilon' E'-W)\}^{-1},\\ n_{\xi\xi'} &= \{E_q(\xi E_q+\xi\omega+\xi'\omega'-W)\}^{-1},\\ E_q &= \sqrt{(\mathbf{p}+\mathbf{p}')^2+M^2}. \end{aligned} \tag{8.28}$$

Матрица $r^{\varepsilon\xi}_{\varepsilon'\xi'}$ возникла в уравнении (8.21) благодаря учёту конечных членов собственно энергетических интегралов. Пренебрежение такими членами делает матрицу r диагональной и равной

$$\delta_{\varepsilon\varepsilon'}\,\delta_{\xi\xi'}\,(W-\varepsilon E-\xi\omega). \tag{8.29}$$

Следует отметить, что пренебрежение конечными собственно-энергетическими добавками, а также учёт амплитуды и соответственно уравнения лишь только для плюс-частиц приводит к уравнению старого метода Т. Д., решённого в работе [6].

Согласно сказанному в § 6 о выборе граничных условий, в задаче рассеяния π-мезона на нуклоне асимптотическое поведение функции $a^{(+,+)}(\mathbf{p})$ должно соответствовать падающей и расходящейся волнам. Поэтому положим

$$a^{(+,+)}(\mathbf{p})=\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}_0)+f^{(+,+)}(\mathbf{p})\,\delta_+\,(E+\omega-W), \tag{8.30}$$

где $\delta_+(x) = i\pi\delta(x) - \frac{1}{x}$, а для остальных функций

$$a^{\varepsilon\xi}(\mathbf{p}) = \frac{f^{\varepsilon\xi}(\mathbf{p})}{W - \varepsilon E - \xi\omega}. \tag{8.31}$$

Для функций $f^{\varepsilon\xi}$ получаем из (8.21) следующую систему уравнений:

$$\sum_{\varepsilon'\xi'} \Delta^{\varepsilon\xi}_{\varepsilon'\xi'} f^{\varepsilon'\xi'}(\mathbf{p}) = \frac{g^2}{32\pi^3} R^{\varepsilon\xi}_{++}(\mathbf{p}, \mathbf{p}_0) + \frac{ig^2}{32\pi^2}\int d\mathbf{p}' R^{\varepsilon\xi}_{++}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \times$$
$$\times f^{(+,+)}(\mathbf{p}')\delta(E' + \omega' - W) +$$
$$+ \frac{g^2}{32\pi^3}\sum_{\varepsilon'\xi'}\int d\mathbf{p}' \frac{R^{\varepsilon\xi}_{\varepsilon'\xi'}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') f^{\varepsilon'\xi'}(\mathbf{p}')}{W - \varepsilon' E' - \xi'\omega'}, \tag{8.32}$$

где

$$\Delta^{\varepsilon\xi}_{\varepsilon'\xi'} = r^{\varepsilon\xi}_{\varepsilon'\xi'}(W - \varepsilon' E - \xi'\omega)^{-1}. \tag{8.33}$$

Отделение угловых переменных можно провести, используя ортогональную систему полиномов $L_l^{\pm}$, рассмотренных в работе[73] (см. выше § 5). При этом благодаря введению согласно формуле (8.17) функции $a^{\varepsilon\xi}(\mathbf{p})$ для отделения угловых переменных достаточно разложить по полиномам $L_l^{\pm}$ функции $f^{\varepsilon\xi}$ и ядра $R^{\varepsilon\xi}_{\varepsilon'\xi'}$.

Подставляя в уравнение (8.32) разложение

$$f^{\varepsilon\xi}(\mathbf{p}) = \sum L_l^{\pm}\left(\frac{\mathbf{p}}{p}, \frac{\mathbf{p}}{p_0}\right) f^{\varepsilon\xi}_{jl}(p) \tag{8.34}$$

и исключая угловые переменные, получаем систему уравнений для амплитуд $f^{\varepsilon\xi}$, соответствующих заданному значению полного (j) и орбитального (l) моментов системы мезона и нуклона. Получающиеся интегральные уравнения являются уже одномерными, так как функции $f^{\varepsilon\xi}_{jl}$ зависят лишь от модуля p:

$$\sum_{\varepsilon'\xi'} \Delta^{\varepsilon'\xi'}_{\varepsilon\xi'}(p) f^{\varepsilon'\xi'}_{jl}(p) = \frac{g^2}{32\pi^3}\, {}^{jl}R^{\varepsilon\xi}_{++}(p, p_0) \times$$
$$\times \left\{1 + i\frac{g^2}{2}\frac{p_0 E_0 \omega_0}{E_0 + \omega_0} f^{(+,+)}_{jl}(p_0)\right\} +$$
$$+ \frac{g^2}{8\pi^2}\sum_{\varepsilon'\xi'}\int \frac{p'^2 dp'\, {}^{jl}R^{\varepsilon\xi}_{\varepsilon'\xi'}(p, p')}{W - \varepsilon' E' - \xi'\omega'} f^{\varepsilon'\xi'}_{jl}(p'). \tag{8.35}$$

Ядра ${}^{jl}R$ связаны с функциями ${}^{jl}S$ и ${}^{jl}T$ формулой (8.23), причём

$$
\begin{aligned}
{}^{jl}S^{\varepsilon\xi}_{\varepsilon'\xi'} = \varepsilon\varepsilon'\xi \left(\frac{p}{E+M}\right)^{\frac{1-\varepsilon}{2}} \left(\frac{p'}{E'+M}\right)^{\frac{1-\varepsilon'}{2}} \times \\
\times [\varepsilon (W-M)] J_{k_1} (E + \varepsilon\varepsilon' E' - \varepsilon W) + \\
+ \xi(\varepsilon E + \varepsilon' E' + \xi\omega + \xi'\omega' - M - W) J_{k_1} (\omega + \xi\xi'\omega' - \xi W)] + \\
+ \xi \left(\frac{p}{E+M}\right)^{\frac{1+\varepsilon}{2}} \left(\frac{p'}{E'+M}\right)^{\frac{1+\varepsilon'}{2}} \times \\
\times [\varepsilon (W+M) J_{k_2} (E + \varepsilon\varepsilon' E' - \varepsilon W) + \\
+ \xi (\varepsilon E + \varepsilon' E' + \xi\omega + \xi'\omega' + M - W) J_{k_2} (\omega + \xi\xi'\omega' - \xi W)],
\end{aligned} \tag{8.36}
$$

$$
\begin{aligned}
{}^{jl}T^{\varepsilon\xi}_{\varepsilon'\xi'} = \delta_{j,\,1/2}\,\delta_{l_0} (\varepsilon + \xi) \frac{1}{W+M} \left(\frac{M-E}{p}\right)^{\frac{1-\varepsilon}{2}} \left(\frac{M-E'}{p'}\right)^{\frac{1-\varepsilon'}{2}} + \\
+ \delta_{j,\,1/2}\,\delta_{l,\,1} (\varepsilon + \xi) \frac{1}{W-M} \left(\frac{p}{E+M}\right)^{\frac{1+\varepsilon}{2}} \left(\frac{p'}{E'+M}\right)^{\frac{1+\varepsilon'}{2}}.
\end{aligned} \tag{8.37}
$$

В (8.36) введено обозначение (ср. § 5)

$$
J_k(z) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} P_k(x) \frac{dx}{E_q (E_q + z)},
$$

$$
E_q = \sqrt{M^2 + p^2 + p'^2 + 2pp'x}, \tag{8.38}
$$

где $P_k(x)$ — полиномы Лежандра. Для состояния $S_{1/2}$ ($j = 1/2$, $l = 0$) следует положить $k_1 = 0$, $k_2 = 1$; для состояния $P_{1/2}$ $k_1 = 1$, $k_2 = 0$; для состояния $P_{3/2}$ $k_1 = 1$, $k_2 = 2$. Ядра ${}^{jl}T$ отличны от нуля лишь для состояний с полным моментом половина, т. е. только для состояний $S_{1/2}$ и $P_{1/2}$. Это соответствует тому факту, что ядро T возникает благодаря «цепочке с поглощением» (см. выше рис. 8). Иными словами, в соответствующем промежуточном состоянии имеется только один нуклон, который естественно покоится в системе центра инерции и, следовательно, облад ет полным моментом $j = 1/2$. Это же приводит к тому, что ядро N_2T отлично от нуля лишь для состояний с изотопическим спином половина.

Остановимся теперь на физическом смысле амплитуд $f(\mathbf{p})$. Используемые нами граничные условия соответствуют тому факту, что только лишь амплитуда нуклона с положительной энергией и мезона с положительной частотой соответствует на бесконечности падающей и расходящейся волнам. Благодаря этому, как это с очевидностью следует из соотношения (6.4), падающая и расходящиеся волны оказываются совпадающими для амплитуд старого и нового метода Т. Д. Но так как квадрат соответствующей амплитуды старого метода даёт сечение рассеяния, то то же самое даёт амплитуда $f^{(+,+)}(\mathbf{p})$.

Уравнения (8.35) для функций f_{jl} содержат мнимые коэффициенты. Однако с помощью преобразования

$$u_{jl}^{\varepsilon\xi}=f_{jl}^{\varepsilon\xi}\left[1+i\frac{g^2}{2}\frac{p_0E_0\omega_0}{E_0+\omega_0}f_{jl}^{(+,+)}(p_0)\right]^{-1} \tag{8.39}$$

можно перейти к уравнениям с действительными коэффициентами для действительных функций $u_{jl}^{\varepsilon\xi}$. Эти уравнения отличаются от (8.35) только заменой f на u и отсутствием мнимого слагаемого в скобках.

Фаза рассеяния π-мезонов на нуклонах в состоянии с заданными j, l, I, как в этом нетрудно убедиться, определяется формулой

$$^I\delta_{jl}=-\operatorname{arctg}\frac{4\pi^2p_0\omega_0E_0}{E_0+\omega_0}\,{}^Iu_{jl}^{++}(p_0). \tag{8.40}$$

Система интегральных уравнений, которым подчиняются функции $u_{jl}^{\varepsilon\xi}$, не может быть решена аналитически, так же как это имело место для уравнения мезона и нуклона в старом методе Т. Д. Однако, кроме такого чисто технического затруднения, исследование уравнений для функций u или, что то же самое, уравнений (8.35) наталкивается на более серьёзные трудности.

Прежде всего остановимся на общем как для старого, так и для нового метода Т. Д. недостатке рассматриваемых уравнений мезона и нуклона. Как говорилось в § 3, «цепочка с поглощением» приводит в старом методе Т. Д. к расходящимся выражениям. То же самое имеет место и в случае нового метода. Это ясно хотя бы потому, что $^{jl}T_{++}^{++}$ в точности совпадает с соответствующим ядром уравнения старого метода. Практически перенормировка возникающих при этом расходящихся выражений до сих пор не проделана. Однако такую перенормировку провести, повидимому, можно в духе идей, изложенных в работах [27–34], посвящённых перенормировке ковариантных уравнений.

Другой недостаток уравнений (8.35) связан со своеобразным поведением матрицы $\Delta_{\varepsilon'\xi'}^{\varepsilon\xi}$. Детерминант этой матрицы при больших значениях p для случая достаточно малых g^2 имеет следующий вид:

$$\Delta\cong\left(1-\frac{3g^2}{32\pi^2}\ln p\right)^2\left(1-\frac{11g^2}{32\pi^2}\ln p\right)^2. \tag{8.41}$$

Таким образом, Δ может обращаться в нуль. Необходимо подчеркнуть, что возможность обращения Δ в нуль сохраняется и при больших значениях g^2. При этом с увеличением g^2 уменьшается значение p, при котором детерминант становится равным нулю. Такая же картина имеет место и в приближении, пренебрегающем всеми амплитудами, кроме $a^{(+,+)12}$.

Обращение Δ в нуль соответствует появлению у функций Грина частиц дополнительных полюсов [13—14], не имеющих прямого физического смысла и указывающих по крайней мере на ограниченную область применимости приближённых уравнений. Можно думать, что учёт высших приближений сможет существенно изменить Δ. Однако для выяснения этого необходимо специальное исследование.

Из-за наличия указанных затруднений целесообразно также, как это было сделано в случае старого метода Т. Д., первоначально ограничиться рассмотрением состояний, в которых оператор T равен нулю, и, кроме того, пренебречь конечными добавками от собственно энергетических членов. Интерес такого приближения заключается в следующем. Как уже говорилось выше (см. § 1), метод Т. Д. только тогда может быть по настоящему оценён, когда выяснится, что при решении физических задач окажется достаточным ограничиться небольшим числом виртуальных частиц. Поэтому указанное приближение может показать, действительно ли можно в задаче рассеяния π-мезонов на нуклонах ограничиться приближением, рассмотренным в старом методе, или же результат работы [6] является в какой-то мере случайным. Численные расчёты в приближении, пренебрегающем собственно энергетическими членами, в настоящее время проводятся.

§ 9. СВЯЗЬ МЕТОДА ТАММА — ДАНКОВА С КОВАРИАНТНЫМИ МЕТОДАМИ

Наряду с методом Тамма — Данкова в последние годы большое внимание уделяется другому приближённому методу исследования уравнений современной теории поля, не использующему разложение по степеням константы связи. Речь идёт о методе получения приближённых ковариантных уравнений типа Бете — Салпетера [96—98]. Первоначально было получено ковариантное уравнение для двух нуклонов [96], затем метод был распространён на систему мезон + нуклон [18]. Кроме того, различными авторами была получена бесконечная система ковариантных уравнений как для функций Грина частиц [99, 100, 103], так и для ковариантных волновых функций [101], обобщающая уравнения типа Бете — Салпетера [96—98]. Обрыв такой системы даёт приближённую систему ковариантных уравнений [99, 100—103, 108]. Соотношение между такой приближённой системой ковариантных уравнений и уравнениями типа Бете — Салпетера аналогично соотношению между методом Тамма — Данкова и Леви — Клейна (см. § 2).

В этом параграфе мы кратко рассмотрим вопрос о связи метода Тамма — Данкова с ковариантными методами. Исследование этого вопроса представляет большой интерес, поскольку оба эти метода обладают как бы взаимно дополняющими преимуществами. В первом методе, в отличие от второго, совершенно ясен смысл волновой функции и решение системы уравнений представляет более простую задачу, однако, как мы видели в §§ 3, 7, 8, здесь возникают серьёзные трудности с перенормировкой расходящихся величин, в то время, как в ковариантных ур внениях перенормировка может быть проведена в общем виде[104, 105].

Вопросами о связи указанных двух методов занималось много авторов[22, 24, 101, 106, 107]. Однако большинство из них рассматривало вопрос о получении из ковариантных уравнений трёхмерных уравнений в приближении Леви — Клейна. Проблема получения системы уравнений Тамма — Данкова из системы ковариантных уравнений в любом приближении до сих пор не решена. Поэтому вопрос о связи этих двух методов мы разберём в низшем приближении на примере уравнения для двух нуклонов и для системы мезон + нуклон.

Уравнение для функции Грина $G(x, y; x', y')$ *) двух нуклонов в низшем приближении без учёта членов собственной энергии имеет вид[96]:

$$G(x, y; x', y') = \frac{1}{4} S_F^{(1)}(x-x') S_F^{(2)}(y-y') +$$
$$+ \frac{g^2}{8} \int (S_F(x-x_1)\tau_k\gamma_5)^{(1)} (S_F(y-y_1)\gamma_5\tau_k)^{(2)} \Delta_F(x_1-y_1) \times$$
$$\times G(x_1, y_1; x'y') dx_1 dy_1. \qquad (9.1)$$

Здесь S_F и Δ_F — функции распространения свободного нуклона и мезона (см. § 2; формулы (2.7)); индексы (1) и (2) указывают номер нуклона.

С точки зрения теории возмущений уравнение (9.1) учитывает все феймановские диаграммы «лестничного типа» (рис. 10).

Волновая функция $\psi(x, y)$ двух взаимодействующих нуклонов определяется с помощью функции Грина следующим образом:

$$\psi(x, y) =$$
$$= - \int\limits_{x'_0 = y'_0 \to -\infty} G(x, y; x', y')(\gamma_4)^{(1)}(\gamma_4)^{(2)} = \psi_0(x', y')\, dx'dy', \qquad (9.2)$$

где $\psi_0(x, y)$ — волновая функция двух свободных нуклонов.

---

*) Функция Грина двух нуклонов определяется так[98]: $G(x, y; x'y') = (\Psi_0, T[\psi_\Gamma(x)\bar\psi_\Gamma(x')\psi_\Gamma(y)\bar\psi_\Gamma(y')]\Psi_0)$, где ψ_Γ — гейзенберговские операторы поля, а Ψ_0 — вакуум в представлении Гейзенберга.

Из (9.2) и (9.1) следует [96] уравнение для $\psi(x, y)$:

$$\psi(x, y)=\psi_0(x, y)+\frac{g^2}{8}\int (S_F(x-x_1)\gamma_5\tau_k)^{(1)}(S_F(y-y_1)\gamma_5\tau_k)^{(2)}\times$$
$$\times\Delta_F(x_1-y_1)\psi(x_1, y_1)\,dx_1dy_1, \qquad (9.3)$$

или в дифференциальной форме

$$\left(\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu}+M\right)^{(1)}\left(\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial y_\mu}+M\right)^{(2)}\psi(x, y)=$$
$$=-\frac{g^2}{2}(\gamma_5\tau_k)^{(1)}(\gamma_5\tau_k)^{(2)}\Delta_F(x-y)\psi(x, y). \qquad (9.4)$$

Решение уравнения (9.3) можно искать в частном виде

$$\psi(x, y)=e^{iPX}\psi(\zeta), \qquad (9.5)$$

где $X=\frac{x+y}{2}$ и $\zeta=x-y$ соответственно координаты «обобщённого центра инерции» и относительные координаты двух частиц.

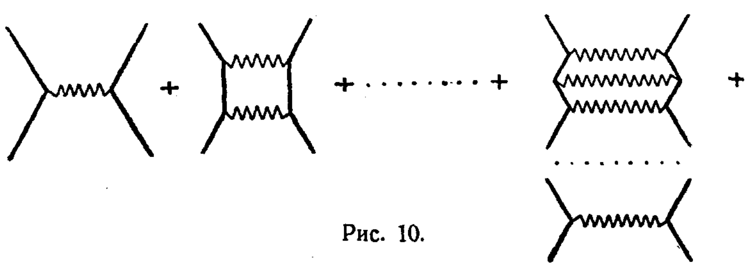

Рис. 10.

В системе центра инерции $P=(0, 0, 0, W)$, где W является собственным значением задачи.

Для связанных состояний $W<2M$. Для рассеяния $W>2M$. В первом случае в уравнении (9.3) $\psi_0(x, y)=0$, поскольку этот член представляет свободное движение частиц [96].

Ограничимся случаем связанных состояний. Разложим $\psi(\zeta)$ по свободным решениям:

$$\psi(\zeta)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int u_\sigma^{(1)}(\mathbf{p})\,u_\sigma^{\prime(2)}(\mathbf{p})\,\psi^{\varepsilon\sigma}(p)\exp(ip\zeta)\,dp, \qquad (9.6)$$

где значки ε и σ нумеруют решения уравнения Дирака с положительной (ε, $\sigma=+1$) и отрицательной (ε, $\sigma=-1$) энергиями. Преобразуя уравнение (9.3) с помощью (9.5) и (9.6) в импульсное пространство, находим:

$$\psi^{\varepsilon\sigma}(p)=$$

$$=\sum_{\varepsilon',\sigma'}\frac{ig^2}{(2\pi)^4}\int\frac{\Gamma^{(1)}_{\varepsilon\varepsilon'}\Gamma^{(2)}_{\sigma\sigma'}\Delta_F(p-p')}{\left(\varepsilon E_p-p_0-\frac{W}{2}\right)\left(\sigma E_p+p_0-\frac{W}{2}\right)}\psi^{\varepsilon'\sigma'}(p')\,dp'; \quad (9.7)$$

здесь

$$\Gamma^{(1)}_{\varepsilon\sigma'}=\bar u^{(1)}_{\varepsilon}(\mathbf{p})(\gamma_5\tau_k)\,u^{(1)}_{\varepsilon'}(\mathbf{p}'); \quad \Gamma^{(2)}_{\sigma\sigma'}=\bar u^{(2)}_{\sigma}(-\mathbf{p})\,\gamma_5\tau_k u^{(2)}_{\sigma'}(-\mathbf{p}'). \quad (9.8)$$

Кроме того, мы воспользовались удобным представлением $S_F(p)$

$$S_F(p)=\sum_{\varepsilon}\frac{\Lambda_\varepsilon(\mathbf{p})\gamma_4}{\left(\varepsilon E_p-p_0-\frac{W}{2}\right)}. \quad (9.9)$$

Определим трёхмерную функцию $a(\boldsymbol{\xi})$ в системе центра тяжести следующим образом [22, 96]:

$$a(\boldsymbol{\xi})=\psi(\boldsymbol{\xi},\,0). \quad (9.10)$$

В импульсном представлении

$$a^{\varepsilon\sigma}(\mathbf{p})=\int_{-\infty}^{\infty}\psi^{\varepsilon\sigma}(p)dp_0. \quad (9.11)$$

Легко видеть, что уравнение (9.7) не сводится непосредственно к уравнению для $a^{\varepsilon\sigma}(\mathbf{p})$, так как ядро уравнения (9.2) зависит от p_0'.

Такое сведение можно сделать лишь приближённо*). В нулевом адиабатическом приближении, когда запаздывание полностью не учитывается, надо вместо Δ_F в ядро уравнений (9.7) подставить $\frac{1}{2\pi i}\int\Delta_F(p)\,dp_0$. В этом случае зависимость $\psi^{\varepsilon\sigma}(p)$ от p_0 будет пропорциональна множителю

$$\left(\varepsilon E_{\mathbf{p}}-p_0-\frac{W}{2}\right)^{-1}\left(\sigma E_{\mathbf{p}}+p_0-\frac{W}{2}\right)^{-1},\ \text{т. е.}$$

$$\psi^{\varepsilon\sigma}(p)=\frac{A^{\varepsilon\sigma}(\mathbf{p},W)}{\left(\varepsilon E_{\mathbf{p}}-p_0-\frac{W}{2}\right)\left(\sigma E_{\mathbf{p}}+p_0-\frac{W}{2}\right)}\,a^{\varepsilon\sigma}(\mathbf{p}). \quad (9.12)$$

Множитель пропорциональности $A^{\varepsilon\sigma}$ находится из условия (9.11) и равен (при обходе полюсов к массам частиц добавляется мнимая отрицательная добавка)

$$A^{\varepsilon\sigma}(\mathbf{p},\ W)=\delta_{\varepsilon\sigma}(2E_{\mathbf{p}}-\varepsilon W)(2\pi i)^{-1}. \quad (9.13)$$

*) Если ограничиться в ядре уравнения для $a(\mathbf{p})$ только членами $\sim g^2$.

Подставляя (9.12) в (9.7) и интегрируя по dp_0 и по dp_0', получим уравнение для $a^{\varepsilon\sigma}(\mathbf{p})$ в первом приближении (с учётом отдачи):

$$(2E_{\mathbf{p}} - \varepsilon W)\, a^{\varepsilon\varepsilon}(\mathbf{p}) = \\ = \sum_{\varepsilon'} \frac{g^2}{(2\pi)^3} \int \frac{d\mathbf{p}'}{\omega_{\mathbf{p}-\mathbf{p}'}} \Gamma^{(1)}_{\varepsilon\varepsilon'} \Gamma^{(2)}_{\varepsilon\varepsilon'} K^{\varepsilon}_{\varepsilon'}(\mathbf{p}, \mathbf{p}')\, a^{\varepsilon'\varepsilon'}(\mathbf{p}'), \tag{9.14}$$

где ядро

$$K^{\varepsilon}_{\varepsilon'}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = -\left(\omega_{\mathbf{p}-\mathbf{p}'} + E_{\mathbf{p}} + E_{\mathbf{p}'} - \frac{\varepsilon + \varepsilon'}{2} W \right)^{-1}. \tag{9.15}$$

Мы видим, что в этом приближении *)

$$a^{+-}(\mathbf{p}) = a^{-+}(\mathbf{p}) = 0. \tag{9.16}$$

Если в (9.14) пренебречь состояниями нуклонов с отрицательной энергией, т. е. положить $a^{--}(\mathbf{p}) \equiv 0$, то получим:

$$(-2E_{\mathbf{p}} + W)\, a^{++}(\mathbf{p}) = \frac{g^2}{(2\pi)^3} \int \frac{d\mathbf{p}'}{\omega_{\mathbf{p}-\mathbf{p}'}} \Gamma^{(1)}_{++} \Gamma^{(2)}_{++} \times \\ \times (\omega_{\mathbf{p}-\mathbf{p}'} + E_{\mathbf{p}} + E_{\mathbf{p}'} - W)^{-1} a^{++}(\mathbf{p}'). \tag{9.17}$$

Это уравнение в точности совпадает с уравнением (3.21) для двух нуклонов, полученным в первом приближении старого метода Тамма — Данкова.

С точки зрения теории возмущений смысл приближения, который сводит уравнение (9.7) к уравнениям (9.14) и (9.17), состоит в следующем. Уравнение (9.7) учитывает все диаграммы, изображённые на рис. 10. Каждая такая диаграмма эквивалентна $n!$ (где n — порядок диаграммы) упорядоченным во времени диаграммам (типа изображённых на рис. 1 и 2). В частности, диаграмма n-го порядка может содержать упорядоченную диаграмму, соответствующую одновременному присутствию $n/2$ виртуальных мезонов. Если пренебречь в уравнении (9.7) вкладом всех упорядоченных диаграмм, содержащих одновременно более одного виртуального мезона, то мы получим уравнение (9.14). Если дополнительно к этому пренебречь возможностью образования виртуальных пар, то придём к уравнению старого метода Тамма — Данкова (9.17).

Можно получить (см. [24, 101]) уравнение типа Леви — Клейна для $a^{++}(\mathbf{p})$, строго эквивалентное ковариантному уравнению (9.7). Однако ядро такого уравнения будет представлять собой бесконечный, вообще говоря, расходящийся ряд по степеням константы связи g^2.

Обратимся теперь к уравнению для системы мезон + нуклон. В этом случае дело обстоит несколько сложнее, поскольку в низшем приближении можно получить несколько различных уравнений для функции Грина мезон + нуклон [18, 99, 102]. Мы будем исходить

*) Влияние отрицательных компонент рассматривалось в работе [109].

из уравнения, предложенного Мартином и Дезером [18]. Преимущество этого уравнения состоит в том, что оно учитывает на языке теории возмущений конечные цепочки вида*) (рис. 11), которые вносят основной вклад в рассеяние с полным изотопическим спином $I = {}^3/_2$.

Рис. 11.

В низшем приближении это уравнение имеет вид (без учёта членов собственной энергии)

$$\begin{aligned} G_{ik}(x\zeta;\, x'\zeta') &= \frac{1}{4}\,\delta_{ik} S_F(x - x')\,\Delta_F(\zeta - \zeta') + \\ &+ \sum_j \frac{g^2}{8} \int S_F(x - x_1)(\gamma_5\tau_i)\,S_F(x_1 - x_2)(\gamma_5\tau_j)\,\times \\ &\times G_{jk}(x_2 x_2;\, x'\zeta')\,\Delta_F(x_1 - \zeta)\,dx_1 dx_2 + \\ &+ \sum_j \frac{g^2}{8} \int S_F(x - x_1)(\gamma_5\tau_j)\,S_F(x_1 - x_2)(\gamma_5\tau_i)\,\times \\ &\times G_{jk}(x_2,\, x_1;\, x'\zeta')\,\Delta_F(x_2 - \zeta)\,dx_1 dx_2. \end{aligned} \tag{9.18}$$

Здесь $G_{jk}(x\zeta;\, x'\zeta')$ — функция Грина уравнения мезон + нуклон**).

Первый член в ядре этого уравнения соответствует цепочке с поглощением; второй — цепочке с испусканием.

В отличие от (9.2) волновая функция $\varphi_i(x\zeta)$ взаимодействующих мезона и нуклона связана с $G_{ik}(x\zeta;\, x'\zeta')$ следующим образом***):

$$\varphi_i(x,\, \zeta) = \\ = -\sum_j \int\limits_{x'_0 = \zeta'_0 \to -\infty} \left[G_{ij}(x\zeta;\, x'\zeta')\,\gamma_4,\, \frac{\partial}{\partial\zeta'_0}\right]_- \varphi_j^0(x',\, \zeta')\,d\mathbf{x}'d\boldsymbol{\zeta}, \tag{9.19}$$

где $\varphi_j^0(x,\, y)$ — волновая функция свободных нуклона и мезона. Уравнение для $\varphi_j(x,\, y)$, которое следует из (9.18) с помощью (9.19),

---

*) Так называемые «изобарные» цепочки.

**) По определению $G_{ik}(x\zeta;\, x'\zeta') = (\Psi_0,\, T\,[\psi_\Gamma(x)\,\bar{\psi}_\Gamma(x')\,\varphi_i(\zeta)\,\varphi_k(\zeta')]\,\Psi_0)$.

***) Различие обусловлено тем, что волновая функция мезона подчиняется уравнению второго порядка.

имеет вид

$$\varphi_i(x, \zeta) = \varphi_i^0(x, \zeta) - \sum_j \frac{g^2}{8} \int S_F(x - x_1)(\gamma_5\tau_i) \times$$

$$\times S_F(x_1 - x_2)(\gamma_5\tau_j)\Delta_F(x_1 - \zeta)\varphi_j(x_2 x_2)\,dx_1 dx_2 +$$

$$+ \sum_j \frac{g^2}{8} \int S_F(x - x_1)(\gamma_5\tau_j) S_F(x_1 - x_2)(\gamma_5\tau_i)\Delta_F(x_2 - \zeta) \times$$

$$\times \varphi_j(x_2, x_1)\,dx_1 dx_2. \qquad (9.20)$$

Уравнение мезон + нуклон, как правило, используется для исследования задачи рассеяния. Поэтому переход к трёхмерному уравнению мезон + нуклон мы совершим непосредственно в уравнении (9.18) для функции Грина мезон + нуклон *).

Переходя в (9.18) к импульсному представлению, в системе центра инерции получим:

$$G_{ik}(p, p'; W) = \delta_{ik}\Omega(p, W)\delta(p - p') +$$

$$+ \lambda\Omega(p, W)\sum_j \int \{(\gamma_5\tau_i) S_F(P)(\gamma_5\tau_j) +$$

$$+ (\gamma_5\tau_j) S_F(p + p'')(\gamma_5\tau_i)\} G_{jk}(p, p''; W)\,dp'' \ldots, \qquad (9.21)$$

где p и p' соответственно начальный и конечный относительные 4-импульсы системы мезон + нуклон; W — полная энергия системы;

$$\Omega(p, W) = S_F\left(p + \frac{P}{2}\right)\Delta_F\left(p - \frac{P}{2}\right); \quad \lambda = \frac{ig^2}{(2\pi)^4}.$$

По аналогии с трёхмерной волновой функцией (см. 9.14) трёхмерную функцию Грина определяют соотношением

$$G_{ik}(\mathbf{p}, \mathbf{p}'; W) = \int G_{ik}(p, p'; W)\,dp_0 dp_0' =$$

$$= \int G_{ik}(p, \mathbf{p}'; W)\,dp_0, \qquad (9.22)$$

где

$$G_{ik}(p, \mathbf{p}; W) = \int G(p, p'; W)\,dp_0'.$$

Рассуждая так же, как и в случае двух нуклонов, находим, что в первом приближении

$$G_{ik}(p, \mathbf{p}'; W) = \frac{i}{(2\pi)}(2\omega_{\mathbf{p}})\Omega(p, W)(\Lambda_+(\mathbf{p})(W - E_{\mathbf{p}} - \omega_{\mathbf{p}}) +$$

$$+ \Lambda_-(\mathbf{p})(W + E_{\mathbf{p}} + \omega_{\mathbf{p}}))\gamma_4 G_{ik}(\mathbf{p}, \mathbf{p}'; W). \qquad (9.23)$$

---

*) Переход к трёхмерному уравнению для волновой функции мезон + нуклон производится подобно тому, как это сделано выше для двух нуклонов.

Введём далее функцию Грина, соответствующую заданной энергии нуклона и мезона, в конечном состоянии

$$G_{ik}^{\varepsilon\sigma}(p,\ \mathbf{p}';\ W)=\frac{\sigma\Lambda_\varepsilon(\mathbf{p})}{2\omega_{\mathbf{p}}}\left(\sigma\omega_{\mathbf{p}}-p_0+\frac{W}{2}\right)G_{ik}(p,\ \mathbf{p}';\ W),\qquad(9.24)$$

где ε и σ пробегают значения ± 1. Тогда, если определить

$$G^{\varepsilon\sigma}(\mathbf{p},\ \mathbf{p}';\ W)=\int G^{\varepsilon\sigma}(p,\ \mathbf{p}';\ W)\,dp_0,\qquad(9.25)$$

то, поступая так же, как и в случае двух нуклонов, получим для $G^{\varepsilon\sigma}$ следующее уравнение:

$$\begin{aligned}
&[W-\varepsilon(E_{\mathbf{p}}+\omega_{\mathbf{p}})]\,G_{ik}^{\varepsilon\varepsilon}(\mathbf{p},\ \mathbf{p}';\ W)=\frac{2\pi}{i}\,\delta_{ik}\Lambda_\varepsilon(\mathbf{p})\,\gamma_4\,(2\omega_{\mathbf{p}})^{-1}\times\\
&\quad\times\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}')+\frac{g^2}{(2\pi)^3}\sum_{j,\varepsilon'}\frac{\Lambda_\varepsilon(\mathbf{p})}{2\omega_{\mathbf{p}}}(\tau_i\tau_j)\left(\frac{W-\gamma_4 M}{W^2-M^2}\right)\times\\
&\quad\times\int G_{ik}^{\varepsilon'\varepsilon'}(\mathbf{p}'',\ \mathbf{p}';\ W)\,d\mathbf{p}''-\sum_j\frac{g^2}{(2\pi)^3}\,\frac{\Lambda_\varepsilon(\mathbf{p})}{2\omega_{\mathbf{p}}}(\tau_j\tau_i)\times\\
&\quad\times\int\left\{\left(\frac{\Lambda_\varepsilon(\mathbf{p}+\mathbf{p}'')}{E_{\mathbf{p}+\mathbf{p}''}+E_{\mathbf{p}}+E_{\mathbf{p}''}-W}-\right.\right.\\
&\quad\left.-\frac{\Lambda_{-\varepsilon}(\mathbf{p}+\mathbf{p}'')}{E_{\mathbf{p}+\mathbf{p}''}+\omega_{\mathbf{p}}+\omega_{\mathbf{p}''}-W}\right)G_{jk}^{\varepsilon\varepsilon}(\mathbf{p}'',\ \mathbf{p}';\ W)+\\
&\quad+\left(\frac{\Lambda_\varepsilon(\mathbf{p}+\mathbf{p}'')}{E_{\mathbf{p}}+\omega_{\mathbf{p}}+E_{\mathbf{p}''}}-\frac{\Lambda_{-\varepsilon}(\mathbf{p}+\mathbf{p}'')}{E_{\mathbf{p}+\mathbf{p}''}+\omega_{\mathbf{p}''}+E_{\mathbf{p}}}\right)\times\\
&\quad\left.\times G_{jk}^{-\varepsilon-\varepsilon}(\mathbf{p}'',\mathbf{p}';\ W)\right\}d\mathbf{p}''.
\end{aligned}\qquad(9.26)$$

В рассматриваемом здесь приближении (см. (9.16))

$$G^{+-}(\mathbf{p},\ \mathbf{p}'';\ W)=G^{-+}(\mathbf{p},\ \mathbf{p}'';\ W)=0.\qquad(9.27)$$

Если пренебречь в (9.26) состояниями с отрицательной энергией и ввести вместо G_{ik}^{++} амплитуду рассеяния

$$\begin{aligned}
&(W-E_{\mathbf{p}}-\omega_{\mathbf{p}'})^{-1}\,u_{ik}^{++}(\mathbf{p},\ W)=\\
&=\frac{i}{2\pi}\,G_{ik}^{++}(\mathbf{p},\ W)(W-E_{\mathbf{p}}-\omega_{\mathbf{p}})-\delta_{ik}\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\,(2\omega_{\mathbf{p}})^{-1}\Lambda_+(\mathbf{p})\,\gamma_4,
\end{aligned}$$

то уравнение для u^{++} будет в точности совпадать с уравнением (5.5) мезон + нуклон в старом методе Тамма — Данкова.

Отметим, что уравнение (9.26) было исследовано в нерелятивистском приближении в работе [110]. Наиболее интересный результат этого исследования заключается в том, что в состоянии с $I = {}^3/_2$ и $l = 5$ (где l — орбитальный момент) система π-мезон + нуклон при $g^2 \cong 13$ и $W - M - \mu \cong 35$ *Мэв* образует виртуальное состояние с временем жизни $\sim 10^{-10}$ сек., что согласуется по порядку величины с временем жизни Λ^0-частицы *). Однако расчёт произведён слишком грубо и нуждается в уточнении.

В заключение этого параграфа мы остановимся на связи уравнений (9.3) и (9.21) с соответствующими уравнениями нового метода Тамма — Данкова.

Правила обхода полюсов при интегрировании по dp_0 в формулах (9.11) и (9.22) определяются по Фейнману, т. е. к массам частиц добавляется мнимая отрицательная добавка. Определим новые трёхмерные функции для двух нуклонов и для мезона и нуклона соотношением (9.11) и (9.22), предположив, что при интегрировании по dp_0 к W добавляется мнимая положительная добавка **) [25].

Тогда в первом приближении трёхмерные уравнения для этих функций, которые вытекают из уравнений (9.3) и (9.21), будут иметь следующий вид:

в случае двух нуклонов

$$[W - (\varepsilon + \sigma) E_{\mathbf{p}}]\, a^{\varepsilon\sigma}(\mathbf{p}) = \frac{g^2}{(2\pi)^3} \sum_{\varepsilon', \sigma'} \int \frac{d\mathbf{p}'}{2\omega_{\mathbf{p}-\mathbf{p}'}} \Gamma^{(1)}_{\varepsilon\varepsilon'} \Gamma^{(2)}_{\sigma\sigma'} \times$$
$$\times \left(\frac{\sigma}{E_{\mathbf{p}} + \omega_{\mathbf{p}-\mathbf{p}'} + \sigma\varepsilon' E_{\mathbf{p}'} - \sigma W} + \right.$$
$$\left. + \frac{\varepsilon}{E_{\mathbf{p}} + \omega_{\mathbf{p}-\mathbf{p}'} + \varepsilon\sigma' E_{\mathbf{p}'} - \varepsilon W} \right) a^{\varepsilon'\sigma'}(\mathbf{p}'); \tag{9.28}$$

в случае мезона и нуклона

$$(W - \varepsilon E_{\mathbf{p}} - \sigma\omega_{\mathbf{p}})\, G^{\varepsilon\sigma}_{ik}(\mathbf{p}, \mathbf{p}'; W) = \left(\frac{2\pi}{i}\right) \delta_{ik} \Lambda_\varepsilon(\mathbf{p})\, \gamma_4 (2\omega_{\mathbf{p}})^{-1} \times$$
$$\times\, \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}')\, \delta_{\varepsilon\sigma} + \frac{g^2}{(2\pi)^3} \frac{\Lambda_\varepsilon(\mathbf{p})}{2\omega_{\mathbf{p}}} \sum_{j, \varepsilon', \sigma'} \left\{ \delta_{\varepsilon\sigma} (\tau_i \tau_j) \left(\frac{W - \gamma_4 M}{W^2 - M^2} \right) \times \right.$$
$$\times \int G^{\varepsilon'\sigma'}_{jk}(\mathbf{p}'', \mathbf{p}'; W)\, d\mathbf{p}'' -$$
$$- (\tau_j \tau_i) \int \left(\frac{\sigma\Lambda_\varepsilon(\mathbf{p} + \mathbf{p}'')}{E_{\mathbf{p}+\mathbf{p}''} + E_{\mathbf{p}} + \varepsilon\varepsilon' E_{\mathbf{p}''} - \varepsilon W} - \right.$$
$$\left.\left. - \frac{\sigma\Lambda_{-\varepsilon}(\mathbf{p} + \mathbf{p}'')}{E_{\mathbf{p}+\mathbf{p}''} + \omega_{\mathbf{p}} + \sigma\sigma'\omega_{\mathbf{p}''} - \sigma W} \right) G^{\varepsilon'\sigma'}_{jk}(\mathbf{p}'', \mathbf{p}'; W) \right\} d\mathbf{p}''. \tag{9.29}$$

---

*) См. также [111].

**) Так называемое аналитическое продолжение Дайсона [112].

Уравнения (9.28) и (9.29) совпадают с соответствующими уравнениями в новом методе Тамма — Данкова.

Подчеркнём важное различие между уравнениями (9.3) и (9.21), с одной стороны, и уравнениями (9.28) и (9.29), с другой. Во-первых, в уравнениях (9.3) и (9.21) отличны от нуля только $(++)$- и $(--)$-компоненты волновых функций, в то время как в уравнениях (9.28) и (9.29) отличны от нуля все компоненты. Во-вторых, в уравнениях (9.28) и (9.29) появляются так называемые «ложные полюса» [9] *); наличие «ложных полюсов» в уравнениях нового метода Тамма — Данкова приводит к дополнительным трудностям при перенормировке уравнений. В уравнениях (9.3) и (9.21) «ложные полюса» не возникают.

Выше мы рассмотрели на простейших примерах связь уравнений типа Тамма — Данкова с ковариантными уравнениями типа Бете — Салпетера. При этом были сделаны два существенных ограничения: во-первых, в исходных ковариантных уравнениях (9.1) и (9.18) отбрасывались собственно-энергетические члены и, во-вторых, мы ограничились первым неисчезающим приближением для этих уравнений. Учёт членов собственной энергии в уравнениях (9.1) и (9.18) позволяет после проведения перенормировки получить из ковариантных уравнений трёхмерные перенормированные уравнения типа Т. Д. Однако возникновение дополнительных полюсов в перенормированных функциях распространения (см. [10, 12]) существенно сужает область применимости таких уравнений (как ковариантных, так и вытекающих из них трёхмерных). Исследование возникающих здесь вопросов представляет в настоящее время несомненный интерес.

В заключение следует сказать, что хотя мезонная теория всё ещё далека от полного количественного описания ядерных явлений, однако отсутствие качественных противоречий между предсказаниями мезонной теории и экспериментальными данными ядерной физики заставляет думать, что построение правильных математических методов решений ур внений мезонного поля позволит получить (возможно в ограниченной области энергий, например $\leqslant Mc^2$) количественную теорию ядерных явлений [113].

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. И. Е. Тамм, Journ. of Phys. **9**, 445 (1945).
2. S. M. Dancoff, Phys. Rev. **78**, 382 (1950).
3. В. А. Фок, Sow. Phys. **6** 425 (1934).
4. M. Cini, Nuovo Cimento **10**, 526 и 614 (1953).
5. H. Lehman, Zeits. f. Naturforsch. **8a**, 579 (1954).
6. F. Dyson, M. Ross, E. E. Salpeter, S. S. Schweber, M. K. Sundaresan, W. M. Visscher a. H. A. Bethe, Phys. Rev. **95**, 1644 (1954).

*) «Ложные полюса» возникают в правых частях уравнений (9.28) и (9.29), когда какое-либо из произведений $\varepsilon\varepsilon'$, $\sigma\sigma'$, $\varepsilon\sigma'$ или $\sigma\varepsilon'$ равно -1.

7. F. J. Dyson, Phys. Rev. **90**, 994 (1953).
8. F. J. Dyson, Phys. Rev. **91**, 423 (1953).
9. F. J. Dyson, Phys. Rev. **91**, 1543 (1953).
10. В. П. Силин, И. Е. Тамм и В. Я. Файнберг, ЖЭТФ **29**, № 1 (1955).
11. В. П. Силин, ЖЭТФ **27**, 754 (1954).
12. W. M. Visscher, Phys. Rev. **96**, 788 (1954).
13. Л. Д. Ландау, А. А. Абрикосов и И. М. Халатников, ДАН **95**, № 3, № 4, №6 (1954) и **96**, № 3 (1954).
14. А. А. Абрикосов, А. Д. Галанин и И. М. Халатников, ДАН **97**, № 5, 793 (1954).
15. Е. С. Фрадкин, ЖЭТФ, № 6 (1955).
16. Л. Д. Ландау, И. Я. Померанчук, ДАН **102**, № 3 (1955).
17. E. E. Salpeter a. H. A. Bethe, Phys. Rev. **84**, 1232 (1951).
18. S. Deser a. P. Martin, Phys. Rev. **90**, 1075 (1953).
19. J. Schwinger, Phys. Rev. **74**, 1439 (1948); **75**, 651 (1949); см. также сборник переводов «Новейшее развитие квантовой электродинамики», ИЛ, Москва, 1954.
20. G. C. Wick, Phys. Rev. **80**, 268 (1950); см. также сборник переводов «Новейшее развитие квантовой электродинамики», ИЛ, Москва, 1954.
21. А. И. Ахиезер и В. Б. Берестецкий, Квантовая электродинамика, Гостехиздат, Москва, 1953.
22. M. Levy, Phys. Rev. **88**, 72, 725 (1952).
23. A. Klein, Phys. Rev. **90**, 1101 (1953).
24. W. Macke, Zeits. f. Naturforsch. **8a**, 594, 599 (1954).
25. J. C. Taylor, Phys. Rev. **95**, 1313 (1954).
26. П. А. М. Дирак, Основы квантовой механики, ОНТИ, 1933.
27. S. Fubini, Nuovo Cimento **10**, 851 (1953).
28. J. C. Taylor, Nuovo Cimento **12**, 148 (1954).
29. M. Levy, Rhys. Rev. **94**, 460 (1954).
30. T. Joshimura, Progr. Theor. Phys. **11**, 224 (1954).
31. S. Chiba, Progr. Theor. Phys. **11**, 494 (1954).
32. D. Ito a. H. Tanaka, Progr. Theor. Phys. **11**, 501 (1954).
33. K. Ishida a. A. Takahashi, Progr. Theor. Phys. **11**, 611 (1954).
34. R. Karplus, M. Kivelson a. P. Martin, Phys. Rev. **90**, 1072 (1953).
36. И. Е. Тамм, В. П. Силин и В. Я. Файнберг, ЖЭТФ **24**, 3 (1953).
37. D. Baroncini, Nuovo Cimento **10**, Suppl. 296 (1953).
38. K. Nishijima, Progr. Theor. Phys. **6**, 911 (1951).
39. T. Hamada a. M. Sugawara, Progr. Theor. Phys. **9**, 555 (1953).
40. K. A. Brueckner a. K. M. Watson, Phys. Rev. **90**, 699 (1953).
41. K. A. Brueckner a. K. M. Watson, Phys. Rev. **92**, 1023 (1953).
42. M. Ruderman, Phys. Rev. **90**, 183 (1953).
43. A. Klein, Phys. Rev. **89**, 1158 (1953).
44. G. Eder, Zeits. f. Naturforsch. **9a**, 565 (1954).
45. I. Sato, Progr. Theor. Phys. **10**, 323 (1953).
46. E. A. Power, Nuovo Cimento **12**, 323 (1954).
47. A. Klein, Phys. Rev. **91**, 740 (1953).
48. A. Klein, Phys. Rev. **92**, 1017 (1953).
49. A. Klein, Phys. Rev. **91**, 1285 (1953).
50. A. Klein, Phys. Rev. **94**, 195 (1954).
51. M. Cini a. S. Fubini, Nuovo Cimento **10**, 1695 (1953).
52. S. Tani, Progr. Theor. Phys. **12**, 104 (1954).
53. N. Fukuda, K. Sawada a. M. Taketani, Progr. Theor. Phys. **12**, 156 (1954).
54. A. M. Sessler, Phys. Rev. **96**, 793 (1954).

55. Д. С. Чернавский, Диссертация, ФИАН, 1955.
56. S. Fubini, Nuovo Cimento **10**, 564 (1953).
57. G. F. Chew, Phys. Rev. **89**, 591 (1953).
58. J. S. Blaire a. G. F. Chew, Phys. Rev. **90**, 1065 (1953).
59. G. F. Chew, Phys. Rev. **94**, 1748 (1954).
60. G. F. Chew, Phys. Rev. **94**, 1755 (1954).
61. G. F. Chew, Phys. Rev. **95**, 285 (1954).
62. G. F. Chew, Phys. Rev. **95**, 1669 (1954).
63. J. L. Gammel, Phys. Rev. **95**, 209 (1954).
64. F. F. Salzmann a. J. N. Snyder, Phys. Rev. **95**, 286 (1954).
65. K. Sawada, Progr. Theor. Phys. **9**, 455 (1953).
66. В. П. Силин и В. Я. Файнберг, УФН **50**, 325 (1953).
67. Сборник переводов и обзоров «Проблемы современной физики», вып. 8, ИЛ, 1954.
68. R. H. Dalitz, Progress in nuclear physics **4**, 95 (1955).
69. H. A. Bethe a. F. de Hoffmann, Phys. Rev. **95**, 1100 (1954).
70. F. de Hoffmann, N. Metropolis, E. F. Alai a. H. A. Bethe, Phys. Rev. **95**, 1586 (1954).
71. K. Brueckner, Phys. Rev. **86**, 106 (1952).
72. S. Minami, T. Nakano, K. Nishijima, H. Okonogi a. E. Yamada, Progr. Theor. Phys. **8**, 531 (1952).
73. И. Е. Тамм, Ю. А. Гольфанд и В. Я. Файнберг, ЖЭТФ **26**, 649 (1954).
74 G. Wentzel, Phys. Rev. **86**, 437 (1952).
75. D. Drell a. E. M. Henley, Phys. Rev. **88**, 1053 (1952).
76. В. П. Силин, ЖЭТФ **24**, 389 (1953).
77. Ю. В. Новожилов, Вестник ЛГУ, № 11, 47 (1954).
78. В. Л. Гинзбург, ЖЭТФ **12**, 449 (1942).
79. И. Я. Померанчук и В. Б. Берестецкий, ЖЭТФ **21**, 1313 (1951).
80. В. Б. Берестецкий и И. М. Шмушкевич, ЖЭТФ **21**, 1321 (1951).
81. I. Ashkin, A. Simon a. R. Marshak, Progr. Theor. Phys. **5**, 634 (1950).
82. F. J. Dyson, S. S. Schweber a. W. M. Visscher, Phys. Rev. **90**, 372 (1953).
83. M. K. Sundaresan, E. E. Salpeter a. M. Ross, Phys. Rev. **90**, 372 (1953).
84. H. A. Bethe a. F. J. Dyson, Phys. Rev. **90**, 372 (1953).
85. Proceedings of the Third Annual Rochester Conference, декабрь 18—20, 1952.
86. M. Ross, Phys. Rev. **95**, 1687 (1954).
87. A. N. Mitra a. F. J. Dyson, Phys. Rev. **90**, 372 (1953).
88. M. M. Levy a. R. E. Marshak, Nuovo Cimento **11**, 358 (1954).
89. N. Fukuda, S. Goto, S. Okubo a. K. Sawada, Progr. Theor. Phys. **12**, 79 (1954).
90. F. Akiba a. K. Sawada, Progr. Theor. Phys. **12**, 94 (1954).
91. M. Cini, G. Morpurgo a. B. Tauschek, Nuovo Cimento **11**, 316 (1954); G. Morpurgo a. B. F. Tauschek, ibid. **10**, 1681 (1953); G. Morpurgo, ibid. **11**, 103 (1954).
92. S. S. Schweber, Phys. Rev. **94**, 1089 (1954).
93. J. C. Taylor, Phys. Rev. **96**, 1438 (1954).
94. A. Klein, Phys. Rev. **95**, 1676 (1954).
95. B. Kurşunoğlu, Phys. Rev. **96**, 1690 (1954).
96. E. E. Salpeter a. H. A. Bethe, Phys. Rev. **84**, 1232 (1951).
97. J. Schwinger, Proc. Nat. Acad. Sci. **37**, 455 (1951).
98. M. Gell-Mann a. F. Low, Phys. Rev. **84**, 350 (1951).

99. Б. Л. Иоффе, ДАН **95**, 761 (1954).
100. Е. С. Фрадкин, ЖЭТФ **29**, № 1 (1955).
101. W. Zimmermann, Nuovo Cimento, suppl. **11**, 43 (1954).
102. R. Arnowitt a. S. Gasiorowicz, Phys. Rev. **95**, 538 (1954).
103. R. T. Matthews a. A. Salam, Proc. Roy. Soc. **221**, 128 (1954).
104. Е. С. Фрадкин, ЖЭТФ **26**, 751 (1954).
105. А. Д. Галанин, Б. Л. Иоффе, И. Я. Померанчук, ДАН **98**, 361 (1954).
106. B. Kurşunoğlu, Phys. Rev. **92**, 1069 (1953).
107. A. Klein, Phys. Rev. **94**, 1053 (1954).
108. K. Itabashi, Progr. Theor. Phys. **11**, 227, 228 (1954).
109. R. Arnowitt a. S. Gasiorowicz, Phys. Rev. **94**, 1057 (1954).
110. R. Arnowitt a. S. Deser, Phys. Rev. **92**, 1061 (1953).
111. B. P. Nigam, Phys. Rev. **93**, 914 (1954).
112. F. J. Dyson, Phys. Rev. **82**, 428 (1951).
113. H. A. Bethe, Journ. Washington Acad. Scien. **44**, № 4, 97 (1954).