

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК**ВЕКТОР-ПАРАМЕТР СТОКСА**

**(Матричные методы учёта поляризации излучения
в приближении лучевой оптики)**

Г. В. Розенберг

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

Приближение лучевой оптики, как известно, применимо при рассмотрении самых разнообразных оптических проблем, обширный круг которых отнюдь не исчерпывается задачами инструментальной оптики, а охватывает все случаи, когда имеется возможность придать достаточную определённую понятию светового пучка и проследить судьбы отдельных пучков в актах их взаимодействия с веществом. При этом следует различать явления двух типов. Во-первых, это явления распространения в квазиоднородных средах (рефракция, двулучепреломление, поглощение, интерференция и т. п.), когда параметры светового пучка плавно меняются по его протяжению и задача сводится к выявлению характера этих изменений в зависимости от свойств среды. Во-вторых, это явления рассеяния, отражения, преломления и т. п., в которых световой пучок претерпевает резкие локальные преобразования и порождает световые пучки иных направлений. В последнем случае приближение лучевой оптики применимо к излучению до и после его взаимодействия с веществом, но только за пределами волновой зоны (в бесконечности), причём задача формулирования законов локального преобразования световых пучков оказывается аналогичной той, с которой мы встречаемся в квантовой механике, рассматривая явления соударений при помощи матрицы рассеяния.

Как нетрудно убедиться, такая постановка проблемы адекватна обращению к корпускулярному аспекту излучения, что, в частности, выражает известную аналогию между лучевой оптикой и классической механикой. Следуя этой аналогии, надлежит, однако, обратить внимание на то, что она простирается не только на вопросы, связанные с траекторией фотонного потока, но и на динамические характеристики последнего (поток энергии, спин), выходя, тем самым, далеко за рамки непосредственно геометрической

оптики. Переход к полуклассическим фотонным представлениям, соответствующий переходу к приближению лучевой оптики, требует неперменного учёта как интенсивности, так и поляризации светового пучка, ибо результат взаимодействия последнего с веществом существенным образом зависит от этих параметров. Органическое включение названных характеристик в систему лучевой оптики ещё не достигнуто. В этом направлении делаются лишь первые шаги, одним из которых и является разработка матричных методов учёта поляризации, служащих предметом данной статьи.

В настоящее время матричные методы достаточно подробно разработаны только для двух крайних случаев — полностью когерентного и полностью некогерентного монохроматического излучения. Это позволяет эффективно использовать их для решения наиболее существенных задач, касающихся квазистационарного поля, т. е. в условиях, когда сохраняется некогерентность различных спектральных компонент излучения. Более общий случай частично когерентного и, в том числе, импульсного излучения ещё нуждается в подробном исследовании и оставляется за пределами нашего рассмотрения. Точно так же мы обойдём молчанием и некоторые другие, весьма интересные и существенные проблемы, связанные с введением в систему лучевой оптики динамических характеристик светового потока (например, вопросы корректного перехода к приближению лучевой оптики с учётом векторного характера электромагнитного поля). Целью статьи является не столько строгое математическое обоснование самого матричного метода, сколько ознакомление широкого круга читателей с его основами и способами его применения, имея в виду то большое практическое значение, которое он приобретает за последние годы, особенно в связи с проблемами рассеяния, где его использование позволяет ставить и решать ряд ранее недоступных задач (скажем, формулирование уравнения переноса излучения с учётом поляризации последнего). Такой обзор тем более необходим, что в отечественной литературе матричные методы учёта поляризации излучения совершенно не освещены, а в иностранной литературе сведения о них рассеяны по довольно многочисленным статьям, посвящённым совершенно различным вопросам и, по существу, до сих пор не систематизированы надлежащим образом, что серьёзно препятствует их практическому использованию.

§ 2. РАЗЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРА НАПРЯЖЁННОСТИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ ВОЛНЫ НА ЭЛЛИПТИЧЕСКИ ПОЛЯРИЗОВАННЫЕ КОМПОНЕНТЫ И МАТРИЧНЫЙ МЕТОД ДЛЯ КОГЕРЕНТНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

Рассмотрим плоскую электромагнитную волну угловой частоты ω , распространяющуюся в некотором направлении l , комплексный вектор напряжённости электрического поля которой равен $E = (E_1^0 e_1^0 + E_2^0 e_2^0) e^{i\omega t}$, где E_i^0 — не зависящие (или слабо завися-

щие) от времени t комплексные амплитуды, а \mathbf{e}_1^0 и \mathbf{e}_2^0 — орты, ортогональные направлению распространения волны. Наиболее общим разложением \mathbf{E} на компоненты, удовлетворяющие требованиям ортогональности и нормировки, является разложение на два эллиптических колебания со взаимно противоположными направлениями вращения, взаимно ортогональными большими осями эллипсов и одинаковым отношением их полуосей. Без уменьшения общности можно полагать оба колебания синфазными, ибо различие в фазах автоматически учитывается комплексными коэффициентами разложения. Обозначим через $\operatorname{tg} \gamma$ отношение малой полуоси эллипса к его большой полуоси и через ψ — угол, образованный с ортом \mathbf{e}_1^0 большой полуосью эллипса, имеющего правое вращение. Плоскость Q , определяемую направлением орта \mathbf{e}_1^0 и направлением распространения волны, назовём плоскостью референции.

Нетрудно убедиться³¹, что преобразование вектора \mathbf{E} от представления γ, ψ к представлению γ', ψ' дается тогда выражением

$$\mathbf{E}(\gamma', \psi') = L(\gamma', \psi', \gamma, \psi) \mathbf{E}(\gamma, \psi), \quad (1)$$

где L — матрица, имеющая вид:

$$L(\gamma', \psi', \gamma, \psi) = \begin{vmatrix} \cos(\gamma' - \gamma) \cos(\psi' - \psi) - & -\cos(\gamma' + \gamma) \sin(\psi' - \psi) + \\ -i \sin(\gamma' + \gamma) \sin(\psi' - \psi) & +i \sin(\gamma' - \gamma) \cos(\psi' - \psi) \\ -\cos(\gamma' + \gamma) \sin(\psi' - \psi) + & \cos(\gamma' - \gamma) \cos(\psi' - \psi) + \\ +i \sin(\gamma' - \gamma) \cos(\psi' - \psi), & +i \sin(\gamma' + \gamma) \sin(\psi' - \psi) \end{vmatrix}. \quad (2)$$

Вследствие линейности и однородности уравнений электродинамики*) напряжённость электрического поля \mathbf{E}' в световом пучке, испытывавшем взаимодействие с веществом и распространяющемся в некоторой точке \mathbf{r}' в направлении \mathbf{l}' , будет линейной однородной функцией вектора \mathbf{E} в световом пучке до взаимодействия, распространявшемся в некоторой точке \mathbf{r} в направлении \mathbf{l} . Следовательно, результат взаимодействия излучения с веществом может быть представлен в виде

$$E'_i(\mathbf{r}', \mathbf{l}') = \sum_k \mu_{ik}(\mathbf{r}', \mathbf{l}', \mathbf{r}, \mathbf{l}) E_k(\mathbf{r}, \mathbf{l}) \quad (3)$$

$$(i, k = 1, 2),$$

где компоненты μ_{ik} матрицы μ , описывающей воздействие вещества

*) В случае нарушения линейности уравнений электродинамики (скажем, при явлениях насыщения поглощения и индуцированного излучения, наблюдаемых в микроволновом диапазоне) всё дальнейшее теряет силу.

на световой пучок, вообще говоря, комплексны. Поскольку рассматривается квазистационарный случай, μ_{ik} не зависят от времени. Общий временной множитель $e^{i\omega t}$ везде далее отбрасывается.

Всегда можно найти такие представления γ , ψ для преобразуемого и γ' , ψ' для преобразованного лучей, что матрица μ диагонализуется. Это означает, что световой пучок можно разложить на две альтернативно поляризованные компоненты, преобразующиеся в данном акте взаимодействия с веществом независимо друг от друга. Поскольку (см. ниже) разложение на эллиптически поляризованные компоненты, даваемые матрицей L , является, по существу, разложением по линейным формам относительно собственных функций оператора спина фотона, постольку всякое взаимодействие излучения с веществом представляет собой спектральное разложение светового пучка на альтернативные спинорные компоненты и независимое преобразование этих компонент.

В некоторых случаях оказывается возможным найти такое, общее для преобразуемого и преобразованного лучей представление γ , ψ , в котором матрица μ диагонализуется. Необходимым и достаточным условием этого является соотношение

$$\mu\mu^+ = \mu^+\mu, \quad (4)$$

где $\mu_{ik}^+ = \mu_{ki}^*$ (звёздочкой, как обычно, отмечаются комплексно сопряжённые величины) или, что то же самое

$$\left. \begin{aligned} |\mu_{21}| &= |\mu_{12}|, \\ \arg \mu_{12} + \arg \mu_{21} &= 2\arg(\mu_{22} - \mu_{11}). \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Необходимым и достаточным условием приводимости матрицы μ к диагональному виду с действительными компонентами является её эрмитовость.

Таким образом, всякое воздействие вещества на световой пучок данной частоты можно рассматривать как линейное, вообще говоря, комплексное преобразование комплексного вектора напряжённости электрического поля, сопровождаемое, быть может, изменением направления пучка и зависящее от координат исходной (\mathbf{r}) и конечной (\mathbf{r}') точек, к которым относится описание его состояния. Результат ряда последовательных преобразований получается последовательным применением соответствующих матриц μ , т. е. матрица полного преобразования является произведением матриц частичных преобразований. Матрица, соответствующая ряду параллельных (одновременных) когерентных преобразований, является суммой матриц частичных преобразований.

При распространении пучка в квазиоднородной среде изменение его параметров происходит непрерывно в результате дисперсионных явлений (двойное лучепреломление, абсорбция). В этом случае может быть введена дифференциальная матрица преобразования γ ,

определяющая изменение пучка на элементе его длины dl :

$$dE = -\nu E dl. \quad (6)$$

Воздействие квазиоднородной среды на проходящий через неё световой пучок сводится, помимо рефракции, во-первых, к изъятию из пучка некоторого количества квантов определённой поляризации и, во-вторых, к изменению поляризации остаточного потока за счёт различия скоростей распространения двух альтернативно поляризованных компонент. Поэтому матрица ν распадается на сумму двух матриц, соответствующих указанным двум параллельным преобразованиям пучка:

$$\nu = \nu^a + \nu^\phi. \quad (7)$$

Всегда можно найти такие представления γ , ψ , в которых диагонализуются либо матрица экстинкции

$$\nu^a = \nu_{ik}^a \delta_{ik}, \quad (8)$$

соответствующая дихроизму, либо фазовая матрица

$$\nu^\phi = \begin{vmatrix} i\varphi & 0 \\ 0 & -i\varphi \end{vmatrix} + i\varphi_0 \delta_{ik}, \quad (9)$$

соответствующая двойному лучепреломлению. Отметим, что диагонализированная матрица экстинкции должна иметь действительные компоненты, т. е. в произвольном представлении γ , ψ будет эрмитовой, так же как и матрица $i\nu^\phi$, ибо φ и φ_0 в (9) действительные.

В общем случае матрицы ν^a и ν^ϕ могут оказаться неприводимыми одновременно к диагональному виду. Если, однако, ν удовлетворяет условию (4), то среда дихроична и двоякопреломляюща для одних и тех же альтернативно поляризованных (эллиптически) компонент, соответствующих некоторому представлению γ , ψ . Тем самым появляется возможность раздельного прослеживания судьбы каждой из компонент в отдельности, а вместе с тем и введения для них показателей преломления. В самом деле, в соответствующем представлении γ , ψ матрица ν принимает в рассматриваемом случае вид

$$\nu = \begin{vmatrix} i(\varphi_0 + \varphi) & 0 \\ 0 & i(\varphi_0 - \varphi) \end{vmatrix}, \quad (10)$$

где φ_0 и φ — комплексные величины с неотрицательной мнимой частью (отсутствует усиление луча), вследствие чего

$$E_i(l) = F_i(0) e^{-i(\varphi_0 \pm \varphi)l} = E_i(0) e^{-ik_0 n_i l},$$

где показатель преломления для i -й компоненты определяется соотношением

$$n_i = \frac{1}{k_0} (\varphi_0 \pm \varphi) \quad (11)$$

(k_0 — волновое число для вакуума).

В случае, когда можно пренебречь когерентным взаимодействием частиц, рассеивающих излучение, т. е. в условиях, когда расстояния между рассеивающими частицами превышают длину волны излучения, дифференциальная матрица γ принимает вид ³¹

$$\gamma_{ik} = \frac{2\pi N}{k^2} \overline{g_{ik}}(1, 1), \quad (12)$$

где N — число частиц в единице объёма, k — волновое число (вообще говоря, комплексное) для среды, в которой находятся частицы, и $\overline{g_{ik}}(1, 1)$ — коэффициенты разложения компонент амплитудной матрицы рассеяния индивидуальной частицы (например, амплитудных коэффициентов рассеяния в задаче Ми) по плоским волнам, соответствующие плоской рассеянной волне, распространяющейся в том же направлении 1 , что и облучающая волна, и усреднённые по всевозможным ориентациям рассеивающих частиц.

Изложенные соображения относятся к преобразованию исключительно когерентных пучков (дисперсия, отражение, преломление, рассеяние, интерференция и т. д.). В частности, они могут быть положены в основу учёта поляризации при расчётах разнообразных оптических приборов, особенно поляризационных (компенсаторы, анализаторы и т. п.) и интерференционных. В этом случае задача сводится к определению вида матриц μ для каждого из элементов прибора и отысканию полной матрицы, соответствующей всему комплексу последовательных преобразований, испытываемых световым пучком при прохождении им прибора. В случае наличия некогерентных пучков (например, «естественный» свет) судьба каждого из них прослеживается независимо. Отметим, что математическая сторона вопроса для представления $\gamma = 0$ (разложение по линейно поляризованным компонентам) частично рассмотрена в работах Джонса¹ и Парке², а примеры практического применения изложенного метода (также для представления $\gamma = 0$) можно найти в работах Цзян Ю-цзы, Ричардса и Янг Канг Лианга³, Билингса и Лэнда⁴, Ричардса и Цзян Ю-цзы⁵ и некоторых других (см. также книгу А. В. Шубникова «Оптическая кристаллография»).

§ 3. СТАТИСТИЧЕСКИЕ ПАРАМЕТРЫ ДЛЯ ОПИСАНИЯ НЕКОГЕРЕНТНЫХ СВЕТОВЫХ ПУЧКОВ

Описанный выше матричный метод, предназначенный для анализа преобразований, испытываемых полностью поляризованными когерентными световыми пучками при их взаимодействии с веществом или интерференции друг с другом, оказывается непригодным, когда мы встречаемся с частично или полностью деполаризованным светом и статистическими процессами его взаимодействия с веществом, например в явлениях многократного рассеяния. В самом деле, каждый световой пучок, распространяющийся в мутной среде,

представляет собой комплекс множества некогерентных между собой световых пучков, имеющих различную предисторию и, следовательно, различные интенсивности, фазы и характер поляризации. Вместе с тем в актах преобразований, испытываемых световым пучком при его взаимодействии с веществом, отдельные, вообще говоря, эллиптически поляризованные «чистые» компоненты этого пучка выступают независимо друг от друга. Преобразования каждой из этих компонент даются законами локальных преобразований, одинаковыми для всех компонент. Однако результат преобразований для различных компонент «смеси» будет различным, и результат преобразования такого «смешанного» светового пучка будет очевидным образом определяться его «составом», отыскание которого представляет собой статистическую задачу. Поэтому возникает необходимость отказаться от описания светового потока при помощи векторов напряжённости поля, а обратиться к отвечающим существу рассматриваемых явлений статистическим параметрам. Последние должны, с одной стороны, обеспечивать полноту описания свойств светового пучка и, с другой стороны, быть аддитивными для некогерентных компонент «смешанного» светового потока.

Ниже мы убедимся, что такими параметрами могут служить квадратичные и билинейные относительно E_i формы или их линейные комбинации. Как известно, совокупность четырёх линейно независимых усреднённых по времени квадратичных и билинейных относительно E_i форм соответствует полной совокупности наблюдаемых (в квантовомеханическом смысле этого слова) величин при условии, что приёмниками излучения являются энергетические (т. е. квадратичные) устройства—единственные, существующие для излучений достаточно большой частоты (в том числе света)⁶⁻⁸. Соответствующие средние квадратичные и билинейные относительно E_i формы могут быть введены следующим образом (Винер⁶, Парке²).

Рассмотрим полностью (эллиптически) поляризованный световой пучок, для которого E_i являются функциями координат и времени, и найдём матрицу интерференции для величин E_i и E_j^* в некоторой точке \mathbf{r} пучка*):

$$\varphi_{ij}(\mathbf{r}, \tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} E_i(\mathbf{r}, t + \tau) E_j^*(\mathbf{r}, t) dt. \quad (13)$$

Производя, далее, преобразования Фурье, получаем спектраль-

) Установление корреляции между E_i и E_j^ в различных точках квазистационарного светового поля, повидимому, должно позволить сформулировать законы оптики непосредственно в терминах наблюдаемых величин; см., например,⁹.

ную матрицу

$$S_{IJ}(\mathbf{r}, \omega) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{IJ}(\mathbf{r}, \tau) e^{i\omega\tau} d\tau, \quad (14)$$

совокупность компонент которой и исчерпывает совокупность наблюдаемых величин. Если излучение монохроматично, т. е. если

$$E_i(\mathbf{r}, t) = E_i(\mathbf{r}) e^{-i\omega_0 t}, \quad (15)$$

то

$$\varphi_{IJ}(\mathbf{r}, \tau) = E_i(\mathbf{r}) E_j^*(\mathbf{r}) e^{-i\omega_0 \tau} \quad (16)$$

и

$$S_{IJ}(\mathbf{r}, \omega) = -\frac{1}{2} E_i(\mathbf{r}) E_j^*(\mathbf{r}) \delta(\omega - \omega_0), \quad (17)$$

откуда интегральная спектральная матрица, т. е. полная совокупность средних билинейных форм, принимает вид

$$S_{IJ}(\mathbf{r}) \equiv \int_0^\infty S_{IJ}(\mathbf{r}, \omega) d\omega = -\frac{1}{2} E_i(\mathbf{r}) E_j^*(\mathbf{r}). \quad (18)$$

Наиболее удобными для практического использования, повидимому, являются следующие четыре параметра:

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= 2(S_{11} + S_{22}) = E_1 E_1^* + E_2 E_2^*, \\ S_2 &= 2(S_{11} - S_{22}) = E_1 E_1^* - E_2 E_2^*, \\ S_3 &= 2(S_{12} + S_{12}^*) = E_1 E_2^* + E_1^* E_2, \\ S_4 &= -i2(S_{12} - S_{12}^*) = -i(E_1 E_2^* - E_1^* E_2), \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

образующие компоненты некоторого четырёхмерного вектора \vec{S} в соответствующем четырёхмерном функциональном пространстве*). В дальнейшем вектор \vec{S} мы для краткости будем называть

*) Для полностью (эллиптически) поляризованного пучка разложение E на альтернативные линейно-поляризованные компоненты ($\gamma = 0$) имеет (с точностью до общего фазового множителя) вид:

$$E_1 = a_1; \quad E_2 = a_2 e^{i\delta},$$

где a_1 и a_2 — действительные числа и δ — разность фаз компонент, зависящая от угла φ наклона большей оси эллипса к плоскости референции Q

(при $\varphi = 0$ $\delta = \frac{\pi}{2}$). Соответственно,

$$S_1 = a_1^2 + a_2^2, \quad S_2 = a_1^2 - a_2^2, \quad S_3 = 2a_1 a_2 \cos \delta; \quad S_4 = -2a_1 a_2 \sin \delta.$$

вектор-параметром светового пучка. В представлении $\gamma = 0$ (разложение на линейно поляризованные компоненты) компоненты вектор-параметра совпадают (с точностью до постоянного множителя) с параметрами, введенными Стоксом¹⁰ и носящими его имя*).

Поэтому \vec{S} можно было бы назвать обобщенным вектор-параметром Стокса.

Отметим, что выражение (19) для компонент вектор-параметра можно записать в виде:

$$S_i = E \cdot \sigma_i E^*,$$

где σ_1 — единичная матрица δ_{ik} , а $\sigma_2 = \sigma_x$, $\sigma_3 = \sigma_y$, $\sigma_4 = \sigma_z$ суть спинорные матрицы Паули.

Поскольку для некогерентных световых пучков перекрестные члены матрицы интерференции φ_{ij} обращаются в нуль, постольку вектор-параметры некогерентных пучков аддитивны. С точки зрения квантовой механики полностью поляризованный пучок представляет собой «чистый случай», в то время как частично поляризованный пучок, являющийся некогерентной совокупностью полностью поляризованных пучков, образует «смесь»⁶⁻⁸. Следовательно, вектор-параметр смеси образуется из вектор-параметров её чистых компонент простым суммированием. Таким образом, состояние светового пучка полностью определено, если заданы его направление \mathbf{l} , частота ω и вектор-параметр \vec{S} .

§ 4. СВОЙСТВА ВЕКТОР-ПАРАМЕТРА

Как явствует из способа введения вектор-параметра, его компоненты существенным образом зависят от выбора плоскости референции Q (включающей направление луча \mathbf{l} и направление орта \mathbf{e}_1^0) и представления γ , ϕ . Поэтому существенно найти закон преобразования вектор-параметра от одного представления к другому, а также инварианты этого преобразования, т. е. величины, имманентные данному пучку и определяющие его свойства, независимые от системы отсчёта. Очевидно, отыскание закона преобразования позволит ответить также на вопрос об интенсивности пучка, если последний рассматривать через анализатор, пропускающий ту или иную из эллиптически поляризованных компонент, т. е. найти вероятность обнаружения фотонов с данной поляризацией.

*) В литературе для параметров Стокса нет общепринятых обозначений. В частности, их обозначают или^{10, 11} $S_1 = I$, $S_2 = M$, $S_3 = C$, $S_4 = S$, или¹² $S_1 = I$, $S_2 = Q$, $S_3 = U$, $S_4 = V$, или $S_1 = I$, $S_2 = P_1$, $S_3 = P_2$, $S_4 = P_3$. По соображениям, очевидным из дальнейшего, принятые здесь обозначения представляются наиболее удобными.

Легко показать³¹, что преобразование вектор-параметра от представления γ, ψ к представлению γ', ψ' является однородной линейной операцией

$$\vec{S}(\mathbf{r}, \gamma', \psi') = K(\gamma', \psi', \gamma, x) \vec{S}(\mathbf{r}, \gamma, \psi), \quad (20)$$

где матрица K имеет вид

$$K(\gamma', \psi', \gamma, \psi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\gamma' \cos 2\gamma \times \\ & \times \cos 2(\psi' - \psi) + & \cos 2\gamma' \sin 2(\psi' - \psi) & \cos 2\gamma' \sin 2\gamma \times \\ & + \sin 2\gamma' \sin 2\gamma & & \times \cos 2(\psi' - \psi) - \\ & & & - \sin 2\gamma' \sin 2\gamma \\ 0 & \cos 2\gamma \sin 2(\psi' - \psi) & \cos 2(\psi' - \psi) & - \sin 2\gamma \sin 2(\psi' - \psi) \\ 0 & \sin 2\gamma' \cos 2\gamma \times \\ & \times \cos 2(\psi' - \psi) - & \sin 2\gamma' \sin 2(\psi' - \psi) & \sin 2\gamma' \sin 2\gamma \times \\ & - \cos 2\gamma' \sin 2\gamma & & \times \cos 2(\psi' - \psi) + \\ & & & + \cos 2\gamma' \cos 2\gamma \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Инвариантами этого преобразования являются:

$$I = S_1 \quad (22)$$

$$M = qS_1 = \sin 2\gamma S_2 - \cos 2\gamma S_4, \quad (23)$$

$$p^2 S_1^2 = (\cos 2\gamma S_2 + \sin 2\gamma S_4)^2 + S_3^2, \quad (24)$$

$$U^2 = r^2 S_1^2 = (p^2 + q^2) S_1^2 = S_2^2 + S_3^2 + S_4^2, \quad (25)$$

и, наконец,

$$(1 - r^2) S_1^2 = S_1^2 - (S_2^2 + S_3^2 + S_4^2). \quad (26)$$

Физический смысл инварианта $I = S_1$ очевиден. Это интенсивность пучка, т. е. модуль вектора Пойнтинга (в дальнейшем термин «интенсивность» везде употребляется в этом смысле). Не менее очевиден и физический смысл инварианта M — это плотность потока момента импульса (спинового) плоской электромагнитной волны, умноженная на частоту излучения. В самом деле, нетрудно показать, что

$$M = \pm \omega |[\mathbf{E}\mathbf{A}]|, \quad (27)$$

где \mathbf{A} — вектор-потенциал электромагнитного поля волны, выражение же, стоящее справа, как известно¹⁴⁻¹⁶, является интегралом движения для распространения электромагнитных волн в вакууме и соответствует спинового моменту импульса волны. Справедливость соотношения (27), впервые (в неявной форме) указанного А. А. Садовским¹⁷, подтверждена, например, опытами Бета¹⁸ и Каррады¹⁹.

Величина q , характеризующая отношение потока вращательного (спинового) импульса пучка к потоку энергии, может быть названа

степенью эллиптичности. $q > 0$ соответствует правому вращению, $q < 0$ — левому вращению, $q = \pm 1$ — циркулярной поляризации; в чистом случае $q = 0$ соответствует линейной поляризации. Инвариант $|p|$ представляет собой не что иное, как отношение разности экстремальных значений интенсивности пучка при рассмотрении его через различным образом ориентируемый анализатор к их сумме:

$$|p| = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}, \quad (28)$$

т. е. то, что обычно называется степенью поляризации. $p = 1$ соответствует линейной поляризации, а $p = 0$ в чистом случае — циркулярной поляризации. Что касается инварианта $r^2 = p^2 + q^2$, то для чистого случая $r^2 = 1$. Однако для смеси это соотношение уже не имеет места. В частности, для «естественного» света $r^2 = 0$. Таким образом, параметр r характеризует степень различия в поляризации отдельных чистых компонент, образующих смесь. Поскольку смесь одинаково поляризованных компонент («однородная» смесь) неотличима от соответствующего чистого случая (что является выражением их экспериментальной неотличимости), постольку инвариант r следует считать мерой «степени однородности» смеси. Известно, впрочем, что частично поляризованный свет можно рассматривать как смешение в известной пропорции полностью поляризованного и естественного света²⁰. Очевидно, что параметр r характеризует именно эту пропорцию, т. е. его можно трактовать (в указанном смысле) как меру степени поляризации (как это иногда и делается). Однако такая терминология, хотя и больше отвечает существу дела, представляется нецелесообразной, ибо вносит путаницу с общепринятым определением степени поляризации, соответствующим величине p .

Приведём некоторые соотношения, связывающие компоненты вектор-параметра и инварианты преобразования (21) с некоторыми другими величинами, используемыми для характеристики луча. Соотношения эти оказываются полезными при практических расчётах.

Для чистого случая можно найти такое представление γ_0, ψ_0 , в котором остаётся только одна из двух альтернативно поляризованных компонент (например, $E_1; E_2 = 0$). Тогда³¹

$$q = \sin 2\gamma_0, \quad (29)$$

$$p = \cos 2\gamma_0, \quad (30)$$

$$I_{\max} = S_1 \cos^2 \gamma_0, \quad (31)$$

$$I_{\min} = S_1 \sin^2 \gamma_0, \quad (32)$$

$$\operatorname{ctg} 2(\psi_0 - \psi) = \frac{S_2 \cos 2\gamma_0 + S_4 \sin 2\gamma_0}{S_3} \quad (33)$$

Соотношение (33), в отличие от (29)—(32), сохраняется и для смеси, причём под ψ_0 здесь следует понимать значение ψ , соответствующее экстремальной интенсивности излучения, пропускаемого анализатором, выделяющим компоненту, линейно поляризованную в плоскости, составляющей с плоскостью референции Q угол $\psi + \frac{\pi}{2}$ (так называемые направления «наибольшей» и «наименьшей» поляризации).

Для смеси справедливы также соотношения:

$$S_3 = Ip \sin 2(\psi_0 - \psi), \quad (34)$$

$$S_2 \cos 2\gamma + S_4 \sin 2\gamma = Ip \cos 2(\psi_0 - \psi), \quad (35)$$

$$S_2 \sin 2\gamma - S_4 \cos 2\gamma = Iq. \quad (36)$$

§ 5. МАТРИЦА ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ С ВЕЩЕСТВОМ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕКТОР-ПАРАМЕТРА

Вследствие линейности и однородности уравнений Максвелла всякое взаимодействие излучения с веществом может быть описано как линейное однородное преобразование вектор-параметра светового пучка в функции его координат и направления. В самом деле, мы видели, что для каждой чистой компоненты пучка имеет место соотношение (3). Образует теперь, в соответствии с (13)—(18), спектральную матрицу преобразованного пучка. Поскольку мы рассматриваем квазистационарное поле, постольку коэффициенты матрицы μ не зависят от времени и для матрицы интерференции имеем:

$$\varphi_{ik}(\mathbf{r}', \tau) = \sum_{\rho, \sigma} \mu_{i\rho} \mu_{k\sigma}^* \varphi_{\rho\sigma}(\mathbf{r}, \tau), \quad (37)$$

откуда

$$S_{ik}(\mathbf{r}', I') = \sum_{\rho, \sigma} \mu_{i\rho} \mu_{k\sigma}^* S_{\rho\sigma}(\mathbf{r}, I). \quad (38)$$

Переходя, далее, согласно (19), к компонентам вектор-параметра S_i , находим:

$$\vec{S}(\mathbf{r}', I') = D(\mathbf{r}', I', \mathbf{r}, I) \vec{S}(\mathbf{r}, I), \quad (39)$$

где матрица преобразования D имеет вид

$$D = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} (\mu_{11}^* \mu_{11}^* + \mu_{12}^* \mu_{12}^*) + (\mu_{11}^* \mu_{11}^* - \mu_{12}^* \mu_{12}^*) + (\mu_{21}^* \mu_{21}^* + \mu_{22}^* \mu_{22}^*) + (\mu_{21}^* \mu_{21}^* - \mu_{22}^* \mu_{22}^*) & (\mu_{11}^* \mu_{12}^* + \mu_{11}^* \mu_{12}^*) + (\mu_{21}^* \mu_{22}^* + \mu_{21}^* \mu_{22}^*) + i(\mu_{21}^* \mu_{22}^* - \mu_{21}^* \mu_{22}^*) \\ (\mu_{11}^* \mu_{11}^* + \mu_{12}^* \mu_{12}^*) - (\mu_{11}^* \mu_{11}^* - \mu_{12}^* \mu_{12}^*) - (\mu_{21}^* \mu_{21}^* + \mu_{22}^* \mu_{22}^*) - (\mu_{21}^* \mu_{21}^* - \mu_{22}^* \mu_{22}^*) & (\mu_{11}^* \mu_{12}^* - \mu_{11}^* \mu_{12}^*) - (\mu_{21}^* \mu_{22}^* - \mu_{21}^* \mu_{22}^*) - i(\mu_{21}^* \mu_{22}^* - \mu_{21}^* \mu_{22}^*) \\ (\mu_{11}^* \mu_{21}^* + \mu_{11}^* \mu_{21}^*) + (\mu_{11}^* \mu_{21}^* - \mu_{11}^* \mu_{21}^*) - (\mu_{12}^* \mu_{22}^* + \mu_{12}^* \mu_{22}^*) - (\mu_{12}^* \mu_{22}^* - \mu_{12}^* \mu_{22}^*) & i(\mu_{11}^* \mu_{22}^* - \mu_{11}^* \mu_{22}^*) + i(\mu_{11}^* \mu_{22}^* - \mu_{11}^* \mu_{22}^*) - i(\mu_{12}^* \mu_{21}^* - \mu_{12}^* \mu_{21}^*) \\ i(\mu_{11}^* \mu_{21}^* - \mu_{11}^* \mu_{21}^*) + i(\mu_{11}^* \mu_{21}^* - \mu_{11}^* \mu_{21}^*) + i(\mu_{12}^* \mu_{21}^* - \mu_{12}^* \mu_{21}^*) + i(\mu_{12}^* \mu_{21}^* - \mu_{12}^* \mu_{21}^*) & i(\mu_{11}^* \mu_{22}^* - \mu_{11}^* \mu_{22}^*) + i(\mu_{11}^* \mu_{22}^* - \mu_{11}^* \mu_{22}^*) - i(\mu_{12}^* \mu_{21}^* - \mu_{12}^* \mu_{21}^*) - i(\mu_{12}^* \mu_{21}^* - \mu_{12}^* \mu_{21}^*) \end{vmatrix}, \quad (40)$$

причём все её компоненты суть действительные величины. В случае, когда пучок распространяется в квазиоднородной среде, представляется возможным ввести дифференциальную матрицу κ преобразования вектор-параметра:

$$d\vec{S} = -\kappa(r, l)\vec{S}dl, \quad (41)$$

связанную с матрицей ν (см. стр. 81) соотношением^{31*)}

$$\kappa = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \operatorname{Re}(\nu_{11} + \nu_{22}) & \operatorname{Re}(\nu_{11} - \nu_{22}) & \operatorname{Re}(\nu_{12} + \nu_{21}) - \operatorname{Im}(\nu_{12} - \nu_{21}) \\ \operatorname{Re}(\nu_{11} - \nu_{22}) & \operatorname{Re}(\nu_{11} + \nu_{22}) & \operatorname{Re}(\nu_{12} - \nu_{21}) - \operatorname{Im}(\nu_{12} + \nu_{21}) \\ \operatorname{Re}(\nu_{12} + \nu_{21}) - \operatorname{Re}(\nu_{12} - \nu_{21}) & \operatorname{Re}(\nu_{11} + \nu_{22}) & \operatorname{Im}(\nu_{11} - \nu_{22}) \\ \operatorname{Im}(\nu_{12} - \nu_{21}) & \operatorname{Im}(\nu_{12} + \nu_{21}) - \operatorname{Im}(\nu_{11} - \nu_{22}) & \operatorname{Re}(\nu_{11} + \nu_{22}) \end{vmatrix}. \quad (42)$$

Нетрудно видеть, что компоненты матрицы κ удовлетворяют условиям

$$\left. \begin{aligned} \kappa_{11} = \kappa_{22} = \kappa_{33} = \kappa_{44}; \quad \kappa_{12} = \kappa_{21}; \quad \kappa_{13} = \kappa_{31}; \quad \kappa_{14} = -\kappa_{41}; \\ \kappa_{32} = -\kappa_{23}; \quad \kappa_{24} = -\kappa_{42}; \quad \kappa_{34} = -\kappa_{43}, \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

что необходимо и достаточно, чтобы пучок, характеризуемый значением $r=1$ (чистый случай или однородная смесь), преобразовывался с сохранением значения этого инварианта, т. е. однородная смесь преобразовывалась вновь в однородную же смесь (сохранение когерентности).

Поскольку для дихроизма, т. е. процесса изъятия фотонов из проходящего через среду пучка (в результате их поглощения или рассеяния), матрица экстинкции ν^g эрмитова, постольку в произвольном представлении соответствующая матрица экстинкции κ^g должна иметь вид

$$\kappa^g = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \nu_{11}^g + \nu_{22}^g & \nu_{11}^g - \nu_{22}^g & \nu_{12}^g + \nu_{21}^g & i(\nu_{12}^g - \nu_{21}^g) \\ \nu_{11}^g - \nu_{22}^g & \nu_{11}^g + \nu_{22}^g & 0 & 0 \\ \nu_{12}^g + \nu_{21}^g & 0 & \nu_{11}^g + \nu_{22}^g & 0 \\ -i(\nu_{12}^g - \nu_{21}^g) & 0 & 0 & \nu_{11}^g + \nu_{22}^g \end{vmatrix}. \quad (44)$$

В представлении, в котором матрица ν^g приводится к диагональному виду (т. е. $\nu_{12}^g = \nu_{21}^g = 0$), в матрице κ^g исчезают все недиагональные члены, за исключением $\kappa_{12}^g = \kappa_{21}^g$. Исчезновение последних соответствует независимости поглощения от состояния поляризации излучения (изотропия).

*) При отсутствии когерентного взаимодействия между рассеивающими частицами в качестве ν_{ik} для определения κ_{ik} следует использовать выражение (12).

Точно так же фазовая матрица x^Φ связана с матрицей v^Φ соотношением

$$x^\Phi = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (v_{12}^\Phi - v_{21}^\Phi) & i(v_{12}^\Phi + v_{21}^\Phi) \\ 0 & -(v_{12}^\Phi - v_{21}^\Phi) & 0 & -i(v_{11}^\Phi - v_{22}^\Phi) \\ 0 & -i(v_{12}^\Phi + v_{21}^\Phi) & i(v_{11}^\Phi - v_{22}^\Phi) & 0 \end{vmatrix}. \quad (45)$$

Если матрица v^Φ диагонализирована, т. е. если возможно введение показателей преломления (см. выше), то в матрице x^Φ исчезают все члены, кроме $\chi_{34} = -\chi_{43}$. В представлении $\gamma = 0$ это соответствует двойному лучепреломлению, а в представлении $\gamma = \frac{\pi}{4}$ вращению плоскости поляризации, т. е. оптической активности среды.

В общем случае, очевидно,

$$x = x^s + x^\Phi. \quad (46)$$

Возвращаясь к матрице конечного преобразования D , отметим некоторые частные случаи, особо важные с точки зрения практических применений.

а) Отражение и преломление на границе двух сред описывается матрицей D , которую легко получить (в представлении $\gamma = 0, \psi = 0$; плоскость референции Q совпадает с плоскостью падения), если в выражении (40) положить $\mu_{11} = r_p, \mu_{22} = r_s, \mu_{12} = \mu_{21} = 0$, или $\mu_{11} = \tau_p, \mu_{22} = \tau_s, \mu_{12} = \mu_{21} = 0$, где r_p, r_s и τ_p, τ_s — френелевы амплитудные коэффициенты отражения (r) и преломления (τ) для p - и s -компонент соответственно.

б) Поляризатору, пропускающему колебания в плоскости ψ без поглощения, т. е. пропускающему без изменения свет, характеризуемый в представлении $\gamma = 0, \psi = 0$ вектор-параметром $\vec{S}(1, 1, 0, 0)$, в том же представлении соответствует матрица

$$\mu = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad (47)$$

т. е.

$$D = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}. \quad (48)$$

в) Компенсатору, вносящему разность фаз τ между линейно поляризованными компонентами в представлении $\gamma = 0, \psi = 0$,

соответствует матрица

$$\mu = \begin{vmatrix} e^{i\frac{\tau}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\tau}{2}} \end{vmatrix}, \quad (49)$$

т. е.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \tau & -\sin \tau \\ 0 & 0 & \sin \tau & \cos \tau \end{vmatrix} \quad (50)$$

(для пластинки четверть длины волны $\tau = \pi/2$).

г) Оптически активный кристалл, вращающий плоскость поляризации на угол θ , характеризуется в представлении $\gamma = 0$, $\psi = 0$ матрицей

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\theta & -\sin 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad (51)$$

а в представлении $\gamma = \frac{\pi}{4}$ матрицей (50).

д) Дихроичной пластинке, ослабляющей в μ_1 и μ_2 раз, альтернативно поляризованные компоненты E_1 и E_2 , соответствующие произвольному представлению γ , ψ , отвечает (в том же представлении γ , ψ) матрица

$$D = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \mu_1^2 + \mu_2^2 & \mu_1^2 - \mu_2^2 & 0 & 0 \\ \mu_1^2 - \mu_2^2 & \mu_1^2 + \mu_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\mu_1\mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu_1\mu_2 \end{vmatrix}. \quad (52)$$

е) Если на пути пучка поместить компенсатор, вносящий разность фаз τ между компонентами E_1 и E_2 (в представлении $\gamma = 0$, $\psi = 0$), и за ним анализатор, выделяющий компоненту, линейно поляризованную в плоскости, составляющей с плоскостью референции Q угол $\varphi + \pi/2$ (т. е. с вектором E , лежащим в плоскости Q), то интенсивность света, проходящего через систему, будет функцией τ и φ и определяется соотношением

$$I(\tau, \varphi) = \frac{1}{2} [S_1 + (\cos 2\gamma \cos 2\varphi - \sin 2\gamma \sin 2\varphi \sin \tau) S_2 + \\ + \sin 2\varphi \cos \tau S_3 + (\sin 2\gamma \cos 2\varphi + \cos 2\gamma \sin 2\varphi \sin \tau) S_4], \quad (53)$$

где вектор-параметр задан в представлении $\gamma, \psi = 0$. Это соотношение даёт возможность указать способ экспериментального определения компонент вектор-параметра. Очевидно, S_i могут быть найдены путём измерения I для четырёх различных значений τ и φ . В частности, в представлении $\gamma = 0, \psi = 0$ имеем:

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= I(0, 0) + I\left(0, \frac{\pi}{2}\right); & S_2 &= I(0, 0) - I\left(0, \frac{\pi}{2}\right); \\ S_3 &= 2I\left(0, \frac{\pi}{4}\right) - S_1; & S_4 &= 2I\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right) - S_1. \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

Таким образом определение компонент вектор-параметра сводится к измерению интенсивности светового пучка, препарированного путём пропускания его через анализатор (для трёх положений последнего: $\psi = 0, \pi/4$ и $\pi/2$), а также через четверть-волновую пластинку ($\gamma = \pi/2$) и анализатор в положении $\psi = \pi/4$.

§ 6. ЧАСТНЫЕ ВИДЫ МАТРИЦЫ РАССЕЯНИЯ

Поскольку рассеяние (если речь идёт не о рассеянии отдельных частиц, а о рассеянии всей среды в целом) всегда полностью некогерентно³¹, для его исследования следует применять вектор-параметрическое описание световых пучков. Применимость приближения лучевой оптики здесь обеспечивается тем обстоятельством, что нас всегда интересует поле рассеянного излучения на расстояниях, больших по сравнению с размерами волновой зоны. Поэтому мы вправе пренебречь быстро убывающим с расстоянием радиальным полем и записать закон рассеяния на единичной неоднородности (атом, флуктуация, крупная частица) в виде

$$E_i^{\text{расс}}(r, \mathbf{l}) = \frac{1}{r} F_{ik}(\mathbf{l}, \mathbf{l}_0) E_k^0(\mathbf{l}_0) e^{-ikr}, \quad (55)$$

где \mathbf{l}_0 и \mathbf{l} — направления распространения рассеиваемого и рассеянного пучков, r — расстояние от рассеивающей неоднородности до точки наблюдения и индексы i и k ($i, k = 1, 2$) относятся к долготной и широтной компонентам поля излучения соответственно^{*)}.

*) Подчеркнём, что, вообще говоря, индикатриса рассеяния F_{ik} соответствует не единичным рассеивающим неоднородностям, а элементу объёма рассеивающей среды, т. е. комплексам неоднородностей (флуктуаций, крупных молекул, изолированных частиц), размеры и взаимные расстояния которых, по крайней мере, сравнимы с длиной световой волны и которые рассеивают полностью некогерентно относительно друг друга. Строго говоря, только в этом случае следует говорить о рассеянии, а не о явлениях дисперсии, и применять для описания световых пучков вектор-параметр Стокса.

Матрица рассеяния $\frac{1}{r^2} D(1, 1_0)$ для этого случая получается непосредственно из (40), если положить

$$\mu_{ik}(1, 1_0) = F_{ik}(1, 1_0) \quad (56)$$

(множитель e^{-ikr} исчезает, ибо в D входят только произведения вида $\mu_{ik}\mu_{js}^*$). Очевидно, что матрица $\frac{1}{4\pi} D(1, 1_0) d\Omega$ представляет собой не что иное, как дифференциальное поперечное сечение рассеяния в данном направлении 1 внутрь телесного угла $d\Omega$.

Приводим частные виды матрицы D для рассеяний различного типа.

а) Молекулярное рассеяние²⁷.

В представлении $\gamma = 0, \psi = 0$

$$\frac{1}{r^2} D = \frac{\omega^4}{16\pi^2 c^4 r^2} \cdot \frac{(1-\Delta)}{1 - \frac{4}{3}\Delta} \cdot \frac{(n^2-1)}{N} \times \quad (57)$$

$$\times \begin{vmatrix} (1 + \cos^2 \vartheta) + \frac{4\Delta}{1-\Delta} & -\sin^2 \vartheta \cos 2\varphi & \sin^2 \vartheta \sin 2\varphi & 0 \\ -\sin^2 \vartheta & (1 + \cos^2 \vartheta) \cos 2\varphi & -(1 + \cos^2 \vartheta) \sin 2\varphi & 0 \\ 0 & 2 \cos \vartheta \sin 2\varphi & 2 \cos \vartheta \cos 2\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \cos \vartheta \end{vmatrix}.$$

где ϑ — угол рассеяния, φ — угол между плоскостью рассеяния (совпадающей с плоскостью референции Q' для рассеянного пучка) и плоскостью референции Q для рассеиваемого пучка, а Δ — деполаризация рассеяния в случае облучения линейно поляризованным светом ($E_2^0 = 0$) и наблюдения в направлении $\theta = \frac{\pi}{2}$,

$\varphi = \frac{\pi}{2}$.

б) Рассеяние на сферических частицах (Ми)²⁷.

В представлении $\gamma = 0, \psi = 0$

$$\frac{1}{r^2} D = \frac{1}{r^2} \begin{vmatrix} d_1 & d_2 \cos 2\varphi & -d_2 \sin 2\varphi & 0 \\ d_2 & d_1 \cos 2\varphi & -d_1 \sin 2\varphi & 0 \\ 0 & d_3 \sin 2\varphi & d_3 \cos 2\varphi & d_4 \\ 0 & -d_4 \sin 2\varphi & -d_4 \cos 2\varphi & d_3 \end{vmatrix}, \quad (58)$$

где

$$\left. \begin{aligned} d_1 &= \frac{1}{2} \sum_{l,m}^{\infty} [(G_{lm}^{(1)} + G_{lm}^{(2)}) (\Theta'_l \Theta'_m + \Theta_l \Theta_m) + \\ &\quad + 2G_{lm}^{(3)} (\Theta_l \Theta'_m + \Theta'_l \Theta_m)], \\ d_2 &= \frac{1}{2} \sum_{l,m}^{\infty} [(G_{lm}^{(1)} + G_{lm}^{(2)}) (\Theta'_l \Theta'_m - \Theta_l \Theta_m) + \\ &\quad + 2G_{lm}^{(3)} (\Theta_l \Theta'_m - \Theta'_l \Theta_m)], \\ d_3 &= \sum_{l,m}^{\infty} [(G_{lm}^{(1)} + G_{lm}^{(2)}) \Theta'_l \Theta_m + \\ &\quad + G_{lm}^{(3)} (\Theta'_l \Theta'_m + \Theta_l \Theta_m)], \\ d_4 &= \sum_{l,m}^{\infty} [G_{lm}^{(4)} (\Theta'_l \Theta_m - \Theta_l \Theta'_m) + \\ &\quad + G_{lm}^{(5)} (\Theta'_l \Theta'_m - \Theta_l \Theta_m)] \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

суть действительные функции угла рассеяния θ , причём:

$$\left. \begin{aligned} \Theta_l(\theta) &= P_l^{(1)}(\cos \theta) \frac{1}{\sin \theta}; \quad \Theta'_l(\theta) = P_l^{(1)'}(\cos \theta) \cdot \sin \theta; \\ \alpha_l &= \operatorname{Re} \left(\frac{1}{k} C_l \zeta'_l \right); \quad \alpha'_l = \operatorname{Im} \left(\frac{1}{k} C_l \zeta'_l \right); \\ \beta_l &= \operatorname{Re} \left(\frac{1}{k} B_l \zeta_l \right); \quad \beta'_l = \operatorname{Im} \left(\frac{1}{k} B_l \zeta_l \right); \\ G_{lm}^{(1)} &= \alpha_l \alpha_m + \alpha'_l \alpha'_m; \quad G_{lm}^{(2)} = \beta_l \beta_m = \beta'_l \beta'_m; \\ G_{lm}^{(3)} &= \alpha_l \beta'_m + \alpha'_l \beta_m; \quad G_{lm}^{(4)} = \alpha_l \alpha'_m - \beta_l \beta'_m; \\ G_{lm}^{(5)} &= \alpha_l \beta_m - \alpha'_l \beta'_m \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

и функции $P_l^{(1)}$, ζ_l , C_l и B_l имеют обычные в теории рассеяния Ми значения.

Нетрудно убедиться, что (57) удовлетворяет принципу взаимности (ср. ¹¹).

Если в (56) положить $\Delta = 0$, то матрица D для молекулярного рассеяния принимает вид (57), причём $d_4 = 0$ (ср. ^{12, 21}).

в) Комптоновское рассеяние.

Исходя из формулы Клейна-Нишины, Фано ⁷ показал, что матрица рассеяния γ -излучения на электронах в представлении $\gamma = 0$, $\psi = 0$

(плоскости референции Q для рассеиваемого и рассеянного пучков совпадают между собой и с плоскостью рассеяния) имеет вид

$$D_{\text{компл}} = \frac{1}{2} \frac{e^2}{mc^2} \left(\frac{k}{k_0} \right)^2 \times \quad (61)$$

$(1 + \cos^2 \theta) +$	$-\sin^2 \theta$	0	$(1 - \cos \theta) \times$
$+(k_0 - k)(1 - \cos \theta)$			$\times (k_0 \cos \theta + k) s$
$-\sin^2 \theta$	$1 + \cos^2 \theta$	0	$(1 - \cos \theta) \times$
			$\times [n n_0] [k_0 s]$
0	0	$2 \cos \theta$	$(1 - \cos \theta) \times$
			$\times [k n_0] s$
$(1 - \cos \theta) \times$	$(1 - \cos \theta) \times$	$(1 - \cos \theta) \times$	$2 \cos \theta +$
$\times (k \cos \theta + k_0) s$	$\times [n_0 n] [k s]$	$\times (k_0 n) s$	$+(k_0 - k) \times$
			$\times (1 - \cos \theta) \cos \theta,$

где θ — угол рассеяния, k_0 и k — импульсы рассеиваемого и рассеянного фотонов, выраженные в единицах mc , n_0 и n — унитарные векторы направлений рассеиваемого и рассеянного пучков и s — средний начальный спин рассеивающих электронов.

§ 7. СВЯЗЬ МАТРИЦЫ РАССЕЯНИЯ С МАТРИЦЕЙ ДИСПЕРСИИ

Обратимся теперь к связи матрицы рассеяния D с матрицей дисперсии χ . Для этого выделим участок слоя среды единичной площади и толщины dl и подсчитаем поток вектора Пойнтинга через замкнутую поверхность, охватывающую этот участок. Та часть этого потока, которая определяется перекрёстными интерференционными членами для полей рассеянной и рассеиваемой волн, даёт полное количество энергии, изымаемое в единицу времени из облучающей слой волны, и полностью учитывается матрицей дисперсии χ :

$$(dS_1)_{\text{проход}} = \sum_j \chi_{1j} S_j dl. \quad (62)$$

Эта изымаемая из облучающей волны энергия расходуется, с одной стороны, на рассеяние:

$$(dS_1)_{\text{расс}} = \frac{1}{4\pi} \sum_j S_j \int D_{1j} d\Omega dl, \quad (63)$$

где $d\Omega$ — телесный угол с вершиной в рассеивающем объёме, и, с другой стороны, на поглощение излучения самой неоднородностью. В частности, если поглощение отсутствует, то

$$\chi_{1j} = \chi_{j1} = \frac{1}{4\pi} \int D_{1j} d\Omega dl. \quad (64)$$

Аналогичные соотношения могут быть получены для компонент x_{4j} и D_{4j} из закона сохранения углового момента (ср. 27)). Таким образом, использование законов сохранения позволяет (при отсутствии поглощения) связать с D_{ij} все компоненты дисперсионной матрицы x , за исключением $x_{23} = -x_{32}$, соответствующих повороту плоскости поляризации. Вопрос о связи x_{23} с D_{ij} остаётся пока открытым.

При наличии поглощения сопоставление (62) и (63), а также соответствующих выражений для dS_4 позволяет определить не только количество поглощаемой средой энергии, но и поглощаемый средой момент импульса. Если при этом известен закон поглощения изолированными неоднородностями, то это даёт возможность определять как величину, так и поляризацию эффективного поля, в котором находятся неоднородности, ибо величина поглощения определяется именно эффективным полем.

§ 8. ВЕКТОР-ПАРАМЕТР СТОКСА И СФЕРА ПУАНКАРЕ

Из определения компонент вектор-параметра очевидно, что

$$S_1 = I, \quad S_2 = IP_1, \quad S_3 = IP_2, \quad S_4 = IP_3, \quad (65)$$

причём P_i не зависят от интенсивности пучка I и, согласно (25), удовлетворяют соотношению

$$P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 = r^2. \quad (66)$$

Как для полностью, так и для частично поляризованного пучков в представлении $\gamma = 0$ (ср. (34) — (36))

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= p \cos 2(\psi_0 - \psi), \\ P_2 &= p \sin 2(\psi_0 - \psi), \\ P_3 &= -q. \end{aligned} \right\} \quad (67)$$

С другой стороны, в соответствии с (66) можно положить

$$\left. \begin{aligned} p &= r \sin 2(\beta_0 - \beta), \\ q &= -r \cos 2(\beta_0 - \beta) \end{aligned} \right\} \quad (68)$$

и рассматривать P_i как компоненты некоторого трёхмерного вектора \mathbf{P} , модуль которого равен r . Нетрудно видеть, что для полностью (эллиптически) поляризованного света $(\beta_0 - \beta)$ означает разность фаз двух альтернативных компонент, линейно поляризованных по главным осям эллипса поляризации, а $(\psi_0 - \psi)$ — угол поворота большой оси эллипса поляризации относительно плоскости референции Q . Кроме того, для полностью поляризованного света $r = 1$, т. е. \mathbf{P} является унитарным вектором. Для частично поляризованного света величины $(\psi_0 - \psi)$ и $(\beta_0 - \beta)$ сохраняют свои значения, но только для полностью поляризованной компоненты (для полностью деполаризованной компоненты $r = 0$).

Таким образом, состояние поляризации пучка полностью задано, если задан вектор \mathbf{P} , который получил название вектора поляризации. При этом четырёхмерный вектор-параметр \vec{S} может быть записан в виде

$$\vec{S} = I(1, \mathbf{P}) \quad (69)$$

или, вводя унитарный вектор поляризации \mathbf{Q} , совпадающий по направлению с \mathbf{P} , т. е., полагая,

$$\mathbf{P} = r\mathbf{Q}, \quad (70)$$

имеем:

$$\vec{S} = I(1, r\mathbf{Q}). \quad (71)$$

Введение унитарного вектора поляризации \mathbf{Q} непосредственно приводит нас к очень наглядному и в некоторых (далеко не во всех) случаях удобному методу описания поляризации, предложенному Пуанкаре²².

Соотнесём компонентам Q_i три ортогональные оси координат. При этом линейно поляризованному в плоскости референции свету отнесём ось 1, свету, линейно поляризованному под углом $\frac{\pi}{4}$ к плоскости референции, — ось 2 и циркулярно (вправо) поляризованному свету — ось 3. Построим, далее, сферу единичного радиуса (сферу Пуанкаре) с центром в начале координат (рис. 1) и введём полярные координаты конца произвольного вектора \mathbf{Q} :

$$\left. \begin{aligned} \text{широту } \theta &= 2(\beta_0 - \beta) \\ \text{и долготу } \varphi &= 2(\psi_0 - \psi). \end{aligned} \right\} \quad (72)$$

Тогда состояние поляризации (т. е. вектор \mathbf{P}) полностью определяется заданием координат θ и φ точки на сфере Пуанкаре и модуля r вектора \mathbf{P} . Переход к любому другому представлению означает поворот поляризационной системы координат: изменение ψ соответствует её повороту вокруг полярной оси, а изменение γ — смещению полюсов.

Допустим теперь, что имеется световой пучок с вектор-параметром $\vec{S} = (1, r\mathbf{Q})$ и требуется найти интенсивность I' , которую приобретёт этот пучок, если пропустить его через оптическое устройство, выделяющее полностью поляризованную компоненту с поляризацией \mathbf{Q}' , т. е. вероятность нахождения в пучке \vec{S} фотонов с поляризацией \mathbf{Q}' . Используя матрицу, характеризующую действие такого устройства, получаем (в произвольном представ-

лении), что I' определяется скалярным произведением векторов $(1, \mathbf{Q}')$ и \vec{S} :

$$I' = \frac{1}{2} I(1, \mathbf{Q}')(1, r\mathbf{Q}), \quad (73)$$

или

$$I' = \frac{1}{2} I(1 + r\mathbf{Q}'\mathbf{Q}). \quad (74)$$

Поскольку (рис. 1)

$$\mathbf{Q}'\mathbf{Q} = \cos \Theta, \quad (75)$$

имеем:

$$I' = \frac{1}{2} I(1 + r \cos \Theta). \quad (76)$$

Отметим, что наряду с вектор-параметрическим описанием светового пучка и описанием его при помощи сферы Пуанкаре нередко

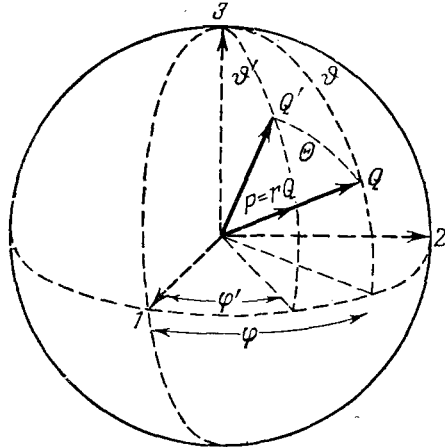


Рис. 1.

прибегают непосредственно к спектральной матрице S_{ik} или линейным комбинациям её компонент, отличным от S_i (см., например, ²¹). Поскольку это не вносит ничего принципиально нового и представляет только некоторые технические удобства в отдельных конкретных случаях, мы не станем останавливаться на описании всех частных вариантов матричного метода и отошлём читателя к оригинальным работам ^{6-13, 21-29}, в которых содержатся многочисленные примеры применения вектор-параметра Стокса и аналогичных ему параметров к разнообразным конкретным задачам, а также описание различных способов введения и измерения компонент вектор-параметра.

§ 9. ВЕКТОР-ПАРАМЕТР И КВАНТОМЕХАНИЧЕСКАЯ МАТРИЦА ПЛОТНОСТИ

С квантовомеханической точки зрения полностью поляризованный ($r = 1$) световой пучок определен, если известна его волновая функция, причём в качестве переменных следует рассматривать числа фотонов N в каждом из квантовых состояний, различающихся по частоте, направлению распространения и состоянию поляризации. Для пучка данного направления и определённой частоты

$$\psi = \sum_i a_i \psi_i \quad (i = 1, 2), \quad (77)$$

где ψ_i — взаимно ортогональные собственные функции, соответствующие двум альтернативным состояниям поляризации. Вероятность нахождения фотона в состоянии ψ определяется тогда известным соотношением

$$w_\psi = \sum_{i,j} \rho_{ij} \psi_i \psi_j^*, \quad (78)$$

где

$$\rho_{ij} = a_i a_j^*, \quad (79)$$

так называемая матрица плотности (см., например, ⁵⁰). Очевидно, если функция ψ нормирована, то след матрицы ρ_{ij}

$$\text{Sp } \rho_{ij} = \sum_i \rho_{ii} = 1, \quad (80)$$

что соответствует достоверности нахождения фотона в одном из альтернативных состояний поляризации. Весьма существенным является то обстоятельство, что матрица плотности для квантовомеханической смеси является суммой матриц плотности для её отдельных чистых компонент, т. е. матрица плотности аддитивна для некогерентных пучков.

В случае электромагнитного излучения

$$\mathbf{E} = E_1 \mathbf{e}_1 + E_2 \mathbf{e}_2, \quad (81)$$

где \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 — орты (вообще говоря, комплексные), играющие роль собственных функций оператора поляризации, а $|E_1|^2$ и $|E_2|^2$ суть вероятности нахождения фотона в каждом из альтернативных состояний поляризации.

Таким образом, матрица плотности в случае электромагнитных волн совпадает со спектральной матрицей: $\rho_{ij} = \frac{2}{I} S_{ij}$, где I — интенсивность светового пучка.

В частности, для света, полностью (эллиптически) поляризованного в направлении (комплексного) орта \mathbf{e}_1 ,

$$S_{11} = \frac{I}{2}, \quad S_{12} = S_{21} = S_{22} = 0, \quad (82)$$

а для полностью деполаризованного света

$$S_{ij} = \frac{I}{4} \delta_{ij}. \quad (83)$$

Поскольку частично поляризованный пучок можно рассматривать как некогерентную смесь «естественного» и полностью поляризованного пучков²⁰, причём доля энергии, приходящаяся на поляризованную компоненту, равна r , то в общем случае (в соответствующем представлении) спектральная матрица

$$\begin{aligned} S &= \frac{I}{4} (1-r) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{Ir}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{I}{4} \begin{pmatrix} 1+r & 0 \\ 0 & 1-r \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (84)$$

откуда, в частности,

$$\left. \begin{aligned} I_{\text{макс}} &= \frac{I}{2} (1+r), \\ I_{\text{мин}} &= \frac{I}{2} (1-r), \end{aligned} \right\} \quad (85)$$

где $I_{\text{макс}}$ и $I_{\text{мин}}$ — интенсивности пучков, пропущенных через поляризующее устройство, полностью пропускающее, либо полностью задерживающее поляризованную компоненту.

Напомним, что вероятность нахождения фотона (или частицы) в состоянии поляризации, соответствующем матрице плотности ρ' , в пучке, характеризуемом матрицей плотности ρ , равна $w = \text{Sp}(\rho\rho')$, что совпадает с (73).

В заключение приведём очевидные соотношения между компонентами вектор-параметра и матрицей плотности ρ :

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= I(\rho_{11} + \rho_{22}^*); & S_2 &= I(\rho_{11} - \rho_{22}), \\ S_3 &= I(\rho_{12} + \rho_{21}); & S_4 &= -Ii(\rho_{12} - \rho_{21}), \end{aligned} \right\} \quad (86)$$

откуда

$$\rho = \frac{1}{2I} \begin{pmatrix} S_1 + S_2 & S_3 + iS_4 \\ S_3 - iS_4 & S_1 - S_2 \end{pmatrix}. \quad (87)$$

*) Напомним, что по условию нормировки (80) $\rho_{11} + \rho_{22} = 1$.

§ 10. ВЕКТОР-ПАРАМЕТР ДЛЯ ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА^{13, 26}

Для частиц со спином $\frac{1}{2}$, в том числе и для электронов, возможны два альтернативные значения $(\pm \frac{1}{2})$ проекции спина на некоторую (произвольную) ось, которым соответствуют две взаимно ортогональные волновые функции ψ_1 и ψ_2 . Иными словами, состояние поляризации электронного пучка определяется волновой функцией

$$\psi = a_1\psi_1 + a_2\psi_2. \quad (88)$$

Следовательно, матрица плотности ρ формально будет иметь тот же вид, что и в случае электромагнитных волн, и можно вве-

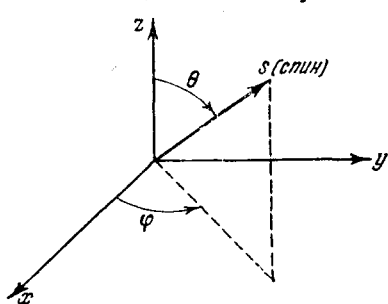


Рис. 2.

сти вектор-параметр \vec{S} , пользуясь соотношениями (86), в которых I будет означать теперь интенсивность электронного пучка.

Выберем представление, в котором ψ_1 и ψ_2 являются собственными функциями оператора проекции спина на некоторую ось z , перпендикулярную направлению y , в котором распространяется пучок, причём положим, что ψ_1 соответствует спину $+\frac{1}{2}$, а ψ_2

спину $-\frac{1}{2}$. При ориентации спина в произвольном направлении (θ, φ) (см. рис. 2) имеем (с точностью до произвольной общей фазы)

$$a_1 = \cos \frac{\theta}{2}, \quad a_2 = \sin \frac{\theta}{2} e^{i\varphi}, \quad (89)$$

откуда, на основании (79) и (86),

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= I, & S_2 &= I \cos \theta, \\ S_3 &= I \sin \theta \cos \varphi, & S_4 &= -I \sin \theta \sin \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (90)$$

Отметим, что в случае электронного пучка вектор поляризации \mathbf{P} совпадает с вектором спина \mathbf{s} (вектор \mathbf{Q} соответствует направлению спина, а параметр r — среднему значению спина для данной смеси).

Способ экспериментального определения компонент вектор-параметра ясен из следующих рассуждений. Собственные функции ψ_1, ψ_2 оператора проекции спина на ось z , как известно, связаны с собственными функциями ψ'_1, ψ'_2 оператора проекции спина

на ось x соотношениями

$$\psi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi'_1 + \psi'_2); \quad \psi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi'_1 - \psi'_2) \quad (91)$$

и с собственными функциями ψ_1^* , ψ_2^* оператора проекции спина на ось y соотношениями

$$\psi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_1^* + \psi_2^*); \quad \psi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (-i\psi_1^* + i\psi_2^*). \quad (92)$$

Обозначим интенсивность компоненты пучка, поляризованной в направлении (θ, φ) , через $I(\theta, \varphi)$. Тогда, как нетрудно убедиться,

$$I(0, 0) = I\rho_{11} \left[\text{спин} + \frac{1}{2} \text{ вдоль оси } z \right],$$

$$I(\pi, 0) = I\rho_{22} \left[\text{спин} - \frac{1}{2} \text{ вдоль оси } z \right],$$

$$I\left(\frac{\pi}{2}, \theta\right) = I\rho'_{11} = \frac{1}{2} (\rho_{11} + \rho_{12} + \rho_{21} + \rho_{22}) \left[\text{спин} + \frac{1}{2} \text{ вдоль оси } x \right],$$

$$I\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) = I\rho'_{22} = \frac{1}{2} (\rho_{11} - \rho_{12} - \rho_{21} + \rho_{22}) \left[\text{спин} - \frac{1}{2} \text{ вдоль оси } x \right],$$

$$I\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = I\rho''_{11} = \frac{1}{2} (\rho_{11} + i\rho_{12} - i\rho_{21} + \rho_{22}) \left[\text{спин} + \frac{1}{2} \text{ вдоль оси } y \right],$$

$$I\left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right) = I\rho''_{22} = \frac{1}{2} (\rho_{11} - i\rho_{12} + i\rho_{21} + \rho_{22}) \left[\text{спин} - \frac{1}{2} \text{ вдоль оси } y \right].$$

Следовательно, в соответствии с (86),

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= I; \quad S_2 = I(0, 0) - I(\pi, 0); \\ S_3 &= I\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) - I\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right); \\ S_4 &= I\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) - I\left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right). \end{aligned} \right\} \quad (93)$$

Сопоставление (93) с (54) позволяет установить простое соответствие между физическим смыслом компонент вектор-параметра в обоих случаях (в представлении $\gamma = 0$):

Компоненты вектор-параметра	Фотоны	Электроны
S_1	Интенсивность пучка	Интенсивность пучка
S_2	Линейная поляризация в направлении некоторой оси z	Поперечный спин в направлении оси z
S_3	Линейная поляризация в направлении, составляющем угол $\frac{\pi}{4}$ с направлением оси z	Поперечный спин в направлении, перпендикулярном z
S_4	Циркулярная поляризация (продольный спин)	Продольный спин

§ 11. ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ ВЕКТОР-ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ОПИСАНИЯ

Уравнение переноса излучения в мутных средах с учётом поляризации последнего

Изменение светового пучка, распространяющегося в некотором направлении \mathbf{l} внутри телесного угла $d\Omega$, при прохождении им элемента объёма dV мутной среды происходит вследствие совместного действия двух причин: 1) дисперсии (включая экстинкцию) и 2) рассеяния элементом dV в направлении \mathbf{l} излучения, приходящего к элементу dV из других направлений — \mathbf{l}' . Поскольку проходящая и рассеянная волны некогерентны между собой, как некогерентны и пучки, рассеянные с различных направлений, постольку имеет место аддитивность не компонент напряжённостей поля, а вектор-параметров соответствующих пучков. Вместе с тем нельзя ограничиваться (как это нередко делается) учётом только интенсивностей пучков, ибо условия их преобразования (рассеяния и дисперсии) существенно зависят от их характера поляризации. Поэтому для одновременного учёта обеих причин изменения светового пучка при прохождении им мутной среды, т. е. для формулирования уравнения переноса, необходимо обратиться к вектор-параметрическому описанию пучков. Это позволяет не только исправить обычно используемое уравнение переноса добавлением к нему членов того же порядка величины, что и основные, но и решать задачи, касающиеся характера поляризации рассеянного света (см., например, ^{12, 27–29, 31}).

С целью установления единообразия в выборе представлений для пучков различных направлений возьмём в качестве плоскости ре-

ференции плоскость рассеяния и положим γ и ψ одинаковыми для всех пучков.

Мощность потока излучения, пересекающего элемент объема dV из направления $-I'$ внутри телесного угла $d\Omega'$, очевидно, равна $S_1(I') d\Omega' d\tau'$, где $d\tau'$ — площадь нормального к I' сечения элемента объема dV . Следовательно, мощность светового потока, распространяющегося в направлении I , изменяется при прохождении им элемента объема dV на величину

$$dS_1(I) d\Omega d\tau = - \sum_{k=1}^4 \chi_{1k}(I) S_k(I) d\Omega d\tau dl + \\ + \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega'} \sum_{k=1}^4 D_{1k}(I, I') S_k(I') d\Omega d\Omega' dV, \quad (94)$$

где первый член учитывает дисперсию, а второй — рассеяние в данном направлении света, распространявшегося во всех прочих направлениях.

Так как все компоненты вектор-параметра представляют собой интенсивности того же светового пучка, только подвергнутого предварительно соответствующему препарированию при помощи компенсаторов и анализаторов, то аналогичные соотношения мы получим и для изменения мощностей таких препарированных пучков. Учитывая, далее, что $dV = d\tau dl$, окончательно получаем систему интегро-дифференциальных уравнений

$$\frac{dS_i(I)}{dl} = \sum_{k=1}^4 \left\{ -\chi_{ik}(I) S_k(I) + \frac{1}{4\pi} \int D_{ik}(I, I') S_k(I') d\Omega' \right\}, \quad (95)$$

которая и представляет собой «уравнение переноса излучения, учитывающее поляризацию последнего» и пригодное как для изотропной, так и для анизотропной среды*). Учёт собственного излучения среды, очевидно, сводится к добавлению в правую часть уравнения соответствующих компонент вектор-параметра собственного излучения, отнесённых к единице объема

*) Уравнение переноса с учётом поляризации излучения было впервые одновременно и независимо сформулировано в 1946 г. Чандрасекаром¹² и автором²⁷ только для случая изотропной среды (когда матрица χ скалярна и можно ограничиться представлением $\gamma = 0$). Формулирование приводимого здесь более общего уравнения³¹ потребовало, с одной стороны, учёта зависимости экстинкции и дисперсии от характера поляризации и, с другой стороны, обобщения вектор-параметра Стокса на произвольное представление γ, ψ , что в 1946 г. оставалось ещё невыполненным.

и являющихся (так же, как x и D) функциями координат и направлений.

Таким же образом может быть учтено рассеяние, сопровождающееся изменением частоты (эффект Доплера, комптоновское рассеяние, комбинационное рассеяние и т. п.). При этом вектор-параметр \vec{S} зависит от длины волны и компоненты матрицы рассеяния D следует считать функциями начальной и конечной длин волн излучения, причём в интегральном члене добавляется интегрирование по начальным длинам волн излучения, рассеиваемого данным элементом объёма с некоторой (произвольной) конечной длиной волны, для которой и формулируется уравнение переноса³¹.

В соответствии с результатами §§ 9 и 10 сформулированное выше уравнение переноса относится не только к электромагнитному излучению, но также и к распространению в рассеивающих средах потоков любых частиц со спином $\frac{1}{2}$, в том числе электронов.

§ 12. ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ ВЕКТОР-ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ОПИСАНИЯ

Комптоновское рассеяние

Дифференциальное сечение рассеяния γ -квантов с поляризацией $(1, \mathbf{Q}')$ в условиях, когда электроны облучаются γ -излучением с поляризацией $(1, \mathbf{rQ})$, согласно (73) равно

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = -\frac{1}{2} (1, \mathbf{Q}') D_{\text{компт}}(1, \mathbf{rQ}), \quad (96)$$

где $D_{\text{компт}}$ — комптоновская матрица рассеяния, имеющая, согласно Фано⁷, вид, указанный в § 6 [см. (61)].

Допустим сначала, что облучающий электроны пучок γ -квантов полностью деполяризован, т. е. $\mathbf{r} = 0$. Тогда

$$D_{\text{компт}}(1, \mathbf{rQ}) = \frac{1}{2} \frac{e^2}{mc^2} \left(\frac{k}{k_0} \right)^2 \times \\ \times \begin{pmatrix} 1 + \cos^2 \theta + (k_0 - k)(1 - \cos \theta) & & \\ & -\sin^2 \theta & \\ & 0 & \\ (1 - \cos \theta)(k \cos \theta + k_0) s & & \end{pmatrix}, \quad (97)$$

т. е. рассеянный пучок частично эллиптически поляризован, причём большая ось эллипса поляризации лежит в плоскости рассеяния. Дифференциальные сечения рассеяния для линейно поляризованных (параллельно и перпендикулярно плоскости рассеяния) компонент

рассеянного излучения согласно (96) равны

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\tau_{\perp}}{d\Omega} &= \frac{1}{2} (1, -1, 0, 0) D_{\text{компт}}(1, r\mathbf{Q}) = \\ &= \frac{1}{4} \frac{e^2}{mc^2} \left(\frac{k}{k_0}\right)^2 [2 + (k_0 - k)(1 - \cos \theta)], \\ \frac{d\tau_{\parallel}}{d\Omega} &= \frac{1}{2} (1, 1, 0, 0) D_{\text{компт}}(1, r\mathbf{Q}) = \\ &= \frac{1}{4} \frac{e^2}{mc^2} \left(\frac{k}{k_0}\right)^2 \cdot [2 \cos^2 \theta + (k_0 - k) \times \\ &\quad \times (1 - \cos \theta)]. \end{aligned} \right\} \quad (98)$$

Допустим теперь, что облучающий пучок линейно поляризован ($r=1$). Выберем плоскость рассеяния в качестве плоскости референции как для рассеянного, так и для рассеиваемого пучков. Если плоскость поляризации рассеиваемого пучка составляет угол φ с плоскостью рассеяния, то в представлении $\gamma=0$, $\psi=0$ получаем:

$$(1, \mathbf{Q}) = \begin{pmatrix} 1 \\ \cos 2\varphi \\ \sin 2\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (99)$$

откуда

$$D_{\text{компт}}(1, \mathbf{Q}) = \frac{e^2}{mc^2} \left(\frac{k}{k_0}\right)^2 \times \left[\begin{aligned} &1 - \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + (k_0 - k) \sin^2 \frac{\theta}{2} \\ &\cos^2 \theta \cos^2 \varphi - \sin 2\varphi \\ &2 \cos \theta \sin \varphi \cos \varphi \\ &\frac{1}{2} (1 - \cos \theta) [(\mathbf{k} \cos \theta - k_0) \mathbf{s} + \\ &+ [\mathbf{n}_0, \mathbf{n}] [\mathbf{k}\mathbf{s}] \cos 2\varphi + [\mathbf{k}_0 \mathbf{n}] \mathbf{s} \sin 2\varphi \end{aligned} \right] \quad (100)$$

и, следовательно, имеет место частичная эллиптическая поляризация рассеянного пучка, причём направление большой оси эллипса поляризации составляет некоторый угол с плоскостью рассеяния. Компонента S_3 вектор-параметра рассеянного пучка обращается в нуль, если мы перейдём к представлению $\gamma=0$, ψ , где ψ определяется условием (ср. (20)):

$$K_{32}S_2 + K_{33}S_3 = 0, \quad (101)$$

т. е., согласно (21), угол наклона большой оси эллипса поляризации к плоскости рассеяния равен

$$\psi = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2 \cos \theta \sin \varphi \cos \varphi}{\cos \theta \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi} \quad (102)$$

и не зависит от \mathbf{s} . Как явствует из вида матрицы $D_{\text{компт}}$ от \mathbf{s} зависит только эллиптичность q . Однако, если рассеиваемый пучок эллиптически поляризован (т. е. $S_4 = 0$), то от \mathbf{s} зависят все компоненты вектор-параметра рассеянного света, в том числе и его интенсивность. Дифференциальные сечения и степень поляризации без труда находятся из (100) обычным путём. В частности, полное (без учёта поляризации) сечение рассеяния равно

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{1}{2} (1, 0, 0, 0) D_{\text{компт}} (1, \mathbf{Q}) = \\ &= \frac{1}{4} \frac{e^2}{mc^2} \left(\frac{k}{k_0} \right)^2 \left[1 - \sin^2 \theta \cos^2 \varphi - (k_0 - k) \sin^2 \frac{\theta}{2} \right]. \end{aligned} \quad (103)$$

Если имеет место повторное комптоновское рассеяние γ -излучения, то дифференциальные сечения находятся из соотношения

$$\frac{d\sigma_{\mathbf{Q}'}}{d\Omega} = \frac{1}{2} (1, \mathbf{Q}') D_{\text{компт}}^{(2)} D_{\text{компт}}^{(1)} (1, r\mathbf{Q}), \quad (104)$$

где верхние индексы у матриц комптоновского рассеяния означают номер акта рассеяния. Из вида матрицы $D_{\text{компт}}$ непосредственно следует, что, каков бы ни был первичный рассеиваемый пучок, результат двойного рассеяния существенно зависит от состояния поляризации как первично, так и вторично рассеивающих электронов.

§ 13. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Приведённые примеры показывают, что применение вектор-параметрического метода позволяет не только существенно упрощать решение широкого круга задач, но и решать задачи, практически недоступные для других методов (скажем, задачи, связанные с учётом многократного рассеяния или самообращения линий в излучении плазмы). Вместе с тем совершенно очевидно, что аналогичные приёмы могут и должны быть использованы и вне рамок оптики для анализа, например, явлений рассеяния электронных пучков или пучков любых других частиц со спином 1/2. То, что это почти не делается в явной форме (в неявной форме к этому методу прибегают отнюдь не редко, а именно почти всегда, когда обращаются к использованию матрицы плотности), следует отнести, в основном, к незнанию широких кругов физиков с конкретным математическим аппаратом вектор-параметрического описания поляризации излучения. Этот пробел в обзорной литературе мы и стремились восполнить.

Вместе с тем, мы полностью обошли важный круг вопросов, связанных с применением когерентных матриц ρ в инструментальной оптике. Причина этого лежит в том, что за исключением более или менее тривиальных случаев, связанных с поляризационными устройствами, названный метод не нашёл себе пока применения, повидимому, по той же причине — из-за незнакомства с ним широких кругов физиков. Однако нетрудно видеть, что его применение должно существенно облегчить рассмотрение многочисленных вопросов, касающихся изменений поляризационных характеристик световых пучков при прохождении ими оптических систем (линз, призм, зеркал и т. п.). Как известно, соответствующие разделы инструментальной оптики всё ещё находятся в зачаточном состоянии.

В заключение отметим, что для ряда практических применений крайне существенно располагать готовыми формулировками законов взаимодействия излучения с веществом в матричной форме, соответствующей вектор-параметрическому описанию излучения. Эта не слишком сложная, но довольно трудсёмкая задача отнюдь не выполнена, что заметно мешает внедрению описанных матричных методов в обиход научных исследований.

В этой связи представляет также значительный интерес задача создания обобщённых матричных методов, применимых и за границами лучевой оптики. Следует полагать, что разработка подобных обобщённых методов позволит сформулировать основные законы оптики (в том числе и уравнения Максвелла), по крайней мере для квазистационарных периодических полей, в терминах оптически наблюдаемых величин, что должно существенно облегчить их применение к известному классу задач.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. G. Jones, J. Opt. Soc. Amer. **31**, 488, 493, 500 (1941); **32**, 486 (1942); **37**, 167, 110 (1947).
2. N. G. Parke, J. Math. and. Phys. **28**, 131 (1949).
3. Hsien Yu Hsi, Richards and Yung k'ang Liang, J. Opt. Soc. Amer. **37**, 99 (1947).
4. Billings and Land, J. Opt. Soc. Amer. **38**, 819 (1948).
5. Richards and Hsien Yu Hsi, J. Opt. Soc. Amer. **39**, 136 (1949).
6. Winer, Acta Math. **55**, 117 (1930); J. Frankl. Inst. **207**, 525 (1929).
7. Fano, J. Opt. Soc. Amer. **39**, 859 (1949).
8. Falkoff and McDonald, J. Opt. Soc. Amer. **41**, 861 (1951).
9. Wolf, Nuovo Cimento **12**, № 6, 884 (1954).
10. Stokes, Trans. Cambr. Phil. Soc. **9**, 339 (1852).
11. Perrin, J. Chem. Phys. **10**, 415 (1942).
12. Chandrasechar, Radiative Transfer, London, 1950 (русский перевод — Чандрасекар, Перенос лучистой энергии, ИЛ, 1954).
13. McMaster, Amer. J. Phys. **22**, № 6, 351 (1954).
14. Д. Иваненко и А. Соколов, Классическая теория поля, Гостехиздат, 1949.
15. Г. В. Розенберг, УФН **40**, № 2 (1950).

16. А. Боргард, Научн. Зап. Днепропетровского гос. Университета **41**, 43 (1953).
 17. А. А. Садовский, Acta et comm. Imp. Univ. Jureviensis **7**, № 1—3 (1899), **8**, № 1—2 (1900).
 18. Beth, Phys. Rev. **48**, 471 (1935); **50**, 115 (1936).
 19. Carrada, Nature **164**, № 4177, 882 (1949).
 20. Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Теория поля, Гостехиздат, 1948.
 21. Soleillet, Ann. d. Phys. **12**, 23 (1929).
 22. Poincaré, Theorie mathematique de la lumiere, т. 2, гл. 12, Paris, 1892. См. также: Becquerel, Comm. Phys. Lab. Univ. Leiden № 91c (1928); № 211a (1930); Skinner, J. Opt. Soc. Amer. **10**, 490 (1925); Wright, J. Opt. Soc. Amer. **20**, 529 (1930); Bruhat et Grivet, J. Phys. et rad. **6**, 12 (1935); Björnstaahl, Phys. Zeits. **42**, 437 (1939); М. Ф. Бокштейн, ЖТФ **18**, 673 (1948); Ramachandran and Ramaseshan, J. Opt. Soc. Amer. **42**, 49 (1952); Jerard, J. Opt. Soc. Amer. **44**, 634 (1954).
 23. H. Hurwitz, J. Opt. Soc. Amer. **35**, 525 (1945).
 24. Wightman, Phys. Rev. **74**, 1813 (1948).
 25. Hamilton, Astrophys. J. **106**, 457 (1947).
 26. Tolhoek and De-Groot, Physica **17**, 1 (1951).
 27. Г. В. Розенберг, Особенности поляризации света, рассеянного атмосферой в условиях сумеречного освещения. Диссертация, 1946 г.
 28. Г. В. Розенберг, Труды Геофизического ин-та АН СССР **12** (1950).
 29. Г. В. Розенберг, ДАН **98**, № 2 (1954).
 30. Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Квантовая механика, Гостехиздат, 1948.
 31. Г. В. Розенберг, Некоторые вопросы распространения электромагнитных волн в мутных средах. Диссертация, 1954 г.
-