1955 г. Июль Т. LVI, вып. 3

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

О СПЕКТРАЛЬНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ МОЩНОСТИ ИЗЛУЧЕНИЯ

М. М. Гуревич

1. Вопрос о том, как следует изображать спектральное распределение мощности в излучении источника, неоднократно обсуждался в последние годы на страницах специальных журналов и решался в разных случаях по-разному [1, 2, 3]. Была подвергнута сомнению даже правомочность постановки вопроса о положении максимума энергии в спектре излучения.

В настоящее время [4, 5, 6] можно считать, что правильное решение найдено, и поскольку оно расходится с тем, что мы привыкли считать азбучными истинами, постольку распространение нового решения является насущно необходимым.

Можно говорить о распределении мощности в спектре излучения любого источника. Общие основы решения удобнее всего проследить на широко известных законах излучения абсолютно чёрного тела, которым мы только и будем интересоваться в дальнейшем.

2. Практически во всех учебниках оптики, светотехники и смежных наук в рассмотрение вводится спектральная плотность излучения p_λ, определяемая выражением

$$dP = p_\lambda \, d\lambda \ \text{ватт} \cdot \text{см}^{-2}, \tag{1}$$

где dP — элементарная мощность, излучаемая с единицы площади в спектральном интервале λ, $\lambda + d\lambda$, а p_λ выражается известной формулой Планка

$$p_\lambda = \frac{c_1 \lambda^{-5}}{\exp \frac{c_2}{\lambda T} - 1} \ \text{ватт} \cdot \text{см}^{-3}, \tag{2}$$

где c_1 и c_2 — константы, T — абсолютная температура.

Для дальнейшего изложения нам придётся пользоваться только постоянной c_2, которая по последним данным считается равной 1,438 *см·градус* K.

Путём дифференцирования (2) по длине волны λ легко получить уравнение

$$\frac{x}{1-\exp(-x)}=5,$$

где

$$x=\frac{c_2}{\lambda T},$$

которое приводит к значению $\frac{c_2}{\lambda T}=4{,}9651$ или к закону смещения Вина в его обычной форме

$$\lambda_m T=0{,}2896 \text{ } \textit{см}\cdot\textit{градус} \text{ K}, \tag{3}$$

где λ_m — длина волны, на которую приходится максимум спектральной плотности p_λ при температуре T абсолютно чёрного тела. Считается, что эта длина волны указывает то место в спектре излучения, где находится его максимум.

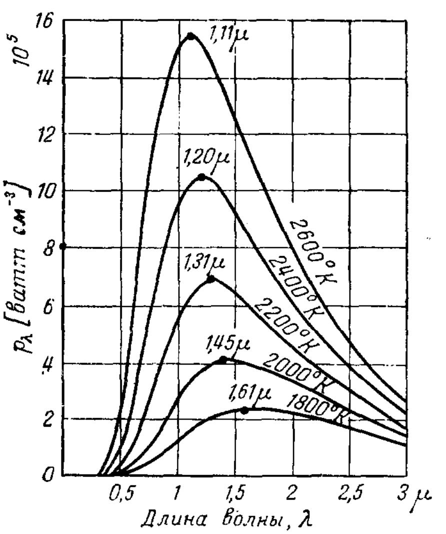

Рис. 1. Спектральное распределение излучения абсолютно чёрного тела относительно линейной шкалы длин волн.

Далее путём подстановки (3) в (2) показывают, что максимум p_λ пропорционален 5-й степени абсолютной температуры.

Однако формула Планка может быть представлена и в другой форме, если за независимую переменную вместо λ принять волновое число $n=\frac{1}{\lambda}$ *см*$^{-1}$. Тогда, по аналогии с (1) принимают, что элементарная мощность dP, приходящаяся на спектральный интервал n, $n+dn$ может быть написана так:

$$dP=p_n dn \text{ } \textit{ватт}\cdot\textit{см}^{-2}, \tag{4}$$

где спектральная плотность излучения p_n должна быть выражена так:

$$p_n=\frac{c_1 n^3}{1-\exp\frac{c_2 n}{T}} \text{ } \textit{ватт}\cdot\textit{см}^{-1}. \tag{5}$$

Если дифференцировать p_n по n и искать волновое число n_m, соответствующее максимуму p_n, то нетрудно придти к уравнению

$$\frac{x}{1-\exp(-x)}=3,$$

где

$$x=\frac{c_2 n}{T},$$

которое приводит к решению:

$$\frac{c_2 n}{T}=2{,}8214$$

или

$$\frac{T}{n_m}=T\lambda_m=\frac{c_2}{2{,}8214}=0{,}5097\ \textit{см}\cdot\textit{градус}\ \mathrm{K}. \qquad (6)$$

Новое значение λ_m, отличающееся от прежнего в 1,76 раза, можно с тем же основанием считать за длину волны, на которую приходится максимум излучения. При этом, подставив (6) в (5), мы увидим, что максимальное значение p_n пропорционально только 3-й степени абсолютной температуры.

На рис. 1 и 2 даны графические представления функций p_λ и p_n относительно линейных шкал длин волн и волновых чисел. Как и следует из (3) и (6), наибольшие значения p_λ и p_n приходятся в разных местах спектра. Так, например, для $T=1800°$ K максимум p_λ приходится на длину волны 1,61μ, а максимум p_n — на длину волны 2,83μ. Для $T=5500°$ K (солнце) максимум p_λ лежит в середине видимого спектра при $\lambda_m=0{,}527\mu$, а максимум p_n — в инфракрасной части при $\lambda_m=0{,}927\mu$ и т. д.

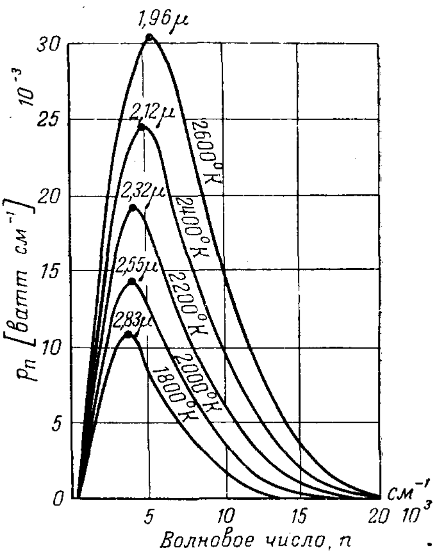

Рис. 2. Спектральное распределение излучения абсолютно чёрного тела относительно линейной шкалы волновых чисел.

Нельзя пройти мимо столь существенного различия и естественно встают вопросы: что же верно, и если и то и другое ошибочно, то почему, и каков будет верный ответ?

3. Если присмотреться к выражениям (2) и (5), а также к рис. 1 и 2, то первое недоумение в некоторой степени рассеивается, когда мы заметим, что спектральная плотность p_λ не

совпадает со спектральной плотностью p_n. Первая из них представляет собой производную от мощности излучения (вернее её поверхностной плотности) по длине волны, а вторая — по волновому числу. Размерности этих двух величин различны, и потому нет ничего удивительного в том, что они имеют различные спектральные распределения в одном и том же излучении. Вместе с тем размерности p_λ и p_n не совпадают с размерностью величины, распределение которой нам было бы интересно установить, поскольку речь идёт о спектральном распределении поверхностной плотности мощности, имеющей размерность [*ватт*·*см*$^{-2}$]. Если мы хотим сохранить условие, в силу которого площадь, ограниченная осью абсцисс, кривой и двумя её ординатами, была бы пропорциональна поверхностной плотности мощности излучения, приходящейся на соответствующий участок спектра, то очевидно, что по оси абсцисс должна быть отложена безразмерная величина.

Выражения (1) и (4) можно представить в следующем виде:

$$dP = p_\lambda \lambda \frac{d\lambda}{\lambda} = p_n n \frac{dn}{n}. \tag{7}$$

Если по оси абсцисс нового графика (рис. 3) отложить $\ln \lambda$ и если учесть, что $d(\ln \lambda) = \frac{d\lambda}{\lambda} = -\frac{dn}{n} = -d \ln n$, то равенство (7) можно переписать так:

$$dP = \frac{c_1 \lambda^{-4}}{\exp \frac{c_2}{\lambda T} - 1} d(\ln \lambda) = \frac{c_1 n^4}{1 - \exp \frac{c_2 n}{T}} d(\ln n). \tag{8}$$

Тогда величина

$$p_{\ln} = \frac{dP}{d(\ln \lambda)} = \frac{-dP}{d(\ln n)} = \frac{c_1 \lambda^{-4}}{\exp \frac{c_2}{\lambda T} - 1} = \frac{c_1 n^4}{1 - \exp \frac{c_2 n}{T}} \; \textit{ватт} \cdot \textit{см}^{-2} \tag{9}$$

будет иметь все качества, которые мы от неё требовали. Отложив её по оси ординат и логарифм длины волны (или волнового числа) по оси абсцисс, мы обеспечим пропорциональность между площадью графика и поверхностной плотностью мощности излучения в соответствующем участке спектра.

Посмотрим, однако, где теперь расположится максимум величины $p_{\ln}$ и какова будет величина этого максимума. Произведя дифференцирование любого из выражения (9), мы придём к уравнению

$$\frac{x}{1 - \exp(-x)} = 4,$$

где

$$x = \frac{c_2}{\lambda T} = \frac{c_2 n}{T},$$

из которого следует, что $c_2/\lambda T = c_2 n/T = 3{,}9207$, а величины

$$\frac{T}{n_m} = \lambda_m T = 0{,}3668 \text{ см}\cdot\text{градус K}. \tag{10}$$

Подставляя полученные значения λ_m или n_m в (9), увидим, что максимум величины $p_{\ln}$ растёт теперь пропорционально четвёртой степени абсолютной температуры.

Из рис. 3 видно, что наибольшие значения $p_{\ln}$ приходятся в новых местах. Так, для $T = 1800°$ K $\lambda_m = 2{,}04\mu$. Для $T = 5500°$ K

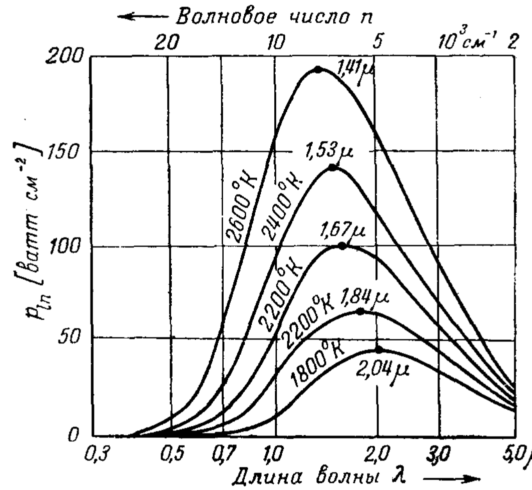

Рис. 3. Спектральное распределение излучения абсолютно чёрного тела относительно логарифмической шкалы длин волн или волновых чисел.

(Солнце) $\lambda_m = 0{,}668\mu$, т. е. весьма хорошо совпадает с максимумом поглощения хлорофилла.

4. Таким образом мы имеем третье решение задачи о положении максимума в спектре излучения абсолютно чёрного тела. Соображения размерности говорят в пользу последнего решения, однако, для окончательного вывода хотелось бы иметь более веские доказательства. Это тем более необходимо, что можно представить себе бесчисленное множество различных решений, связанных с различными функциями длины волны, которые можно откладывать по оси абсцисс. Здесь может возникнуть и общее сомнение в реальности такого понятия, как максимальная спектральная плотность излучения.

Прежде, чем итти дальше, вернёмся ещё раз к рис. 1, 2 и 3 и посмотрим, к чему сводится их различие. В каждом из них площадь, заключённая между осью абсцисс, кривой и её двумя ординатами, пропорциональна поверхностной плотности мощности излучения в соответствующем участке спектра. Если разделить всю площадь, охватываемую каждой из кривых, на большое число вертикальных полос, то соотношение их площадей представит некоторое распределение мощности по спектру, которое будет определяться только выбором ширин этих полос. Нет, однако, никаких оснований менять ширину полосы, избранной за исходную в каком-либо участке спектра. При постоянной ширине полос распределение мощности, которое они создают, совпадает с кривой линией, ограничивающей всю площадь в целом. Таким образом, весь вопрос о распределении мощности в спектре излучения можно свести к другому вопросу: какие спектральные интервалы надо считать одинаковыми? Функция p_λ даёт спектральное распределение мощности в том случае, если равными считать интервалы, одинаковые по разности длин волн Δ_λ. Функция p_n даёт другое распределение, так как в этом случае равными интервалами считаются те, которые характеризуются одинаковыми разностями волновых чисел Δn, что, естественно, расходится с равенством $\Delta\lambda$. Функция $p_{\ln}$ характерна равенством относительных интервалов $\Delta\lambda/\lambda$ или $\Delta n/n$, что отличается и от равенства $\Delta\lambda$ и от равенства Δn. Каждая новая функция длины волны, отложенная по оси абсцисс, даёт своё решение вопросу о равенстве спектральных интервалов и своё собственное положение максимума излучения.

5. Решение поставленного вопроса надо искать на пути, не связанном с необходимостью сопоставлять мощности излучений в разных длинах волн. Рассмотрим задачу о коэффициенте полезного действия излучения абсолютно чёрного тела, падающего на некоторую селективно воспринимающую поверхность. Пусть это будет, например, светочувствительный приёмник, помещённый за щелью монохроматора, пропускающего на него только узкую часть из всего спектра излучения, падающего на входную щель прибора. При повышении температуры T абсолютно чёрного тела мощность излучения, падающего на приёмник, будет возрастать, но коэффициент полезного действия, определяемый как отношение этой мощности к общей мощности источника, будет функцией от T, и притом такой функцией, которая при некоторой температуре T_m пройдёт через максимальное значение. Пусть монохроматор выделяет некоторую произвольную, но неизменную спектральную полосу между λ и $\lambda + d\lambda$. Её мощность

$$dP = \frac{c_1\lambda^{-5}}{\exp\frac{c_2}{\lambda T} - 1}\, d\lambda \ \text{ватт}\cdot\text{см}^{-2} \qquad (11)$$

не зависит от того, в какой форме мы её представим. Коэффициент полезного действия можно записать так:

$$\eta = \frac{c_1 \lambda^{-5} d\lambda}{\left[\exp\frac{c_2}{\lambda T} - 1\right] \sigma T^4}. \tag{12}$$

Дифференцируя последнее выражение по T и приравнивая производную нулю, получим прежнее уравнение

$$\frac{x}{1 - \exp(-x)} = 4,$$

где

$$x = \frac{c_2}{\lambda T},$$

которое даёт $x = \frac{c_2}{\lambda T} = 3{,}9207$ или

$$\lambda T_m = 0{,}3668 \text{ } \textit{см}\cdot\textit{градус} \text{ K}, \tag{10*}$$

где T_m — температура абсолютно чёрного тела, при которой коэффициент полезного действия достигнет максимума. Иначе говоря, мощность, приходящаяся на выделяемую полосу λ, $\lambda + d\lambda$, будет иметь наибольшее значение в общей мощности излучения абсолютно чёрного тела тогда, когда его температура достигнет T_m согласно (10*). Но соотношение (10*) отличается от (10) только перестановкой значка m, что не меняет связи между λ и T. Выражение (10*) говорит о том, что при температуре T_m в спектральный участок λ, $\lambda + d\lambda$ попадает наибольшая относительная мощность излучения, т. е. что при этом спектральная плотность излучения имеет максимум при длине волны λ.

Если бы вместо (12) мы написали выражение для к. п. д. через p_n или через $p_{\ln}$, то пришли бы к тем же результатам.

Таким образом, отыскивая положение максимума в спектре излучения абсолютно чёрного тела по способу, не требующему сравнения мощностей излучения в разных участках спектра, т. е. по способу, не требующему решения вопроса о том, что есть равные спектральные интервалы, мы приходим к результату, совпадающему с тем, который нам представлялся наиболее правильным и с точки зрения размерностей.

6. Поэтому приходится считать, что 1) положение максимума излучения в спектре абсолютно чёрного тела определяется законом Вина, в котором вместо постоянной 0,2886 *см·градус* K следует подставить постоянную 0,3668 *см·градус* K; 2) максимум излучения растёт пропорционально четвёртой степени абсолютной температуры, а не пятой, как это обычно считают; 3) *равными спектральными интервалами следует считать интервалы, характеризующиеся равенством отношений* $\Delta\lambda/\lambda$ (или $\Delta n/n$), вместо равенства разностей $\Delta\lambda$, как это молчаливо допускается в большинстве случаев,

а по оси абсцисс соответствующих графиков следует откладывать $\ln\lambda$ (или $\ln n$) в линейном масштабе, либо λ (или n) в логарифмическом масштабе.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. F. Benford, J. Opt. Soc. Amer. **29**, № 2, 92—96 (1939).
2. A. G. Worthing, J. Opt. Soc. Amer. **29**, № 2, 101—102 (1939).
3. А. А. Гершун, УФН **46**, № 3, 388—395 (1952).
4. A. H. Boerdijk, Philips Res. Rep. **8**, 291—303 (1953).
5. L. Foitzik, Exprtl. Techn. Phys. **1**, № 4/5, 209—213 (1953).
6. R. H. Bracewell, Nature **174**, № 4429, 563—564 (1954).