

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК**ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ
МНОЖЕСТВЕННОГО ОБРАЗОВАНИЯ ЧАСТИЦ***С. З. Беленький и Л. Д. Ландау***§ 1. ВВЕДЕНИЕ**

Как показывает опыт, при соударениях сверхбыстрых частиц происходит образование большого числа новых частиц (многолучевые звёзды).

Энергия частиц, создающих такие звёзды, порядка 10^{12} эв и выше. Характерно, что такие соударения происходят не только между нуклоном и ядром, но и между двумя нуклонами. Так, образование двух мезонов при соударениях нейтронов с протонами наблюдалось уже при сравнительно небольших энергиях порядка 10^9 эв в опытах, проведённых на космotronе¹.

Ферми^{2, 3} принадлежит остроумная идея рассматривать процесс соударения при очень больших энергиях с помощью термодинамических методов.

Основные положения теории Ферми сводятся к следующим:

1. Предполагается, что при соударении двух очень энергичных нуклонов энергия в системе их центра тяжести выделяется в очень малом объёме V . Так как ядерное взаимодействие очень велико, а размеры объёма малы, то распределение энергии будет определяться статистическими законами. Это позволяет рассматривать столкновение частиц большой энергии, не пользуясь какими-либо конкретными теориями ядерного взаимодействия.

2. Объём V , в котором выделяется энергия, определяется размером мезонного облака вокруг нуклонов, радиус которого порядка $\hbar/\mu c$, где μ — масса π -мезона. Однако так как нуклоны движутся с большой скоростью, то мезонное облако, окружающее их, испытывает лоренцево сжатие вдоль направления движения нуклонов. Таким образом, объём V по порядку величины будет равен:

$$V = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{\hbar}{\mu c} \right)^3 \cdot \frac{2Mc^2}{E'}, \quad (1.1)$$

где M — масса нуклона, E' — энергия нуклонов в системе центра тяжести.

¹ УФН, т. LVI, вып. 3

3. Ферми предполагает, что частицы образуются, согласно законам статистического равновесия, в объёме V в самый момент столкновения. Образовавшиеся частицы, не взаимодействуя более друг с другом, вылетают из объёма в «замороженном» состоянии.

4. Ферми рассмотрел как лобовые соударения, которые согласно его расчётом приводят к изотропному угловому распределению, так и нелобовые (периферические) соударения. В этом случае при статистическом расчёте учитывалось, кроме сохранения энергии, также сохранение момента количества движения. При нелобовых соударениях получается уже не изотропное угловое распределение в системе центра тяжести.

Основная идея Ферми о применении статистических методов к исследованию процессов соударения является, несомненно, весьма плодотворной, однако отдельные предположения и количественные расчёты представляются неубедительными (см. ^{4, 5}).

Необосновано утверждение, что число частиц в многолучевой звезде определяется числом частиц, возникающим в объёме V в самый момент столкновения. В этот момент, из-за большой плотности частиц и сильного взаимодействия между ними, вообще не имеет смысла говорить о числе частиц. Если даже принять, что частицы образуются в первый момент, то предположение о сильном взаимодействии нельзя согласовать с допущением, что это взаимодействие сразу прекращается после вылета частиц из объёма.

В действительности происходит расширение системы и число частиц становится определённым лишь тогда, когда взаимодействие между ними становится малым. Именно тогда и происходит свободный разлёт частиц. На это обстоятельство было указано И. Померанчуком ⁴. Далее, Ферми ³ некорректно рассчитал периферические соударения и, следовательно, угловые и энергетические распределения частиц. Это вычисление Ферми трудно совместить с теорией относительности. Согласно Ферми при существенно нелобовом соударении за время соударения порядка $\left(\frac{\hbar}{mc}\right)\left(\frac{Mc^2}{E'}\right)\frac{1}{c}$ взаимодействие распространяется на весь объём мезонного облака, т. е. на расстояние порядка \hbar/mc . Это означает, что возмущение должно распространяться со скоростью, значительно превышающей скорость света.

Недостатки теории Ферми в основном связаны с тем, что неправильно учитывается расширение составной системы. Как показал Ландау ⁶, расширение системы может быть рассмотрено на основе релятивистской гидродинамики. Использование гидродинамики в данном случае также последовательно, как использование термодинамики, так как области применимости и той и другой совпадают *).

*.) Действительно, условия применимости термодинамики и гидродинамики заключаются в требовании $\frac{l}{L} \ll 1$, где l — «длина пробега», а L — наименьшие размеры системы.

С качественной стороны процесс соударения выглядит следующим образом:⁶

1. При соударении двух нуклонов возникает составная система, причём энергия выделяется в малом, лоренцово-сокращённом в по-перечном направлении объёме V .

В момент столкновения возникает большое число «частиц»; «длина пробега» в возникшей системе мала по сравнению с её размерами и в системе устанавливается статистическое равновесие.

2. Второй этап столкновения заключается в расширении системы. К этому этапу следует применять гидродинамический подход, при чём расширение можно рассматривать как движение идеальной (невязкой и нетеплопроводной) жидкости*). В процессе расширения «длина пробега» продолжает оставаться малой по сравнению с размерами системы, что и оправдывает применение гидродинамики.

Так как скорости в системе сравнимы со скоростью света, то следует применять не обычную, а релятивистскую гидродинамику. За время первого и второго этапов соударения в системе всё время происходит образование и поглощение частиц. Здесь существенна большая плотность энергии в системе. Система в данном случае вообще не характеризуется числом частиц вследствие сильного взаимодействия между отдельными частями системы.

3. По мере расширения системы взаимодействие ослабевает и длина пробега возрастает. Число частиц как физическая характеристика появляется, когда взаимодействие достаточно мало. Когда длина пробега становится сравнимой с линейными размерами системы, происходит распад системы на отдельные частицы. Этую стадию мы будем называть «разлётом». Разлёт осуществляется при температуре системы порядка $T \approx \mu c^2$, где μ — масса π -мезона. (Температура всюду измеряется в энергетических единицах.)

§ 2. ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ ПРИ РАЗЛЁТЕ СИСТЕМЫ

При разлёте системы взаимодействием между частицами можно пренебречь и поэтому получается ряд простых соотношений.

Рассмотрим некоторый участок системы, находящийся при температуре разлёта T_k . Используем следующее выражение для реля-

*) Поясним это следующими качественными соображениями. Для того чтобы можно было пренебречь вязкостью и теплопроводностью, число Рейнольдса $\frac{LV}{\eta v}$ должно быть больше 1. Здесь L — наименьшие размеры системы, V — «макроскопическая» скорость, v — «молекулярная» скорость, l — длина пробега. Так как V и v порядка c , то условие $R \gg 1$ совпадает с условием $\frac{l}{L} \ll 1$.

тивистской плотности π -мезонов в этом участке:

$$n_\pi = \frac{g_\pi}{2\pi^2} \left(\frac{T_k}{\hbar c} \right)^3 \cdot F(z_\pi), \quad (2.1)$$

где

$$z_\pi = \frac{\mu c^2}{T_k}.$$

Здесь g_π — число возможных состояний частицы в нашем случае (соответственно, наличие π^+ , π^- и π^0 -мезонов), $g_\pi = 3$;

$$F(z_\pi) = z_\pi^3 \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{e^{z_\pi \sqrt{1+x^2}} - 1}. \quad (2.2)$$

Функция $F(z_\pi)$ может быть представлена в следующем виде:

$$F(z_\pi) = z_\pi^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{K_2[z_\pi(1+m)]}{1+m}, \quad (2.3)$$

где $K_2(z)$ — видоизменённая функция Бесселя второго рода (см. 7, 8). Ряд (2.3) быстро сходится. Приведём асимптотические выражения $K_2(z)$ для больших и малых значений z :

$$\left. \begin{aligned} K_2(z) &= \left(\frac{\pi}{2z} \right)^{1/2} e^{-z} \left[1 + \frac{15}{8} \frac{1}{z} \right] \text{ для } z \gg 1, \\ K_2(z) &= \frac{2}{z^2} \quad \text{для } z \ll 1. \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

Пользуясь (2.4), нетрудно убедиться, что при высоких температурах

$$n_\pi = 0,365 \left(\frac{T}{\hbar c} \right)^3,$$

а при малых температурах

$$n_\pi = g_\pi \left(\frac{T \mu}{2\pi \hbar^3} \right)^{3/2} e^{-\frac{\mu c^2}{T}}.$$

Для плотности энергии π -мезонов ε_π имеем следующее выражение:

$$\varepsilon_\pi = T_k \left(\frac{g_\pi}{2\pi^2} \right) \left(\frac{T_k}{\hbar c} \right)^3 \Phi(z_\pi), \quad (2.5)$$

где

$$\Phi(z_\pi) = z_\pi^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{3K_2[z_\pi(1+m)] + z_\pi(1+m)K_1[z_\pi(1+m)]}{(1+m)^2}. \quad (2.6)$$

Здесь $K_1(z)$ — видоизменённая функция Бесселя первого рода.

Напомним асимптотические выражения $K_1(z)$ для больших и малых значений z :

$$\left. \begin{aligned} K_1(z) &= \left(\frac{\pi}{2z} \right)^{1/2} e^{-z} \left[1 + \frac{3}{8} \frac{1}{z} \right] \text{ для } z \gg 1, \\ K_1(z) &= \frac{1}{z} \quad \text{для } z \ll 1. \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

Нетрудно убедиться, что при $z_\pi \rightarrow 0$ (очень высокие температуры) $\Phi(0) = 6,49$, а при $z \gg 1$ получим, что $\frac{\epsilon_\pi}{n_\pi} = \mu c^2 + \frac{3}{2} T$. Приведём, наконец, выражение для плотности энтропии π -мезонов (в абсолютных единицах):

$$S_\pi = \left(\frac{T}{\hbar c} \right)^3 \frac{g_\pi}{2\pi^2} G(z_\pi), \quad (2.8)$$

где

$$G(z_\pi) = z_\pi^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{4K_2[z_\pi(1+m)] + z_\pi(1+m)K_1[z_\pi(1+m)]}{(1+m)^2}. \quad (2.9)$$

Значения функций $F(z)$, $\Phi(z)$ и $G(z)$ даны в таблице I.

Таблица I

z	$F(z)$	$\Phi(z)$	$G(z)$	$F^*(z)$	$\Phi^*(z)$	$G^*(z)$
0	2,40	6,49	8,65	1,80	5,68	7,57
0,5	2,17	6,30	8,31	1,72	5,58	7,37
0,7	2,02	6,12	8,02	1,65	5,47	7,19
0,9	1,86	5,90	7,67	1,56	5,33	6,95
1	1,78	5,78	7,48	1,52	5,24	6,81
1,2	1,62	5,51	7,07	1,41	5,05	6,51
1,5	1,39	5,06	6,42	1,25	4,72	6,00
2	1,05	4,27	5,31	0,982	4,07	5,07
3	0,561	2,78	3,33	0,546	2,72	3,27
6	0,0599	0,471	0,531	0,0599	0,471	0,531
7	0,0268	0,237	0,263	0,0268	0,237	0,263
8	0,0117	0,115	0,127	0,0117	0,115	0,127

В таблице I значения функций $F^*(z)$, $\Phi^*(z)$, $G^*(z)$ относятся к случаю газа Ферми, в то время как функции $F(z)$, $\Phi(z)$, $G(z)$ к газу Бозе. Для газа Ферми вместо формулы (2.2) будем иметь:

$$F(z) = z^3 \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{e^{z\sqrt{1+x^2}} - 1},$$

а ряды (2.3), (2.6), (2.8) будут знакопеременными.

Для $z \gg 1$

$$F(z) \approx F^*(z) \approx z^2 \left(\frac{\pi}{2z} \right)^{1/2} e^{-z} \left(1 + \frac{15}{8} \frac{1}{z} \right),$$

$$\Phi(z) \approx \Phi^*(z) \approx z^3 \left(\frac{\pi}{2z} \right)^{1/2} e^{-z} \left(1 + \frac{27}{8} \frac{1}{z} \right),$$

$$G(z) \approx G^*(z) \approx z^3 \left(\frac{\pi}{2z} \right)^{1/2} e^{-z} \left(1 + \frac{35}{8} \frac{1}{z} \right),$$

Кроме π -мезонов в системе, вообще говоря, могут образоваться и другие частицы. Как показано в работе ⁷, равновесное число мезонов с массами, превышающими массу π -мезона, может быть вообще говоря, значительно при $T_k \approx \mu c^2$. Однако некоторые из тяжёлых мезонов, повидимому, слабо взаимодействуют с нуклонами и потому не рождаются в звёздах. Далее, другие тяжёлые частицы, повидимому, образуются в звёздах парами (например, Λ -частицы образуются вместе с K -мезонами)⁸⁾, но доля этих частиц относительно невелика и экспериментальные данные недостаточны для того, чтобы сделать определённые выводы. Поэтому мы их здесь рассматривать не будем.

Необходимо учесть, кроме того, наличие нуклонов в системе. Так как при соударениях большой энергии принимают участие несколько нуклонов (не меньше двух), то при этом следует учсть также сохранение ядерного заряда (см. ⁹).

Выражения для плотности нуклонов n_{nn} и антинуклонов n_{an} имеют следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} n_{nn} &= \frac{g_n}{2\pi^2} \left(\frac{T_k}{\hbar c} \right)^3 F_1(z_n, y_{nn}), \\ n_{an} &= \frac{g_n}{2\pi^2} \left(\frac{T_k}{\hbar c} \right)^3 F_1(z_n, y_{an}). \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

Здесь g_n — число возможных состояний частицы при данном импульсе; для нуклонов $g_n = 4$ (два зарядовых состояния и два направления спина)

$$F_1(z_n, y) = z_n^3 \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{e^{-y + z_n \sqrt{1+x^2}} + 1}, \quad (2.11)$$

где $z_n = \frac{Mc^2}{T}$, M — масса нуклона, $y = \frac{\mu}{T}$, μ — химический потенциал.

Условие равновесия по отношению к образованию и анигиляции пар гласит $y_{nn} + y_{an} = 0$. Обозначив y_{nn} через y , получим, что $y_{an} = -y$.

В интересующих нас случаях $y \ll z$ и $z > 1$. Поэтому в формуле (2.11) знаменатель можно разложить в ряд по степеням величины $(y - z \sqrt{1+x^2})$. Ограничивааясь первым членом в разложении, получим:

$$n_{nn} = \frac{g_n}{2\pi^2} \left(\frac{T_k}{\hbar c} \right)^3 F_0(z_n) e^y; \quad n_{an} = \frac{g_n}{2\pi^2} \left(\frac{T_k}{\hbar c} \right)^3 F_0(z_n) e^{-y}. \quad (2.10')$$

⁸⁾ Относительно большие времена жизни всех тяжёлых частиц трудно совместить с предположением об их сильном взаимодействии с ядрами, если не допустить, что эти частицы образуются парами.

Для плотностей энергии ($\varepsilon_{\text{нн}}$ и $\varepsilon_{\text{ан}}$) и плотностей энтропии ($s_{\text{нн}}$ и $s_{\text{ан}}$) (2.10) нуклонов и антинуклонов имеем:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\text{нн}} &= T_k \left(\frac{g_{\text{n}}}{2\pi^2} \right) \left(\frac{T_k}{\hbar c} \right)^3 \Phi_0(z_{\text{n}}) e^y; \\ \varepsilon_{\text{ан}} &= T_k \left(\frac{g_{\text{n}}}{2\pi^2} \right) \left(\frac{T_k}{\hbar c} \right)^3 \Phi_0(z_{\text{n}}) e^{-y};\end{aligned}\quad (2.12)$$

$$\begin{aligned}s_{\text{нн}} &= \left(\frac{T_k}{\hbar c} \right)^3 \left(\frac{g_{\text{n}}}{2\pi^2} \right) [G_0(z_{\text{n}}) - yF_0(z_{\text{n}})] e^y; \\ s_{\text{ан}} &= \left(\frac{g_{\text{n}}}{2\pi^2} \right) \left(\frac{T_k}{\hbar c} \right)^3 [G_0(z_{\text{n}}) + yF_0(z_{\text{n}})] e^{-y}.\end{aligned}\quad (2.13)$$

Величина y (химический потенциал) определяется с помощью условия, что разность между числом нуклонов и антинуклонов во всей системе должна оставаться постоянной и равной числу начальных нуклонов N_0 .

Используем приведённые формулы (2.1) — (2.13) для вычисления некоторых величин.

Оценим прежде всего температуру разлёта системы T_k . Так как плотность π -мезонов значительно больше плотности нуклонов, то эта величина определяется в основном плотностью π -мезонов. Чтобы при температуре T_k был возможен разлёт системы, длина свободного пробега частиц l должна быть при T_k порядка характерных размеров системы L . Как можно показать на основе более детального гидродинамического расчёта, приведённого в § 4, L приближённо может быть записано так: $L \approx \left(\frac{\hbar}{\mu c} \right) \left(\frac{E}{Mc^2} \right)^{1/2}$, где E — энергия первичного нуклона и M — его масса. Длина пробега $l \approx \frac{1}{n\sigma}$. Допустим для оценки, что по порядку величины $\sigma = \pi \left(\frac{\hbar}{\mu c} \right)^2$. Если в качестве n взять выражение, определяемое формулой (2.1), то получим:

$$\frac{l}{L} = \frac{2\pi}{3} \frac{z_{\pi}^3}{F(z_{\pi})} \cdot \left(\frac{Mc^2}{E} \right)^{1/2}.\quad (2.14)$$

Результаты вычисления по формуле (2.14) приведены в таблице II.

Отсюда видно, что температура разлёта T_k лежит в пределах $0,7 - 1,5 \mu c^2$. Действительно, при значении $\frac{l}{L} \ll 1$ разлёт не может произойти, так как длина пробега чрезвычайно мала, а при $\frac{l}{L} \gg 1$ система не может существовать из-за малости её размеров. Следует

отметить, что неопределённость нашего расчёта, связанная с тем, что и σ , и L известны только по порядку величины, не позволяет теоретически определить температуру разлёта T_k .

Таблица II

$T_k / \mu\text{с}^2$	I/L^{**}
0,5	9
0,7	3
1,0	0,7
1,5	0,21
2	0,07

**) Здесь I/L взято при $E = 10^{12} \text{ эв}$.

Величина T_k довольно слабо зависит от величины I/L (при изменении I/L почти в 100 раз T_k меняется в четыре раза). С другой стороны, так как I/L крайне слабо зависит от начальной энергии, то T_k зависит от неё ещё слабее. Таким образом, введение величины T_k , практически не зависящей от свойств системы (т. е. от начальной энергии) имеет физический смысл.

Перейдём теперь к вычислению числа антинуклонов. Будем предполагать, что каждый из участков системы распадается при одинаково-

вой температуре системы T_k , хотя моменты распада для различных участков могут и не совпадать. Тогда отношение полного числа нуклонов в системе к полному числу π -мезонов будет равно отношению их плотностей. Из формул (2.1) и (2.10') нетрудно получить:

$$\operatorname{sh} y = \frac{N_\pi^0}{N_n^0} \cdot \frac{N_0}{N_\pi}; \quad \operatorname{ch} y = \frac{N_\pi^0}{N_n^0} \cdot \frac{N_n}{N_\pi}. \quad (2.15)$$

Здесь N_π^0 и N_n^0 — полные числа π -мезонов и нуклонов (нуклонов и антинуклонов) в системе, при условии, что начальные нуклоны отсутствуют. N_0 — число начальных нуклонов, N_π и N_n — полные числа π -мезонов и нуклонов (нуклонов и антинуклонов) при наличии начальных нуклонов. Из формул (2.15) получаем:

$$\frac{N_n}{N_\pi} = \sqrt{\left(\frac{N_n^0}{N_\pi^0}\right)^2 + \left(\frac{N_0}{N_\pi}\right)^2}. \quad (2.16)$$

Аналогичным образом получим отношение суммарной плотности энергии нуклонов и антинуклонов ϵ_n к плотности энергии ϵ_π π -мезонов:

$$\frac{\epsilon_n}{\epsilon_\pi} = \sqrt{1 + \left(\frac{N_\pi^0}{N_n^0}\right)^2 \left(\frac{N_0}{N_\pi}\right)^2 \cdot \left(\frac{\epsilon_n^0}{\epsilon_\pi^0}\right)}. \quad (2.17)$$

Здесь ϵ_n^0 и ϵ_π^0 — плотности энергий нуклонов и π -мезонов, когда число начальных нуклонов $N_0 = 0$. Отношение $\frac{\epsilon_n}{\epsilon_\pi}$ не зависит от

системы координат, в которой рассматривается процесс соударения.

Действительно, пусть частица с массой M обладает в системе координат, где данный элемент вещества покоятся, энергией E . В другой системе координат, движущейся относительно данной со скоростью v , эта частица будет обладать энергией $E' = \frac{E + p_x v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$, где

p_x — проекция импульса частицы на направление скорости v . Так как в данной системе координат распределение изотропно, то усредняя по всем направлениям, получим $E' = \frac{E}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$. Энер-

гия частицы с другой массой μ будет преобразовываться по тому же закону. Таким образом, отношение энергий не будет зависеть от скорости v .

Отношения $\frac{N_h^0}{N_\pi^0}$ и $\frac{\epsilon_h^0}{\epsilon_\pi^0}$ легко находятся из формул (2.1), (2.5),

(2.10) и (2.12), если положить в формулах (2.10) и (2.12) $y = 0$. Соответствующие значения приведены в таблице III.

Если температура разлёта порядка $1,2-1,5 \mu c^2$, то известную роль может играть возбуждение «изобарных» состояний системы и образование Λ -частиц. Возбуждение «изобарных» состояний приведёт к некоторому увеличению числа рождающихся π -мезонов, которое при $N_\pi > N_0$ несущественно. Что касается Λ -частиц, то роль их приближённо оценена в работах^{7,9}. Однако, так как спин Λ -частиц неизвестен и они образуются парами с K -частицами (это не учтено в указанных работах), то эта оценка является весьма предварительной.

Рассмотрим следующий пример. Пусть $T_k = 1,5 \mu c^2$, тогда $\frac{N_h^0}{N_\pi^0} = 0,27$, а число антинуклонов равно 0,135. Допустим, что $\frac{N_0}{N_\pi} = 0,15$ (что соответствует, например, трём начальным нуклонам при 20 образовавшихся мезонах). Тогда из формулы (2.16) получим, что $\frac{N_h}{N_\pi} = 0,3$. Число всех образовавшихся нуклонов равно 0,15, а антинуклонов 0,075. Таким образом, в этом случае число антинуклонов с учётом начальных нуклонов уменьшится почти вдвое.

Таблица III

$\frac{T_k}{\mu c^2}$	$\frac{N_h^0}{N_\pi^0}$	$\frac{\epsilon_h^0}{\epsilon_\pi^0}$
1,0	0,06	0,14
1,2	0,126	0,30
1,5	0,27	0,57
2,0	0,56	1,0

Формула (2.8) даёт отношение энергии, уносимой нуклонами к энергии, уносимой π -мезонами. Пусть $T_k = 1,2 \mu c^2$. Тогда $\frac{\varepsilon_n^0}{\varepsilon_\pi^0} = 0,3$, $\frac{N_n^0}{N_\pi^0} = 0,13$. При $\frac{N_0}{N_\pi} = 0,15$, $\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_\pi} = 0,42$. Если же $\frac{N_0}{N_\pi} \approx 1$, то $\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_\pi} \approx 2,3$, т. е. нуклоны уносят около 70% всей энергии.

Следует, однако, подчеркнуть, что при $N_0 \approx N_\pi$ число образующихся частиц невелико и развивающаяся теория является грубо приближённой.

Заметим, что число антинуклонов может, вообще говоря, определяться более высокой температурой, чем температура разлёта; в этом смысле формула (2.16) даёт нижний предел. С другой стороны, формулы (2.16) и (2.17) содержат два параметра — температуру разлёта системы T_k и величину $\frac{N_0}{N_\pi}$. Можно, однако, обращаться величину, которая не зависит от $\frac{N_0}{N_\pi}$ и которая определяется только температурой разлёта системы T_k , даже если число нуклонов фиксируется и при более высокой температуре. Нетрудно видеть, что отношение энергии, приходящейся на один нуклон, к энергии, приходящейся на один π -мезон, зависит только от температуры разлёта T_k , и экспериментальное определение этого отношения явилось бы, повидимому, лучшим способом определения температуры разлёта. Заметим, что это отношение не зависит от системы отсчёта. Значения этого отношения приводятся в таблице IV.

Таблица IV

$\frac{T_k}{\mu c^2}$	$a = \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_\pi} \frac{n_\pi}{n_n}$
$T_k \gg \mu c^2$	6,8
0,5	3,76
0,7	3,28
0,8	2,92
1	2,65
1,5	2,16
2	1,83

Пиши и числом частиц. Напомним, что расширение системы (второй этап) рассматривается как движение идеальной жидкости и потому является адиабатическим. Эту адиабатичность могли бы нарушить ударные волны, но они не образуются в процессе расширения. Поэтому энтропия системы и её отдельных участков изменяется на первом этапе соударения и остаётся неизменной в продолжении всей гидродинамической стадии расширения вплоть до разлёта на отдельные частицы.

Из уравнений (2.1), (2.8), (2.10), (2.13) получим следующее выражение для энтропии системы:

$$S = \left\{ \frac{G_0(z_n)}{F_0(z_n)} - y \cdot \text{th } y \right\} N_n + \frac{G_0(z_\pi)}{F(z_\pi)} N_\pi. \quad (2.18)$$

Если $N_0 = 0$, то и $y = 0$ и формула (2.18) сведётся к следующей:

$$N^* = \alpha S, \quad (2.19)$$

где $N^* = N + N_\pi$, т. е. N^* равно сумме образующихся частиц (нуклонов и π -мезонов), а коэффициент α равен:

$$\alpha = \frac{8F_0(z_h) + 3F(z_\pi)}{8G_0(z_h) + 3G(z_\pi)}. \quad (2.20)$$

Функция α дана в таблице V.

Как следует из этой таблицы, функция α слабо зависит от температуры разлёта T_k . Нетрудно видеть, что в интервале изменения T_k от 0,7 до 1,5 μc^2 коэффициент α практически не меняется.

Переходя к случаю, когда число начальных нуклонов не равно нулю, обратимся к уравнению сохранения ядерного заряда:

$$N_{nh} - N_{ah} = \\ = \left(\frac{T_k}{\hbar c} \right)^3 \frac{g_h}{2\pi^2} F(z_h) [e^y - e^{-y}] V_{cp} = N_0. \quad (2.21)$$

Здесь V_{cp} — суммарный объём системы. С другой стороны, полное число нуклонов равно:

$$N_h = N_{nh} + N_{ah} = \\ = \left(\frac{T_k}{\hbar c} \right)^3 \frac{g_h}{2\pi^2} F(z_h) [e^y + e^{-y}] V_{cp}. \quad (2.22)$$

Таблица V

$\frac{T_k}{\mu c^2}$	α
0,17	0,113
0,5	0,198
0,67	0,215
0,83	0,222
1	0,223
1,43	0,216
2	0,213
$T_k \gg \mu c^2$	0,25

Вернёмся теперь к уравнению (2.18). Вместо S возьмём отношение числа частиц N^* , образующихся при $N_0 = 0$, к начальному числу нуклонов N_0 . Для этого умножим правую и левую части уравнения (2.12) на α и разделим на N_0 (см. (2.21)).

В результате преобразований получим:

$$\frac{N^*}{N_0} = \left[\frac{G_0(z_h)}{F_0(z_h)} \operatorname{cth} y - y + \frac{g_\pi G(z_\pi)}{2g_h F_0(z_h) \sinh y} \right] \alpha. \quad (2.23)$$

С помощью уравнений (2.1), (2.10), (2.22) получаем:

$$\frac{N}{N_0} = \frac{g_\pi F_0(z_\pi)}{2g_h F_0(z_h)} \frac{1}{\sinh y} + \operatorname{ctg} y. \quad (2.24)$$

Из этих уравнений можно найти отношение $\frac{N}{N_0}$ как функцию $\frac{N^*}{N_0}$ (величина y является параметром). Вычисления показывают, что в широком интервале температур (от $T_k = 0,5$ до $T_k = 2 \mu c^2$) и до значений $\frac{N^*}{N_0} \approx 2$, $\frac{N}{N_0}$ будет всегда меньше $\frac{N^*}{N_0}$. При этом отличие $\frac{N}{N_0}$ от $\frac{N^*}{N_0}$ будет тем больше, чем меньше температура T_k . Однако

уже при $\frac{N^*}{N_0} = 3$ и $T_k = 0,5 \mu c^2$, $\frac{N}{N_0} = 2,54$, т. е. отношение $\frac{N}{N^*} = 0,85$. При $\frac{N^*}{N_0} < 2$ число вновь образованных частиц быстро падает и $\frac{N}{N_0}$ стремится к 1. Таким образом соотношение

$$N = \alpha S \quad (2.25)$$

справедливо и при наличии начальных нуклонов, вплоть до значений $\frac{N^*}{N_0}$ порядка 2, причём под N следует понимать сумму образованных при соударениях частиц и начальных нуклонов.

§ 3. ПОЛНОЕ ЧИСЛО ЧАСТИЦ

Для гидродинамического рассмотрения системы, которое используется при двух первых этапах соударения, необходимо знать уравнение состояния вещества.

В качестве уравнения состояния сильно сжатого вещества при температурах $T \gg \mu c^2$ примем следующее (см.⁶):

$$p = \frac{\varepsilon}{3}, \quad (3.1)$$

где p — давление, а ε — плотность энергии. Как известно, для давления и плотности макроскопических тел имеет место неравенство $p \leq \varepsilon/3$, причём знак равенства справедлив в крайне релятивистском случае. Однако это неравенство выведено в предположении электромагнитного взаимодействия между частицами и в настоящее время нет доказательства, что оно должно быть справедливо в случае любого взаимодействия. Тем не менее выбор уравнения состояния (3.1) представляется нам весьма правдоподобным. Так как число частиц в системе не задано, а само определяется из статистического равновесия, то химический потенциал равен нулю. Отсюда $\varepsilon - Ts + p = 0$, где s — энтропия единицы объёма. Используя уравнение состояния, имеем $Ts = \varepsilon + p = \frac{4}{3}\varepsilon$. Так как при заданном объёме $d\varepsilon = Tds$, то нетрудно видеть, что

$$s \approx \varepsilon^{3/4}; \quad T \approx \varepsilon^{1/4}. \quad (3.2)$$

Соотношения (3.2) совпадают с соотношениями для «чёрного излучения», чего, конечно, и следовало ожидать.

Мы уже указывали, что энтропия системы остаётся постоянной в течение гидродинамической стадии расширения и меняется только на первом этапе, в первый момент столкновения. С другой стороны, число частиц в звезде связано с энтропией соотношением (2.25). Отсюда следует, что для определения полного числа частиц следует вычислить изменение энтропии в первый момент столкновения. Это изменение энтропии проще всего вычислить в случае столкновения

двух одинаковых частиц, например двух нуклонов. Пусть E' — энергия нуклонов в системе центра инерции. В системе центра инерции, в силу симметрии системы, вещества в момент, непосредственно следующий за столкновением, покоятся. Полная энтропия системы пропорциональна $\varepsilon^{3/4}V_1$, где ε — плотность энергии, V_1 — объём, в котором концентрируется энергия. Поэтому $\varepsilon = \frac{E'}{V_1}$; энтропия, а следовательно, и число частиц пропорциональны $E'^{3/4}V_1$. Так как объём V_1 , благодаря лоренцову сокращению преобразуется обратно пропорционально E' , а энергия E в лабораторной системе пропорциональна E'^2 , то окончательно получим:

$$N \approx E^{1/4}, \quad (3.3)$$

где E — энергия в лабораторной системе. Из размерных соображений формула (3.3) может быть написана в форме

$$N = k \left(\frac{E}{2Mc^2} \right)^{1/4}, \quad (3.3')$$

где k — постоянная порядка 1. Из опыта следует, что $k \approx 2$. Соотношение (3.3) совпадает с полученным Ферми, что естественно, так как при выходе его мы исходили из уравнения состояния для чёрного излучения, которое принимает и Ферми, и из соотношения $N \approx S$, которое справедливо при любой «температуре» разлёта системы. Согласно Ферми температура разлёта определяется в первый момент после столкновения. Это предположение, являющееся, как было показано⁴, внутренне противоречивым, не влияет, однако, на справедливость соотношения (3.3).

Мы рассматривали лобовые столкновения, когда частицы пролетают на расстояниях, сравнимых с их радиусом действия. Теперь обратимся к периферическим столкновениям, когда расстояние пролёта велико по сравнению с радиусом действия сил обеих частиц. На первый взгляд может показаться, что среднее число рождающихся частиц должно быстро падать с увеличением прицельного расстояния. Это связано с тем, что энергия мезонного поля столкнувшихся нуклонов, сосредоточенная в каждом участке, казалось бы (в системе, в которой этот участок покоятся), быстро падает с увеличением расстояния от их центров. Такая точка зрения проводится в работах Гейзенберга¹⁰ и Баба¹¹, посвящённых множественному образованию частиц при больших энергиях. Между тем эта точка зрения находится в противоречии с квантовым соотношением неопределённости и потому является ошибочной⁶. Подробнее этот вопрос рассмотрен в работе Е. Л. Фейнберга и Д. С. Чернавского¹². Действительно, если бы энергия участка системы убывала, то она оказалась бы весьма скоро малой по сравнению с неопределённостью $\Delta E \approx \frac{\hbar c}{l}$, где l — толщина

участка, сокращённая вследствие лоренцова сжатия*). Отсюда следует, что малой является не истинная полная энергия системы, а её математическое ожидание. Другими словами, уменьшается не полная энергия системы и полное число частиц, а лишь вероятность, что такое столкновение вообще произойдёт. При детальном анализе нелобовых столкновений необходимо квантовое рассмотрение, так как классическое несправедливо из-за нарушения соотношения неопределённости.

Последовательное квантовое рассмотрение проблемы нелобовых соударений представляет большие трудности. Это рассмотрение требует привлечения мезонной теории ядерных сил, которая ещё не разработана. Не исключена возможность, что при нелобовом соударении (которое само маловероятно) передаётся в процессе соударения лишь некоторая доля энергии первичного нуклона. Однако в настоящее время теория не в состоянии решить этот вопрос. Нам представляется, что вообще на современном уровне теории нет особого смысла различать центральные и периферические столкновения при соударениях двух нуклонов. Эффективные же сечения соударения с возникновением многолучевой звезды определяются по порядку величины «радиусом» нуклона $\hbar/\mu c$.

Гейзенберг¹⁰ из-за неправильного учёта периферических соударений приходит к ошибочному выводу, что сечение соударения логарифмически растёт с энергией. Остановимся подробнее на этом вопросе (см.¹²). Гейзенберг рассматривает соударение сверхбыстрых нуклонов в системе их общего центра тяжести. Мезонные поля нуклонов убывают в перпендикулярном направлении y по закону $e^{-\frac{y}{r_0}}$, где $r_0 = \frac{\hbar}{\mu c}$. Чтобы оценить долю γ первоначальной энергии нуклона E , переходящую в образующиеся частицы, рассматривается область, в которой перекрываются мезонные облака обеих частиц при параметре соударения b . При этом получается $\gamma \approx e^{-\frac{b}{r_0}}$ а число образующихся частиц равно по порядку величины:

$$N \approx \frac{\gamma E}{\mu c^2} \approx \frac{E}{\mu c^2} e^{-\frac{b}{r_0}}. \quad (3.4)$$

Сечение для образования некоторого числа N мезонов равно πb_0^2 при b_0 , соответствующем N . Например, при $N \approx 2$ имеем:

$$\sigma_N \approx \pi r_0^2 \left(\ln \frac{E}{\mu c^2} \right)^2. \quad (3.5)$$

Отсюда следует, что должны возникать главным образом ливни с малым числом частиц, а сечение логарифмически растёт с энер-

*) Так как $I \approx \frac{\hbar}{\mu c} \frac{Mc^2}{E}$, то $\frac{\Delta E}{E} \approx \frac{\mu}{M}$.

гий. Но, как указывалось выше, подход Гейзенберга к нелобовым соударениям неверен и потому формула (3.5) ошибочна.

Действительно, при $\gamma E \leq \Delta E$ её вывод приходит в противоречие с соотношением неопределенности. Это соответствует параметрам соударения $b \approx r_0$.

В работе Баба¹¹ делается попытка на основе изучения многолучевых звёзд сделать определённые выводы о структуре нуклона. При этом автор с классической точки зрения рассматривает далёкие соударения и, следовательно, также входит в противоречия с соотношением неопределенности. Квантовое же рассмотрение, как уже указывалось, в настоящее время провести нельзя. Поэтому какие-либо выводы о структуре нуклона не могут быть сделаны, исходя из анализа многолучевых звёзд.

Соударения нуклонов с ядрами, а также ядер с ядрами будут рассмотрены в § 5.

§ 4. ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЕ И УГЛОВОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЧАСТИЦ

Мы рассмотрим в этом параграфе стадию расширения при соударении двух нуклонов. Для исследования расширения системы следует использовать уравнения релятивистской гидродинамики:

$$\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} = 0, \quad (4.1)$$

$$T_{ik} = \omega u_i u_k + p g_{ik}, \quad (4.2)$$

где $\omega = \varepsilon + p$ — тепловая функция единицы объёма; u_i — 4-скорость; $g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1$; $g_{44} = -1$; ниже положено $c = 1$, $x_i = x_1, x_2, x_3, it$.

Проекция уравнения (4.1) на направление u_i приводит к следующему уравнению:

$$\frac{\partial s u_k}{\partial x_k} = 0, \quad (4.3)$$

где s — плотность энтропии. Уравнение (4.3) выражает адиабатический характер движения. При выводе уравнения (4.3) учитывались термодинамические соотношения $d\varepsilon = T ds$ и $\omega = Ts$. (Напомним, что так как число частиц в системе не задано, химический потенциал μ равен нулю).

«Спроектируем» теперь уравнение (4.1) на направление, перпендикулярное к u_i . Эта проекция равна, очевидно,

$$\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} + u_i u_k \frac{\partial T_{kl}}{\partial x_l},$$

так как при скалярном умножении на u_i она даёт нуль. Вычисление¹³ приводит к следующему уравнению:

$$\omega u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + u_i u_k \frac{\partial p}{\partial x_k} + \frac{\partial p}{\partial x_i} = 0. \quad (4.4)$$

Учитывая, что в нашем случае $\omega = Ts$ и $dp = sdT$ (так как $d\omega = dp + Tds$), из уравнения (4.4) получим:

$$u_k \frac{\partial Tu_i}{\partial x_k} + \frac{\partial T}{\partial x_i} = 0. \quad (4.5)$$

В системе центра тяжести система имеет в момент столкновения форму сильно сплюснутого диска (вначале поперечные размеры этого диска a в $\frac{E'}{2M}$ раз больше его толщины Δ). Такой характер движения сохраняется в течение значительной части стадии расширения. Движение вещества при этом можно рассматривать как одномерное. Решение как для одномерной, так и для последующей трёхмерной стадий расширения было впервые получено Ландау⁶. Позднее И. М. Халатников¹⁴ получил более точное решение для одномерной стадии, исходя из исследования общей одномерной задачи в релятивистской гидродинамике. В настоящем параграфе мы при рассмотрении одномерной стадии будем следовать вначале работе¹⁴ и далее работе⁶.

В одномерном случае мы будем иметь лишь координаты x_1 и x_4 . Нетрудно видеть, что уравнение (4.5) можно тогда записать следующим образом (см.¹⁴):

$$\frac{\partial Tu_1}{\partial x_4} = \frac{\partial Tu_4}{\partial x_1} \quad (4.6)$$

и, следовательно, существует такая функция φ , что

$$Tu_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \quad Tu_4 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_4}. \quad (4.7)$$

Функция φ является потенциалом одномерного движения релятивистской гидродинамики. Для потенциала φ имеем следующее дифференциальное соотношение:

$$d\varphi = Tu_4 dx_4 + Tu_1 dx_1. \quad (4.8)$$

В дальнейшем вместо x_4 мы будем использовать величину t ($x_4 = it$), вместо u_4 — величину $u_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}$ ($u_4 = iu_0$) и вместо x_1 — величину x . Уравнение (4.8) примет тогда следующий вид:

$$d\varphi = -Tu_0 dt + Tu_1 dx. \quad (4.8')$$

Введём переменную α , связанную со скоростями u_0 и u_1 соотношениями:

$$u_1 = \sinh \alpha, \quad u_0 = \cosh \alpha. \quad (4.9)$$

Теперь совершим преобразование Лежандра по отношению к переменным ω и α . Для потенциала χ получим:

$$\begin{aligned} d\chi &= d(\varphi + Tu_0 t - Tu_1 x) = \\ &= (t \cosh \alpha - x \sinh \alpha) dT + (t \sinh \alpha - x \cosh \alpha) T d\alpha. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Из соотношения (4.10) следует:

$$\frac{\partial \chi}{\partial T} = t \operatorname{ch} \alpha - x \operatorname{sh} \alpha; \quad \frac{\partial \chi}{\partial \alpha} = T (t \operatorname{sh} \alpha - x \operatorname{ch} \alpha), \quad (4.11)$$

$$t = \frac{\partial \chi}{\partial T} \operatorname{ch} \alpha - \frac{1}{T} \frac{\partial \chi}{\partial \alpha} \operatorname{sh} \alpha; \quad x = \frac{\partial \chi}{\partial T} \operatorname{sh} \alpha - \frac{1}{T} \frac{\partial \chi}{\partial \alpha} \operatorname{ch} \alpha. \quad (4.12)$$

Теперь обратимся к уравнению (4.3), которое в случае одномерного движения записывается следующим образом:

$$\frac{ds u_0}{dt} + \frac{ds u_1}{dx} = 0.$$

Перейдём в этом уравнении от переменных t и x к переменным T и α :

$$\frac{\partial (t, x)}{\partial (T, \alpha)} \left\{ \frac{\partial (s \operatorname{ch} \alpha, x)}{\partial (t, x)} - \frac{\partial (s \operatorname{sh} \alpha, t)}{\partial (t, x)} \right\} = \frac{\partial (s \operatorname{sh} \alpha, x)}{\partial (T, \alpha)} - \frac{\partial (s \operatorname{sh} \alpha, t)}{\partial (T, \alpha)}.$$

Так как в нашем случае s полностью определяется температурой T , то получим:

$$\begin{aligned} \frac{1}{s} \frac{ds}{dT} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} (x \operatorname{ch} \alpha - t \operatorname{sh} \alpha) - (x \operatorname{sh} \alpha - t \operatorname{ch} \alpha) \right\} + \\ + \frac{\partial}{\partial T} (t \operatorname{ch} \alpha - x \operatorname{sh} \alpha) = 0. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Пользуясь соотношениями (4.11), (4.12), уравнение (4.13) преобразуем к следующему виду:

$$\frac{1}{s} \frac{ds}{dT} \left\{ \frac{\partial \chi}{\partial T} - \frac{1}{T} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \alpha^2} \right\} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial T^2} = 0. \quad (4.14)$$

Но

$$\frac{s}{T} \frac{dT}{ds} = \frac{1}{T} \frac{dp}{d\varepsilon} \frac{de}{ds} = \frac{dp}{d\varepsilon} = c_0^2,$$

где c_0 — скорость звука в среде.

Введя вместо переменной T переменную $y = \ln T$, получим:

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial \alpha^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} + (c_0^2 - 1) \frac{\partial \chi}{\partial y} = 0. \quad (4.15)$$

Так как уравнение состояния среды $p = \frac{\varepsilon}{3}$, то $c_0^2 = \frac{1}{3}$. Подставляя это значение в уравнение (4.15), имеем:

$$3 \frac{\partial^2 \chi}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial \chi}{\partial y} = 0*. \quad (4.15')$$

Таким образом, решение одномерной задачи релятивистской гидродинамики сводится к решению линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами. Переход от потенциала χ к переменным x и t совершается по формулам (4.12).

*) Вследствие описок в работе И. М. Халатникова¹⁴ коэффициенты в уравнениях (4.15) и (4.15') отличаются от соответствующих коэффициентов, приводимых в работе¹⁴.

Вернёмся теперь к интересующей нас задаче расширения плоского диска толщины Δ . В системе центра тяжести диск расширяется симметрично в обе стороны. Поэтому мы рассмотрим расширение только в одну сторону. Выберем $x = 0$ так, чтобы расширение было симметрично относительно плоскости $x_1 = -l$, где $l = \frac{\Delta}{2}$. Прежде всего следует выяснить граничные условия для нашей задачи. Очевидно, что в плоскости $x_1 = -l$ (которая в силу симметрии может рассматриваться как неподвижная стенка) среда должна покояться, а это означает, что $\alpha = 0$. Используя уравнение (4.12), это условие запишем следующим образом:

$$\left(\frac{\partial \chi}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=0} = le^{-y}. \quad (4.16)$$

Со стороны вакуума искомое решение должно граничить с простой (римановской) волной, для которой имеет место автомодельное решение:

$$x = t \frac{v - c_0}{1 - vc_0}, \quad (4.17)$$

где v — скорость (обычная) движения. Можно показать (см.¹³⁾), что в простой волне величины α и y связаны соотношением

$$\alpha = -\frac{y}{c_0}. \quad (4.18)$$

Для того чтобы найти условие сшивания простой волны с общим решением, следует подставить выражения (4.12) для x и t в уравнение (4.17). Совершив эту подстановку и использовав условие (4.18), получим, что $\chi = 0$.

Таким образом, второе граничное условие запишется так:

$$\chi = 0 \text{ при } \alpha = -\frac{y}{c_0}. \quad (4.19)$$

Введём вместо потенциала χ потенциал χ_1 :

$$\chi = \chi_1 e^{-y}, \quad (4.20)$$

а в качестве переменных величины α и z (вместо y):

$$z = -\alpha - \frac{y}{c_0}. \quad (4.21)$$

Уравнение (4.15) и граничные условия (4.16) и (4.19) примут в новых переменных следующий вид:

$$\left(6 \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial z} - 3 \frac{\partial^2}{\partial z^2} - 1 \right) \chi_1 = 0, \quad (4.22)$$

$$\chi_1 = 0 \text{ при } z = 0, \quad (4.23)$$

$$\frac{\partial \chi_1}{\partial \alpha} - \frac{\partial \chi_1}{\partial z} = -le^{-\frac{2z}{\sqrt{3}}} \text{ при } z = 0. \quad (4.24)$$

Далее совершаем преобразование Лапласа по переменной z :

$$\psi = \int \chi_1(z) e^{-zq} dz. \quad (4.25)$$

Тогда уравнение (4.22) переходит в следующее:

$$6q \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} - 3 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha^2} - \psi = 0, \quad (4.26)$$

а граничные условия сводятся к условию:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \alpha} - q\psi = l \frac{1}{q + \frac{2}{\sqrt{3}}} \text{ при } \alpha = 0, \quad (4.27)$$

Ищем решение в виде $\psi = a(q) e^{p(q)\alpha}$. Для $p(q)$ получаем из уравнения (4.26) квадратное уравнение. Выбираем решение, соответствующее затуханию ψ при $\alpha \rightarrow \infty$. Функция $a(q)$ определяется из уравнения (4.27). В результате получаем:

$$\psi = l \frac{e^{\left(q - \sqrt{q^2 - \frac{1}{3}}\right)\alpha}}{\sqrt{q^2 - \frac{1}{3}} \left(q + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)}. \quad (4.28)$$

Далее согласно формуле обращения находим функцию χ_1 :

$$\chi_1 = \frac{1}{2\pi i} l \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \frac{e^{-\sqrt{q^2 - \frac{1}{3}}\alpha - yq3\sqrt{3}} dq}{\sqrt{q^2 - \frac{1}{3}} \left(q + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)}, \quad \operatorname{Re} q < \delta. \quad (4.29)$$

Интеграл в (4.29) берётся так, чтобы полюса подинтегрального выражения лежали левее прямой, вдоль которой производится интегрирование.

Окончательно потенциал χ , удовлетворяющий граничным условиям, имеет следующий вид:

$$\chi = l\sqrt{3} e^y \int_{-\infty}^y e^{2y'} I_0 \left(\sqrt{y'^2 - \frac{\alpha^2}{3}} \right) dy', \quad (4.30)$$

где I_0 — функция Бесселя мнимого аргумента *).

При помощи соотношений (4.12), которые удобно переписать в форме

$$\left. \begin{aligned} t &= e^{-y} \left(\frac{\partial \chi}{\partial y} \operatorname{ch} \alpha - \frac{\partial \chi}{\partial \alpha} \operatorname{sh} \alpha \right); \\ x &= e^{-y} \left(\frac{\partial \chi}{\partial y} \operatorname{sh} \alpha - \frac{\partial \chi}{\partial \alpha} \operatorname{ch} \alpha \right), \end{aligned} \right\} \quad (4.12')$$

*) См. дополнение I.

можно найти теперь зависимость y (т. е. T) и α (т. е. v) от x и t и получить, таким образом, полное решение задачи.

Рассмотрим позднюю стадию одномерного разлёта, когда y и α велики и $y > \alpha$. Эти условия означают относительно низкую температуру (y отрицательно) и ультрарелятивистские скорости частиц. Воспользуемся для этой стадии асимптотическим выражением для I_0 :

$$I_0\left(\sqrt{y^2 - \frac{\alpha^2}{3}}\right) \approx e^{\sqrt{y^2 - \frac{\alpha^2}{3}}}.$$

Потенциал χ тогда будет порядка:

$$\chi \approx \Delta \cdot e^{-y} + \sqrt{y^2 - \frac{\alpha^2}{3}}.$$

Если ограничиться логарифмической точностью, то, используя (4.12), нетрудно получить:

$$\begin{aligned} \frac{t+x}{\Delta} &\approx e^{\alpha - 2y + \sqrt{y^2 - \frac{\alpha^2}{3}}}, \\ \frac{t-x}{\Delta} &\approx e^{-\alpha - 2y + \sqrt{y^2 - \frac{\alpha^2}{3}}}. \quad *) \end{aligned} \quad (4.31)$$

Отсюда имеем:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{2} \ln \frac{t+x}{t-x}; \\ y &= -\frac{1}{3} \left[\ln \frac{t+x}{\Delta} + \ln \frac{t-x}{\Delta} - \sqrt{\ln \frac{t+x}{\Delta} \cdot \ln \frac{t-x}{\Delta}} \right]. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Введём следующие обозначения:

$$\ln \frac{t+x}{\Delta} = \tau; \quad \ln \frac{t-x}{\Delta} = \eta.$$

Так как $y = \ln T$, а плотность энергии $\varepsilon \approx T^4$, то второе из уравнений (4.32) можно записать так:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 e^{-\frac{4}{3}(\eta + \tau - \sqrt{\tau\eta})}. \quad (4.33)$$

Далее при $\alpha > 1$, $u_1 \approx u_0 \approx \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$ (см. (4.9)). Величину

$$\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$$

*) Легко видеть, что

$$\frac{t-x}{t+x} \approx e^{-2\alpha} \ll 1.$$

обозначим через α . Из уравнения (4.9) следует: $\alpha = \text{Arsh } u \approx \ln 2u$; первое из уравнений (4.32) тогда даёт:

$$u^2 \approx \frac{t+x}{t-x}. \quad (4.34)$$

Уравнения (4.33) и (4.34) совпадают с полученными ранее Ландау другим способом уравнениями (16) и (24) работы ⁶.

Для одновременной стадии расширения возможно (исходя из формулы (4.30)) и более точное решение, чем решение (4.33) — — (4.34), справедливое лишь с логарифмической точностью. Однако, так как следующая трёхмерная стадия решается весьма приближённо, то в настоящее время нет необходимости в дальнейшем уточнении.

Рассмотрим распределение энергии и энтропии вдоль толщины диска. Плотность энергии, как нетрудно видеть, порядка ϵu^2). Для энергии dE , приходящейся на слой толщины $d\delta$, где $\delta = t - x$, имеем:

$$dE \approx \epsilon a^2 u^2 d\delta,$$

где a — радиус диска.

Воспользовавшись формулами (4.33), (4.34), получим:

$$dE \approx e^{-\frac{1}{3}(\sqrt{\tau} - 2\sqrt{\eta})^2} d\eta. \quad (4.35)$$

Из формулы (4.35) следует, что распределение энергии имеет максимум при $\eta = \frac{\tau}{4}$. Это значит, что энергия сконцентрирована,

в основном, в области $\delta \approx \sqrt{t\Delta^3}$. При $t \gg \Delta$ $\delta \ll t$. Таким образом, большая часть энергии сконцентрирована в узком слое $\delta \ll t$, близкой к границе области. Найдём теперь распределение энтропии. Плотность энтропии равна $s u^2$). Поскольку $s \approx \epsilon^{3/4}$, то для энтропии, приходящейся на слой толщины $d\delta$, находим:

$$dS \approx s u a^2 d\delta$$

или, используя (4.33) и (4.34),

$$dS \approx e^{-\frac{1}{2}[\sqrt{\tau} - \sqrt{\eta}]^2} d\eta. \quad (4.36)$$

Это распределение имеет максимум при $\eta = \tau$. Это означает, что энтропия сконцентрирована в области $L \approx t$. Отсюда видно (см. 4.34), что в области максимума частиц $u^2 \approx 1$ и, следовательно, условие $\alpha > 1$ выполняется приближённо. Вещество в этой области движется со скоростями порядка скорости света, но не ультрарелятивистскими.

^{*}) Действительно, плотность энергии даётся компонентой T_{44} тензора энергии-импульса: $T_{44} \approx \epsilon u^2$.

^{**) Плотность энтропии даётся компонентой s^0 четырёхмерного вектора плотности потока энтропии: $s^0 \approx u \epsilon^{3/4}$.}

Обратимся теперь к пространственной стадии разлёта.

Полученное решение справедливо до тех пор, пока движение можно считать одномерным. Для этого необходимо, чтобы был мал угол разлёта ϑ , т. е. угол, образуемый траекторией данного элемента вещества с осью x . Точнее, необходимо, чтобы расстояние, проходимое данным элементом в поперечном направлении, было меньше размеров системы a . Это условие можно записать в виде

$$t\vartheta \ll a. \quad (4.37)$$

Для оценки угла ϑ обратимся к неиспользованным поперечным компонентам уравнения (4.1). Имеем:

или, по порядку величины, $\frac{\partial T_{42}}{\partial t} \approx \frac{\partial T_{22}}{\partial y}$
 или, по порядку величины, $\frac{T_{42}}{t} \approx \frac{T_{22}}{y}$. Но $T_{42} \approx \varepsilon u^2 \vartheta$ и $T_{22} \approx \varepsilon$, откуда $u^2 \vartheta \approx \frac{t}{a}$. Так как согласно (4.34) $u^2 \approx \frac{t}{\delta}$, то окончательно получим:

$$\vartheta \approx \frac{\delta}{a}. \quad (4.38)$$

Это означает, что чем дальше частица от фронта и чем, следовательно, меньше её энергия, тем большее она отклоняется. Формулы (4.37) и (4.38) дают:

$$t \ll \frac{a^2}{\delta}. \quad (4.39)$$

Неравенство (4.39) определяет условие применимости одномерного решения. Граница применимости одномерного решения лежит тем дальше, чем ближе частица к фронту. Начиная с момента $t_1 = \frac{a^2}{\delta}$, становится существенным боковое отклонение. Возникающее движение может быть рассмотрено только приближённо. Качественно его можно характеризовать как конический разлёт. Обратимся к производной $\frac{d\vartheta}{dt}$; $\frac{d\vartheta}{dt} = 1 - \frac{dx}{dt} = 1 - v \approx \frac{1}{2u^2}$. Во второй (трёхмерной) стадии расширения v значительно больше, чем в первой. Поэтому величина ϑ остаётся практически постоянной для каждого элемента вещества. Кроме того, можно показать, что всеми производными гидродинамических величин, как по направлению ϑ , так и по поперечному направлению, можно пренебречь. Это означает, что боковые силы малы и мы имеем как бы разлёт по инерции (радиальный разлёт). Резюмируем качественное описание разлёта: угловое отклонение траектории каждого элемента, достигаемое на первой, в основном, одномерной стадии расширения, остаётся неизменным на следующей, пространственной, стадии.

Отсюда следует, что как поток энергии, так и поток энтропии, переносимые внутри всякого конуса с заданным углом раствора ϑ , должны оставаться постоянными. Так как $\delta = t - x \ll t$, площадь сечения этого конуса $\sim t^2$ и постоянство потоков энергии и энтропии означает:

$$\varepsilon u^2 t^2 = \text{const}; \quad s u t^2 \approx \varepsilon^{\eta}, \quad u t^2 = \text{const}. \quad (4.40)$$

Отсюда находим:

$$u \approx t, \quad \varepsilon \approx \frac{1}{t^4}. \quad (4.41)$$

Эти соотношения определяют изменение со временем величин u и t при коническом расширении. На первой стадии, как следует из (4.34), $u \approx t^{1/2}$, на второй стадии $u \approx t$ и, следовательно, скорость в этом случае меньше отличается от скорости света, чем на первой стадии. Область перехода от первой ко второй стадии весьма сложна и детально не рассматривается. Вместо этого ставится задача «сшить» полученное решение для второй стадии с одномерным решением в точке, где последнее становится непригодным, т. е. в точке $t_1 = \frac{a^2}{\delta}$.

Введём следующие обозначения:

$$\frac{\delta}{a} = e^{-\lambda}, \quad \frac{\Delta}{a} = e^{-L}. \quad (4.42)$$

Напомним, что $\frac{\Delta}{a} \approx \frac{M}{E'} = \sqrt{\frac{2M}{E}}$, откуда

$$L = \frac{1}{2} \ln \frac{E}{2M},$$

где E' — энергия в системе центра тяжести, а E — в лабораторной системе. Тогда

$$\eta = \ln \frac{\delta}{\Delta} = L - \lambda; \quad \tau_1 = \ln \frac{t_1}{\Delta} = \ln \frac{a^2}{\delta \Delta} = L + \lambda. \quad (4.43)$$

Подставив эти выражения в формулу (4.36), получим:

$$dS = e^{\sqrt{L^2 - \lambda^2}} d\lambda.$$

В пространственной стадии, как уже было выяснено, $\delta = \text{const}$, следовательно, и $\lambda = \text{const}$ для каждого элемента вещества. Поэтому энтропия элемента вещества определяется этой же формулой вплоть до разлёта системы на отдельные части. Но мы знаем, что число частиц пропорционально энтропии. Следовательно, для распределения частиц имеем:

$$dN \approx e^{\sqrt{L^2 - \lambda^2}} d\lambda, \quad (4.44)$$

$$\vartheta = \frac{\delta}{a} = e^{-\lambda}. \quad (4.45)$$

Угол разлёта ϑ остаётся постоянным вместе с δ для каждого элемента вещества. Формулы (4.44), (4.45) определяют в параметрическом виде угловое распределение частиц в системе центра инерции. Большинство частиц образуется при $\delta \approx t$, так как в этой области находится максимум энтропии. Для этих частиц конец одномерной стадии наступает при $t_k \approx a$. Поэтому угол разлёта таких частиц ≈ 1 . При малых углах образуется меньше частиц, но они обладают большей энергией. Из формул (4.44) — (4.45) следует, что при лобовом соударении угловое распределение в системе центра инерции отнюдь не изотропно, как предполагал Ферми². Заметим, что наибольшее значение величины λ , которое ещё имеет смысл учитывать, определяется из условия $\int_{\lambda_{\max}}^L dN \approx 1$. Отсюда можно

вывести, что

$$\lambda_{\max} = \frac{\sqrt{3}}{2} L. *) \quad (4.46)$$

Определим распределение частиц по энергиям. В стадии одномерного движения $u \approx \sqrt{\frac{t}{\delta}}$, в стадии конического $u \approx t$. Из условия сшивания этих величин при $t = t_1$, получаем:

$$u \approx \frac{t}{a}. \quad (4.47)$$

Далее сшиваем выражения для плотности энергии ε . При $t = t_1$ из формулы (4.33) получим:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 e^{-\frac{4}{3}(2L - \sqrt{L^2 - \lambda^2})}.$$

С другой стороны, в стадии конического разлёта $\varepsilon \approx \frac{1}{t^4}$. Из условия сшивания получим:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \left(\frac{t_1}{t} \right)^4 e^{-\frac{4}{3}(2L - \sqrt{L^2 - \lambda^2})}. \quad (4.48)$$

*) Так как $dN \approx e^{\sqrt{L^2 - \lambda^2}} d\lambda$, то из условия $\int_{\lambda_{\max}}^L dN \approx 1$ имеем:

$$Ce^{\sqrt{L^2 - \lambda_{\max}^2}} \approx 1$$

(с логарифмической точностью). Но $N \approx e^{\frac{L}{2}}$. Поэтому $\int_{\lambda=0}^{\lambda=L} dN \approx ce^L \approx e^{\frac{L}{2}}$.

Это значит, что $C \approx e^{\frac{L}{2}}$ и $\lambda_{\max} = \frac{\sqrt{3}}{2} L$.

Свободный разлёт частиц начинается в момент t_k , когда температура участка системы становится равной «критической» температуре T_k (см. § 2). Этому моменту соответствует определённая плотность энергии ε_k . Из формулы (4.48) находим выражение для момента t_k :

$$t_k \approx t_1 \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_k} \right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{1}{3}(2L - \sqrt{L^2 - \lambda^2})}.$$

Отсюда согласно (4.47) находим значение величины u в момент разлёта:

$$u_k \approx \frac{t_k}{a}. \quad (4.49)$$

Величина u_k просто связана с энергией разлетающихся частиц. Если энергия частицы в системе отсчёта, где данный элемент вещества покоятся, равна E_0 , то в системе центра инерции она равна $E_0 u_k$. Из формулы (4.49) видно, что чем позже данный элемент системы распадается, тем большей энергией обладают вылетающие

частицы $u_k = \text{const} e^{\lambda + \frac{1}{3}\sqrt{L^2 - \lambda^2}}$. Постоянная в этом соотношении определяется из равенства $\int E_0 u_k dN = E'$. Отсюда получаем для энергии частицы $\mathcal{E} = E_0 u_k$ выражение

$$\mathcal{E} \approx M e^{-\frac{L}{6} + \lambda + \frac{1}{3}\sqrt{L^2 - \lambda^2}}. \quad (4.50)$$

Уравнения (4.44) и (4.50) дают распределение по энергиям в параметрическом виде. Если образуются частицы с различными массами или существенную роль играет энергия, уносимая нуклонами, то это обстоятельство может быть учтено на основе соображений, развитых в § 2.

Из формул (4.44), (4.45), (4.49) видно, что энергия частиц однозначно связана с углом, под которым они вылетают. Большинство частиц ($\lambda = 0$) имеют сравнительно небольшую энергию. Те частицы, которые идут под малыми углами, обладают, однако, значительной энергией. Таким образом, имеется концентрированный поток энергии, идущий под небольшими углами.

Далее следует перейти от системы центра инерции к лабораторной системе отсчёта. Не останавливаясь на деталях пересчёта (см. дополнение II), приведём окончательные формулы:

$$dN = \frac{k}{\sqrt{2\pi L}} e^{-\frac{L}{2} + \sqrt{L^2 - \lambda^2}} d\lambda, \quad (4.51)$$

$$\mathcal{E} = \frac{5\sqrt{5}}{2\sqrt{3}} M \cdot e^{\frac{5L}{6} + \lambda + \frac{1}{3}\sqrt{L^2 - \lambda^2}}. \quad (4.52)$$

Коэффициенты в формуле (4.51) и (4.52) получаются из соотношений

$$\int dN = N \text{ и } \int \mathcal{E} dN = E.$$

Угол вылета в лабораторной системе равен:

$$\chi = e^{-L-\lambda}. \quad (4.53)$$

Заметим, что имеет место также следующая полезная формула:

$$\overline{\ln \chi} = -L, \quad (4.54)$$

справедливая при столкновении двух одинаковых частиц. Это означает, что среднее геометрическое из всех углов разлёта определяет значение энергии налетевшей частицы (при столкновении одинаковых частиц).

На рис. 1 приведены распределения частиц, вычисленные по формулам (4.42) — (4.54).

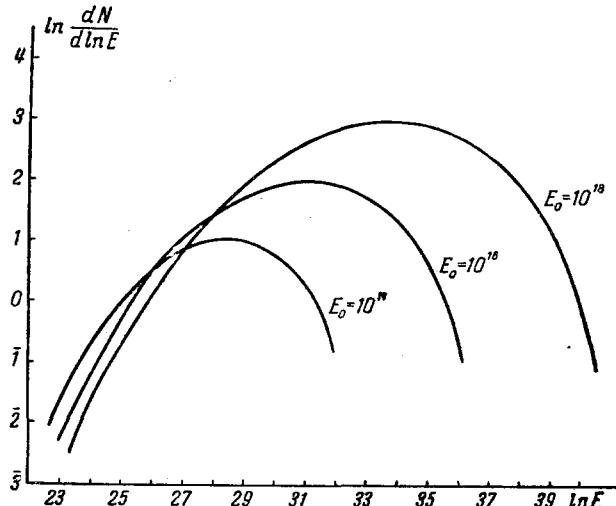


Рис. 1. Дифференциальные энергетические спектры вторичных частиц, образующихся при соударениях нуклонов, E_0 — энергия первичной частицы. (Вычисления произведены Л. И. Сарычевой.)

Распределения частиц как по углам, так и по энергиям оказываются близкими к гауссовому при пользовании в качестве переменных логарифмами этих величин. Распределения имеют длинные «хвосты» по обе стороны максимума. В дополнении II указано, что удобно определить λ следующим образом: $\lambda = -\ln \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}$. При

в этом формула (4.44) переходит в следующую:

$$dN \approx e^{\sqrt{L^2 - \ln^2 \frac{\vartheta}{2}}} \frac{d\vartheta}{\sin^2 \vartheta}. \quad (4.55)$$

Эта формула даёт явное распределение частиц по углам. Пользуясь формулой (4.50), получим непосредственно связь энергии частицы с углом ϑ (в системе центра инерции):

$$\mathcal{E} \approx Me^{-\frac{L}{6} - \ln \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} + \frac{1}{3} \sqrt{L^2 - \ln^2 \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2}}}. \quad (4.56)$$

Важной характеристикой акта соударения является угол, в котором излучается половина энергии. Мы приводим значения этой величины, вычисленные как по теории Ландау (формулы (4.51) — (4.53)), так и по теории Ферми, учитывающей нелобовые соударения (таблица VI).

Таблица VI^{*}

Энергия в эВ	$\vartheta_{1/2}$ по Ферми	$\chi_{1/2}$ по Ферми	$\vartheta_{1/2}$ по Ландау	$\chi_{1/2}$ по Ландау
10^{14}	0,31	$0,7 \cdot 10^{-4}$	0,10	$1,3 \cdot 10^{-4}$
10^{15}	—	$2,1 \cdot 10^{-4}$	0,0154	$2,2 \cdot 10^{-5}$
10^{16}	—	$6,7 \cdot 10^{-5}$	0,031	$3,8 \cdot 10^{-6}$

Значения параметра соударения $\frac{r}{R}$, входящего в теорию Ферми, равны $\frac{r}{R} = 0,712$. $\vartheta_{1/2}$ — угол в системе центра инерции, $\chi_{1/2}$ — угол в лабораторной системе.

Несмотря на то, что расчёт углового распределения, проделанный Ферми, представляется нам неправильным, мы приводим здесь для сравнения его результаты, так как они часто используются при сопоставлении с опытом.

Из таблицы VI видно, что распределение потоков энергии значительно уже по развиваемой теории, чем по теории Ферми.

§ 5. СОУДАРЕНИЯ ЧАСТИЦ С РАЗЛИЧНЫМИ МАССАМИ

До сих пор рассматривались лишь соударения нуклонов с нуклонами. Между тем на опыте наблюдаются при больших энергиях соударения нуклонов с ядрами и ядер с ядрами и без теоретического их истолкования, строго говоря, вообще невозможно сравнение результатов теории с опытом.

^{*}) Задимствована из статьи И. Л. Розенталя и Д. С. Чернавского¹⁵.

Было бы неправильно рассматривать столкновение нуклонов с ядрами или ядер с ядрами, как ряд соударений ядерных протонов и нейтронов. Так как расстояние между частицами в ядре порядка радиуса ядерных сил, а в каждом акте соударения рождается несколько частиц, то столкновение должно приводить к процессу образования частиц сразу во всей области, через которую проходит нуклон в ядре, или меньшее ядро в большем. Нуклон будет взаимодействовать не со всем ядром, а лишь с частью ядра, т. е. им будет вырезаться из ядра «трубка» (см. ¹⁵). Число возникающих при соударении частиц будет связано с энтропией соотношением (2.25), причём под N следует понимать сумму вновь образованных частиц и нуклонов, участвующих в соударении.

Проще всего рассмотреть лобовое столкновение двух одинаковых ядер атомного веса A . При этом целиком применимы соображения, приведшие нас к формуле (2.28). Нетрудно видеть, как при этом изменится формула (2.28) (см. ⁶). Пусть скорость налетающего ядра равна скорости нуклона при соударении нуклона с нуклоном. Для этого его энергия должна быть в A раз больше. Поскольку плотность массы в ядре примерно равна плотности массы протона, отнесённой к его сфере действия, плотность энергии непосредственно после столкновения остаётся такой же, как при соударении нуклонов. Поскольку, очевидно, остаётся неизменным и лоренцево сокращение, изменение энтропии будет просто пропорционально объёму ядер, т. е. A . Таким образом, получим окончательно

$$N = kA \left(\frac{E}{2AMc^2} \right)^{\frac{1}{4}} = kA^{3/4} \left(\frac{E}{2Mc^2} \right)^{\frac{1}{4}}. \quad (5.1)$$

Значительно сложнее вычисление соударения нуклона с ядром или соударения ядер разных весов. Остановимся сейчас на столкновении нуклона с ядром. Вычисление числа частиц, образующихся в звезде, сводится к вычислению энтропии на первом этапе соударения, так как в процессе гидродинамического расширения энтропия не меняется. При соударении нуклона с нуклоном для вычисления энтропии не было необходимости рассматривать механизм сжатия, так как результат получался сразу из соображений симметрии. Иначе обстоит дело при соударении нуклона с ядром. (Эта задача рассмотрена в работе ¹⁶.)

Распространим представление об ядерном веществе как о сплошной среде и на рассмотрение первого этапа соударения — сжатия ядерного вещества. Такое рассмотрение является, конечно, весьма приближённым и используется только для оценки. Говорить о «распространении ударной волны или бегущей волны по нуклону» можно лишь в условном смысле.

Выберем систему отсчёта, в которой нуклон и ядро обладают равными, но противоположно направленными скоростями. Благодаря лоренцову сокращению в этой системе отсчёта нуклон и ядро представляют собой два очень тонкие диска. Вследствие этого задача в начале соударения может рассматриваться как одномерная. Соударение нуклона с ядром является, таким образом, соударением нуклона с трубкой, вырезанной из ядра, сечение которой равно сечению нуклона, а длина меняется от диаметра ядра до «диаметра» нуклона. При сближении нуклона с трубкой по веществу трубы и по веществу нуклона «распространяются» в обе стороны ударные вол-

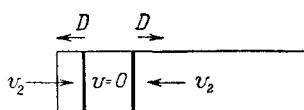


Рис. 2.

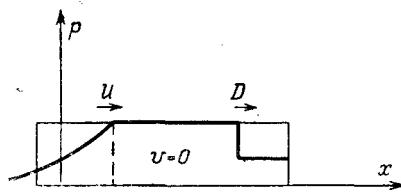


Рис. 3.

ны (рис. 2). В выбранной нами системе отсчёта вещество между ударными волнами будет покояться. Ударная волна, идущая по более лёгкой частице, раньше дойдёт до края, чем ударная волна, идущая по трубке. Когда волна дойдёт до края, то из края начнётся истечение вещества (рис. 3). По ядерному веществу пойдёт волна разряжения со скоростью, равной скорости звука в среде. В то же время и в ту же сторону будет итти ударная волна, ещё не дошедшая до края. Вычисление энтропии будет различно в зависимости от того, успеет ли бегущая волна догнать ударную прежде, чем ударная волна дойдёт до края и процесс сжатия окончится. Так как мы исходим, из уравнения состояния $p = \frac{\epsilon}{3}$, то скорость звука $c_0 = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \epsilon}\right)_S} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Вычислим теперь скорость ударной волны D . Переходим к системе координат, в которой ударная волна покоятся. Тогда скорость вещества за ударной волной (см. рис. 2) будет равна D , а перед волной $v'_2 = \frac{v_2 + D}{1 + v_2 D}$, где v_2 — скорость частиц в системе «равных скоростей». В силу непрерывности потоков энергии и импульса через поверхность разрыва, имеем (см.¹³):

$$\frac{p_1 + D^2 \epsilon_1}{1 - D^2} = \frac{p_2 + v'^2_2 \epsilon_2}{1 - v'^2_2}, \quad (5.2)$$

$$\frac{D(p_1 + \epsilon_1)}{1 - D^2} = \frac{v'_2(p_2 + \epsilon_2)}{1 - v'^2_2}. \quad (5.3)$$

Здесь p_1 и ϵ_1 — давление и плотность энергии за ударной волной, а p_2 и ϵ_2 — давление и плотность энергии перед ударной волной. Разделив первое уравнение на второе, получим:

$$\frac{p_1 + D^2 \epsilon_1}{D(p + \epsilon_1)} = \frac{p_2 + v_2'^2 \epsilon_2}{v_2'(p_2 + \epsilon_2)}. \quad (5.4)$$

Так как скорость v_2' налетающих частиц очень близка к скорости света, то близка к скорости света будет и скорость v_2 . Положив $v_2' = 1$, мы увидим, что правая часть уравнения (5.4) равна 1 и, следовательно, наши результаты не зависят от уравнения состояния перед ударной волной. Используя за ударной волной для вещества уравнение состояния $p_2 = \frac{\epsilon_2}{3}$, получим для D следующее соотношение:

$$\frac{1}{3} + D^2 = \frac{4}{3} D,$$

откуда

$$D = 1/3. \quad (5.5)$$

Теперь можно найти минимальную длину трубки l_k , при которой бегущая волна разряжения догонит ударную волну. Она определяется из соотношения

$$\frac{l_k}{d} = \frac{D + c_0}{c_0 - D},$$

где d — «диаметр» нуклона.

Подставляя соответствующие значения D и c_0 , получим

$$\frac{l_k}{d} = 3,7. \quad (5.6)$$

При длинах трубки $l < l_k$ изменение энтропии вычисляется просто. Следует подсчитать энтропию отдельных участков системы непосредственно после того, как по ним прошла ударная волна и когда они, следовательно, покоятся в нашей системе отсчёта. Нетрудно видеть, что изменение энтропии всей системы будет тогда равно:

$$\frac{S}{S_0} = \frac{1}{2} \left(\frac{l}{d} + 1 \right) \text{ при } \frac{l}{d} \leqslant 3,7, \quad (5.7)$$

где S_0 — изменение энтропии при соударении нуклона с нуклоном.

Формула (5.7) неточна в значительной степени из-за неопределённости «диаметра» нуклона. Если применять эту формулу к соударению лёгкого ядра с тяжёлым, она становится более точной. Под d в этом случае следует понимать размер лёгкого ядра.

При длинах трубок, превышающих $l_k = 3,7 d$, решение становится более сложным. Бегущая волна в этом случае догонит ударную волну, но не сможет пройти через разрыв, так как ударная волна движется в веществе набегающего ядра со скоростью, превышающей скорость звука в веществе. Бегущая волна отразится от ударной волны. Возникнет область, ограниченная ударной волной справа и бегущей волной слева (рис. 4). Для того чтобы описать движение среды в этой области, следует обратиться к уравнению (4.15) — (4.15') для произвольного одномерного движения релятивистского газа:

$$3 \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial \chi}{\partial y} = 0. \quad (4.15')$$

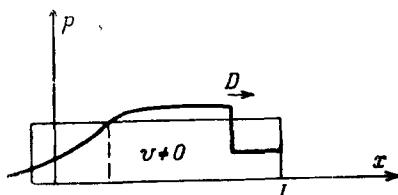


Рис. 4.

Независимыми переменными здесь являются величины $\alpha = \operatorname{Arcth} v$, где v — скорость среды, и $y = \ln \frac{T}{T_0}$, где T_0 — температура при $v = 0$. Координата x и время t выражаются через функцию χ по формулам (4.12'). Интересующая нас область решения ограничена бегущей волной с одной стороны и ударной — с другой. Выясним граничные условия для функции χ .

На границе с бегущей волной будем иметь условие, аналогичное (4.19):

$$\chi = 0 \text{ при } \alpha = \frac{y}{c_0}, \text{ т. е. } \alpha = \sqrt{3}y. \quad (5.8)$$

Перейдём теперь к условию на ударной волне. Так как в этом случае вещество за ударной волной не покоятся, то при переходе к системе координат, в которой скорость разрыва равна нулю, скорость за разрывом будет:

$$v'_1 = \frac{v_1 + D}{1 + v_1 D}, \quad (5.9)$$

где v_1 — скорость за ударной волной в системе, где скорости налетающих частиц равны. Формулы (5.2) — (5.4) остаются применимыми в рассматриваемом случае, если в них вместо D подставить v'_1 . Отсюда следует, в частности, что $v'_1 = \frac{1}{3}$. Уравнение (5.9) даёт связь между v_1 и D (при $v'_1 = \frac{1}{3}$), которую можно записать следующим образом:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1 + 3 \operatorname{th} \alpha}{3 + \operatorname{th} \alpha}, \quad (5.10)$$

так как $v_1 = -\operatorname{th} \alpha$. Из соотношений (5.2) — (5.4) (в которые вместо D

следует подставить v'_1) можно получить следующее соотношение на ударной волне:

$$\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right) = \left(\frac{T}{T_0}\right)^4 = \frac{1-v_1}{1+v_1} \text{ *)}. \quad (5.11)$$

В переменных α и y ($v_1 = -\operatorname{th} \alpha$, $y = \ln \frac{T}{T_0}$) это означает:

$$\alpha = 2y. \quad (5.12)$$

Подставляя в уравнение (5.10) значение $\frac{dx}{dt}$, вычисленное по формулам (4.12) и учитывая соотношение (5.12), окончательно получим следующее условие на ударной волне:

$$\left(3 \frac{\partial}{\partial y} + 5 \frac{\partial}{\partial \alpha}\right) \left(1 - \frac{\partial}{\partial \alpha}\right) \chi = 0 \text{ при } \alpha = 2y. \quad (5.13)$$

Нас интересует изменение энтропии за время прохождения ударной волны. Изменение энтропии до того, как бегущая волна догнала ударную, даётся (5.7). Дальнейшее изменение энтропии запишется следующим образом:

$$S_1 = \sigma_0 \int_{t'_1}^{t'_2} s u_1 dt'. \quad (5.14)$$

Здесь σ_0 — сечение трубы, S — плотность энтропии за ударной волной, $u_1 = \frac{v'_1}{\sqrt{1-v'^2_1}}$, где v'_1 — скорость вещества за ударной

волной, t'_1 — момент времени, когда бегущая волна догонит ударную и t'_2 — момент времени, когда ударная волна доходит до правого края и, таким образом, процесс сжатия оканчивается. dt' — элемент времени в системе, где разрыв покоятся:

$$dt' = dt \sqrt{1-D^2}.$$

Используя формулы (4.12'), (5.12), получим:

$$S_1 = \sigma_0 \frac{1}{9} \int_0^{y_k} e^{2y} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial}{\partial y} - 1 \right) \chi \right]_{x=2y} dy. \quad (5.15)$$

Здесь y_k — значение y в тот момент, когда ударная волна доходит до края системы.

*) См. дополнение III.

Производя соответствующие довольно сложные вычисления, подробности которых приведены в работе¹⁶, получим:

$$\frac{S}{S_0} = 0,92 \left(\frac{l}{d} - \frac{1}{4} \right)^{\frac{3}{4}} \text{ при } \frac{l}{d} \geq 3,7, \quad (5.16)$$

где S_0 — изменение энтропии при соударении нуклона с нуклоном, а S — полное изменение энтропии при соударении нуклона с трубкой длины l .

Если усреднить формулы (5.7) и (5.16) по всем возможным соударениям в ядре от лобового соударения до соударения налетающего нуклона с периферийным, то получим следующие выражения:

$$\frac{S}{S_0} = \frac{1}{3} \frac{A - (2A^{1/3} - 1)^{3/2}}{(A^{1/3} - 1)^2} + 0,5 \text{ для } A < 51, \quad (5.17)$$

$$\begin{aligned} \frac{S}{S_0} = \frac{4}{(A^{1/3} - 1)^2} [0,167 (A^{11/12} - A_0^{11/12}) + \frac{1}{12} \{A_0 - (2A^{1/3} - 1)^{3/2}\}] - \\ - 0,6 \frac{A^{2/3} - A_0^{2/3}}{(A^{1/3} - 1)^2} + 0,5 \text{ для } A > 51, A_0 = 51. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Полученная зависимость может быть с точностью до 5% аппроксимирована следующей формулой:

$$\frac{S}{S_0} = A^{0,19}. \quad (5.19)$$

Здесь A — атомный вес. Отсюда для числа частиц имеем:

$$\frac{N}{N^u} = A^{0,19}, \quad (5.20)$$

где N^u — число частиц, образованное при соударении нуклона с нуклоном. Зависимость множественности от атомного веса, оказывается, в согласии с опытом (см.¹⁵), слабой. Так, множественность в свинце ($A = 207$) отличается от множественности в азоте ($A = 14$) всего в 1,7 раза.

Угловое и энергетическое распределение при соударениях нуклона с ядром, повидимому, мало отличается, в пределах точности наших вычислений, от соответствующих распределений при соударении нуклона с нуклоном.

ДОПОЛНЕНИЕ I

Остановимся подробнее на выводе формулы (4.30) из (4.29). Формулу (4.29) можно записать в следующем виде:

$$h(-y) = \frac{\chi_1}{t\sqrt{3}} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \frac{e^{-\sqrt{p^2-1}\frac{x}{V^3}-yp}}{\sqrt{p^2-1}(p+2)} dp. \quad (I.1)$$

Согласно основным соотношениям операционного исчисления (см.¹⁷, стр. 29):

$$\left. \begin{aligned} f(p) &= p \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-pt} h(t) dt, \\ h(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} e^{pt} \frac{f(p)}{p} dp. \end{aligned} \right\} \quad (I.2)$$

Таким образом, функция $f(p) = \frac{e^{-\sqrt{p^2-1}} \frac{a}{\sqrt{3}} p}{\sqrt{p^2-1}(p+2)}$ является «изображением» «оригинала» $h(-y)$.

Воспользуемся далее правилом из операционного исчисления, которое носит название правила «умножения изображений» или «складки» (см.¹⁷, стр. 55). Согласно этому правилу, если «изображению» $f_1(p)$ соответствует «оригинал» $h_1(t)$, а «изображению» $f_2(p)$ «оригинал» $h_2(t)$, то «изображению» $f(p) = \frac{f_1(p)f_2(p)}{p}$ соответствует «оригинал»

$$h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_2(\zeta) h_1(t - \zeta) d\zeta. \quad (I.3)$$

Таким образом, если известны «оригиналы» $h_1(p)$ и $h_2(p)$, то, пользуясь соотношением (I.3), можно найти и «оригинал» для «изображения» $f(p)$. Разобьём изображение $f(p)$ на следующие множители:

$$f_1(p) = \frac{p}{p+2}, \quad f_2(p) = \frac{e^{-\sqrt{p^2-1}} \frac{a}{\sqrt{3}} p}{\sqrt{p^2-1}}. \quad (I.4)$$

«Изображению» $f_1(p)$ соответствует «оригинал» $h_1(-y)$:

$$h_1(-y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \frac{1}{p+2} e^{-yp} dp = e^{2y} U(-y). \quad (I.5)$$

«Изображению» $f_2(p)$ соответствует «оригинал» $h_2(-y)$ (см.¹⁷, формула XV, 15):

$$\begin{aligned} h_2(-y) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} e^{-yp} \frac{1}{\sqrt{p^2-1}} e^{-\frac{a}{\sqrt{3}} \sqrt{p^2-1}} dp = \\ &= I_0 \left(\sqrt{y^2 - \frac{a^2}{3}} \right) U \left(-y - \frac{a}{\sqrt{3}} \right). \end{aligned} \quad (I.6)$$

Здесь I_0 — бесселева функция мнимого аргумента,

$$I_0(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t > 0, \\ 1/2 & \text{при } t = 0, \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases}$$

Подстановка выражений (I.5) и (I.6) в формулу (I.3) даёт:

$$h(-y) = \int_{\frac{a}{\sqrt{3}}}^{-y} e^{2(y+y_1)} I_0 \left(\sqrt{y_1^2 - \frac{a^2}{3}} \right) dy_1. \quad (I.7)$$

Отсюда сразу получаем формулу (4.30)

$$\chi = i\sqrt{3} e^y \int_{\frac{a}{\sqrt{3}}}^{-y} e^{2y_1} I_0 \left(\sqrt{y_1^2 - \frac{a^2}{3}} \right) dy_1.$$

В работе Халатникова¹⁴ в формуле (4.36) для χ опущен множитель $i\sqrt{3}$.

ДОПОЛНЕНИЕ II

Для того чтобы получить формулы (4.51), (4.52), произведём переход от распределений в системе центра тяжести к распределениям в лабораторной системе координат.

Рассмотрим сначала преобразования углов.

Угол разлёта χ в лабораторной системе связан с углом ϑ в системе центра инерции следующей формулой:

$$\operatorname{tg} \chi \approx \chi = \frac{v' \sqrt{1 - V^2 \sin^2 \vartheta}}{v' \cos \vartheta + V}, \quad (\text{II.1})$$

где v' — скорость частицы в системе центра инерции, V — скорость центра инерции по отношению к лабораторной системе. Представим знаменатель этого выражения в форме:

$$v' \cos \vartheta + V \approx v' \cos \vartheta + v' + \frac{1}{2} (V^2 - v'^2),$$

так как

$$V^2 - v'^2 = (V + v')(V - v') \approx 2(V - v').$$

Учитывая, что V ближе к 1, чем v' , имеем:

$$v' \cos \vartheta + V \approx (1 + \cos \vartheta) + \frac{1}{2} (1 - v'^2).$$

Используя соотношение $v' = \frac{1}{\sqrt{1 - v'^2}}$, получим:

$$v' \cos \vartheta + V = 1 + \cos \vartheta + \frac{1}{2v'^2}. \quad (\text{II.2})$$

Последний член может играть существенную роль лишь при углах ϑ , близких к π . Для того чтобы и в этом случае последний член был мал, должно выполняться неравенство

$$\vartheta \gg \frac{1}{u'} . \quad (\text{II.3})$$

Согласно (4.45) $\vartheta \approx e^{-\lambda}$, а из (4.50) следует, что

$$u' \approx e^{-\frac{L}{6} + \lambda + \frac{1}{3} \sqrt{L^2 - \lambda^2}}.$$

Неравенство (II.3) означает таким образом, что

$$e^{\frac{L}{6} - \frac{1}{3} \sqrt{L^2 - \lambda^2}} \ll 1. \quad (\text{II.4})$$

Это неравенство всегда выполняется, так как при $\lambda = 0$ правая часть равна $e^{-\frac{L}{6}}$ и лишь при $\lambda = \lambda_{\max}$ она становится равной 1. Положив в числителе выражения (II.1) $v' = 1$, и заменив $v' \cos \vartheta + V$ на $1 + \cos \vartheta$, мы получим

$$\chi = \sqrt{1 - V^2} \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} . \quad (\text{II.5})$$

Независимо от конкретных расчётов разлёт в системе центра инерции при любом столкновении двух одинаковых частиц симметричен. Это означает, что углы ϑ встречаются также часто, как углы $\pi - \vartheta$. Но $\operatorname{tg} \frac{\pi - \vartheta}{2} = -\frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2}}$. Произведём усреднение $\ln \chi$ по всем частицам. Тогда получим:

$$\overline{\ln \chi} = \ln \sqrt{1 - V^2} = -L, \quad (\text{II.6})$$

т. е. формулу (4.54).

Чтобы учесть углы порядка единицы, определим λ следующим образом:

$$\lambda = -\ln \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} . \quad (\text{II.7})$$

Если подставить в формулу (II.5) $\operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} = e^{-\lambda}$ и $\operatorname{tg} \frac{\pi - \vartheta}{2} = e^{\lambda}$ для частиц, летящих в системе центра инерции в противоположные стороны, то нетрудно убедиться, что переход от частиц, идущих направо, к частицам, идущим налево (в центре инерции), осуществляется в ней изменением знака λ . Поэтому можно написать:

$$\chi = e^{-L-\lambda} . \quad (\text{II.8})$$

Формулы (II.8) и (4.44) дают, таким образом, угловое распределение частиц в лабораторной системе; причём λ принимает положительные и отрицательные значения. Эти формулы по существу совпадают с формулами (4.51) и (4.53).

Перейдём теперь к преобразованию энергии от системы центра тяжести к лабораторной системе.

Пусть \mathcal{E} — энергия частицы в системе центра инерции. Если частица летит направо, то энергия её в лабораторной системе равна:

$$\mathcal{E}' = \frac{\mathcal{E} + P_x V}{\sqrt{1 - V^2}}; \quad (\text{II.9})$$

где P_x — проекция импульса а направление скорости центра инерции

$$P_x = V \sqrt{\mathcal{E}^2 - (\mu c^2)^2} - P_y, \quad P_y = P \sin \vartheta,$$

где P — абсолютная величина импульса, μ — масса частицы. Если скорость частиц в системе центра инерции приближается к скорости света, то

$$\mathcal{E}' = \frac{\mathcal{E}(1 + \cos \vartheta)}{\sqrt{1 - V^2}}.$$

Таким образом,

$$\mathcal{E}' = \mathcal{E} e^L \frac{2}{1 + e^{-2\lambda}} \approx \mathcal{E} e^L. \quad (\text{II.10})$$

Если частицы движутся налево, то

$$\mathcal{E}' = \frac{\mathcal{E} - P_x V}{\sqrt{1 - V^2}} = \frac{1 - \cos \vartheta}{\sqrt{1 - V^2}} \mathcal{E},$$

так как

$$\vartheta \gg \frac{1}{u'} \approx \frac{\mu c^2}{\mathcal{E}}.$$

Таким образом,

$$\mathcal{E}' = \frac{\mathcal{E} e^{L-2\lambda} \cdot 2}{1 + e^{-2\lambda}} \approx \mathcal{E} e^{L-2\lambda}. \quad (\text{II.11})$$

При подстановке этих выражений в уравнение (4.50) получим:

$$\mathcal{E}' \approx M e^{\frac{5L}{6} + \lambda + \frac{1}{3} \sqrt{L^2 - \lambda^2}}. \quad (\text{II.12})$$

Эта формула обладает тем свойством, что она описывает в лабораторной системе частицы, двигающиеся в системе центра тяжести как направо, так и налево, если приписывать λ оба знака.

ДОПОЛНЕНИЕ III

Выведем соотношение (5.14).

Пусть в системе координат, где ударная волна покоятся, скорость за ударной волной равна v'_1 , а скорость перед волной равна v'_2 .

Уравнения (5.2) и (5.3) запишутся тогда следующим образом:

$$\frac{p_1 + v_1'^2 \varepsilon_1}{1 - v_1'^2} = \frac{p_2 + v_2'^2 \varepsilon_2}{1 - v_2'^2}, \quad (\text{III.1})$$

$$\frac{v_1' (p_1 + \varepsilon_1)}{1 - v_1'^2} = \frac{v_2' (p_2 + \varepsilon_2)}{1 - v_2'^2}. \quad (\text{III.2})$$

Величины v_1' и v_2' связаны со скоростями v_1 и v_2 в системе координат, где скорости налетающих частиц равны, соотношениями:

$$v_1' = \frac{v_1 + D}{1 + v_1 D}, \quad (\text{III.3})$$

$$v_2' = \frac{v_2 + D}{1 + v_2 D}. \quad (\text{III.4})$$

Исключая из уравнений (III.1) и (III.2) v_1' или v_2' , получим соответственно следующие выражения:

$$v_1'^2 = \frac{(p_1 - p_2)(p_1 + \varepsilon_2)}{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(p_2 + \varepsilon_1)}, \quad (\text{III.5})$$

$$v_2'^2 = \frac{(p_2 - p_1)(p_2 + \varepsilon_1)}{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)(p_1 + \varepsilon_2)}. \quad (\text{III.6})$$

Из двух последних формул получим:

$$v_1' v_2' = \frac{p_1 - p_2}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}. \quad (\text{III.7})$$

Для упрощения вывода примем, что по обе стороны ударной волны уравнение состояния одинаково ($p = \frac{\varepsilon}{3}$). Заметим, однако, что при больших скоростях v_2 достаточно допустить справедливость этого уравнения лишь за ударной волной. Из (III.7) следует:

$$v_1' v_2' = \frac{1}{3}. \quad (\text{III.7}')$$

Уравнение (III.5) примет следующий вид:

$$v_1'^2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{p_1 + \varepsilon_2}{\frac{\varepsilon_2}{3} + 3p_1} \quad (\text{III.5}')$$

и отсюда:

$$p_1 = \varepsilon_2 \frac{1 - v_1'^2}{9v_1'^2 - 1}. \quad (\text{III.8})$$

Подставляя в уравнение (III.7) формулы (III.3) и (III.4), с помощью несложных преобразований получим выражение для D :

$$D = \frac{-(v_1 + v_2) + (\sqrt{v_1 + v_2}^2 - (3v_1 v_2 - 1)(3 - v_1 v_2))}{3 - v_1 v_2}. \quad (\text{III.9})$$

Найдём теперь отношение $\frac{p_{1v_1}}{p_{10}}$, где p_{1v_1} — значение давления при скорости за ударной волной, равной v_1 , и p_{10} — значение давления при скорости за ударной волной, равной нулю. Это отношение согласно (III.8) равно:

$$\frac{p_{1v_1}}{p_{10}} = \left[\frac{(1 - v_1'^2)}{(9v_1'^2 - 1)} \right] \cdot \left[\frac{(9v_1'^2 - 1)}{(1 - v_1'^2)} \right]. \quad (\text{III.10})$$

Так как при больших скоростях v_2 , стремящихся к 1 и $v_2' \rightarrow 1$ (см. III.4), то согласно соотношению (III.7) $v_1' \rightarrow \frac{1}{3}$. Отношение (III.10) становится неопределенным. Поэтому следует совершить предельный переход:

$$\left[\frac{p_{1v_1}}{p_{10}} \right]_{v_2 \rightarrow 1} = \frac{\left[9v_1'^2 - 1 \right]_{v_1=0}}{\left[9v_1'^2 - 1 \right]_{v_1}} = \left\{ \begin{array}{l} \left[\frac{\partial v_1'}{\partial v_2} \right]_{v_1=0} \\ \left[\frac{\partial v_1'}{\partial v_2} \right]_{v_1} \end{array} \right\}_{v_2=1}. \quad (\text{III.11})$$

Но

$$\frac{\partial v_1'}{\partial v_2} = \left[\frac{\partial v_1'}{\partial D} \frac{\partial D}{\partial v_2} \right]_{v_2=1}. \quad (\text{III.12})$$

Производная $\frac{\partial v_1'}{\partial D}$ определяется из уравнения (III.3), производная $\frac{\partial D}{\partial v_2}$ — из уравнения (III.9):

$$\left(\frac{\partial v_1'}{\partial D} \right)_{v_2=1} = \frac{(3 - v_1)^2}{9(1 - v_1^2)}; \quad \left(\frac{\partial D}{\partial v_2} \right)_{v_2=1} = -\frac{3(v_1 + 1)^2}{2(3 - v_1)^2}. \quad (\text{III.13})$$

Отсюда нетрудно получить выражение для $\frac{p_{1v_1}}{p_{10}}$

$$\frac{p_{1v}}{p_{10}} = \frac{1 - v_1}{1 + v_1}. \quad (\text{III.14})$$

В силу уравнения состояния из выражения (III.14) непосредственно следует формула (5.11).

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. W. B. Fowler, R. P. Shutt, A. M. Thorndike and W. L. Whitemore, Phys. Rev. **95**, 1026 (1954).
2. E. Fermi, Progr. Theor. Phys. **5**, 570 (1950).
3. E. Fermi, Phys. Rev. **81**, 683 (1951).
4. И. Я. Померанчук, ДАН **78**, 889 (1951).

5. Е. Л. Фейнберг и Д. С. Чернавский, ДАН 81, 795 (1951).
6. Л. Д. Ландау, Изв. АН СССР 17, 51 (1953).
7. С. З. Беленький, ДАН 99, 4, 523 (1954).
8. С. Чандraseкар, Введение в учение о строении звёзд, ИЛ., 1950.
9. С. З. Беленький, ЖЭТФ 28, I, III (1955).
10. W. Heisenberg, Zeits. f. Phys. 133, 65 (1952).
11. Bhabha, Pros. Roy. Soc. 219, 293 (1953).
12. Е. Л. Фейнберг и Д. С. Чернавский, ДАН 91, 511 (1953).
13. Л. Ландау и Е. Лифшиц, Механика сплошных сред, изд. 2, Гостехиздат, 1954.
14. И. М. Халатников, ЖЭТФ 27, 529 (1954).
15. И. Л. Розенталь и Д. С. Чернавский, УФН 52, вып. 2, 185 (1954).
16. С. З. Беленький и Г. А. Милехин, ЖЭТФ (1951).
17. Б. Ван-дер-Поль и Х. Бреммер, Операционное исчисление, ИЛ, 1952.