

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

ОПТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА МЕТАЛЛОВ

В. Л. Гинзбург и Г. П. Мотулевич

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	469
§ 1. Отражение света от металлической поверхности	471
§ 2. Поверхностный импеданс и эффективная комплексная диэлектрическая постоянная металла	477
§ 3. Микротория в случае нормального скин-эффекта	484
§ 4. Микротория в случае аномального скин-эффекта	497
а) Основы теории аномального скин-эффекта	497
б) Результаты, относящиеся к инфракрасной части спектра	504
в) Об учёте квантовых эффектов	512
§ 5. Методы измерения $n_{эфф}$, $\chi_{эфф}$ и A	516
§ 6. Обсуждение имеющихся экспериментальных данных	525
Заключение	533
Цитированная литература	534

ВВЕДЕНИЕ

Несмотря на то, что изучение оптических свойств металлов проводится уже много десятков лет, современное состояние металлооптики является неудовлетворительным, особенно в экспериментальном отношении. Действительно, исследование поляризации и интенсивности света различной частоты, отражаемого металлической поверхностью при разных углах падения, позволяет определить две характеризующие металл величины — эффективный показатель преломления $n_{эфф}(\omega)$ и эффективный показатель поглощения $\chi_{эфф}(\omega)$. Вместе с тем, сколько-нибудь полные данные о $n_{эфф}(\omega)$ и $\chi_{эфф}(\omega)$ для типичных металлов имеются только для Au, Ag и Cu. При этом они получены в 1913 г. и не могут считаться надёжными и точными из-за несовершенства использованных металлических поверхностей. Значительно больше данных имеется относительно поглощательной способности металлов при нормальном падении $A(\omega) = 1 - r(\omega)$, где $r(\omega)$ — коэффициент отражения при

нормальном падении. Однако одной величины $A(\omega)$ совершенно недостаточно для полной характеристики оптических свойств металла, для чего, как сказано, нужно знать две величины, т. е. $n_{\text{эфф}}(\omega)$ и $\chi_{\text{эфф}}(\omega)$ или две их независимые комбинации, в качестве одной из которых можно выбрать $A(\omega)$.

Подобное состояние эксперимента связано, во-первых, с весьма распространённым непониманием задач металлооптики с точки зрения получения сведений, ценных и нужных для электронной теории металлов. Вторая и при этом более глубокая причина неудовлетворительного состояния металлооптики состоит в том, что до самого последнего времени была не осознана необходимость применять в оптической части спектра в большинстве случаев теорию аномального скин-эффекта, а не теорию нормального (обычного) скин-эффекта, основанную на использовании понятия о комплексной диэлектрической постоянной металла. Это обстоятельство в сочетании с трудностью учёта влияния неидеальности отражающей поверхности препятствовало сравнению теории с опытом и приводило в ряде случаев к неправильной интерпретации экспериментальных данных.

В настоящее время, после того как была развита теория аномального скин-эффекта в металлах, достигнут значительный прогресс в понимании задач и возможностей металлооптики, осветить которые и является основной целью настоящей статьи. Помимо теоретических вопросов, рассмотренных в §§ 1—4 статьи, в § 5, описана методика измерения величин $n_{\text{эфф}}(\omega)$, $\chi_{\text{эфф}}(\omega)$ и $A(\omega)$ и в § 6 приведены и обсуждены имеющиеся экспериментальные данные.

Необходимо также с самого начала указать, что в настоящей статье затронута лишь часть вопросов, относящихся к металлооптике. А именно, мы ограничиваемся рассмотрением области частот, где не имеет места квантовое поглощение (внутренний фотоэффект), т. е. имеем в виду в первую очередь инфракрасную часть спектра и не касаемся ультрафиолетовой, а в большинстве случаев и видимой его части. Далее, рассматривается только отражение света от массивного (т. е. достаточно толстого) металлического зеркала, а случай прохождения света через тонкие металлические плёнки не обсуждается. Кроме того, металл считается в среднем изотропным, что отвечает случаю поликристаллов или, в известном приближении (в частности, в случае нормального скин-эффекта), случаю монокристаллических образцов металлов, обладающих кубической симметрией. Наконец, предполагается, что магнитная проницаемость металла $\mu = 1$ и намагниченность металла, а также внешнее магнитное поле равны нулю. Сделанные допущения, вообще говоря, довольно существенны, но в наиболее простых и интересных случаях могут считаться выполненными. Поэтому при современном состоянии металлооптики имеются, на наш

взгляд, все основания ограничить круг обсуждаемых вопросов и разобраться сначала в простейшем и в то же время важнейшем случае отражения света от изотропной неферромагнитной металлической поверхности.

§ 1. ОТРАЖЕНИЕ СВЕТА ОТ МЕТАЛЛИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Предположим, как это всегда делалось до последнего времени, что при рассмотрении распространения света металл можно считать средой с некоторой комплексной диэлектрической постоянной

$$\varepsilon'(\omega) = \varepsilon(\omega) - i \frac{4\pi\sigma(\omega)}{\omega} = [n(\omega) - i\kappa(\omega)]^2, \quad (1.1)$$

где ε — диэлектрическая постоянная, σ — проводимость, n и κ — показатели преломления и поглощения и ω — циклическая частота.

Сделанное предположение означает, в частности, что плоская электромагнитная волна, распространяющаяся в металле нормально к его поверхности (по оси z), изменяется по закону

$$E(z) = E_0 e^{-i \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon'} z} = E_0 e^{-\frac{\omega}{c} \kappa z} e^{-i \frac{\omega}{c} n z}, \quad (1.2)$$

где E_0 — поле в металле у его поверхности ($z=0$) и ось z направлена в глубь металла.

Глубина скин-слоя, т. е. расстояние, на котором поле убывает в e раз, равна

$$\delta_n = \frac{c}{\omega \kappa} = \frac{\lambda_0}{2\pi \kappa}, \quad (1.3)$$

где $\lambda_0 = \frac{2\pi c}{\omega}$ — длина световой волны в вакууме. Рассматриваемый случай, когда поле в металле изменяется по экспоненциальному закону типа (1.2), это случай обычного или нормального скин-эффекта. На вопросе о том, в каких условиях скин-эффект нельзя считать нормальным, мы остановимся в дальнейшем. Сейчас же заметим, что даже в случае нормального скин-эффекта связь (1.1) между ε' и n и κ имеет место только для оптически изотропных сред (т. е. для монокристаллов кубической симметрии, для поликристаллических веществ и, конечно, жидкостей). Однако в оптически анизотропных средах в случае нормального скин-эффекта вместо ε' можно ввести тензор ε'_{ik} (в оптически изотропной среде $\varepsilon'_{ik} = \varepsilon' \delta_{ik}$, где $\delta_{ii} = 1$ и $\delta_{ik} = 0$ при $i \neq k$), изменение поля в глубь металла попрежнему является экспоненциальным, и лишь величины n и κ , довольно просто выражаемые через ε'_{ik} , зависят от взаимной ориентации оси z и осей кристалла. Как уже упоминалось во введении, оптически анизотропных металлов мы рассматривать не будем (см., например, ¹ § 69 и ² § 22); кроме того, уже в (1.1)

принято, что магнитная проницаемость среды $\mu = 1$ и её намагниченность равно нулю. Последнее предположение означает, что мы не будем рассматривать магнитооптические явления, имеющие место при отражении и прохождении света через намагниченные ферромагнитные вещества (см. ³).

Одна из основных задач металлооптики состоит в том, чтобы связать измеряемые на опыте величины — интенсивность отражённого от металла света и его по-

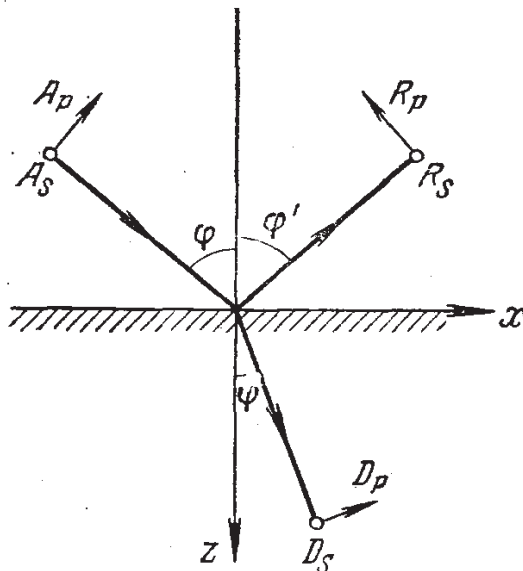


Рис. 1.

ляризацию — с n и χ или, если скин-эффект не является нормальным, с другими величинами, характеризующими металл. Именно этот вопрос, и практически только он один, разбирается в посвящённых металлооптике разделах курсов оптики (см. ¹ § 68 и ² § 21). При этом скин-эффект всегда считается нормальным, что предполагается также ниже в этом параграфе, в котором для удобства будут приведены соответствующие, хорошо известные формулы.

Пусть на плоскую границу раздела среды с комплексной диэлектрической постоянной ϵ' падает из вакуума плоская волна

$$E_A = A \exp i\omega \left\{ t - \frac{x \sin \varphi + z \cos \varphi}{c} \right\},$$

где плоскость падения выбрана в качестве плоскости xz и φ есть угол падения (рис. 1). Отражённая и преломлённая волны имеют соответственно вид:

$$E_R = R \exp i\omega \left\{ t - \frac{x \sin \varphi' - z \cos \varphi'}{c} \right\}$$

и

$$E_D = D \exp i\omega \left\{ t - \frac{x \sin \psi + z \cos \psi}{\frac{c}{\sqrt{\epsilon'}}} \right\}.$$

На границе раздела (при $z = 0$) в любой момент времени должны выполняться условия

$$E_{1t} = E_{2t}, \quad H_{1t} = H_{2t}, \quad (1.4)$$

где индекс t указывает на то, что берутся тангенциальные компоненты полей E и H . При этом $E_1 = E_A + E_R$, $E_2 = E_D$ и ана-

логично для \mathbf{H} . Условия (1.4) могут быть выполнены при любых x и t , только если фазы всех волн равны, т. е.

$$\sin \varphi' = \sin \varphi, \quad \sqrt{\epsilon'} \sin \psi = \sin \varphi, \quad (1.5)$$

откуда $\psi' = \varphi$ и при комплексной постоянной ϵ' угол ψ является комплексным. Последнее означает, что

$$\mathbf{E}_D = \mathbf{D} \exp i\omega \left(t - \frac{\sin \varphi}{c} x - \frac{\sqrt{\epsilon' - \sin^2 \varphi}}{c} z \right),$$

и волна не только осциллирует, но и затухает с ростом z .

Использование условий (1.4) приводит теперь к формулам Френеля:

$$D_p = \frac{2 \sin \psi \cos \varphi}{\sin(\varphi + \psi) \cos(\varphi - \psi)} A_p, \quad D_s = \frac{2 \sin \psi \cos \varphi}{\sin(\varphi + \psi)} A_s, \quad (1.6)$$

$$R_p = \frac{\operatorname{tg}(\varphi - \psi)}{\operatorname{tg}(\varphi + \psi)} A_p, \quad R_s = -\frac{\sin(\varphi - \psi)}{\sin(\varphi + \psi)} A_s, \quad (1.7)$$

где A_p , R_p и D_p — слагающие \mathbf{A} , \mathbf{R} и \mathbf{D} , лежащие в плоскости падения и обозначенные на рис. 1 стрелками; A_s , R_s и D_s — слагающие тех же векторов, перпендикулярные плоскости падения (направленные по оси y) и обозначенные на рис. 1 кружками.

Формулы (1.6) и (1.7) выводятся обычно в предположении о вещественности ψ , но справедливы и при комплексном ψ , как в этом можно убедиться непосредственным расчётом без использования комплексных величин*).

Ниже будет рассматриваться только отражённая волна и при этом в практически важном случае когда $A_p = A_s$ (падающий свет является линейно поляризованным, причём плоскость поляризации составляет угол 45° с плоскостью падения). В этом случае, как ясно из (1.7),

$$\frac{R_p}{R_s} = -\frac{\cos(\varphi + \psi)}{\cos(\varphi - \psi)} \equiv P e^{i\Delta} \equiv \operatorname{tg} \rho \cdot e^{i\Delta}. \quad (1.8)$$

Если нет поглощения и невозможно полное внутреннее отражение, т. е. $\epsilon'(\omega) = \epsilon(\omega) > 1$, то угол ψ вещественен и $\Delta = \pi$ при $\varphi < \varphi_0$.

*) В однородной среде условие $\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho$ приводит к соотношению $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$, так как $\operatorname{div} \mathbf{j} + i\omega\rho = 0$ и, следовательно, $\operatorname{div} \left(\mathbf{D} - i \frac{4\pi}{\omega} \mathbf{j} \right) = \operatorname{div} \epsilon' \mathbf{E} = 0$. Поэтому и при наличии поглощения $(\mathbf{kE}) = 0$, где

$$\mathbf{k} \left\{ \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon'} \sin \psi, 0, \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon'} \cos \psi \right\}.$$

и $\Delta = 0$ при $\varphi > \varphi_6$, где φ_6 — угол Брюстера ($\operatorname{tg} \varphi_6 = \sqrt{\epsilon}$). При этом $P = \operatorname{tg} \rho = 1$ при $\varphi = 0$ и $\varphi = \frac{\pi}{2}$ и $\operatorname{tg} \rho = 0$ при $\varphi = \varphi_6$ (рис. 2). В общем случае, когда $\sigma \neq 0$, при $\varphi = 0$ и $\varphi = \frac{\pi}{2}$ также $P = \operatorname{tg} \rho = 1$ и соответственно $\Delta = \pi$, $\frac{R_p}{R_s} = -1$ и $\Delta = 0$, $\frac{R_p}{R_s} = 1$. Однако в промежуточной области углов фаза Δ плавно изменяется от π до 0, а $\operatorname{tg} \rho$ нигде не достигает нуля (рис. 3).

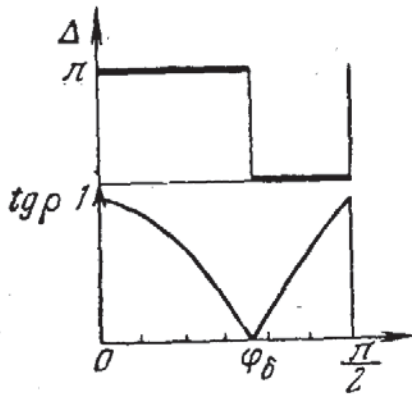


Рис. 2. Поглощение отсутствует $\epsilon > 1$, $\sigma = 0$.

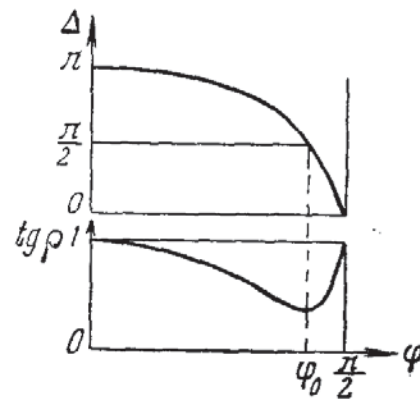


Рис. 3. Поглощение отлично от нуля ($\sigma \neq 0$).

Отражённый свет при этом эллиптически поляризован (поляризация является линейной только при $\Delta = \pi$ и $\Delta = 0$, что при наличии поглощения имеет место лишь при $\varphi = 0$ и $\varphi = \frac{\pi}{2}$). При некотором угле $\varphi = \varphi_0$ фаза $\Delta = \frac{\pi}{2}$ и эллипс поляризации ближе всего к кругу.

Угол φ_0 называется главным углом падения. При $\Delta \neq \frac{\pi}{2}$ ось эллипса поляризации не лежит в плоскости падения, но при $\Delta = \frac{\pi}{2}$ это имеет место (рис. 4). В последнем случае величина $P = \operatorname{tg} \rho$ минимальна и соответствующий азимутальный угол ρ обозначается через ρ_0 и называется главным азимутом*). Углы φ_0 и ρ_0 или величины ρ и Δ для любого угла φ могут быть определены на опыте (см. § 5). Поэтому необходимо связать все эти величины с характеризующим отражающее вещество параметром $\sqrt{\epsilon'} = n - ix$.

Из (1.8), используя (1.5), получаем:

$$\frac{1 + Pe^{i\Delta}}{1 - Pe^{i\Delta}} = \frac{\sin \varphi \sin \psi}{\cos \varphi \cos \psi} = \frac{\sin \varphi \operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{\epsilon' - \sin^2 \varphi}}. \quad (1.9)$$

*) Углы ρ и ρ_0 часто обозначают через ψ и ψ_0 .

В дальнейшем учтём, что в интересующей нас области спектра величины $|\varepsilon'|$ и $|\varepsilon|$ обычно очень велики, т. е.

$$|\varepsilon'| = n^2 + \kappa^2 \gg 1, \quad (1.10)$$

$$|\varepsilon| = |n^2 - \kappa^2| \gg 1. \quad (1.11)$$

При условии (1.11), а обычно и при более слабом условии (1.10) можно пренебречь величиной $\sin^2 \varphi$ по сравнению с ε , что и будет ниже делаться. Точнее, будет использоваться условие

$$|\varepsilon| \gg \sin^2 \varphi, \quad (1.12)$$

при котором

$$\left. \begin{aligned} \frac{1 + Pe^{i\Delta}}{1 - Pe^{i\Delta}} &= \frac{\sin \varphi \operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{\varepsilon'}}, \\ \frac{1 + iP_0}{1 - iP_0} &= \\ &= \frac{\sin \varphi_0 \operatorname{tg} \varphi_0}{\sqrt{\varepsilon'}} = \\ &= \frac{\sin \varphi_0 \operatorname{tg} \varphi_0}{n - i\kappa}, \end{aligned} \right\} (1.9a)$$

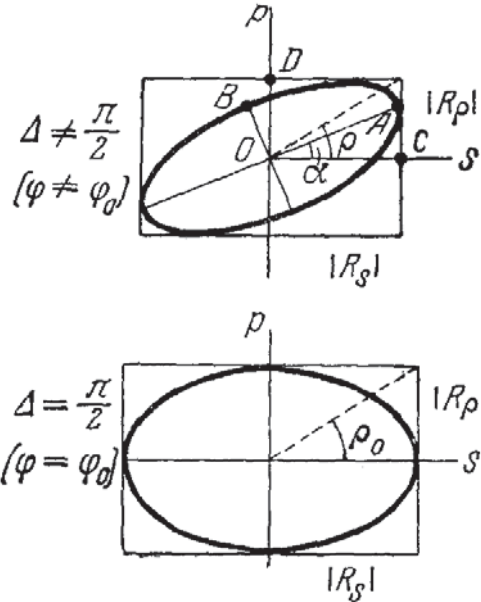


Рис. 4.

где $P_0 = \operatorname{tg} \rho_0$ — значение P при $\varphi = \varphi_0$, когда $\Delta = \frac{\pi}{2}$. Умножая

второе соотношение (1.9a) на комплексно сопряжённую величину, получаем:

$$\sin \varphi_0 \operatorname{tg} \varphi_0 = \sqrt{|\varepsilon'|} = \sqrt{n^2 + \kappa^2}. \quad (1.13)$$

Из (1.9a) и (1.13) следует

$$\operatorname{tg}^2 \rho_0 = \frac{\sqrt{n^2 + \kappa^2} - n}{\sqrt{n^2 + \kappa^2} + n}. \quad (1.14)$$

Отсюда, пользуясь соотношением $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$, находим:

$$\operatorname{tg} 2\rho_0 = \frac{\kappa}{n}. \quad (1.15)$$

Из (1.9a) при $\Delta \neq \frac{\pi}{2}$ имеем ($P = \operatorname{tg} \rho$):

$$\begin{aligned} \frac{1 - Pe^{i\Delta}}{1 + Pe^{i\Delta}} \cdot \frac{1 + Pe^{-i\Delta}}{1 + Pe^{-i\Delta}} &= \frac{1 - 2iP \sin \Delta - P^2}{1 + 2P \cos \Delta + P^2} = \\ &= \frac{\cos 2\rho - i \sin 2\rho \sin \Delta}{1 + \sin 2\rho \cos \Delta} = \frac{n - i\kappa}{\sin \varphi \operatorname{tg} \varphi}, \end{aligned}$$

откуда, приравнявая вещественные и мнимые части, находим:

$$\frac{\cos 2\rho}{1 + \sin 2\rho \cos \Delta} = \frac{n}{\sin \varphi \operatorname{tg} \varphi}, \quad \frac{\sin 2\rho \sin \Delta}{1 + \sin 2\rho \cos \Delta} = \frac{x}{\sin \varphi \operatorname{tg} \varphi} \quad (1.16)$$

или

$$\left. \begin{aligned} n &= \frac{\sin \varphi \cdot \operatorname{tg} \varphi \cdot \cos 2\rho}{1 + \sin 2\rho \cdot \cos \Delta}, \\ x &= \frac{\sin \varphi \cdot \operatorname{tg} \varphi \cdot \sin 2\rho \sin \Delta}{1 + \sin 2\rho \cdot \cos \Delta}, \end{aligned} \right\} \frac{x}{n} = \sin \Delta \operatorname{tg} 2\rho. \quad (1.17)$$

Из (1.16) и (1.17) можно, полагая $\Delta = \frac{\pi}{2}$, сразу же получить выражения (1.13) и (1.15).

Таким образом, измеряя φ_0 и ρ_0 или Δ и ρ при любом угле падения φ , действительно можно определить n и x на исследуемой частоте ω . Того же можно достичь, измеряя коэффициенты отражения $r_{\parallel} = \left| \frac{R_p}{A_p} \right|^2$ и $r_{\perp} = \left| \frac{R_s}{A_s} \right|^2$ (см. (1.7)); при этом выражения (1.7) можно после простых преобразований, в которых используется закон преломления $\sqrt{\varepsilon'} \sin \psi = \sin \varphi$, записать в виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{R_p}{A_p} &= \frac{\sqrt{\varepsilon'} \cos \varphi - \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \varphi}{\varepsilon'}}}{\sqrt{\varepsilon'} \cos \varphi + \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \varphi}{\varepsilon'}}}, \\ \frac{R_s}{A_s} &= \frac{\cos \varphi - \sqrt{\varepsilon' - \sin^2 \varphi}}{\cos \varphi + \sqrt{\varepsilon' - \sin^2 \varphi}}. \end{aligned} \right\} \quad (1.18)$$

Формулы для величин r_{\parallel} и r_{\perp} , выраженные через n и x , будут приведены в § 5, здесь же мы ограничимся случаем нормального падения, когда

$$\left. \begin{aligned} r &= \left| \frac{R_p}{A_p} \right|^2 = \left| \frac{R_s}{A_s} \right|^2 = \left| \frac{\sqrt{\varepsilon'} - 1}{\sqrt{\varepsilon'} + 1} \right|^2 = \frac{n^2 + x^2 + 1 - 2n}{n^2 + x^2 + 1 + 2n}, \\ A &= 1 - r = \frac{4n}{n^2 + x^2 + 1 + 2n}. \end{aligned} \right\} \quad (1.19)$$

Выражения (1.18) и (1.19) являются точными, т. е. справедливы и при несоблюдении условий (1.10)–(1.12). Измерение A дает возможность связать n и x или проконтролировать независимые измерения n и x .

Остановимся также несколько подробнее на связи между ϵ и σ с n и κ . Как следует из (1.1),

$$\left. \begin{aligned} n^2 - \kappa^2 &= \epsilon, & n\kappa &= \frac{2\pi\sigma}{\omega}, \\ n &= \sqrt{\frac{\epsilon}{2} + \sqrt{\left(\frac{\epsilon}{2}\right)^2 + \left(\frac{2\pi\sigma}{\omega}\right)^2}}, \\ \kappa &= \sqrt{-\frac{\epsilon}{2} + \sqrt{\left(\frac{\epsilon}{2}\right)^2 + \left(\frac{2\pi\sigma}{\omega}\right)^2}}, \end{aligned} \right\} \quad (1.20)$$

где внутренний корень всегда берётся со знаком плюс, что обеспечивает вещественность n и κ при любом ϵ (в металлах в большинстве областей $\epsilon < 0$). Перед внешним корнем в (1.20) также всегда можно выбирать знак плюс, так как знак минус отвечает просто замене оси z на $-z$ (т. е. распространению и затуханию волны в противоположном направлении).

Если

$$|\epsilon| \gg \frac{4\pi\sigma}{\omega}, \quad (1.21)$$

то

$$\left. \begin{aligned} n &\approx \sqrt{\epsilon}, & \kappa &\approx \frac{2\pi\sigma}{\omega \sqrt{\epsilon}} \quad (\text{при } \epsilon > 0), \\ n &\approx \frac{2\pi\sigma}{\omega \sqrt{-\epsilon}}, & \kappa &= \sqrt{-\epsilon} \quad (\text{при } \epsilon < 0). \end{aligned} \right\} \quad (1.22)$$

Если же

$$\epsilon \ll \frac{4\pi\sigma}{\omega}, \quad (1.23)$$

то

$$n \approx \kappa \approx \sqrt{\frac{2\pi\sigma}{\omega}}, \quad \delta_0 = \frac{c}{\omega\kappa} = \frac{c}{\sqrt{2\pi\sigma\omega}}. \quad (1.24)$$

Случай (1.23) и (1.24) имеет место в области радиочастот; при этом $\text{tg } 2\rho_0 = 1$, $P_0 = \text{tg } \rho_0 = 0,414$ и при выполняющемся в металлах условии (1.10)

$$A \approx 2 \sqrt{\frac{\omega}{2\pi\sigma}}. \quad (1.25)$$

§ 2. ПОВЕРХНОСТНЫЙ ИМПЕДАНЦ И ЭФФЕКТИВНАЯ КОМПЛЕКСНАЯ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ПОСТОЯННАЯ МЕТАЛЛА

В области миллиметровых, сантиметровых и даже дециметровых радиоволн, когда приходится иметь дело с полыми резонаторами и волноводами, свойства среды (металла) особенно часто

характеризуют поверхностным импеданцем

$$Z(\omega) = R(\omega) + iX(\omega) = \frac{4\pi}{c} \left[\frac{E_x}{H_y} \right]_0, \quad (2.1)$$

где индекс 0 указывает на то, что компоненты E_x и H_y берутся на поверхности металла (поверхность для определенности считается плоской и совпадающей с плоскостью xy). В случае падения на поверхность плоской волны, очевидно, $E_x = E_{Ax} + E_{Rx}$ и $H_y = H_{Ay} + H_{Ry}$ (см. § 1), причём легко видеть (см. подробнее¹ § 10), что $E_x = (A_p - R_p) \cos \varphi$, $H_y = A_p + R_p$, $E_y = A_s + R_s$ и $H_x = -A_s \cos \varphi + R_s \cos \varphi$. Отсюда, используя (1.18), получаем:

$$\left. \begin{aligned} Z(\omega) &= \frac{4\pi}{c} \left[\frac{E_x}{H_y} \right]_0 = \frac{4\pi}{c} \frac{\sqrt{1 - \frac{\sin^2 \varphi}{\epsilon'}}}{\sqrt{\epsilon'}}, \\ Z'(\omega) &= -\frac{4\pi}{c} \left[\frac{E_y}{H_x} \right]_0 = \frac{4\pi}{c \sqrt{\epsilon' - \sin^2 \varphi}}. \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

При нормальном падении

$$\left. \begin{aligned} Z(\omega) = Z'(\omega) &= \frac{4\pi}{c \sqrt{\epsilon'}}, \\ \epsilon' = \epsilon - i \frac{4\pi\sigma}{\omega} &= \frac{16\pi^2}{c^2 Z^2} = \frac{16\pi^2}{c^2} \frac{R^2 - X^2 - 2iXR}{(X^2 + R^2)^2}. \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

Выражения (2.3) как приближённые имеют место также при любом φ , если выполнено условие (1.11) или (1.10). Поэтому при условии (1.10)—(1.11), которое для металлов обычно хорошо соблюдается, поверхностный импеданц является, с точностью до членов порядка $\frac{\sin^2 \varphi}{\epsilon'}$, универсальной величиной, т. е. не зависит от характера электромагнитного поля в вакууме. Это связано, разумеется, с тем, что при условии (1.10)—(1.11) поле очень быстро убывает в глубь металла и в хорошем приближении представляет собой затухающую волну, распространяющуюся по оси z независимо от характера поля в вакууме. В силу сказанного выражения

$$Z(\omega) = \frac{4\pi}{c \sqrt{\epsilon'}} = \frac{4\pi}{c} \left[\frac{E_x}{H_y} \right]_0 = -\frac{4\pi}{c} \left[\frac{E_y}{H_x} \right]_0 \quad (2.4)$$

можно рассматривать в качестве приближённых граничных условий, связывающих поля \mathbf{E} и \mathbf{H} в вакууме и позволяющих находить эти поля без вычисления поля в металле. Эти граничные условия широко используются в настоящее время в теории распространения радиоволн (см., например,⁴ где в § 19 обсуждается

также вопрос о точности условий (2.4)). С помощью условий (2.4) легко получить формулы (1.13) — (1.17), а также формулы (1.18), где нужно пренебречь $\sin^2\varphi$ по сравнению с ε , т. е. формулы

$$\frac{R_p}{A_p} = \frac{\sqrt{\varepsilon'} \cos \varphi - 1}{\sqrt{\varepsilon'} \cos \varphi + 1}, \quad \frac{R_s}{A_s} = \frac{\cos \varphi - \sqrt{\varepsilon'}}{\cos \varphi + \sqrt{\varepsilon'}}. \quad (2.5)$$

В этих формулах можно, конечно, везде заменить $\sqrt{\varepsilon'}$ на $\frac{cZ}{4\pi}$.

Ценность граничных условий (2.4) состоит, с точки зрения темы настоящей статьи, главным образом в том, что эти условия по существу сохраняют смысл и в случае аномального характера скин-эффекта. Последний имеет место, если длину свободного пробега носителей тока (электронов) нельзя считать сколь угодно малой по сравнению с глубиной скин-слоя δ . Поэтому в условиях аномального скин-эффекта*) ток \mathbf{j} и поляризация \mathbf{P} в той же точке (т. е. полный ток $\mathbf{j}_t = \mathbf{j} + i\omega \mathbf{P}$) определяются не только полем \mathbf{E} в той же точке, но и полем в окрестностях этой точки и, таким образом, уже нельзя пользоваться соотношениями

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}, \quad \mathbf{P} = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} \mathbf{E} \quad \text{и} \quad \mathbf{j}_t = \frac{i\omega}{4\pi} (\varepsilon' - 1) \mathbf{E},$$

а также уравнениями феноменологической электродинамики, в которые введена величина ε' . Другими словами, поле в глубь металла убывает уже не по экспоненциальному закону (1.2), а более сложным образом (см. § 4). При этом, однако, убывание поля остаётся очень быстрым, поскольку экранирующий ток в металлах и в области аномального скин-эффекта попрежнему (как и в случае, когда $\mathbf{j}_t = \frac{i\omega}{4\pi} (\varepsilon' - 1) \mathbf{E}$) относительно весьма велик. Поэтому из физических соображений довольно очевидно, что в области аномального скин-эффекта характер отражения волн от металлической поверхности в смысле зависимости от угла падения φ и числа параметров, которые нужно задать для нахождения интенсивности и поляризации отражённой волны, остаётся таким же, как в случае нормального скин-эффекта. Иначе говоря, представляется довольно естественным, что в области аномального скин-эффекта в металлах справедливы граничные условия (2.4) и импеданс $Z(\omega)$ является универсальным (т. е. не зависит от φ). При этом, однако, уже нельзя выразить $Z(\omega)$ через $\varepsilon'(\omega)$ (т. е. $Z \neq \frac{4\pi}{c\sqrt{\varepsilon'}}$) и импеданс $Z(\omega)$ может рассматриваться в качестве заменяющей $\varepsilon'(\omega)$ ком-

*) Подробнее об аномальном скин-эффекте и условиях, в которых он имеет место, речь будет идти в §§ 3 и 4.

плексной величины, полностью характеризующей отражение волн от металлической поверхности. Для установления более тесного соответствия с областью нормального скин-эффекта удобно, тем не менее, ввести эффективную комплексную диэлектрическую постоянную $\epsilon'_{\text{эфф}}$ которая, по определению, равна

$$\left. \begin{aligned} \epsilon'_{\text{эфф}} &= \epsilon_{\text{эфф}} - i \frac{4\pi\sigma_{\text{эфф}}}{\omega} = (n_{\text{эфф}} - ix_{\text{эфф}})^2 = \frac{16\pi^2}{c^2 Z^2}, \\ Z(\omega) &= \frac{4\pi}{c \sqrt{\epsilon'_{\text{эфф}}(\omega)}}. \end{aligned} \right\} (2.6)$$

В случае нормального скин-эффекта $\epsilon'_{\text{эфф}} = \epsilon'$. Вообще же $\epsilon'_{\text{эфф}}$ совпадает с комплексной диэлектрической постоянной среды, в которой скин-эффект является нормальным и которая при замене ею металла оказывала бы на поле вне металла такое же действие, как и этот металл.

Для доказательства⁵ сделанного предположения напомним, что в случае возможности использовать величину ϵ' (т. е. в области нормального скин-эффекта) на границе раздела E_z (в металле) $= \frac{1}{\epsilon'} E_z$ (в вакууме) $\sim \frac{E_{x,y}}{\sqrt{\epsilon'}}$ (так как в вакууме на поверхности раздела $E_{x,y} \sim \frac{E_z}{\sqrt{\epsilon'}}$, причём на множители типа $\sin\varphi$ для простоты внимания не обращаем; см.⁴ § 19). Далее, в металле у поверхности раздела

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} \ll i \frac{\omega}{c} E_z \sim i \frac{\omega}{c} \frac{E_{x,y}}{\sqrt{\epsilon'}}, \quad \frac{\partial E_{x,y}}{\partial x} \ll i \frac{\omega}{c} E_{x,y}$$

и

$$\frac{\partial E_{x,y}}{\partial z} \sim i \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon'} E_{x,y}, \quad \text{т. е.} \quad \left| \frac{\partial E_z}{\partial x} \right| \sim \frac{1}{|\epsilon'|} \left| \frac{\partial E_{x,y}}{\partial z} \right|.$$

Таким образом, в металле

$$\left. \begin{aligned} |E_z| \ll |E_{x,y}|, \quad \left| \frac{\partial E_z}{\partial x} \right| \ll \left| \frac{\partial E_{x,y}}{\partial z} \right|, \quad \left| \frac{\partial E_z}{\partial y} \right| \ll \left| \frac{\partial E_{x,y}}{\partial z} \right|, \\ \left| \frac{\partial E_{x,y}}{\partial x} \right| \ll \left| \frac{\partial E_{x,y}}{\partial z} \right|, \quad \left| \frac{\partial E_{x,y}}{\partial y} \right| \ll \left| \frac{\partial E_{x,y}}{\partial z} \right|. \end{aligned} \right\} (2.7)$$

Поэтому уравнение $\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{i\omega}{c} \mathbf{H}$ в металле принимает вид:

$$i \frac{\omega}{c} H_x \approx \frac{\partial E_y}{\partial z}, \quad i \frac{\omega}{c} H_y \approx -\frac{\partial E_x}{\partial z}. \quad (2.8)$$

Отсюда, учитывая, что в области нормального скин-эффекта, в металле $E_{x,y} \approx E_{x,y}^{(0)} e^{-i \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon'} z}$ (см. § 1) и

$$\frac{\partial E_{x,y}}{\partial z} \approx -i \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon'} E_{x,y},$$

получаем граничные условия (2.4).

В силу сказанного ранее в хорошем проводнике и в случае невозможности использовать величину ε' можно считать выполненными условия (2.7) и поэтому полагать, что независимо от характера внешнего поля в металле в рассматриваемом приближении распространяется плоская волна $E_{x,y}(z)$; уравнения (2.8) при этом, очевидно, также имеют место. На границе в силу предполагаемой линейности и однородности задачи, а также равноправности направлений x и y можно положить $\left[\frac{\partial E_{x,y}}{\partial z} \right]_0 = a(\omega) [E_{x,y}]_0$, где $a(\omega)$ не зависит от поля. Отсюда и из (2.8) получаем граничные условия:

$$Z(\omega) \equiv \frac{4\pi}{c \sqrt{\varepsilon'_{\text{эф}}}} = \frac{4\pi}{c} \left[\frac{E_x}{H_y} \right]_0 = - \frac{4\pi}{c} \left[\frac{E_y}{H_x} \right]_0, \quad (2.9)$$

где

$$Z(\omega) = -i \frac{4\pi\omega}{c^2 a(\omega)}.$$

Вопрос о точности граничных условий (2.9) без дальнейшего анализа не ясен, но нужно думать, что при соблюдении неравенства

$$|\varepsilon'_{\text{эф}}| = \frac{16\pi^2}{c^2 |Z|^2} \gg 1 \quad (2.10)$$

эта точность весьма велика (неравенство (2.10) аналогично (1.10); неравенства, соответствующие (1.11) и (1.12), выписывать не будем).

Заметим, что в случае неуниверсальности импеданца это понятие также может использоваться, но при условии фиксации характера внешнего поля; наконец, вопрос о существовании универсального импеданца, не зависящего от характера внешнего поля, может быть решён на опыте, например путём исследования отражения плоских волн, падающих на границу раздела под различными углами.

Ниже будет предполагаться, как это по всем данным имеет место в интересующей нас части спектра, что условиями (2.9) можно пользоваться при всех углах падения. Отсюда следует, что все результаты, полученные с использованием условий (2.4), остаются в силе и в области аномального скин-эффекта, но с заменой ε' на $\varepsilon'_{\text{эф}}$.

Таким образом, формулы (1.13) — (1.17) и (2.5) остаются справедливыми независимо от характера скин-эффекта. При этом, однако, величину ϵ' нужно заменить на $\epsilon'_{эфф}$, а n и χ на $n_{эфф}$ и $\chi_{эфф}$ (см. (2.6); разумеется, в предельном случае нормального скин-эффекта $\epsilon'_{эфф} = \epsilon'$, $n_{эфф} = n$ и $\chi_{эфф} = \chi$). Следовательно, измерения поляризации и интенсивности отражённого света, как и в классической металлооптике, дают возможность определить две характеризующие металл функции $n_{эфф}(\omega)$ и $\chi_{эфф}(\omega)$, которые, однако, нельзя в общем случае отождествлять с показателями преломления и поглощения $n(\omega)$ и $\chi(\omega)$.

Прежде чем перейти к установлению связи между $n_{эфф}$ и $\chi_{эфф}$ и микроскопическими параметрами (см. §§ 3 и 4), остановимся на некоторых общих свойствах функций $Z(\omega)$ и $\epsilon'_{эфф}(\omega)$. Можно показать, что величины $Z(\omega)$ и $\epsilon'_{эфф}(\omega)$, рассматриваемые как функции комплексной переменной ω , не имеют ни полюсов, ни нулей в нижней полуплоскости, а также на вещественной оси, за исключением, может быть, только точки $\omega = 0$ (статическое поле)*). Доказательство этого утверждения, вытекающего в первую очередь из требования соблюдения принципа причинности, можно найти в⁶ (см. также⁴ § 83). Отсутствие у функций $Z(\omega)$ и $\epsilon'_{эфф}(\omega)$ полюсов в нижней полуплоскости приводит к тому, что интегралы весьма общего вида, взятые по контуру, расположенному в нижней полуплоскости, обращаются в нуль. Это обстоятельство делает возможным получение определённых интегральных связей между вещественными и мнимыми частями функций $Z(\omega)$ или $\epsilon'_{эфф}(\omega)$, т. е. между R и X или $\epsilon_{эфф}$ и $\sigma_{эфф}$. Так, в отношении $Z(\omega)$ имеем (вывод см.⁵):

$$\left. \begin{aligned} R(\omega_2) - R(\omega_1) &= \\ &= -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \frac{1}{\omega'^2 - \omega_2^2} - \frac{1}{\omega'^2 - \omega_1^2} \right\} X(\omega') \omega' d\omega', \\ X(\omega) &= \frac{2\omega}{\pi} \int_0^{\infty} R(\omega') \frac{d\omega'}{\omega'^2 - \omega^2}, \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

где все интегралы берутся в смысле главного значения**).

*) В настоящей статье используется зависимость $e^{i\omega t}$, а не $e^{-i\omega t}$, как это также иногда делают. Переход в комплексную плоскость переменной ω отвечает рассмотрению не только гармонических во времени полей, но и экспоненциально нарастающих или убывающих во времени.

***) Главное значение интеграла

$$\int_a^b \frac{f(\omega') d\omega'}{\omega' - \omega} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \int_a^{\omega - \delta} \frac{f(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' + \int_{\omega + \delta}^b \frac{f(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' \right\}.$$

Формулы (2.11) позволяют найти $R(\omega)$ по $X(\omega)$ и наоборот, а главное, производить различные оценки. Для последней цели особенно пригодно второе из выражений (2.11), так как величина $R(\omega)$ легче измеряется и к тому же всегда положительна. Последнее ясно из того, что R прямо связано с выделяющимся в металле теплом

$$Q = \left(\frac{c}{4\pi}\right)^2 \cdot \frac{|H_0|^2 R}{2}, \quad (2.12)$$

где Q — среднее количество тепла, выделяющееся в единицу времени в расчёте на единицу поверхности (предполагается, что волна пройти через металлический слой не может), и H_0 — амплитуда высокочастотного поля на поверхности, т. е. $[H]_0 = H_0 e^{i\omega t}$.

Для вещественной и мнимой частей $\varepsilon'_{\text{эфф}}$ аналогично имеем:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{\text{эфф}}(\omega) &= 1 + 8 \int_0^{\infty} \frac{\sigma_{\text{эфф}}(\omega') d\omega'}{\omega'^2 - \omega^2}, \\ \sigma_{\text{эфф}}(\omega) &= -\frac{1}{2\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{\omega'^2 \{\varepsilon_{\text{эфф}}(\omega') - 1\} d\omega'}{\omega'^2 - \omega^2} = \\ &= -\frac{\omega^2}{2\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{\varepsilon_{\text{эфф}}(\omega') - 1}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega' + \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{\infty} \{1 - \varepsilon_{\text{эфф}}(\omega')\} d\omega', \end{aligned} \right\} (2.13)$$

где для простоты предполагается, что металл не находится в сверхпроводящем состоянии (подробнее см. ⁵).

Для очень высоких частот (в рентгеновской части спектра)

$$\varepsilon'_{\text{эфф}}(\omega) = \varepsilon'(\omega) = \varepsilon(\omega) = 1 - \frac{4\pi e^2 N_n}{m\omega^2} \quad (2.14)$$

(при $\omega \rightarrow \infty$),

так как электроны ведут себя как свободные, а в этом случае как раз имеет место формула (2.14) (см., например, ⁴ § 57). При этом N_n — полная концентрация всех электронов в теле (т. е. сумма концентрации электронов проводимости и атомарных электронов). С другой стороны, первое выражение (2.13) при очень высоких частотах ω имеет вид:

$$\varepsilon_{\text{эфф}}(\omega) = 1 - \frac{8}{\omega^2} \int_0^{\infty} \sigma_{\text{эфф}}(\omega') d\omega',$$

откуда при сравнении с (2.14) получаем *):

$$\frac{2m}{\pi e^2} \int_0^{\infty} \sigma_{\text{эфф}}(\omega') d\omega' = N_n. \quad (2.15)$$

Соотношение (2.15) — это так называемое правило сумм. Как мы увидим ниже, в оптической части спектра в большинстве случаев имеется область, где с хорошей точностью

$$\varepsilon'_{\text{эфф}}(\omega) \cong \varepsilon(\omega) \cong -\frac{4\pi e^2 N}{m\omega^2}, \quad (2.16)$$

причём членами порядка единицы пренебрегается и N , по определению, есть концентрация электронов проводимости. В подобных условиях, аналогично предыдущему, получаем:

$$\frac{2m}{\pi e^2} \int_0^{\omega_0} \sigma_{\text{эфф}}(\omega') d\omega' \approx N, \quad (2.17)$$

где ω_0 — частота, лежащая в области, в которой справедливо соотношение (2.16). Неточность, связанная с известной неопределённостью частоты ω_0 , не имеет значения в связи с приближённым характером соотношений (2.16) и (2.17). В тех случаях, когда для всех частот $\varepsilon'_{\text{эфф}}(\omega) = \varepsilon'(\omega)$ в приведённых формулах нужно, конечно, под $\varepsilon_{\text{эфф}}$ и $\sigma_{\text{эфф}}$ понимать ε и σ .

§ 3. МИКРОТЕОРИЯ В СЛУЧАЕ НОРМАЛЬНОГО СКИН-ЭФФЕКТА

Изучение света, отражённого от рассматриваемой металлической поверхности, позволяет, как ясно из сказанного, определить две функции $n_{\text{эфф}}(\omega)$ и $\chi_{\text{эфф}}(\omega)$, которые зависят также от температуры металла **). Установление связи между $n_{\text{эфф}}$ и $\chi_{\text{эфф}}$ и микроскопическими характеристиками металла является уже задачей электронной теории металлов. При этом для того, чтобы сколько-нибудь значительно продвинуться вперёд, приходится пользоваться

*) Возможность записать общее выражение (2.13) для $\varepsilon_{\text{эфф}}$ при высоких частотах в виде $\varepsilon_{\text{эфф}}(\omega) = 1 - \frac{8}{\omega^2} \int_0^{\infty} \sigma_{\text{эфф}}(\omega') d\omega'$ также вытекает из сравнения с выражением (2.14), которое следует из теории и подтверждается экспериментальными данными.

***) Функции $n_{\text{эфф}}$ и $\chi_{\text{эфф}}$, вообще говоря, зависят и от способа обработки поверхности. Этого момента мы, однако, здесь касаться не будем, предполагая, что речь идёт о некоторой «идеальной поверхности». К такой поверхности приближается зеркало, оптические свойства которого уже практически не изменяются при дальнейшем улучшении поверхности (полировке, очистке и т. д.; см. также § 5).

известными модельными представлениями в отличие от того феноменологического подхода, который был возможен в §§ 1 и 2. В соответствии с этим ниже будет использоваться обычная в теории металлов одноэлектронная или газовая модель^{7,8}, в которой электроны считаются движущимися в периодическом поле решётки независимо друг от друга. Точнее, своеобразное «взаимодействие», связанное с принципом Паули, обязательно учитывается, а также может быть учтено самосогласованное кулоновское взаимодействие между электронами, но более полное и последовательное рассмотрение междуэлектронного взаимодействия не производится. Успех подобной газовой модели*), несомненно, связан с действием принципа Паули, в силу которого в вырожденном электронном газе основная часть электронов совсем не может отдавать энергию, а получать энергию может только в том случае, когда эта энергия достаточно велика**). В результате междуэлектронное взаимодействие (например, при сближении двух каких-либо электронов, т. е. при соударении) в значительной мере «подавлено», так что менять своё состояние могут только электроны, лежащие в зоне фермиевского размытия. Соответствующие столкновения в силу высокой степени вырождения электронов в металлах играют лишь весьма небольшую роль и могут рассматриваться как возмущение, которым обычно можно пренебречь (подробнее см.⁹).

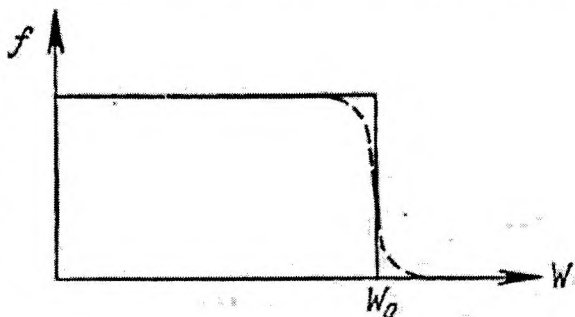


Рис. 5.

В газовой модели состояние электронов описывается функцией распределения, зависящей от импульса p , координат r и времени t

$$f(p, r, t) = f_0(p) + f_1(p, r, t), \quad (3.1)$$

где f_0 — равновесная функция распределения, имеющая место при отсутствии поля, и f_1 — добавка, отражающая влияние поля; эта добавка во всех случаях, встречающихся в металлооптике, может считаться очень малой, так что условие $|f_1| \ll f_0$ хорошо выполнено. В (3.1) и ниже не учитываются спиновые переменные и не

*) Металлы, находящиеся в сверхпроводящем состоянии, не рассматриваются.

***) Сказанное сразу же ясно из рис. 5, на котором представлена фермиевская функция распределения (сплошная линия отвечает температуре $T = 0$; пунктирная линия соответствует температуре $T \neq 0$, причём зона размытия, где $f \neq 1$ и $f \neq 0$, порядка kT). Электрон с некоторой энергией $W < W_0$ (W_0 — энергия на границе Ферми) при $T = 0$ может получить только энергию $\Delta W \geq W_0 - W$. Отдать энергию или получить энергию $\Delta W < W_0 - W$ электрон не может.

делается различия между импульсом и квазиимпульсом, так как учёт этих моментов несущественен для дальнейшего.

Равновесная функция f_0 в однородном металле, имеющем некоторую температуру T , представляет собой известную фермиевскую

функцию $f_0(\mathbf{p}) = f_0(W(\mathbf{p})) = \left[e^{\frac{W-W_0}{kT}} + 1 \right]^{-1}$. Что же касается функции f_1 , то в интересующем нас линейном приближении она определяется кинетическим уравнением

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla_r f_1 + e\mathbf{E} \nabla_p f_0 + \frac{f_1}{\tau} = 0, \quad (3.2)$$

где \mathbf{E} — напряжённость электрического поля (магнитное поле \mathbf{H} предполагается отсутствующим), e — заряд электрона, $\mathbf{v} = \nabla_p W(\mathbf{p})$ — скорость электрона, $\tau = \frac{l}{v}$ и $l(\mathbf{v})$ — время и длина свободного пробега и приняты обычные обозначения:

$$\nabla_r = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}, \quad \nabla_p = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial p_x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial p_y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial p_z}.$$

Введение длины свободного пробега, т. е. учёт соударений электронов с колебаниями решётки путём введения члена $\frac{f_1}{\tau}$ в (3.2), возможно не всегда. Однако при высоких (в частности, комнатных) температурах, а также при низкой температуре (в области остаточного сопротивления) принятое приближение, вообще говоря, оправдано; это приближение может использоваться в качестве экстраполяционного и при средних температурах, в силу чего ниже оно применяется без ограничений. Междоэлектронные столкновения в (3.2) не учтены, что в пределах интересующей нас точности вполне оправдано как в области низких частот (статический случай, радиочастоты), так и в инфракрасной части спектра⁹, во всяком случае, если применимо кинетическое уравнение типа (3.2)*).

Этот последний момент, т. е. вопрос об области применимости самого кинетического уравнения типа (3.2), нуждается в особом обсуждении. Дело в том, что уравнение типа (3.2), где действие электрического поля учитывается членом $e\mathbf{E} \nabla_p f_0$, пригодно лишь в квазиклассическом приближении, когда энергия электрона изменяется постепенно. При высоких же частотах процесс взаимодействия электрона с полем носит квантовый характер и уравне-

*) В работе¹⁰ было высказано противоположное мнение, а именно утверждается, что учёт междоэлектронного взаимодействия (конкретно в¹⁰ речь идёт об «электронной вязкости») существенен при вычислении поглощательной способности металлов. Однако, как показано в⁹, метод и результаты работы¹⁰ неправильны.

ние (3.2), вообще говоря, неприменимо. Условие заведомой применимости уравнения (3.2) можно записать в виде

$$\hbar\omega \ll kT, \quad (3.2a)$$

где ω — частота электромагнитного поля.

При $T \sim 300^\circ$ неравенство (3.2a) означает, что $\omega \ll \frac{kT}{\hbar} \sim 4 \cdot 10^{13}$ или $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega} \gg 4 \cdot 10^{-3} \text{ см} = 40 \text{ мк}$. Фактически область применимости уравнения типа (3.2), повидимому, несколько шире. На этом вопросе мы ещё остановимся в § 4, в), а в остальной части этого параграфа и § 4 будем целиком базироваться на кинетическом уравнении (3.2), не делая, как правило, никаких дальнейших оговорок.

В задаче об отражении света от металлической поверхности все величины в металле можно считать пропорциональными $e^{i\omega t}$ и зависящими только от координаты z (см. § 2); кроме того, для простоты выберем за ось x направление поля E в металле; при сделанном предположении об изотропности металла ток при этом также направлен по оси x .

Тогда уравнение (3.2) принимает вид ($E \equiv E_x$):

$$\frac{\partial f_1(z)}{\partial z} + \frac{1 + i\omega\tau}{\tau v_z} f_1(z) = - \frac{eE(z)}{v_z} \frac{\partial f_0}{\partial p_x}. \quad (3.3)$$

Для нахождения f_1 и поля $E(z)$ это уравнение нужно решать совместно с уравнениями поля

$$\left. \begin{aligned} \text{rot } \mathbf{H} &= \frac{4\pi}{c} \overline{\rho \mathbf{v}} + \frac{i\omega}{c} \mathbf{E}, & \text{rot } \mathbf{E} &= - \frac{i\omega}{c} \mathbf{H}, \\ \mathbf{j}_t \equiv \overline{\rho \mathbf{v}} &= \mathbf{j} + i\omega \mathbf{P} = \frac{2e}{(2\pi\hbar)^3} \int \mathbf{v} f_1 d\mathbf{p}, \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

где \mathbf{j} — плотность тока проводимости, \mathbf{P} — поляризация и множитель 2 связан с необходимостью учесть две возможные ориентации спина электрона.

Исключая из (3.4) поле \mathbf{H} , имеем:

$$\text{rot rot } \mathbf{E} = - \Delta \mathbf{E} + \text{grad div } \mathbf{E} = -i \frac{4\pi\omega}{c^2} \mathbf{j}_t + \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E}$$

или в рассматриваемом случае

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 E}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2} E &= i \frac{4\pi\omega}{c^2} j_{t, x}, \\ j_{t, x} &= \frac{2e}{(2\pi\hbar)^3} \int v_x f_1 d\mathbf{p}. \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

Таким образом, задача сводится к совместному решению уравнений (3.3) и (3.5).

Приближение, отвечающее теории классического или нормального скин-эффекта, связано просто с пренебрежением в уравнении (3.3) первым членом (членом $\frac{\partial f_1}{\partial z}$). В этом случае сразу же получаем*):

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= -\frac{eE\tau}{1+i\omega\tau} \frac{\partial f_0}{\partial p_x}, \\ j_{t,x} &= \left\{ -\frac{2e^2}{(2\pi\hbar)^3} \int \frac{\tau(\mathbf{p}) v_x}{1+i\omega\tau(\mathbf{p})} \frac{\partial f_0(W(\mathbf{p}))}{\partial p_x} d\mathbf{p} \right\} E_x = \\ &= \left\{ \sigma + \frac{i\omega(\epsilon-1)}{4\pi} \right\} E_x = \frac{i\omega}{4\pi} (\epsilon' - 1) E_x, \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

где $v_x = \frac{\partial W(\mathbf{p})}{\partial p_x}$ и переход к двум последним выражениям для $j_{t,x}$ представляет собой, по сути дела, определение величин σ , ϵ и ϵ' .

Подставляя (3.6) в (3.5), получаем:

$$\frac{d^2 E}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon' E = 0, \quad (3.7)$$

откуда, как этого и следовало ожидать при введении величин σ , ϵ и ϵ' , получается выражение (1.2)

$$E = [E]_0 e^{-i \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon'} z},$$

где $[E]_0$ — поле на поверхности (т. е. при $z=0$).

Согласно (1.2) и (3.6)

$$\frac{\partial f_1}{\partial z} = -i \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon'} f_1 = -\frac{\omega}{c} (x + in) f_1 \quad (3.8)$$

и легко установить условия осуществления нормального скин-эффекта, т. е. возможности пренебречь членом $\frac{\partial f_1}{\partial z}$ в (3.3). Действительно, в результате сравнения вещественных и мнимых частей

*) Для того, чтобы компоненты тока $j_{t,y}$ и $j_{t,z}$ тождественно равнялись нулю при $\mathbf{E} = (E, 0, 0)$, нужно, разумеется, чтобы функция $f_0(W(\mathbf{p}))$ или, точнее, энергия $W(\mathbf{p})$ обладала соответствующей симметрией. Предположение о том, что энергия W обладает необходимой симметрией, уже содержится в сделанном ранее допущении об изотропности металла, когда $\epsilon'_{ik} = \epsilon' \delta_{ik}$.

двух первых членов в (3.3) получаем упомянутые условия в виде

$$l \ll \frac{c}{\omega \kappa} = \delta_n, \quad (3.9)$$

$$\frac{v_0}{\omega} \ll \frac{c}{\omega n} \quad \left(\text{т. е. } v_0 \ll \frac{c}{n} \right), \quad (3.10)$$

где произведена также замена v_z (см. второй член в (3.3)) на v_0 и τ на $\tau_0 = \frac{l}{v_0}$ *). Условия (3.9) и (3.10) обеспечивают возможность применения теории нормального скин-эффекта для вычисления как вещественной, так и мнимой частей импеданца $Z = R + iX$. Вместо условий (3.9) и (3.10) иногда пишут одно неравенство, получающееся при сравнении модулей двух первых членов в (3.3):

$$l \ll \frac{c \sqrt{1 + \omega^2 \tau_0^2}}{\omega \sqrt{n^2 + \kappa^2}}. \quad (3.11)$$

Это условие необходимо, но недостаточно для того, чтобы обе величины R и X можно было вычислять в приближении (3.6).

Из (3.6) и всего сказанного раньше следует, что скин-эффект является нормальным, если ток и поляризация в данной точке определяются полем в той же точке. С другой стороны, из физических соображений ясно, что ток в некоторой точке A определяется полем в области с размерами порядка длины свободного пробега l вокруг этой точки A . Поэтому ток в точке A зависит от поля только в той же точке A , лишь если само это поле мало изменяется на расстоянии $\sim l$. Но поле существенно затухает на глубине скин-слоя δ_n , откуда и получается условие (3.9), имеющее простой физический смысл. Поляризация \mathbf{P} в свою очередь определяется смещением электронов под действием электрического поля. При этом за один период $\theta = \frac{2\pi}{\omega}$ электрон проходит путь $v_0 \theta = \frac{2\pi v_0}{\omega}$, на котором поле постоянно, только если этот путь меньше длины волны в металле $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega n}$. Отсюда и получается условие (3.10). Таким образом, выполнение обоих условий (3.9) и (3.10) обеспечивает возможность пользоваться соотно-

*) В (3.9) и (3.10) и ниже v_0 , τ_0 и $l \equiv l_0$ — скорость, время свободного пробега и длина свободного пробега на границе Ферми; как известно и, в частности, показано ниже, только эти величины входят в окончательные выражения для электропроводности и, таким образом, сделанная замена вполне законна. Что касается замены v_z на v_0 , то она может быть оправдана только в результате более детального анализа; в области нормального скин-эффекта, когда выполнены условия (3.9) и (3.10), такая замена по порядку величины правильна.

шением (3.6), связывающим ток и поляризацию в некоторой точке лишь с полем в той же самой точке.

Для получения явных выражений для σ и ϵ нужно конкретизировать вид функции $W(\mathbf{p})$, т. е. зависимость энергии электронов от их импульса (квазиимпульса). Фермиевская поверхность $W(\mathbf{p}) = W_0$, вообще говоря, является весьма сложной и даже многосвязной; к тому же найти эту поверхность из теоретических расчётов сколько-нибудь надёжно нельзя. В результате приходится обычно выбирать определённый вид фермиевской поверхности (например, считать, что она является эллипсоидом вращения и т. п.) и определять затем характерные параметры (отношение полуосей эллипсоида и т. п.) из сравнения теории с опытом. Однако для благородных и щелочных металлов обычно в хорошем приближении можно считать фермиевскую поверхность сферой, а скорость v_0 пропорциональной импульсу p_0 :

$$W(\mathbf{p}) = W_0 = \frac{p_0^2}{2m_{\text{эфф}}} = \frac{m_{\text{эфф}}v_0^2}{2}, \quad (3.12)$$

где $m_{\text{эфф}}$ — эффективная масса и $v_0 = \left(\frac{\partial W}{\partial p}\right)_0 = \frac{p_0}{m_{\text{эфф}}}$ — скорость на поверхности Ферми.

Для многовалентных металлов поверхность Ферми заведомо сложнее (3.12), но для поликристаллических образцов, когда вся картина усредняется, можно думать, что использование выражения (3.12) в некоторых случаях допустимо. При этом, конечно, значения $m_{\text{эфф}}$ и v_0 имеют смысл некоторых усреднённых величин. Так или иначе всё дальнейшее изложение будет в основном опираться на соотношение (3.12). Обобщение всех результатов на случай более сложных поверхностей Ферми является одной из главных задач, стоящих в этой области перед теорией*); первые шаги в этом направлении уже сделаны¹¹⁻¹³.

В случае (3.12) вблизи фермиевской поверхности плотность состояний

$$\frac{2dp}{(2\pi\hbar)^3} = \frac{2p_0^2 dp d\Omega}{(2\pi\hbar)^3} = \frac{2^{3/2}m_{\text{эфф}}^{3/2}W_0^{1/2} dW d\Omega}{(2\pi\hbar)^3},$$

или, после интегрирования по телесному углу $d\Omega$, плотность состояний

$$2\left(\frac{dY}{dW}\right)_0 dW = \frac{2^{7/2}\pi m_{\text{эфф}}^{3/2}W_0^{1/2}}{(2\pi\hbar)^3} dW.$$

*) Имеется в виду случай аномального скин-эффекта, так как в области нормального скин-эффекта рассмотрение более сложных фермиевских поверхностей не представляет в принципе особого труда и уже неоднократно производилось^{7, 8, 13а}.

Далее, в общем случае $\frac{\partial f_0}{\partial p_x} = \frac{\partial f_0}{\partial W} \frac{\partial W}{\partial p_x} = v_x \frac{\partial f_0}{\partial W}$, причём для почти вырожденного газа функция $\frac{\partial f_0}{\partial W}$ носит дельтаобразный характер $\left(\frac{\partial f_0}{\partial W} \neq 0 \right.$ лишь вблизи точки $W = W_0$ на рис. 5 и $\left. \int_0^\infty \frac{\partial f_0}{\partial W} dW = f_0(\infty) - f_0(0) = -1 \right)$.

Учитывая сказанное, сразу же получаем из (3.6)

$$j_t = -e^2 \int \frac{\tau(v) v_x^2}{1 + i\omega\tau(v)} \frac{\partial f_0}{\partial W} \cdot 2 \left(\frac{dY}{dW} \right)_0 dW \frac{d\Omega}{4\pi} =$$

$$= \frac{2e^2 v_0^2 \tau_0 \left(\frac{dY}{dW_0} \right)_0}{3(1 + i\omega\tau_0)} E, \quad (3.13)$$

где у j_t и E опущен индекс x и функция $\tau(\mathbf{p})$ считается зависящей только от $v = \frac{p}{m_{\text{эфф}}}$ (в случае (3.12) такое предположение вполне естественно).

Согласно (3.6) и (3.13).

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon = n^2 - \chi^2 &= 1 - \frac{4\pi e^2 \cdot \frac{2}{3} v_0^2 \left(\frac{dY}{dW} \right)_0}{\omega^2 + \nu_0^2} = 1 - \frac{4\pi e^2 N}{m(\omega^2 + \nu_0^2)}, \\ \sigma = \frac{n\chi\omega}{2\pi} &= \frac{e^2 \cdot \frac{2}{3} v_0^2 \left(\frac{dY}{dW} \right)_0 \cdot \nu_0}{\omega^2 + \nu_0^2} = \frac{e^2 N \nu_0}{m(\omega^2 + \nu_0^2)} = \frac{1 - \varepsilon}{4\pi} \nu_0, \\ \sigma(\omega = 0) &\equiv \sigma(0) \equiv \sigma_0 = \frac{e^2 N}{m\nu_0} = \frac{e^2 N l}{m v_0}, \quad \nu_0 = \frac{1}{\tau_0} = \frac{v_0}{l}, \end{aligned} \right\} (3.14)$$

где ν_0 — число соударений.

Выражения (3.14) имеют точно такой же вид, как для свободного классического электронного газа с концентрацией электронов, равной N . Именно в этом смысле электроны проводимости в металле могут считаться «свободными», причём их концентрация (эффективная концентрация свободных электронов или электронов проводимости в металле) по определению равна

$$N = \frac{2}{3} m v_0^2 \left(\frac{dY}{dW} \right)_0 = \frac{8\pi}{3} \frac{m}{m_{\text{эфф}}} \left(\frac{m_{\text{эфф}} v_0}{2\pi \hbar} \right)^3, \quad (3.15)$$

где, как и в (3.14), $m = 9,1 \cdot 10^{-28}$ г — масса свободного электрона.

Иногда электроны в металле считают совершенно свободными, т. е. полагают

$$m_{\text{эфф}} = m \text{ и } N = N_{\text{св}} = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{mv_0}{2\pi\hbar} \right)^3,$$

но такое предположение совершенно не обосновано. Нерациональным представляется также, как это уже отмечалось в ¹⁴, определение концентрации электронов проводимости как величины

$$N' = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{m_{\text{эфф}}v_0}{2\pi\hbar} \right)^3 = \frac{m_{\text{эфф}}}{m} N,$$

вполне аналогичной $N_{\text{св}}$. В этом случае

$$\epsilon = 1 - \frac{4\pi e^2 N'}{m_{\text{эфф}}(\omega^2 + \nu_0^2)}$$

и N' уже не является эффективной концентрацией свободных электронов. Главное же, в выражения (3.14) входят только две характеризующие металл величины N и ν_0 и из этих формул всё равно можно найти лишь отношение

$$\frac{N'}{m_{\text{эфф}}} = \frac{N}{m}.$$

Введённая в (3.14) величина N совпадает с концентрацией N , фигурирующей в «правиле сумм» (2.17).

В отношении формул (3.14) нужно также заметить, что они определяют не полные значения ϵ_t и σ_t , а лишь вклад в эти величины, обусловленный электронами проводимости. Однако в области частот, о которой здесь идёт речь, и где квантовое поглощение (внутренний фотоэффект) отсутствует,

$$\sigma_t = \sigma \text{ и } \epsilon_t = \epsilon - 1 + \epsilon_0 = \epsilon_0 - \frac{4\pi e^2 N}{m(\omega^2 + \nu_0^2)},$$

где вдали от границы внутреннего фотоэффекта $\epsilon_0 \sim 1 \div 10$ и, вообще говоря, значительно меньше, чем $\frac{4\pi e^2 N}{m(\omega^2 + \nu_0^2)}$. Ниже мы не будем различать σ и σ_t и, опуская индекс t , запишем ϵ в виде

$$\epsilon = \epsilon_0 - \frac{4\pi e^2 N}{m(\omega^2 + \nu_0^2)}. \quad (3.16)$$

Концентрация N заранее неизвестна; попытки определить N из тех соображений, что на атом приходится один, два и т. п. число электронов проводимости, не обоснованы и не могут иметь сколь-нибудь определённого количественного значения. Поэтому вели-

чина N должна определяться из сравнения формул (3.14) и им подобных (см. § 4) с опытом. При этом особенно ясная картина имеет место в области частот, удовлетворяющих неравенствам

$$\omega_0^2 \gg \omega^2 \gg \nu_0^2, \quad (3.17)$$

где ω_0 — частота, отвечающая границе квантового поглощения (внутреннего фотоэффекта). Дело в том, что

$$\varepsilon_0 \sim \frac{4\pi e^2 N}{m\omega_0^2}$$

и при условии (3.17)

$$\varepsilon \approx -\frac{4\pi e^2 N}{m\omega^2} = -3,18 \cdot 10^9 \cdot \frac{N}{\omega^2}, \quad (3.18)$$

т. е. зависит только от частоты ω и подлежащей определению величины N . В (3.18) совсем не входит длина свободного пробега, и поэтому можно ожидать, что эта формула сохранит силу и в случае аномального характера скин-эффекта. В § 4 будет показано, что такое предположение отвечает действительности. Более того, формула (3.18), имеющая ясный классический смысл, по существу не зависит от использованных модельных представлений. В самом деле, классическое уравнение движения для совокупности N электронов при отсутствии трения имеет вид

$$mNr'' = eNE_0 e^{i\omega t},$$

где взаимодействие между электронами выпадает в силу закона сохранения импульса (или, другими словами, вследствие равенства нулю всех внутренних сил). Выписанное уравнение сразу же даёт

$$P = eNr = -\frac{e^2 N}{m\omega^2} E_0 e^{i\omega t},$$

откуда

$$\frac{4\pi E}{P} \approx \varepsilon - 1 \approx \varepsilon = -\frac{4\pi e^2 N}{m\omega^2}.$$

Ввиду классического характера этого результата получение его квантовым методом¹⁵, по нашему мнению, вносит мало нового. Центр тяжести всей проблемы состоит в другом, а именно в том, в какой мере и в какой области частот условия (3.17) могут выполняться в действительности. Не исключено, что для некоторых металлов не существует или практически недостижима область, где выражение (3.18) является достаточно точным. В этом случае величина N должна определяться по более общим, но в то же время и менее надёжным формулам (см., например, (3.14)).

Для того чтобы оценить точность выражения (3.18), полезно разложить упомянутые более общие формулы в ряд с точностью

до членов порядка $\frac{v_0^2}{\omega^2}$ включительно. В случае (3.14) мы при этом получаем:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon &= n^2 - x^2 \approx -\frac{4\pi e^2 N}{m\omega^2} \left[1 - \left(\frac{e^2 N}{m\omega\sigma_0} \right)^2 \right] = \\
 &= -\frac{4\pi e^2 N}{m\omega^2} \left(1 - \frac{v_0^2}{\omega^2} \right) = -\frac{4}{3} \beta^{-2} p^2 + \frac{4}{3} \beta^{-2} p^4 q^2, \\
 n &\approx \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4\pi e^2 N}{m\omega^2}} \frac{v_0}{\omega} \left(1 - \frac{5}{8} \frac{v_0^2}{\omega^2} \right) = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \beta^{-1} p^2 q - \frac{5}{8\sqrt{3}} \beta^{-1} p^4 q^3, \\
 x &\approx \sqrt{\frac{4\pi e^2 N}{m\omega^2}} \left(1 - \frac{3}{8} \frac{v_0^2}{\omega^2} \right) = \frac{2}{\sqrt{3}} \beta^{-1} p - \frac{\sqrt{3}}{4} \beta^{-1} p^3 q^2, \\
 A &\approx \frac{4n}{n^2 + x^2} \approx v_0 \left(\frac{m}{\pi e^2 N} \right)^{1/2} \left(1 - \frac{1}{8} \frac{v_0^2}{\omega^2} \right) = \\
 &= \sqrt{3} \beta q - \frac{\sqrt{3}}{8} \beta p^2 q^3, \\
 \sin \varphi_0 \operatorname{tg} \varphi_0 &\approx \sqrt{n^2 + x^2} \approx \left(\frac{4\pi e^2 N}{m\omega^2} \right)^{1/2} \left(1 - \frac{1}{4} \frac{v_0^2}{\omega^2} \right) = \\
 &= \frac{2}{\sqrt{3}} \beta^{-1} p - \frac{1}{2\sqrt{3}} \beta^{-1} p^3 q^2, \\
 \operatorname{tg} 2\rho_0 &\approx \frac{x}{n} \approx \frac{2\omega}{v_0} \left(1 + \frac{1}{4} \frac{v_0^2}{\omega^2} \right) = 2p^{-1} q^{-1} + \frac{1}{2} pq,
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

где введены используемые ниже величины

$$\left. \begin{aligned}
 \beta &= \frac{v_0}{c}, \quad q = \frac{c}{v_0 \sigma_0} \left(\frac{e^2 N}{3\pi m} \right)^{1/2} = \frac{2c}{\sqrt{3} l} \left(\frac{m}{4\pi e^2 N} \right)^{1/2}, \\
 p &= \frac{3\pi}{\omega} \frac{v_0}{c} \left(\frac{e^2 N}{3\pi m} \right)^{1/2}, \quad pq = \frac{v_0}{\omega}.
 \end{aligned} \right\} \tag{3.20}$$

Для хороших проводников при комнатной температуре $v_0 \sim 3 \cdot 10^{13}$ (это значение получается, если положить $\sigma_0 = \frac{e^2 N}{m v_0} \approx 3 \cdot 10^{17}$, $N \approx 5 \cdot 10^{22}$ или из соотношения $v_0 = \frac{v_0}{l}$, полагая $v_0 \sim 10^8$ и $l \sim 3 \cdot 10^{-6}$). При гелиевых температурах в области остаточного сопротивления в очень чистых образцах $l \sim 3 \cdot 10^{-3}$ и $v_0 \sim 3 \cdot 10^{10}$.

Однако в ближайшей инфракрасной области, например при $\lambda = 2\mu$ $\omega \sim 10^{15}$ и, таким образом, даже при комнатной температуре $\frac{\nu_0^2}{\omega^2} \sim 10^{-3}$. С другой стороны, при $\omega \sim 10^{15}$ и $N \sim 5 \cdot 10^{22}$ величина $\frac{4\pi e^2 N}{m\omega^2} \sim 10^2$ и условие $|\varepsilon| \gg \varepsilon_0 \sim 1 \div 10$ также выполняется. Поэтому невозможность пренебрежения ν_0^2 по сравнению с ω^2 и ε_0 по сравнению с ε , как это необходимо для применения формулы (3.18), может оказаться существенной, только если граница внутреннего фотоэффекта лежит уже в инфракрасной части спектра. К вопросу о точности формулы (3.18) мы ещё вернёмся в § 4, сейчас же ограничимся замечанием, что понижение температуры (уменьшение ν_0) и переход в область более низких частот благоприятны с точки зрения возможности с достаточной надёжностью применять формулу (3.18). В соответствующей области частот, измеряя на опыте $n_{\text{эфф}}$ и $\kappa_{\text{эфф}}$ или только одну величину $\sin \varphi_0 \operatorname{tg} \varphi_0 \approx \sqrt{n_{\text{эфф}}^2 + \kappa_{\text{эфф}}^2}$, определяем концентрацию электронов проводимости:

$$\begin{aligned} N &= \frac{|\varepsilon| m \omega^2}{4\pi e^2} = \frac{(n_{\text{эфф}}^2 + \kappa_{\text{эфф}}^2) m \omega^2}{4\pi e^2} = \\ &= \frac{\sin^2 \varphi_0 \operatorname{tg}^2 \varphi_0 m \omega^2}{4\pi e^2} = 1,12 \cdot 10^{21} \frac{\sin^2 \varphi_0 \operatorname{tg}^2 \varphi_0}{\lambda^2}, \end{aligned} \quad (3.21)$$

где фигурируют $n_{\text{эфф}}$ и $\kappa_{\text{эфф}}$ вместо n и κ , поскольку формула (3.21) в условиях (3.17) пригодна и в области аномального скин-эффекта; в последнем выражении (3.21) λ — длина волны в микронах. Кроме того, в (3.21) вместо знаков приближённого равенства поставлены знаки равенства, так как, например, при

$$\varepsilon \sim 10^4 \varepsilon_0 \approx n_{\text{эфф}}^2 + \kappa_{\text{эфф}}^2 \approx \sin^2 \varphi_0 \operatorname{tg}^2 \varphi_0 \text{ с точностью } \gg \frac{1}{\varepsilon} \sim 10^{-4}.$$

Нахождение концентрации электронов проводимости N с помощью формулы (3.21) в результате оптических измерений величины $n_{\text{эфф}}^2 + \kappa_{\text{эфф}}^2$ является основной задачей металлооптики с точки зрения получения сведений, имеющих важное принципиальное значение для теории металлов. По сути дела выражения (3.18) и (3.21) могут рассматриваться даже как определения величины N , которая входит также в целый ряд других формул, не являющихся, однако, столь независимыми от тех или иных модельных предположений. Отмеченное во введении неудовлетворительное состояние экспериментальной металлооптики станет теперь совершенно ясным после того, как мы отметим, что современные

данные, позволяющие определить величину N по формуле (3.21), практически отсутствуют. Правда, в отношении ряда металлов (Ag, Au, Cu) имеются старые данные, более или менее пригодные для этой цели. Но ни для одного сверхпроводника таких данных по существу нет (подробнее см. § 6), в то время как знание величины N имеет важнейшее значение для теории сверхпроводимости^{16, 5}.

Помимо N в формулы (3.14) входит ещё только число соударений ν_0 , которое может определяться лишь из этих же формул. При этом проверить теорию можно, определяя ν_0 , скажем, из выражения для статической электропроводности $\sigma_0 = \frac{e^2 N}{m \nu_0}$ и затем сравнивая измеренные и вычисленные значения ϵ и σ (или n , κ , A и т. д.; см. (3.14), (3.19)) при различных частотах. Подобное сравнение приводит, особенно при низких температурах, к явному несогласию формул (3.14) с опытом (см.⁸ гл. 4,¹⁷ и ниже § 6). Раньше это расхождение пытались объяснить поверхностными эффектами в том смысле, что поверхностный слой обладает меньшей электропроводностью и т. п. В последнее время выяснилось, что дело здесь просто в необходимости учитывать аномальный характер скин-эффекта и в том, что использовать все формулы (3.14), (3.19) в инфракрасной части спектра, вообще говоря, нельзя. Это сразу же ясно из условий применимости теории нормального скин-эффекта (3.9) и (3.10). Действительно, при комнатной температуре для хороших проводников $l \sim 3 \cdot 10^{-6}$ и в области (3.17) классическая глубина скин-эффекта

$$\delta_n = \frac{c}{\omega \kappa} \approx \frac{c}{\sqrt{\frac{4\pi e^2 N}{m}}}$$

Таким образом, при $N \sim 5 \cdot 10^{22}$ $\delta_n \sim 3 \cdot 10^{-6} \sim l$, т. е. условие (3.9) не выполнено (условие (3.10) выполнено, что отвечает в данном случае возможности пользоваться формулой (3.18)). И только для плохих проводников, когда длина свободного пробега l (и в некоторых случаях N) уменьшается, можно при комнатной температуре считать, что в области (3.17) $l \ll \delta$, и пользоваться теорией нормального скин-эффекта для вычисления всех величин (A , n и т. д.)*. В области же низких температур, где длина пробега l достигает для очень чистых образцов значения $l \sim 10^{-2} \div 3 \cdot 10^{-3}$, об использовании теории нормального скин-эффекта, вообще говоря, не может быть и речи.

*) Нужно иметь в виду, что для вычисления некоторых величин условие $l \ll \delta_n$ не необходимо. Последнее, как уже указывалось, и имеет место при вычислении ϵ (см. (3.18)).

§ 4. МИКРОТЕОРИЯ В СЛУЧАЕ АНОМАЛЬНОГО СКИН-ЭФФЕКТА

а) Основы теории аномального скин-эффекта

В общем случае, когда характер скин-эффекта может быть любым (резко аномальным, слабо аномальным или нормальным) нахождение поверхностного импеданца Z и других величин (например, поля в металле) должно производиться на основе решения уравнений (3.3) и (3.5)*, без пренебрежения членом $\frac{\partial f_1}{\partial z}$ в (3.3). Имея в дальнейшем в виду случай (3.12), т. е., полагая $\mathbf{p} = m_{\text{эфф}} \mathbf{v}$, запишем уравнение (3.3) в виде

$$\frac{\partial f_1}{\partial z} + \frac{1+i\omega\tau}{\tau v_z} f_1 = - \frac{eE(z)}{m_{\text{эфф}} v_z} \frac{\partial f_0}{\partial v_x}. \quad (4.1)$$

Общее решение этого уравнения таково:

$$f_1 = \exp\left[-\frac{(1+i\omega\tau)z}{\tau v_z}\right] \times \\ \times \left\{ F(\mathbf{v}) - \frac{e}{m_{\text{эфф}} v_z} \frac{\partial f_0}{\partial v_x} \int_0^z E(\xi) \exp\left[\frac{1+i\omega\tau}{\tau v_z} \xi\right] d\xi \right\}, \quad (4.2)$$

где $F(\mathbf{v})$ — произвольная функция \mathbf{v} .

Обозначим теперь через $f_1^{(1)}$ и $f_1^{(2)}$ значения f_1 соответственно при $v_z < 0$ и $v_z > 0$ (см. рис. 1; при $v_z > 0$ электроны движутся в глубь металла и при $v_z < 0$ — к его поверхности). Разумеется, $f_1 = f_1^{(1)} + f_1^{(2)}$. При $v_z < 0$ функция $F(\mathbf{v})$ определяется из требования, чтобы при $z \rightarrow \infty$ (в глубине металла) функция f_1 не была бесконечно велика. В результате

$$f_1^{(1)} = \frac{e}{m_{\text{эфф}} v_z} \frac{\partial f_0}{\partial v_x} \exp\left[-\frac{(1+i\omega\tau)\xi}{\tau v_z}\right] \times \\ \times \int_z^\infty E(\xi) \exp\left[\frac{(1+i\omega\tau)\xi}{\tau v_z}\right] d\xi. \quad (4.3)$$

*) В (3.5) предполагается, что $\epsilon_0 = 1$ (в ϵ вносят вклад только электроны проводимости). В более общем случае в (3.5) нужно заменить $\frac{\omega^2}{c^2} E$ на $\frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_0 E$.

При $v_z > 0$ функция $F(\mathbf{v})$, а следовательно, и $f_1^{(2)}$ определяются условиями отражения на поверхности металла (при $z = 0$). Если отражение является зеркальным, то

$$f_1^{(2)}(v_x, v_y, v_z, z = 0) = f_1^{(1)}(v_x, v_y, -v_z, z = 0). \quad (4.4)$$

В случае чисто диффузного отражения электроны после отражения полностью «забывают» об имевшейся у них упорядоченной скорости, т. е.

$$f_1^{(2)}(v_x, v_y, v_z, z = 0) = 0. \quad (4.5)$$

Наконец, если доля электронов ρ отражается зеркально, а остальная часть $(1 - \rho)$ отражается диффузно, то

$$f_0 + f_1^{(2)}(v_x, v_y, v_z, z = 0) = \rho [f_0 + f_1^{(1)}(v_x, v_y, -v_z, z = 0)] + (1 - \rho) f_0. \quad (4.6)$$

Обсуждаемая задача решалась¹⁸⁻²⁰ во всех трёх случаях (4.4) — (4.6), причём величина ρ считалась не зависящей от \mathbf{v} (более общие граничные условия с $\rho = \rho(\mathbf{v})$ ещё не использовались).

Как следует из сравнения теории с опытом, даже лучшие образцы отражают электроны диффузно^{21, 34}. В случае поликристаллических зеркал, которые мы главным образом имели в виду, этот результат довольно естественен и нет оснований полагать, что дальнейшее улучшение обработки поверхности изменит характер отражения. Поэтому, хотя и не исключена возможность существования образцов, отражающих электроны в основном зеркально*), ниже, если не оговорено противное, будем обычно иметь в виду только случай диффузного отражения, когда $\rho = 0$. Условие (4.5) приводит к выражению

$$f_1^{(2)} = - \frac{e}{m_{\text{эфф}} v_z} \frac{\partial f_0}{\partial v_x} \exp \left[- \frac{(1 + i\omega\tau)}{\tau v_z} z \right] \times \times \int_0^z E(\xi) \exp \left[\frac{1 + i\omega\tau}{\tau v_z} \xi \right] d\xi. \quad (4.7)$$

*) Такими (т. е. зеркально-отражающими) должны, казалось бы, быть монокристаллические образцы, обладающие достаточно хорошо обработанной поверхностью и находящиеся при низкой температуре, когда тепловое движение атомов на поверхности невелико. Однако и в подобных «идеальных» условиях отражение, вообще говоря, не будет строго зеркальным в связи с возможностью возникновения дифракции при падении электронов на поверхность кристалла. В этом отношении имеется ряд возможностей, которые недавно выявлены в работе²⁵ и более полно Л. В. Келдышем.

Симметричная часть функции распределения f_0 не вносит вклада в выражение для плотности тока, которая согласно (3.4), (3.5) и (3.12) имеет вид:

$$j_t(z) = 2e \left(\frac{m_{\text{эфф}}}{2\pi\hbar} \right)^3 \int v_x f_1 dv_x dv_y dv_z, \quad (4.8)$$

где у j_t индекс x опущен.

Подставляя (4.3) и (4.7) в (4.8), после ряда преобразований получаем¹⁹:

$$\left. \begin{aligned} j_t(z) &= \frac{e^2 m_{\text{эфф}}^2 v_0^2}{4\pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty K_a \left(\frac{z-\xi}{l} \right) E(\xi) d\xi, \\ K_a(u) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \theta \sec \theta e^{-(1+ia)|u| \sec \theta} d\theta = \\ &= E_{i_1} \{ (1+ia)|u| \} - E_{i_3} \{ (1+ia)|u| \}, \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

где

$$E_{in}(u) = \int_1^\infty \frac{e^{-su}}{s^n} ds \quad (\text{Re } u > 0), \quad a = \omega\tau_0, \quad l = \tau_0 v_0$$

и при интегрировании введены полярные координаты

$$\mathbf{v} = \{v \sin \theta \cos \varphi, v \sin \theta \sin \varphi, v \cos \theta\},$$

а также использована формула

$$-\int_0^\infty g(v) \frac{\partial f_0}{\partial v} dv = g(v_0).$$

В силу (4.9) уравнение (3.5) принимает вид*):

$$\frac{d^2 E}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2} E = i \frac{\omega e^2 m_{\text{эфф}} v_0^2}{\pi \hbar^3} \int_0^\infty K_a \left(\frac{z-\xi}{l} \right) E(\xi) d\xi. \quad (4.10)$$

или, вводя переменные $\zeta = \frac{z}{l}$, $\eta = \frac{\xi}{l}$ и обозначая $E(\zeta l) = \Psi(\zeta)$,

$$\frac{d^2 \Psi(\zeta)}{d\zeta^2} + \frac{\omega^2 l^2}{c^2} \Psi(\zeta) = i\alpha \int_0^\infty K_a(\zeta - \eta) \Psi(\eta) d\eta, \quad (4.11)$$

*). Заметим, что, следуя в этом параграфе статье¹⁹, мы пользуемся иногда несколько другими обозначениями по сравнению с принятыми в¹⁹. В частности, в¹⁹ величина ρ обозначена через p .

где

$$\alpha = \frac{\omega e^2 m_{\text{эфф}}^2 v_0^2 l^3}{\pi c^2 \hbar^3} = \frac{3}{2} \frac{l^2}{\delta_0^2}, \quad (4.12)$$

$$\delta_0 = \frac{c}{\sqrt{2\pi\sigma_0\omega}}, \quad \sigma_0 = \frac{e^2 N l}{m v_0}, \quad N = \frac{8\pi}{3} \frac{m}{m_{\text{эфф}}} \left(\frac{m_{\text{эфф}} v_0}{2\pi \hbar} \right)^3.$$

Величина δ_0 это введённая раньше (см. (1.24)) глубина скин-слоя в случае нормального скин-эффекта на радиочастотах (в (1.24) стоит σ , а не σ_0 , но при условии (1.23) это практически одно и то же).

Интегро-дифференциальное уравнение (4.10) — (4.11) или аналогичное уравнение при $\rho \neq 0$ являются основными в теории аномального скин-эффекта. К сожалению, его решение, особенно в рассматриваемом случае и вообще, когда $\rho \neq 1$, довольно сложно и громоздко, причём окончательные результаты получаются только после численного интегрирования. Поэтому в дальнейшем нам придётся ограничиться приведением результатов и рядом замечаний (детальные расчёты см. 19, 20).

Раньше всего отметим, что для нахождения поверхностного импеданца нет необходимости исследовать общее выражение для поля $E(z) = \Psi(\zeta)$, так как согласно (2.8) и (2.9)

$$Z = \frac{4\pi}{c} \left[\frac{E_x}{H_y} \right]_0 \text{ и в металле } H_y = -\frac{c}{i\omega} \frac{\partial E_x}{\partial z},$$

откуда

$$Z = -i \frac{4\pi\omega}{c^2} \left[\frac{E_x}{\frac{\partial E_x}{\partial z}} \right]_0 = -i \frac{4\pi\omega l}{c^2} \frac{\Psi(0)}{\Psi'(0)}, \quad (4.13)$$

и нужно знать лишь величину $\Psi'(0) = \left[\frac{d\Psi}{d\zeta} \right]_0$, поскольку поле $[E]_0 = \Psi(0)$ задаётся*).

Далее, переход к случаю нормального скин-эффекта (см. § 3) легко провести сразу же в соотношениях (4.9) и (4.10), так как при $l \rightarrow 0$ функция $K_a\left(\frac{z-\xi}{l}\right)$ является очень острой и в силу (3.14) и (3.15).

$$\begin{aligned} j_t(z) &= \frac{e^2 m_{\text{эфф}}^2 v_0^2}{4\pi^2 \hbar^3} E(z) \int_0^\infty K_a\left(\frac{z-\xi}{l}\right) d\xi = \frac{4e^2 m_{\text{эфф}}^2 v_0^2 l}{3(1+i\omega\tau_0)4\pi^2 \hbar^3} E(z) = \\ &= \frac{e^2 N l}{m v_0 (1+i\omega\tau_0)} E(z) = \left(\sigma + i\omega \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} \right) E(z), \end{aligned} \quad (4.14)$$

что находится в согласии с (3.6).

*) При решении уравнения (4.10) — (4.11), помимо задания величины $\Psi(0)$, учитывается также, что $\Psi(\infty) = 0$ (поле в глубь металла не проникает).

Выражение для поля $E(z)$, получающееся в результате решения уравнения (4.10), весьма сложно, и зависимость E от z , разумеется, не является просто экспоненциальной. В качестве иллюстрации укажем, что даже в более простом случае чисто зеркального отражения ($\rho = 1$) имеем:

$$E(z) = \Psi(\zeta) = -\frac{2\Psi'(0)}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos \zeta u \, du}{u^2 - \frac{\omega^2 l^2}{c^2} + i\alpha s(u)},$$

$$s(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} K_\alpha(v) e^{-ivu} \, dv. \quad (4.15)$$

При больших значениях ζ

$$\Psi(\zeta) = C_1 e^{-\beta\zeta} + C_2 \frac{e^{-\zeta}}{\zeta^2}, \quad (4.16)$$

где C_1 и C_2 — постоянные и β — комплексный параметр, зависящий от α .

При произвольном значении параметра α (см. (4.12)) получающиеся выражения для $E(z)$ и Z не только громоздки и непрозрачны, но и могут быть весьма чувствительны к сделанным при их выводе предположениям. Например, в исходном кинетическом уравнении (3.2) так называемый интеграл соударений, отражающий влияние на функцию распределения соударений электронов с решёткой, записан в виде $\frac{f_1}{\tau} \equiv \nu f_1 \equiv \frac{\nu}{l} f_1$. Как уже указывалось в § 3, подобное приближённое выражение для интеграла соударений при низких и высоких температурах в теории электропроводности обычно оправдано. Однако в рассматриваемом случае аномального скин-эффекта это приближение, вообще говоря, не всегда законно вблизи границы металла, где в случае диффузного отражения функция распределения резко изменяется в зависимости от углов в пространстве скоростей⁹. Отмеченное обстоятельство, а также возможное влияние анизотропии длины свободного пробега становятся несущественными в предельном случае резко аномального скин-эффекта, когда

$$\alpha = \frac{3}{2} \frac{l^2}{\delta_0^2} \gg 1. \quad (4.17)$$

Этот случай является также (если не говорить о классическом пределе $l \rightarrow 0$) наиболее простым с точки зрения проведения до конца всех вычислений и в то же время весьма важным на практике, так как он обычно осуществляется во всей области гелиевых температур.

При этом в случае радиочастот, по крайней мере для хороших проводников, выполнено также условие*)

$$\omega\tau_0 \ll 1 \quad (\text{т. е. } \omega \ll \nu_0). \quad (4.18)$$

В предельном случае (4.17) — (4.18), т. е. в радиодиагазоне в условиях ярко выраженного аномального скин-эффекта, при диффузном отражении электронов от границы

$$Z \equiv Z_\infty = R_\infty + iX_\infty = \left(\frac{\sqrt{3}\pi\omega^2 l}{c^4\sigma_0} \right)^{1/3} (1 + \sqrt{3}i). \quad (4.19)$$

Если же отражение является чисто зеркальным, то получается такая же формула, но с дополнительным множителем $8/9$. Таким образом, на радиочастотах характер отражения электронов от границы слабо сказывается на результате, хотя экспериментальные данные позволяют и в этом случае определённо предпочесть формулу (4.19), т. е. указывают на диффузный характер отражения.

Для сравнения приведём здесь также выражение для Z в случае нормального скин-эффекта при условии (4.18), эквивалентном условию (1.23):

$$|\varepsilon| = \left| \frac{4\pi e^2 N}{m(\omega^2 + \nu_0^2)} - 1 \right| \ll \frac{4\pi\sigma}{\omega} = \frac{4\pi e^2 N}{m(\omega^2 + \nu_0^2)} \cdot \frac{\nu_0}{\omega}. \quad (1.23a)$$

В этом случае (см. (1.24))

$$\left. \begin{aligned} Z_n = R_n + iX_n &= \frac{4\pi}{c\sqrt{\varepsilon'}} = \frac{4\pi(n + ix)}{c(n^2 + x^2)} \approx \\ &\approx \frac{2\pi}{cx} (1 + i) \approx \left(\frac{2\pi\omega}{c^2\sigma_0} \right)^{1/3} (1 + i) = \frac{2\pi\omega\delta_0}{c^2} (1 + i), \\ \delta_0 &= \left(\frac{c^2}{2\pi\omega\sigma_0} \right)^{1/2}. \end{aligned} \right\} \quad (4.20)$$

Если выражение (4.19) также записать в виде

$$Z_\infty = \frac{2\pi\omega\delta_\infty}{c^2} (1 + \sqrt{3}i), \quad (4.19a)$$

то

$$\delta_\infty = \left(\frac{\sqrt{3}c^2 l}{8\pi^2\omega\sigma_0} \right)^{1/3} = \left(\frac{\sqrt{3}l}{4\pi\delta_0} \right)^{1/3} \delta_0. \quad (4.21)$$

Для довольно типичных при низких температурах значений $l = 10^{-3}$ см и $\sigma_0 = 10^{20}$ CGSE, при $\omega = 6 \cdot 10^{10}$ ($\lambda = \frac{2\pi c}{\omega} \approx 3$ см),

*) Вопрос о том, с какой точностью в случае аномального скин-эффекта на радиочастотах можно пренебречь величиной $\omega\tau_0$ по сравнению с единицей, подробно проанализирован в статье ²⁴.

$\delta_0 = 5 \cdot 10^{-6}$ см, $\alpha = 6 \cdot 10^4$ и $\delta_\infty = 3\delta_0 = 1,5 \cdot 10^{-5}$ см. Следовательно, не только условие (4.17), но и условие $\alpha' = \frac{3l^2}{2\delta_\infty^2} \gg 1$

прекрасно выполняются. Нормальный скин-эффект в радиодиапазоне имеет место лишь для частот $\omega \ll \frac{c^2}{3\pi\sigma_0 l^2}$ (т. е. при условии $\alpha \ll 1$; см. (3.9)); при приведённых значениях l и σ_0 это значит, что $\omega \ll 10^6$ ($\lambda \gg 1$ км).

Из формул (4.19) и (4.21) ясно, что в рассматриваемом предельном случае длина свободного пробега l из выражений для Z_∞ и δ_∞ выпадает, поскольку (см. (3.14))

$$\frac{\sigma_0}{l} = \frac{e^3 N}{m v_0}. \quad (4.22)$$

В связи с тем, что от температуры сколько-нибудь заметно зависит только величина l , этот результат означает, что величина Z_∞ не должна зависеть от температуры, что и подтверждается на опыте^{21, 22}. Характерно также, что

$$X_\infty = \sqrt{3} R_\infty, \quad (4.23)$$

в то время как $X_n = R_n$ (см. (4.20)).

Измерения величины Z_∞ или только величины R_∞ дают возможность определить отношение σ_0/l , а значит и l , поскольку статическая электропроводность σ_0 измеряется независимым образом. Измерения σ_0/l позволяют также определить скорость на границе Ферми v_0 :

$$v_0 = \frac{e^2 N}{m \left(\frac{\sigma_0}{l}\right)} = 2,53 \cdot 10^8 \frac{N}{\left(\frac{\sigma_0}{l}\right)}, \quad (4.24)$$

где концентрация N должна быть определена из независимых оптических измерений.

Для нахождения v_0 можно поступать и иначе, используя известное выражение^{7,8} для электронной части теплоёмкости металлов, которая может быть измерена при низких температурах:

$$C^{(e)} = \gamma T, \quad \gamma = \frac{2\pi^2}{3} k^2 \left(\frac{dY}{dW}\right)_0 = \frac{\pi^2 k^2 N}{m v_0^2}, \quad (4.25)$$

где $k = 1,38 \cdot 10^{-16} \frac{\text{эрг}}{\text{градус}}$ — постоянная Больцмана. Согласно (4.25)

$$v_0 = \pi k \sqrt{\frac{N}{m\gamma}} = 1,44 \cdot 10^{-2} \sqrt{\frac{N}{\gamma}}. \quad (4.26)$$

Сопоставление выражений (4.24) и (4.26) может служить для проверки теории. Для той же цели пригодно соотношение

$$\left. \begin{aligned} \frac{\left(\frac{\sigma_0}{l}\right)^2}{\gamma N} &= \frac{e^4}{\pi^2 k^2 m} = 3,1 \cdot 10^{20} \text{ CGSE}, \\ N &= 3,2 \cdot 10^{-21} \frac{\left(\frac{\sigma_0}{l}\right)^2}{\gamma}, \end{aligned} \right\} \quad (4.27)$$

получающееся^{16, 23} из (4.22) и (4.25) и содержащее величины γ , N и $\frac{\sigma_0}{l}$, измеряемые независимыми способами*).

Параметры N , v_0 и l , если не говорить об ϵ_0 , являются единственными величинами, фигурирующими в задаче в используемом приближении. Другие параметры выражаются через эти три, так что, например, эффективная масса $m_{\text{эфф}}$ равна (см. (3.15)):

$$m_{\text{эфф}} = \sqrt{\frac{3(2\pi\hbar)^3 N}{8\pi m v_0^3}} = 6,15 \cdot 10^{-27} \sqrt{\frac{N}{v_0^3}}. \quad (4.28)$$

Напомним, что в области нормального скин-эффекта из опыта можно определить только две величины N и $v_0 = \frac{v_0}{l}$ (для нахождения скорости v_0 можно, правда, привлечь при этом измерения γ ; см. (4.25)). В области же аномального скин-эффекта, как сказано, скорость v_0 определяется без привлечения данных об электронной теплоёмкости.

б) Результаты, относящиеся к инфракрасной части спектра

Перейдём к результатам теории аномального скин-эффекта в оптической (преимущественно в инфракрасной) части спектра (см. ^{17-19, 14} и, в особенности, ²⁰). При этом ограничимся здесь важнейшим случаем, когда

$$\omega\tau_0 \gg 1 \quad (\text{т. е. } \omega \gg \nu_0), \quad (4.29)$$

$$|\epsilon| \gg \epsilon_0 \sim \frac{4\pi e^2 N}{m\omega_0^2} \quad (\text{т. е. } \omega \ll \omega_0) \quad (4.30)$$

* Из (4.25) и (4.27) получаем:

$$v_0 = \frac{\pi^2 k^2}{e^2} \frac{\frac{\sigma_0}{l}}{\gamma} = 8,15 \cdot 10^{-13} \frac{\frac{\sigma_0}{l}}{\gamma}. \quad (4.27a)$$

и

$$\frac{a}{(\omega\tau_0)^3} = \frac{\frac{3}{2} \frac{l^2}{\delta_0^2}}{\left(\omega \frac{l}{v_0}\right)^3} = \frac{3\pi e^2 N v_0^2}{m c^2 \omega^2} \ll 1. \quad (4.31)$$

Условия (4.29) и (4.30) по существу совпадают с условием (3.17) и, как указано в § 3, могут выполняться в весьма широкой области частот, включающей всю инфракрасную часть спектра. Условие (4.31) жёстче условия (4.29), в котором τ_0 увеличивается с понижением температуры. При $N \sim 5 \cdot 10^{22}$ и $v_0 \sim 10^8$ неравенство (4.31) имеет вид

$$\omega^2 \gg 10^{27} \left(\lambda = \frac{2\pi c}{\omega} \ll 100 \mu = 10^{-2} \text{ см} \right). \quad (4.32)$$

Кроме того, не нужно забывать о неравенстве типа (3.2а), ограничивающем применение используемого кинетического уравнения, но об этой стороне дела речь пойдёт лишь несколько позже (см. § 4, в)).

При соблюдении неравенств (4.29) — (4.31) имеем*):

$$\begin{aligned} \epsilon_{\text{эфф}} &= n_{\text{эфф}}^2 - \kappa_{\text{эфф}}^2 \approx \\ &\approx -\frac{4}{3} \beta^{-2} p^2 + \beta^{-2} p^4 \left(\frac{301}{720} + \frac{5}{2\sqrt{3}} q + \frac{4}{3} q^2 \right), \end{aligned} \quad (4.33)$$

$$\begin{aligned} n_{\text{эфф}} &\approx \frac{\beta^{-1} p^2}{\sqrt{3}} \left(\frac{\sqrt{3}}{4} + q \right) - \\ &- \beta^{-1} p^4 \left(\frac{86}{945} + \frac{16 \ln 2}{315} + \frac{14}{15\sqrt{3}} q + \frac{3}{4} q^2 + \frac{5}{8\sqrt{3}} q^3 \right), \end{aligned} \quad (4.34)$$

$$\kappa_{\text{эфф}} \approx \frac{2}{\sqrt{3}} \beta^{-1} p - \beta^{-1} p^3 \left[\frac{4}{15\sqrt{3}} + \frac{1}{2} q + \frac{\sqrt{3}}{4} q^2 \right], \quad (4.35)$$

$$\begin{aligned} A \approx \frac{cR}{\pi} &= \frac{4n_{\text{эфф}}}{n_{\text{эфф}}^2 + \kappa_{\text{эфф}}^2} \approx \sqrt{3} \beta \left(\frac{\sqrt{3}}{4} + q \right) - \\ &- \beta p^2 \left[\frac{16 \ln 2}{105} + \frac{8723}{80640} + \frac{83\sqrt{3}}{192} q + \frac{3}{4} q^2 + \frac{\sqrt{3}}{8} q^3 \right], \end{aligned} \quad (4.36)$$

*) Эти формулы приведены в ²⁰, где используемые здесь и в ¹⁴ величины β , q и p (см. (3.20)) обозначены соответственно полужирными буквами ν , σ^{-1} и ν^{-1} .

$$\frac{cX}{\pi} = \frac{4\chi_{\text{эфф}}}{n_{\text{эфф}}^2 + \chi_{\text{эфф}}^2} \approx 2\sqrt{3}\beta p^{-1} + \beta p \left[\frac{83\sqrt{3}}{480} + \frac{3}{4}q + \frac{\sqrt{3}}{4}q^2 \right], \quad (4.37)$$

$$\sin \varphi_0 \operatorname{tg} \varphi_0 \approx \sqrt{n_{\text{эфф}}^2 + \chi_{\text{эфф}}^2} \approx \frac{2}{\sqrt{3}}\beta^{-1}p - \beta^{-1}p^3 \left[\frac{211}{960\sqrt{3}} + \frac{3}{8}q + \frac{1}{2\sqrt{3}}q^2 \right], \quad (4.38)$$

$$\operatorname{tg} 2\rho_0 \approx \frac{\chi_{\text{эфф}}}{n_{\text{эфф}}} \approx \frac{2p^{-1}}{\frac{\sqrt{3}}{4} + q} \left[1 + p^2 \left(\frac{83}{960} + \frac{\sqrt{3}}{8}q + \frac{1}{8}q^2 + \frac{16 \ln 2}{105\sqrt{3}} + \frac{8723}{80640\sqrt{3}} + \frac{83}{192}q + \frac{\sqrt{3}}{4}q^2 + \frac{1}{8}q^3 \right) \right] \frac{\sqrt{3}}{4} + q. \quad (4.39)$$

В этих формулах параметры β , q и p определены согласно (3.20) и подчеркнуты члены, получающиеся в том же приближении в случае нормального скин-эффекта (см. (3.19))^{*}. При этом

$$-\frac{4}{3}\beta^{-2}p^2 = -\frac{4\pi e^2 N}{m\omega^2}, \quad pq = \frac{\nu_0}{\omega} \quad \text{и} \quad p^2 = 3\pi \frac{e^2 N \nu_0^2}{mc^2 \omega^2},$$

т. е. при условиях (4.29)–(4.31) $pq \ll 1$ и $p^2 \ll 1$. Поэтому в (4.33)–(4.39) члены более высокой степени относительно p малы по сравнению с первыми членами (членами низшей степени относительно p): Из формул ясно, что в выражениях для $\epsilon_{\text{эфф}}$, χ , $\frac{cX}{\pi}$

^{*}) Полезно напомнить, что в силу (1.19), (2.9) и сказанного в § 3

$$1 - A \approx \left| \frac{\frac{4\pi}{c} - Z}{\frac{4\pi}{c} + Z} \right|^2, \quad \text{откуда при малых } \left(\frac{cX}{\pi}\right)^2 \text{ и } \left(\frac{cR}{\pi}\right)^2 \text{ получаем:}$$

$$A \approx \frac{cR}{\pi} \left\{ 1 - \frac{1}{16} \left(\frac{cX}{\pi}\right)^2 - \dots \right\} - \frac{1}{2} \left(\frac{cR}{\pi}\right)^2 - \dots$$

При условиях (4.29) и (4.30) с достаточной точностью

$$A = \frac{cR}{\pi} = \frac{4n_{\text{эфф}}}{n_{\text{эфф}}^2 + \chi_{\text{эфф}}^2}$$

(см. также (1.19) и (3.19)), как это и принято в (4.36).

и $\sin \varphi_0 \operatorname{tg} \varphi_0$ старшие (главные) члены совпадают с соответствующими членами при нормальном скин-эффекте (см. (3.19)). При

$$q = \frac{c}{v_0 \sigma_0} \left(\frac{e^2 N}{3\pi m} \right)^{1/2} = \frac{c}{v_0} \frac{v_0}{\left(\frac{3\pi e^2 N}{m} \right)^{1/2}} \gg 1, \quad (4.40)$$

т. е.

$$l \gg \frac{c}{\left(\frac{3\pi e^2 N}{m} \right)^{1/2}}, \quad (4.40a)$$

выражения (4.33) — (4.39) уже полностью переходят в (3.19). Это вполне понятно, так как условие (4.40a) совпадает с условием осуществления нормального скин-эффекта (3.9), поскольку в обла-

сти (4.29) $\delta_n = \frac{c}{\omega \kappa} \approx \frac{c}{\omega \sqrt{\frac{4\pi e^2}{m\omega^2}}} = \frac{c}{\omega \sqrt{\frac{4\pi e^2 N}{m}}} \quad (\text{см. (3.19) и (4.35)}).$

Сказанное обосновывает утверждение, высказанное в § 3 и состоящее в том, что в области (3.17) формула (3.18) обычно справедлива в хорошем приближении и в случае аномального скин-эффекта. Для оценки точности этой формулы

$$\varepsilon = - \frac{4\pi e^2 N}{m\omega^2} \quad (3.18)$$

укажем, что при типичных значениях $v_0 \sim 10^8$, $N \sim 5 \cdot 10^{22}$ $\rho^2 \sim \frac{10^{27}}{\omega^2} \sim 10^4 \lambda^2$ и при $\lambda \sim 10 \mu = 10^{-3} \text{ см}$ $\rho^2 \sim 10^{-2}$; поэтому согласно (4.33) при $q \ll 1$ выражение (3.18) справедливо с точностью $\sim 0,3\%$. Этот вывод не меняется и при комнатной температуре, когда для типичных металлов $q \sim 1$. Применение формулы (3.18) ограничено поэтому тогда, когда граница внутреннего фотоэффекта ω_0 лежит уже в инфракрасной части спектра (см. также § 4, в)). В этом случае для выполнения условия (4.30) нужно понижать частоту, что может привести к противоречию с условиями (4.31) и (4.32) *) и к неточности формулы (3.18).

Нужно также ещё раз заметить, что формулы (4.33) — (4.39) относятся к случаю диффузного отражения электронов от поверхности металла. При зеркальном отражении электронов, в отличие от положения, имеющего место в радиодиапазоне (см. конец § 4, а), получаются, вообще говоря, существенно другие результаты. Так

*) Нужно заметить, что можно получить формулы, пригодные и при несоблюдении условий (4.31) и (4.32). Поэтому использование этого условия не является необходимым.

при зеркальном отражении:

$$\varepsilon_{\text{эфф}} \approx -\frac{4}{3}\beta^{-2}p^2 + \beta^{-2}p^4 \left(-\frac{16}{45} + \frac{4}{3}q^2 \right), \quad (4.41)$$

$$A \approx \sqrt{3}\beta q + \beta p^2 \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{\sqrt{3}}q - \frac{\sqrt{3}}{8}q^3 \right). \quad (4.42)$$

В случае $\varepsilon_{\text{эфф}}$ различие имеет место в малых членах, которыми при переходе к основной формуле (3.18) всё равно пренебрегают. Но в случае A при зеркальном отражении первый член совпадает с имеющим место при нормальном скин-эффекте и в области аномального скин-эффекта существенно отличен от выражения, получающегося при диффузном отражении. В этом последнем случае при резко выраженном аномальном скин-эффекте ($q \ll 1$), не учитывая члены $\sim p^2$, имеем (см. (4.36)):

$$A \equiv A_d \approx \frac{3}{4}\beta = \frac{3}{4}\frac{v_0}{c}. \quad (4.43)$$

Это выражение не зависит от статической электропроводности σ_0 , а следовательно, и от температуры, в то время как при нормальном скин-эффекте, также при пренебрежении членами $\sim p^2$,

$$A = A_n = \sqrt{3}\beta q = \frac{1}{\sigma_0} \left(\frac{e^2 N}{\pi m} \right)^{1/2} = v_0 \left(\frac{m}{\pi e^2 N} \right)^{1/2} = \frac{v_0}{l} \left(\frac{m}{\pi e^2 N} \right)^{1/2}. \quad (4.44)$$

Выражение (4.44) сильно уменьшается при понижении температуры, поскольку σ_0 увеличивается при переходе от комнатной к гелиевой температуре в тысячи раз. На опыте же такого резкого уменьшения поглощательной способности A не наблюдается (см. § 6) и, по крайней мере в качественном отношении, подтверждается формула (4.36). Проверка теории при этом возможна в результате определения параметров N и v_0 из других измерений (N из измерений $\varepsilon_{\text{эфф}}$ и v_0 из измерений электронной части теплоёмкости или σ_0/l ; см. § 4,а)) и сравнения с опытом вычисленных с использованием этих параметров значений A . В предельном случае аномального скин-эффекта и при $p^2 \ll 1$ для этой цели, если не говорить об учёте квантовых эффектов, обсуждаемых ниже, удобно использовать простое выражение (4.43). Помимо поглощательной способности A , от характера отражения электронов от поверхности металла и, главное, от того, является ли скин-эффект нормальным или аномальным, сильно зависят также выражения для $n_{\text{эфф}}$ и $\text{tg } 2\rho_0$ (см. (4.34) и (4.39)). Это вполне понятно, так как всего имеются две независимые величины $n_{\text{эфф}}$ и $\chi_{\text{эфф}}$, причём величины, определяемые (в рассматриваемом случае) коэффициентом $\chi_{\text{эфф}}$, слабо зависят от l и, следовательно, от характера скин-эффекта и отражения электронов от поверхности. К числу

таких величин относятся $\varepsilon_{эфф}$, $\frac{cX}{4\pi}$ и $\sin \varphi_0 \operatorname{tg} \varphi_0$ (см. (4.33), (4.37) и (4.38)). Те же величины, которые определяются значением $n_{эфф}$, вообще говоря, чувствительны к значению l и могут заметно отличаться в зависимости от характера скин-эффекта и отражения электронов от поверхности; к числу таких величин относятся A и $\operatorname{tg} 2\varphi_0$.

Вопрос о сравнении теории с опытом и стоящих в этой области задачах будет обсуждаться в § 6 и в заключении. Здесь же мы хотим остановиться ещё на физическом смысле полученных результатов и элементарном выводе предельной формулы (4.43), а также предельной формулы, получающейся из (4.42) при весьма жёстком условии $q \ll p^2$:

$$A \equiv A_s = \frac{2}{3} \beta p^2 = \frac{2\pi e^2 N}{m\omega^2} \frac{v_0^3}{c^2}. \quad (4.45)$$

В оптической части спектра путь, проходимый электроном за время одного колебания (за период), порядка $\frac{v_0}{\omega}$ значительно меньше глубины скин-слоя $\delta = \frac{c}{\omega\kappa}$ даже в том случае, когда $l \gg \delta$. Поэтому в первом приближении колебания электрона происходят в однородном поле и при вычислении величин, которые не обращаются в нуль при отсутствии столкновений, скин-эффект можно считать нормальным*). К числу таких величин в первую очередь относится диэлектрическая постоянная ε , которая вдали от границы квантового поглощения (т. е. при условии (4.30)) при $l \rightarrow \infty$ равна $\varepsilon = -\frac{4\pi e^2 N}{m\omega^2}$. Поэтому при $l \rightarrow \infty$ (т. е. практически при $\omega \gg \nu_0 = \frac{v_0}{l}$) поле в металле в хорошем приближении таково:

$$\left. \begin{aligned} E &= E_0 e^{-\frac{z}{\delta}} \cos(\omega t + \gamma), \\ \delta &= \frac{c}{\omega\kappa} = \delta_n = \frac{c}{\left(\frac{4\pi e^2 N}{m}\right)^{1/2}}, \end{aligned} \right\} \quad (4.46)$$

где для удобства в дальнейшем поле считается вещественным и γ — некоторая произвольная фаза.

*) Условие $\frac{v_0}{\omega} \ll \delta = \delta_n$ совпадает при $\omega\tau_0 \gg 1$ с условием (3.11), означающим, что модуль члена $\frac{\partial f_1}{\partial z}$ в кинетическом уравнении (3.3) мал по сравнению с учитываемым в теории нормального скин-эффекта членом $\frac{1+i\omega\tau}{v\tau} f_1$.

В (4.46) E_0 есть электрическое поле при $z=0$, равное сумме тангенциальных слагающих полей в падающей и отражённой волнах при $z=0$; считая для простоты, что речь идёт о нормальном падении, имеем:

$$E_0 = \frac{2i\omega\delta_n}{c} E_A, \quad (4.47)$$

где E_A — амплитуда электрического поля падающей волны*).

Итак, затухание поля в металле определяется значением ε , которое в свою очередь в рассматриваемой области частот почти не зависит от длины пробега l и в силу условия $\frac{v_0}{\omega} \ll \delta \approx \delta_n$ одинаково и при $l \ll \delta_n$ и при $l \gg \delta_n$.

Потери в металлах или, конкретно, поглощательная способность A , напротив, существенно зависит от соотношения между

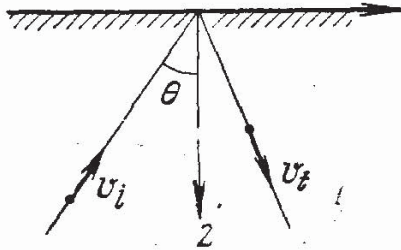


Рис. 6.

длиной свободного пробега l и глубиной скин-слоя δ . Действительно, в случае нормального скин-эффекта ($l \ll \delta$) значение A обратно пропорционально l (см. (4.44)) и формально при $l \rightarrow \infty$ $A \rightarrow 0$. Фактически с ростом l формула (4.44) уже непригодна, так как условие $l \ll \delta$ перестаёт выполняться и расчёт нужно вести в другом приближении. При этом даже при $l \rightarrow \infty$, т. е. при отсутствии соударе-

ний, будет иметь место некоторое отличное от нуля поглощение, определяемое формулами (4.43) и (4.45). Эти предельные формулы получаются из общих выражений для A при $q \ll 1$ (т. е. $l \rightarrow \infty$), но могут быть также выведены в результате весьма простого расчёта¹⁸, который здесь будет воспроизведён несколько более подробно, чем в¹⁸).

Полагая $l \rightarrow \infty$, т. е. пренебрегая соударениями, рассмотрим электрон, движущийся из глубины металла к его границе со скоростью $\mathbf{v}_i = (v_{xi}, 0, v_{zi})$ при $z = \infty$ (рис. 6). Если отражение на границе является зеркальным и поле $\mathbf{E} = 0$, то после отражения скорость электрона равна $\mathbf{v}_t = \mathbf{v}_i' = \{v_{xi}, 0, -v_{zi}\}$.

*) В силу граничного условия (2.9) $E_0 = \frac{H_0}{\sqrt{\varepsilon'_{эфф}}}$, причём магнит-

ное поле $H_0 \approx 2H_A$, так как отражение является почти полным. Поэтому

$$E_0 = \frac{2H_A}{\sqrt{\varepsilon'_{эфф}}} = \frac{2E_A}{\sqrt{\varepsilon'_{эфф}}} \approx \frac{2E_A}{\sqrt{\varepsilon}} \approx \frac{2iE_A}{\kappa} = \frac{2i\omega\delta_n}{c} E_A$$

(в падающей волне, распространяющейся в вакууме, $E_A = H_A$).

При наличии же в металле поля $E \neq 0$ из уравнения движения $\frac{dv}{dt} = \frac{e}{m} E$ получаем *):

$$v_i(z = \infty) = v_i' + \frac{e}{m} \int_{-\infty}^{+\infty} E(t) dt, \quad (4.48)$$

где $E(t)$ — поле в точке, занимаемой электроном в момент t (при $z = \infty$ $t = \pm \infty$; при $z = 0$ $t = 0$). Траекторию электрона можно в слабом поле практически считать такой же, как при отсутствии поля, в силу чего в поле (4.46)

$$E(t) = E_0 e^{-\frac{v_i |t| \cos \theta}{\delta_n}} \cos(\omega t + \gamma),$$

где θ — угол, указанный на рис. 6. Средняя энергия, получаемая электроном под действием поля за всё время пробега, равна

$$\Delta W_s = \frac{mv_t^2}{2} - \frac{mv_i^2}{2} = \frac{m}{2} \left[\frac{e}{m} \int_{-\infty}^{+\infty} E(t) dt \right]^2, \quad (4.49)$$

где усреднение производится по фазе γ , в силу чего член, линейный относительно E , обращается в нуль и не выписан (для различных электронов фаза γ , разумеется, различна и поэтому усреднение необходимо).

Если отражение является диффузным, то после отражения электрон забывает о своей упорядоченной скорости и

$$\Delta W_d = \frac{m}{2} \left(\frac{e}{m} \right)^2 \left[\left(\int_{-\infty}^0 E(t) dt \right)^2 + \left(\int_0^{\infty} E(t) dt \right)^2 \right]. \quad (4.50)$$

Для нахождения потери энергии на единицу поверхности в единицу времени нужно умножить выражения (4.49) или (4.50) на поток электронов $dI = Nv \left(\sin \theta \cos \theta \frac{d\theta}{2} \right) \frac{3v^2 dv}{v_0^3}$, падающий на

единичную площадку на поверхности металла (в приведённом выражении $v \cos \theta = v_z$, $\frac{\sin \theta d\theta}{2}$ — элемент телесного угла и

*) Для простоты считаем электроны совершенно свободными, так что $m_{эфф} = m$ и $N = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{mv_0}{2\pi\hbar} \right)^3$.

$\int_0^{v_0} \frac{3v dv}{v_0^3} = 1$, откуда ясна нормировка электронной функции распределения). Производя теперь элементарные вычисления и пренебрегая членами порядка $\left(\frac{v}{\delta_n}\right)^2$ по сравнению с ω^2 , получаем:

$$A = \frac{\int_0^{\pi/2} \int_0^{v_0} \{\rho \Delta W_s + (1 - \rho) \Delta W_d\} dI}{E_A^2 \frac{c}{8\pi}} =$$

$$= \rho \frac{2\pi N e^2 v_0^3}{m \omega^2 c^3} + (1 - \rho) \frac{3}{4} \frac{v_0}{c} = \rho A_s + (1 - \rho) A_d, \quad (4.51)$$

где ρ — доля электронов, отражающихся зеркально и $\frac{E_A^2 c}{8\pi}$ — средний поток энергии в падающей волне. При $\rho = 0$ или $\rho = 1$ выражение (4.51) переходит соответственно в (4.43) и (4.45), как это и должно быть. Заметим, что

$$\frac{A_d}{A_s} = \frac{3}{2} \frac{m \omega^2 c^2}{4\pi e^2 N v_0^2} = \frac{3}{2} \left(\frac{\omega \delta_n}{v_0}\right)^2 \gg 1, \quad (4.52)$$

и, как уже подчёркивалось, в этом случае отличие между зеркальным и диффузным отражением весьма значительно (при $v_0 \sim 10^8$ $A_d \sim 0,3\%$ и не зависит от ω ; при том же v_0 , $N \sim 5 \cdot 10^{22}$ и $\omega \sim 10^{13}$, т. е. $\lambda \sim 2 \mu$, предельное значение $A_s \sim 2 \cdot 10^{-4}\%$; в случае нормального скин-эффекта при тех же значениях и $l \sim 10^{-3}$ согласно (4.44) $A_n \sim 2 \cdot 10^{-3}\%$). Приведённый расчёт ясно показывает, что и при сколь угодно большой длине свободного пробега имеется поглощение (т. е. $A \neq 0$), которое связано с работой поля над электроном, отражающимся от поверхности металла. Если длину пробега нельзя считать бесконечно большой и нужно учитывать члены, содержащие l , расчёт сильно усложняется; здесь нужно пользоваться кинетическим уравнением и, в частности, получаются результаты, уже обсуждавшиеся раньше.

в) Об учёте квантовых эффектов

Всё проведённое выше (в §§ 3 и 4) рассмотрение базировалось на использовании кинетического уравнения, носящего, по существу, классический характер. Между тем, как уже указывалось в § 3, при повышении частоты нужно учитывать квантовые эффекты

даже и в том случае, когда частота света меньше отвечающей границе внутреннего фотоэффекта (внутренний фотоэффект соответствует переходу электронов в другую зону). Действительно, с квантовой точки зрения, поглощение электромагнитных волн в металле (при отсутствии внутреннего фотоэффекта) происходит во втором приближении теории возмущений, т. е. осуществляется как бы в два этапа: фотон с энергией $\hbar\omega$ поглощается электроном, который затем испускает фонон (квант энергии возбуждения решётки) или, наоборот, сначала испускается фонон, а затем поглощается фотон; кроме того, необходимо учитывать возможность испускания фотонов и поглощения фононов. При этом, если выполнено условие (3.2a)

$$\hbar\omega \ll kT, \quad (3.2a)$$

то электрон, поглотивший фотон $\hbar\omega$, не только не выходит за пределы зоны размытости фермиевского распределения, но и может считаться получающим энергию практически непрерывным образом (это последнее утверждение в особенности справедливо, если, кроме того, $\hbar\omega \ll k\theta$, где θ — дебаевская температура; энергия $k\theta$ есть максимальная возможная энергия фонона; см. ^{7,8}). В этом случае, очевидно, использованный выше метод кинетического уравнения полностью применим. Если же условие (3.2a) не выполнено, то, вообще говоря, необходимо проводить расчёт квантовым методом. Несмотря на то, что это обстоятельство известно уже очень давно (см., например, ⁷, § 53), соответствующее исследование ещё сколько-нибудь полно не проведено и лишь в самое последнее время появились две заметки ^{26, 26a} на эту тему (к тому же в ^{26a} речь идёт в основном о полупроводниках, а в ²⁶ не проводится никаких деталей расчётов и имеются неясные моменты). Мы лишены поэтому возможности сколько-нибудь подробно осветить важный вопрос о влиянии квантовых эффектов на отражение света от металлической поверхности и ограничимся несколькими замечаниями.

Условие (3.2a) заведомой справедливости изложенных в §§ 3, 4 результатов, полученных методом кинетического уравнения, является весьма жёстким. Так, при комнатной температуре $T \sim 300^\circ \text{K}$ условие (3.2a) означает, что $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega} \gg \frac{2\pi c \hbar}{kT} \sim 40 \mu$; при $T \sim 2^\circ \text{K}$ имеем уже $\lambda \gg 0,5 \text{ см}$, т. е. метод кинетического уравнения можно использовать даже не во всём радиодиапазоне.

Фактически, однако, положение, повидимому, не столь неблагоприятно с точки зрения возможности пользоваться теорией аномального скин-эффекта, не учитывающей квантовых эффектов. Так, если воспользоваться результатами квантового расчёта ^{26a} (см. формулу (9) цит. работы), можно убедиться в том, что при $\hbar\omega \ll 15 kT$ влияние квантовых поправок не превосходит 10%.

и лишь при дальнейшем росте ω эти поправки становятся большими *). При $T \sim 300^\circ$ равенство $\hbar\omega \sim 15kT$ соответствует длине волны $\lambda \sim 2 \div 3 \mu$ и, таким образом, почти во всей инфракрасной и заведомо в далёкой инфракрасной частях спектра квантовыми поправками можно пренебречь. С этой точки зрения также ясна уже неоднократно подчеркнутая выше необходимость работать именно в далёкой инфракрасной части спектра для того, чтобы картина была наиболее ясной и результаты измерений легче поддавались теоретической обработке. При этом при низкой температуре ($T \ll \theta$) ситуация более сложна, чем при высокой температуре, так как здесь, с одной стороны, большую роль должны играть квантовые эффекты **) и, с другой стороны, особенно существенен аномальный характер скин-эффекта. Между тем совместное рассмотрение обеих этих сторон дела ещё совсем не производилось и построение квантовой теории поглощения света в металлах в условиях аномального скин-эффекта является, на наш взгляд, одной из самых важных и интересных задач дальнейших теоретических исследований в области металлооптики ***).

До проведения соответствующего рассмотрения трудно быть вполне уверенным в том, что даже в предельном случае ярко выраженного аномального скин-эффекта можно просто складывать потери, связанные с отражением электронов от границы металла, с квантовыми потерями. Если, тем не менее, поступать таким образом, как это и делается в ²⁶, то, например, к выражению (4.43) $A_d = \frac{3}{4} \frac{v_0}{c}$ нужно добавить квантовые потери A_k , которые в ²⁶ вычисляются при условии $\hbar\omega \gg k\theta$ (поскольку речь идёт о низких

*) При $\hbar\omega \cong 20kT$ поправки достигают 20%. При $\frac{\hbar\omega}{kT} \gg 1$, т. е. практически при $\frac{\hbar\omega}{kT} \gtrsim 40 \div 50$, поглощение энергии по квантовой формуле

отличается от получаемого классическим образом множителем $\frac{1}{8} \sqrt{\frac{\pi\hbar\omega}{kT}}$;

этот множитель, например, при $\frac{\hbar\omega}{kT} = 50$ равен 1,57. Вместе с тем при $T \sim 300^\circ\text{K}$ $\hbar\omega \sim 50kT$ для $\lambda \sim 1 \mu$, т. е. только на границе между инфракрасной и видимой частями спектра.

**) Нужно при этом иметь в виду, что особенно ярко выраженный квантовый случай имеет место при соблюдении не только условия $\hbar\omega \gg kT$, но и значительно более жёсткого при низких температурах условия $\hbar\omega \gg k\theta$, где $\theta \sim 10^2 \div 10^3$ — дебаевская температура.

***) Эту задачу нужно, повидимому, решать, используя квантовое кинетическое уравнение (см., например, ⁶¹). Заметим, что в работе ⁶², появившейся уже после сдачи настоящей статьи в печать, результаты, изложенные в конце § 46 и в ¹⁸, получены квантовым методом (при этом электроны в металле считаются совершенно свободными и учитывается лишь влияние поверхности металла).

температурах, условие $\hbar\omega \gg kT$ выполнено при этом автоматически). Ввиду того, что в ²⁶ имеются некоторые неясности, а детали вычислений отсутствуют, мы приводить здесь выражения для A_k не будем, ограничившись указанием, что полученное в ²⁶ выражение для A_k не зависит от ω и при определённых, довольно типичных значениях параметров $A_k = 0,63A_d$, т. е. вообще $A_k \sim A_d$. Можно думать, что при $\hbar\omega \leq k\theta$, т. е. $\lambda \gtrsim 30 \mu$, квантовые потери существенно уменьшаются и потери, связанные с аномальным характером скин-эффекта, являются доминирующими. Поэтому переход в далёкую инфракрасную часть спектра существенен и в этом случае.

Заметим, кроме того, что при $\hbar\omega \gg kT$, в особенности при низких температурах, нужно учитывать также влияние междуэлектронных соударений, которые в области $\hbar\omega \ll kT$ не играют практически никакой роли⁹. С этой точки зрения результаты, полученные в ²⁶, тоже не могут считаться надёжными.

Отметим, наконец, что в наиболее важном, по нашему мнению, вопросе о нахождении оптическим методом концентрации электронов проводимости N учёт квантовых эффектов в широких пределах не меняет сделанных ранее выводов. Объясняется это тем, что учёт квантовых эффектов (при отсутствии внутреннего фотоэффекта), по крайней мере в качественном отношении, эквивалентен увеличению «трения» электронов, т. е. увеличению числа соударений ν_0 . Вместе с тем в инфракрасной части спектра ($\lambda > 1 \div 10 \mu$) поглощение при учёте квантовых эффектов возрастает во всяком случае не больше, чем в несколько раз (см. выше). Поэтому условие (3.17) $\omega^2 \gg \nu_0^2$, вообще говоря, остаётся попрежнему в силе и использование предельной формулы (3.18), связывающей ϵ и N практически, не оказывается связанным с новыми существенными ограничениями*).

Таким образом, изложенные ранее результаты (и, в частности, результаты § 4,б)), справедливые, строго говоря, только при условии (3.2а), имеют, в общем, значительно более широкую область применимости. А именно, в инфракрасной части спектра, при от-

*) Для свободного электронного газа без соударений классическая формула $\epsilon = 1 - \frac{4\pi e^2 N}{m\omega^2}$ применима при условии $\hbar\omega \ll mc^2$, т. е. даже в рент-

геновской части спектра ($\hbar\omega = mc^2$ при $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega} = \frac{2\pi\hbar}{mc} = 2,4 \cdot 10^{-10} \text{ см}$). Этот результат связан с тем, что значение ϵ определяется рассеянием излучения, а рассеяние света на свободных электронах определяется классической формулой Томсона как раз при условии $\hbar\omega \ll mc^2$. В силу сказанного область применимости предельной формулы (3.18) $\epsilon \approx -\frac{4\pi e^2 N}{m\omega^2}$ непосредственно условием (3.2а) не ограничивается.

сутствии внутреннего фотоэффекта, формулы § 4, б) для $\epsilon_{\text{эфф}}$, $\chi_{\text{эфф}}$, $\sin \varphi \operatorname{tg} \varphi_0$ и X , практически, остаются в силе; формулы же для A , $n_{\text{эфф}}$ и $\operatorname{tg} 2 \rho_0$ заведомо правильны по порядку величины, а в далёкой инфракрасной части спектра справедливы даже с точностью до нескольких процентов. К тому же, определяя на опыте функцию $A(\omega)$, $n_{\text{эфф}}(\omega)$ и др. в широком интервале частот ω , можно выявить роль квантовых эффектов и в определённых пределах проверить все формулы, приведённые в § 4, б).

§ 5. МЕТОДЫ ИЗМЕРЕНИЯ $n_{\text{эфф}}$, $\chi_{\text{эфф}}$ И A

Перейдём к рассмотрению основных методов экспериментального определения оптических постоянных металлов. Как уже указывалось во введении, мы исключим при этом из рассмотрения методы, основанные на изучении свойств света, прошедшего через тонкие металлические слои (см. ²⁷⁻³⁰).

Экспериментальные методы определения оптических констант металлов можно разбить на 3 группы.

1. Рассмотрим прежде всего вопрос об измерении коэффициента поглощения $A = 1 - r$ или коэффициента отражения r для нормального падения света.

Измерение коэффициента A проводится калориметрическим методом. Схема эксперимента дана на рис. 7. Излучение падает нормально на толстое металлическое зеркало M . В хорошем тепловом контакте с зеркалом находится термометр T и нагревательная катушка H . Наблюдается изменение температуры металла под действием падающего излучения. Помимо изменения температуры требуется знать с хорошей точностью интенсивность падающего света и теплоёмкость системы. Интенсивность падающего света определяется по повышению температуры при замене пластинки исследуемого металла на чёрную (хорошо поглощающую) пластинку. Теплоёмкость системы определяется по повышению температуры при выделении определённой мощности в нагревательной катушке (падающее излучение при этом отсутствует). Точность определения коэффициента A таким методом была доведена

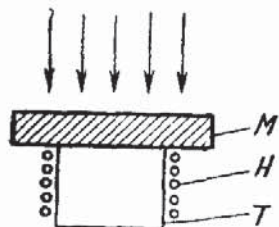
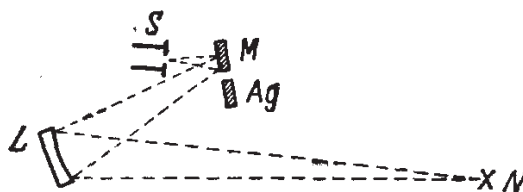


Рис. 7. Схема опыта по измерению коэффициента A : M — исследуемое металлическое зеркало, T — термометр, H — нагревательная катушка. Стрелки указывают направление падающего излучения.

до 5% ³¹. Коэффициент A определялся для разных металлов в интервале температур от комнатной до $1,95^\circ \text{K}$. Наиболее точные измерения выполнены в работах ³¹⁻³⁴.

Измерение коэффициента r производится с помощью сравнения интенсивности света, отражённого от исследуемого зеркала с интенсивностью света, отражённого от эталонного зеркала

(зеркала из Ag) или от призмы полного внутреннего отражения. Наибольшее число измерений проведено в работах³⁵. Схема соответствующего опыта приведена на рис. 8. Свет от источника N с помощью сферического зеркала L направляется под малым углом на плоское исследуемое зеркало M . Отразившись от M , свет попадает на щель S зеркального спектрометра с флюоритовой призмой и далее на вакуумный термостолбик. Проведя измерения один раз с исследуемым зеркалом, другой раз с эталонным зеркалом, помещённым на то же место, что и зеркало M , получают коэффициент r . Этот метод несколько видоизменён в работе³⁶, в которой интенсивность света, отражённого от исследуемого зеркала, сравнивается с интенсивностью излучения чёрного тела. Измерения коэффициента r проведены в видимой и инфракрасной области. Точность измерения r в³⁵ достигала 0,2—0,5%, что в инфракрасной области приводит к ошибке в определении коэффициента A для хороших проводников порядка 10—25%.



Основной недостаток этих методов состоит в том, что таким образом нельзя получить всех оптических постоянных металла, поскольку эксперимент даёт только одно соотношение между $n_{\text{эфф}}$ и $\chi_{\text{эфф}}$.

Другим существенным недостатком обсуждаемых работ является способ приготовления металлических зеркал. Так как этот недостаток относится также и ко всем работам, о которых речь будет идти ниже, остановимся на методах приготовления металлических зеркал несколько подробнее. Применяются следующие способы приготовления зеркальных поверхностей: механическая полировка, химическое осаждение, гальваническое осаждение, напыление в вакууме, отливка на стекло, электролитическая полировка.

Наилучшим методом приготовления поверхностей металлов, свободных от вредных поверхностных слоёв, нужно, повидимому, в настоящее время признать метод электролитической полировки. Об этом свидетельствуют опыты по измерению удельной электропроводности металлов на радиочастотах³⁷.

Механическая полировка приводит к образованию поверхностного слоя, структура и свойства которого отличаются от структуры и свойств массивного металла. Наличие такого слоя обнаружено в ряде опытов. Так, в уже упомянутой работе³⁷ было установлено образование поверхностного слоя при механической полировке меди. Толщину слоя автор оценивает в $2 \cdot 10^{-5}$ см, удельное сопротивление этого поверхностного слоя примерно

в 10 раз больше удельного сопротивления массивного металла. В работе³⁸ исследовалось влияние поверхностного слоя, вызванного механической полировкой, на оптические постоянные меди. Удаление поверхностного слоя электрополировкой привело к уменьшению значения $n_{\text{эфф}}$ в 1,45 раз и к увеличению $\kappa_{\text{эфф}}$ в 1,3 раза. Авторы оценивают толщину поверхностного слоя, оказывающего влияние на оптические постоянные, в $1,3 \cdot 10^{-3}$ см. В работе³³ измерялся коэффициент A для меди, полированной электролитически и механически. Найдено, что электролитическая полировка уменьшила значение коэффициента A в 2,4 раза. Таким образом, механическая полировка не позволяет получить поверхность, характеризующую массивный металл.

При химическом осаждении, так же как при гальваническом осаждении и при напылении в вакууме, получают сравнительно тонкие слои металла, причём структура металла в этих слоях может отличаться от структуры массивного металла. Так, при сравнении оптических постоянных меди в видимой области спектра, полученных на зеркалах, напылённых в вакууме, с оптическими постоянными меди, отполированной электролитически и механически, найдено³⁸, что оптические постоянные напылённой меди лежат между оптическими постоянными электролитически отполированной меди и оптическими постоянными механически отполированной меди, более согласуясь с последними. Кроме того, следует отметить, что, как найдено в работе³⁹, напыление в вакууме Ag, Au и Cu на стекло и плавный кварц выявило зависимость полученных оптических постоянных от характера подложки и от скорости напыления даже при толщинах слоя в 300 μ . При сравнении значений $n_{\text{эфф}}$ и $\kappa_{\text{эфф}}$ в инфракрасной области для меди, осаждённой гальванически и напылённой в вакууме, проведённом в работе⁴⁰, найдено, что эти значения отличаются в 1,5—2 раза, что авторы объясняют недостаточной толщиной слоя гальванически осаждённой меди. Таким образом, данные, полученные с помощью этих методов обработки поверхности, также нельзя считать относящимися к массивному металлу.

Метод отливки металла на стекло или на плавный кварц пригоден для Sn, Pb и Bi. Он может, повидимому, дать константы, относящиеся к массивному металлу, если принять специальные меры предосторожности для предохранения металла от окисления. Вероятно, лучше всего такую отливку производить в вакууме. Сравнение результатов, полученных при такой обработке поверхности металла, с результатами, полученными при электролитической полировке, ещё не производилось.

Из всех работ, о которых будет идти речь в этом параграфе, метод электролитической полировки был использован только в трёх работах^{33, 34, 38}. В работе³⁴ измерена только одна постоянная A для меди в интервале длин волн 0,5—4 μ , в работе³³

эта же величина A измерена для ряда металлов, но только для одной длины волны 14μ при очень грубой монохроматизации света. В работе³⁸ измерены обе постоянные $n_{эфф}$ и $\chi_{эфф}$ для меди в видимой области спектра. Но для меди в этой области существенную роль играет квантовое поглощение, поэтому соответствующие данные не могут быть нами использованы для вычисления концентрации электронов проводимости в меди.

2. Вторая группа методов измерения оптических констант связана с определением коэффициентов отражения при наклонном падении света на отражающую металлическую поверхность⁴¹⁻⁴⁴. Коэффициенты отражения света, поляризованного перпендикулярно и параллельно плоскости падения, будут выражаться следующим образом (см. (1.18)):

$$\left. \begin{aligned} r_{\perp} &= \left(\frac{R_s}{A_s} \right)^2 = \frac{a^2 + b^2 - 2a \cos \varphi + \cos^2 \varphi}{a^2 + b^2 + 2a \cos \varphi + \cos^2 \varphi}, \\ r_{\parallel} &= \left(\frac{R_p}{A_p} \right)^2 = \frac{a^2 + b^2 - 2a \sin \varphi \operatorname{tg} \varphi + \sin^2 \varphi \operatorname{tg}^2 \varphi}{a^2 + b^2 + 2a \sin \varphi \operatorname{tg} \varphi + \sin^2 \varphi \operatorname{tg}^2 \varphi} \cdot r_{\perp}. \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

В случае неполяризованного света $r_0 = \frac{1}{2} (r_{\perp} + r_{\parallel})$; в (5.1)

$$\begin{aligned} 2a^2 &= [(n_{эфф}^2 - \chi_{эфф}^2 - \sin^2 \varphi)^2 + 4n_{эфф}^2 \chi_{эфф}^2]^{1/2} + \\ &+ [(n_{эфф}^2 - \chi_{эфф}^2) - \sin^2 \varphi], \\ 2b^2 &= [(n_{эфф}^2 - \chi_{эфф}^2 - \sin^2 \varphi)^2 + 4n_{эфф}^2 \chi_{эфф}^2]^{1/2} - \\ &- [(n_{эфф}^2 - \chi_{эфф}^2) - \sin^2 \varphi]. \end{aligned}$$

Этими соотношениями можно воспользоваться для определения $n_{эфф}$ и $\chi_{эфф}$. Ясно, что нужно иметь два независимых измерения. В разных работах эти измерения производились по-разному. Так, в работе⁴¹ измерялся коэффициент r_0 для двух углов падения. В работе⁴² измерялись коэффициенты r_{\perp} и r_{\parallel} для

одного угла падения. В работах^{43, 44} измерялось отношение $\frac{r_{\parallel}}{r_{\perp}}$ для двух углов падения. Во всех случаях $n_{эфф}$ и $\chi_{эфф}$ нужно было определять из системы двух уравнений, которая в явном виде не разрешается. Поэтому решение обычно проводится графическим способом. Для данного угла падения рассчитывают семейство кривых $r = f(n_{эфф}, \chi_{эфф}, \varphi) = \text{const}$. Для определения $n_{эфф}$ и $\chi_{эфф}$ необходимо использовать, по крайней мере, два семейства кривых, т. е. $r_{\parallel}(n_{эфф}, \chi_{эфф}) = \text{const}$ и $r_{\perp}(n_{эфф}, \chi_{эфф}) = \text{const}$, или $r_0(n_{эфф}, \chi_{эфф}, \varphi_1) = \text{const}$ и $r_0(n_{эфф}, \chi_{эфф}, \varphi_2) = \text{const}$ и т. п. В каждом семействе выбирается кривая, соответствующая

измеренному значению коэффициента r . Пересечение этих двух кривых из двух разных семейств даёт $n_{эфф}$ и $\chi_{эфф}$. Для получения хорошей точности определения $n_{эфф}$ и $\chi_{эфф}$ этим методом желательно брать углы падения света φ по обе стороны от главного угла падения φ_0 . Но для металлов с большой проводимостью в инфракрасной области это требование выполнить нельзя потому, что главный угол падения φ_0 очень близок к 90° . Если же использовать углы φ , заметно меньшие φ_0 , то все коэффициенты r становятся близкими к 1 и точность определения $n_{эфф}$ и $\chi_{эфф}$ резко падает. В перечисленных работах^{41–44} хорошие проводники не исследовались. Точность определения $n_{эфф}$ и $\chi_{эфф}$ для веществ, исследованных в этих работах, была доведена до 4%.

3. Третья группа методов определения оптических постоянных металла основана на анализе эллиптически поляризованного света, получающегося после отражения линейно поляризованного света от металлического зеркала. Эта группа методов является, с нашей точки зрения, наиболее перспективной для определения констант металлов в инфракрасной области.

Эллипс определяется двумя параметрами. Выбирая удобные для каждого данного случая пары параметров, определяющих эллиптическую поляризацию отражённого света, можно найти $n_{эфф}$ и $\chi_{эфф}$. Этими методами можно проводить измерения в ультрафиолетовой, видимой и инфракрасной областях спектра. При измерениях в ультрафиолетовой области обычно используют метод Фохта^{45–48}. Схема метода дана на рис. 9. Выходная щель квар-

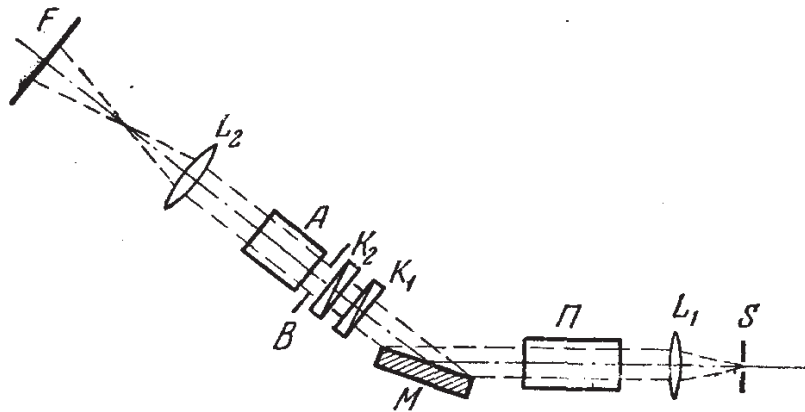


Рис. 9. Схема метода Фохта определения оптических постоянных металла в ультрафиолетовой и видимой области спектра.

цевого монохроматора S является источником монохроматического излучения. Линза L_1 делает пучок света параллельным. Далее свет проходит через николю-поляризатор Π , ориентированный под углом 45° к плоскости падения света на зеркало M , падает на исследуемое зеркало M , отражается от него, проходит через

два кварцевых компенсатора K_1 и K_2 , через николю-анализатор A , скрещённый с поляризатором P , и попадает на фотопластинку F . Линза L_2 даёт изображение плоскости B в плоскости F . Компенсатор K_1 является компенсатором Бабиня, компенсатор K_2 представляет собой пару кварцевых клиньев, один из которых вращает плоскость поляризации вправо, другой влево. Компенсатор K_2 располагается перпендикулярно компенсатору K_1 . Разность фаз между s - и p -компонентами света создаётся, во-первых, отражением от металла, во-вторых, компенсатором K_1 . В тех местах, где суммарная разность хода равна 0 ; $\pm \pi$; $\pm 2\pi$ и т. д., мы будем иметь линейно поляризованный свет, направление поляризации которого определяется азимутом ρ (см. (1.8)). Таким образом на выходе компенсатора K_1 будет наблюдаться система равноотстоящих вертикальных линий, соответствующих линейной поляризации света. Компенсатор K_2 , поворачивающий угол поляризации света, расположен так, что угол поворота меняется снизу вверх. Окончательное направление плоскости поляризации зависит, во-первых, от азимута ρ , во-вторых, от положения компенсатора K_2 . Поэтому после прохождения света через компенсатор K_2 вдоль линий линейной поляризации будут иметься точки, направление линейной поляризации света в которых перпендикулярно анализатору. Эти точки соответствуют нулю интенсивности света, прошедшего анализатор A . В плоскости F получается система чёрных точек, лежащих в узлах двух ортогональных систем параллельных прямых. Положение этих точек зависит от Δ и ρ . При измерениях сравниваются положения этих точек с положением чёрных точек, получающихся при прохождении через компенсаторы линейно поляризованного света. Так измеряются Δ и ρ для данного угла падения φ . Метод Фохта применим также и в видимой области. Однако если измерения проводятся только в видимой области, то обычно обходятся без компенсатора K_2 . Вращая анализатор до появления тёмных полос, находят оба направления восстановленной линейной поляризации. Угол поворота анализатора от появления одной системы тёмных полос, соответствующих суммарному сдвигу фаз $0, 2\pi, 4\pi$ и т. д., до появления другой системы тёмных полос, соответствующих суммарному сдвигу фаз $\pi, 3\pi, 5\pi$ и т. д., равняется 2ρ . Положение компенсатора даёт Δ . Этот метод был использован в работах 49, 50, 38. Измерив значения Δ и ρ , для данного угла падения φ определяют $n_{эфф}$ и $\chi_{эфф}$ *).

*) В видимой и ультрафиолетовой частях спектра приближённые формулы (1.17), служащие для определения $n_{эфф}$ и $\chi_{эфф}$, могут быть уже недостаточно точны. В этом случае найти $n_{эфф}$ и $\chi_{эфф}$ по измеренным Δ и ρ можно без дальнейшего анализа, только в предположении о нормальном характере скин-эффекта, когда $n_{эфф} = n$ и $\chi_{эфф} = \chi$. В подоб-

К сожалению, данные, приведённые в этих работах, не могут быть нами использованы, во-первых, из-за неудовлетворительного способа приготовления металлических зеркал, во-вторых, из-за того, что у всех исследованных металлов в ультрафиолетовой и видимой области лежат полосы поглощения связанных электронов и нельзя с достоверностью отделить квантовое поглощение от поглощения, связанного с электронами проводимости.

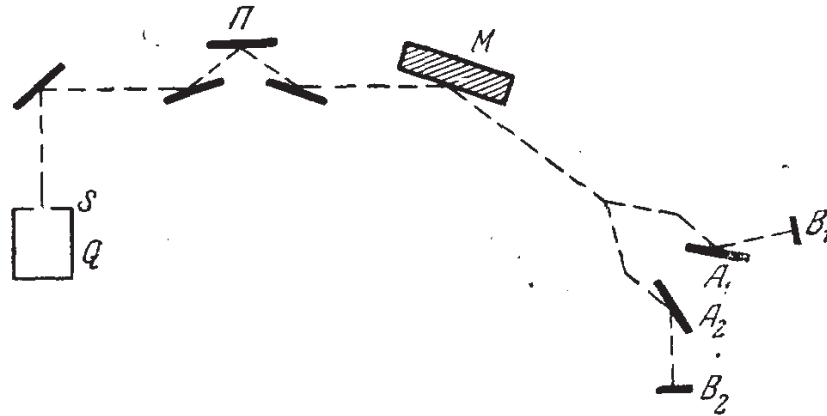


Рис. 10. Схема метода Фёрстерлинга и Фредерикса определения оптических постоянных металла в инфракрасной области.

Что касается измерений оптических постоянных металлов в инфракрасной части спектра, которые нас здесь особенно интересуют (см. выше), то методы, использующие компенсацию сдвига фаз, практически непригодны ввиду отсутствия в инфракрасной области подходящих двоякопреломляющих кристаллов. В трёх работах^{39, 40, 52}, о которых речь будет идти ниже, вместо измерения Δ и ρ при данном φ измерялись главный угол падения φ_0 и главный азимут ρ_0 . Наиболее существенной работой в этой области можно считать работу⁴⁰. Разберём её несколько подробнее. Схема метода дана на рис. 10. Выходная щель монохроматора Q с призмой из NaCl служит источником монохроматического инфракрасного излучения. Далее, параллельный пучок

ных условиях n и χ вычисляют по точным формулам⁵¹

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} Q &= \sin \Delta \operatorname{tg} 2\rho, \\ \cos 2P &= \cos \Delta \sin 2\rho, \\ s &= \operatorname{tg} P \sin \varphi \operatorname{tg} \varphi, \\ \operatorname{tg} \chi &= \frac{s^2 \sin 2Q}{s^2 \cos 2Q + \sin^2 \varphi}, \end{aligned} \right\} \begin{aligned} n^2 &= \frac{s^2 \sin 2Q}{2 \operatorname{tg} \frac{\chi}{2}}, \\ \chi &= n \operatorname{tg} \frac{\chi}{2}, \end{aligned} \quad (5.2)$$

где Q , P , s и χ — вспомогательные величины. Разумеется, при условии (1.10) выражения (5.2) переходят в (1.17).

монохроматического инфракрасного света длины волны λ проходит через поляризатор P^*), состоящий из одного селенового зеркала и двух металлических зеркал, и падает на исследуемое металлическое зеркало M . Отразившись от металлического зеркала, пучок разбивается на две равные части. Одна часть падает на зеркало анализатора A_1 , другая часть — на A_2 . Анализаторы A_1 и A_2 устанавливаются перпендикулярно друг к другу. После анализаторов излучение попадает на два болометра B_1 и B_2 .

Измерения проводились следующим образом: фиксировался некоторый угол падения φ . Поляризатор P устанавливался под углом 45° к плоскости падения света на зеркало M . Анализаторы A_1 и A_2 ставились под углом $\pm 45^\circ$ к плоскости падения. Менялась длина волны λ , пока энергии, падающие на болометры B_1 и B_2 , не оказывались равными (болометрический мост уравнивался). Для найденной длины волны угол падения был главным углом падения, т. е. $\varphi = \varphi_0$. Действительно, только в этом случае главные оси эллипса совпадали с s - и p -направлениями и только в этом случае болометрический мост уравнивался. Далее, для данной длины волны λ анализаторы A_1 и A_2 ставились параллельно и перпендикулярно плоскости падения. Поляризатор поворачивался, пока болометрический мост не уравнивался. Отсчёт по поляризатору давал главный азимут ρ_0 . Зная главный угол падения φ_0 и главный азимут ρ_0 , легко по формулам (1.13) и (1.15) найти $n_{\text{эфф}}$ и $\chi_{\text{эфф}}$. Авторам работы⁴⁰ удалось измерить оптические постоянные металлов с большой проводимостью (Ag, Au, Cu) в инфракрасной области до $\lambda = 4 \div 5 \mu$. Для больших длин волн значения φ_0 становятся настолько близкими к 90° , что измерения невозможны. Соответствующие данные являются пока единственными, дающими оптические постоянные металлов с большой проводимостью в области до $4 \div 5 \mu$. К сожалению, методы приготовления металлических поверхностей, применённые в этой работе, заставляют сомневаться в том, что полученные оптические константы относятся к массивному металлу. Авторы исследовали тонкие плёнки, приготовленные либо химическим осаждением (Ag), либо гальваническим осаждением (Cu, Au), либо, наконец, катодным напылением (Cu, Pt). Выше уже разбирались недостатки этих способов приготовления отражающих поверхностей. В двух других упомянутых работах^{39, 52} измерения проведены до меньших длин волн, чем в⁴⁰ ($\lambda_{\text{макс}} = 1 \mu$ в³⁹ и $\lambda_{\text{макс}} = 2,25 \mu$ в работе⁵²), приготовление же отражающих поверхностей также неудовлетворительно.

Метод Фёрстерлинга и Фредерикса⁴⁰ видоизменяется в недавно появившейся работе⁵⁵. Авторы предложили определять главный

*) Способы изготовления поляризаторов для инфракрасной области указаны в работах^{53, 54}.

угол падения φ_0 и главный азимут ρ_0 следующим образом (рис. 11). При равномерном вращении поляризатора с некоторой частотой

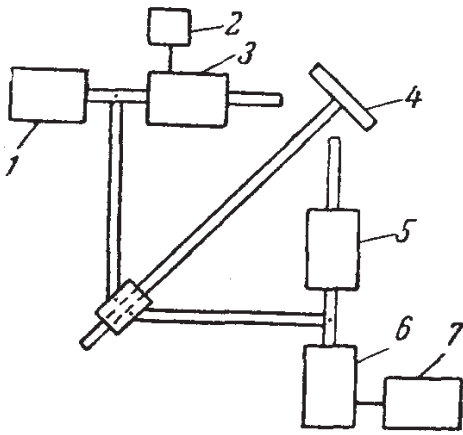


Рис. 11. Схема модуляционного метода определения φ_0 и ρ_0 в инфракрасной области: 1 — источник и коллиматор, 2 — мотор, 3 — поляризатор, 4 — образец, 5 — анализатор, 6 — монохроматор и детектор, 7 — усилитель.

свет, отражённый от металлического зеркала и прошедший анализатор, модулируется с удвоенной частотой. Далее свет попадает на болометр с постоянной времени, меньшей периода модуляции. Полученный электрический сигнал подаётся на резонансный усилитель. Если теперь подобрать такой угол падения и такое положение анализатора, что сигнал исчезает, то $\varphi = \varphi_0$ и $\rho = \rho_0$.

Эти же авторы в работе⁵⁶ предложили другой способ определения оптических постоянных металлов. Способ состоит в анализе эллипса, получающегося вследствие отражения линейно поляризованного света от металлического зеркала с помощью только одного анализатора (без модуляции света). Вращая анализатор,

можно найти направления, соответствующие максимуму и минимуму интенсивности света. Эти направления и есть направления главных осей эллипса. Измерив отношение минимальной интенсивности к максимальной, получают отношение осей эллипса, равное $\sqrt{\frac{I_{\min}}{I_{\max}}}$.

Этих данных достаточно для определения Δ и ρ . Действительно, пусть большая ось эллипса составляет угол α с s -направлением (см. рис. 4). Обозначим отношение малой оси эллипса к большой оси через $\operatorname{tg} \xi = \frac{OB}{OA}$. Азимут ρ определяет отношение $\frac{OD}{OC} = \operatorname{tg} \rho = \frac{|R_p|}{|R_s|}$. Тогда Δ и ρ связаны с α и ξ соотношениями (см.⁶⁰):

$$\operatorname{tg} \Delta = \pm \frac{\operatorname{tg} 2\xi}{\sin 2\alpha}, \quad \cos 2\rho = \pm \cos 2\xi \cos 2\alpha. \quad (5.3)$$

В работах^{55, 56} приводятся результаты некоторых измерений оптических констант для Sb и Bi, иллюстрирующие действие описанных методов. Никаких систематических данных по измерению оптических постоянных металлов с помощью описанных установок не приводится.

Оба эти метода непригодны для измерения оптических констант хороших проводников в инфракрасной области $\lambda > 4 \div 5 \mu$. Метод, предложенный в работе⁵⁵, непригоден, так как главный угол падения в этом случае очень близок к 90° и определение его

с необходимой точностью становится невозможным. Метод, предложенный в работе⁵⁶, также непригоден, так как в этом случае Δ очень близко к 180° , а ρ к 45° . Поэтому очень небольшая ошибка в установке поляризатора будет приводить к большим ошибкам в определении оптических постоянных.

Учитывая, что граница внутреннего фотоэффекта для большинства металлов лежит в области $0,5 \div 9 \mu$, ясна необходимость определения оптических констант в области $\lambda > 5 \div 10 \mu$. То же следует и из соображений, изложенных в §§ 3, 4. Для работы в этой области ни один из применяемых до сих пор методов непригоден. При разработке соответствующего метода необходимо будет применить многократное отражение света от металла, в результате чего нахождение $n_{\text{эфф}}$ и $\kappa_{\text{эфф}}$ принципиально вполне возможно.

Второй вывод, который следует из рассмотрения экспериментальных работ, состоит в том, что необходимо применять такие методы приготовления металлических зеркал, которые давали бы константы, относящиеся к массивному металлу. Такими методами можно, повидимому, считать электролитическую полировку и отливку металла на полированный плавленный кварц или стекло, если приняты специальные меры для предохранения металла от окисления. Однако в каждом случае необходимо проведение специального экспериментального исследования с целью убедиться в том, что поверхность является достаточно хорошей для того, чтобы могла идти речь о получении констант для массивного металла.

§ 6. ОБСУЖДЕНИЕ ИМЕЮЩИХСЯ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

Как ясно из изложенного в § 5, вполне надёжных сведений о $n_{\text{эфф}}$, $\kappa_{\text{эфф}}$ и A в инфракрасной области не существует. Поэтому наша задача ограничивается приведением и сопоставлением наиболее достоверных из имеющихся данных.

1. Значения коэффициента поглощения A при нормальном падении приведены в таблицах I—VI.

Таблица I

Экспериментальные значения коэффициента A (в процентах) для меди

λ T (°K)	2 μ	3 μ	4 μ	2—11 μ	8—18 μ	14 μ	Способ обработки поверхности	Литература
293	—	—	—	1,17	1,12	—	Механическая полировка	32
90	—	—	—	0,86	0,82	—		То же
4,2	—	—	—	—	—	0,62	Электрополировка	33
4,2	0,39	0,39	0,39	—	—	—		»

Таблица II

Экспериментальные значения коэффициентов A (в процентах) для серебра

λ T (°K)	1,0 μ	1,5 μ	2,0 μ	2,5 μ	3,3 μ	5,0 μ	7,0 μ	10,0 μ	13,0 μ	Используемый материал	Литература
290	1,32	1,05	0,92	0,92	0,92	0,89	0,90	0,87	0,81	Техническая фольга, толщиной 14 μ	17
85	1,05	0,86	0,81	0,78	0,79	0,68	0,68	0,62	0,59		

Таблица III

Экспериментальные значения коэффициента A (в процентах) для золота

λ T (°K)	1,0 μ	1,5 μ	2,0 μ	2,5 μ	3,3 μ	5,0 μ	7,0 μ	10,0 μ	13,0 μ	Используемый материал	Литература
290	1,74	1,31	1,18	1,13	1,04	1,01	1,03	1,05	0,95	Фольга, толщиной 10 μ	17
85	1,22	0,92	0,81	0,80	0,76	0,73	0,73	0,78	0,64		

Таблица IV

Экспериментальные значения коэффициента A (в процентах) для платины

λ T (°K)	1,0 μ	1,5 μ	2,0 μ	2,5 μ	3,3 μ	5,0 μ	7,0 μ	10,0 μ	13,0 μ	Используемый материал	Литература
290	21,0	20,0	19,0	11,9	5,60	6,25	3,20	2,86	2,82	Фольга, толщиной 10 μ	17
85	18,5	17,9	18,7	11,8	3,68	2,09	1,69	1,77	1,61		

Таблица V

Экспериментальные значения коэффициента A (в процентах) для олова

λ	1,06 μ	1,71 μ	3,06 μ	3,96 μ	5,24 μ	6,75 μ	8,02 μ	9,38 μ	10,49 μ	12,03 μ	14 μ	Способ обработки поверхности	Литература
T ($^{\circ}\text{K}$)													
~ 290	46,0	41,7	31,4	28,3	23,3	19,7	16,8	13,0	13,0	13,1	—	Отливка	35
4,2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1,24	Электрополировка	33

Таблица VI

Экспериментальные значения коэффициента A (в процентах) для алюминия

λ	1,06 μ	1,71 μ	3,06 μ	3,96 μ	5,24 μ	6,75 μ	8,02 μ	9,38 μ	10,49 μ	12,03 μ	14 μ	Способ обработки поверхности	Литература
T ($^{\circ}\text{K}$)													
~ 290	26,2	19,2	11,7	8,6	6,2	4,8	3,1	2,6	3,1	2,7	—	Механическая полировка	35
4,2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1,11	Электрополировка	33

Для электрополированного свинца при $T = 4,2^\circ \text{K}$ найдено $A = 1,15\%$ ³³.

2. Значения $n_{\text{эфф}}$ и $\chi_{\text{эфф}}$ при комнатной температуре приведены в таблицах VII — XII.

Таблица VII

Экспериментальные значения $n_{\text{эфф}}$ и $\chi_{\text{эфф}}$ и рассчитанные значения N для напылённой меди ⁴⁰

λ (μ)	$n_{\text{эфф}}$	$\chi_{\text{эфф}}$	$A \cdot 10^2$ рассчитано по (1.19)	$N \cdot 10^{-22}$ рассчитано по (3.21)
0,81	0,43	4,2	9,2	3,03
1,03	0,43	5,6	5,1	3,30
1,27	0,37	7,1	2,8	3,45
1,53	0,53	8,0	3,2	3,12
1,77	0,73	9,5	3,1	3,21
2,28	0,68	11,4	3,5	2,79
3,05	0,90	14,6	1,66	2,46
3,25	1,08	16,4	1,58	2,83
3,59	1,39	18,9	1,53	3,15
4,20	1,92	22,8	1,45	3,31
5,1 (?)	2,98	28,4	1,45	3,53

Таблица VIII

Экспериментальные значения $n_{\text{эфф}}$ и $\chi_{\text{эфф}}$ и рассчитанные значения N для химически осаждённого серебра ⁴⁰

λ (μ)	$n_{\text{эфф}}$	$\chi_{\text{эфф}}$	$A \cdot 10^2$ рассчитано по (1.19)	$N \cdot 10^{-22}$ рассчитано по (3.21)
0,65	1,19	3,42	5,8	3,42
0,75	0,16	4,57	2,9	4,22
0,94	0,15	5,62	1,8	3,95
1,15	0,23	7,18	1,7	4,20
1,47	0,36	8,85	1,8	4,65
2,10	1,00	14,3	1,9	5,19
2,89	1,39	19,0	1,5	4,85
3,38	2,06	22,9	1,5	5,12
4,04	2,98	28,8	1,4	5,63
4,37	4,34	32,6	1,5	6,27

Таблица IX

Экспериментальные значения $n_{эфф}$ и $\kappa_{эфф}$ и рассчитанные значения N для гальванически осаждённого золота ⁴⁰

λ (μ)	$n_{эфф}$	$\kappa_{эфф}$	$A \cdot 10^2$ рассчитано по (1.19)	$N \cdot 10^{-22}$ рассчитано по (3.21)
0,67	0,28	5,1	4,1	5,30
0,87	0,21	5,4	2,7	4,63
1,07	0,25	7,1	1,9	4,95
1,41	0,36	9,4	1,6	5,06
1,69	0,40	11,4	1,2	5,07
2,11	0,50	14,3	1,0	5,14
2,87	0,73	16,5	1,1	3,63
3,14	0,80	18,9	0,89	4,12
3,50	0,96	22,6	0,75	4,77
4,13	1,60	28,8	0,76	5,39
4,83	1,83	33,0	0,67	5,14

Таблица X

Экспериментальные значения $n_{эфф}$ и $\kappa_{эфф}$ для напылённой платины ⁴⁰

λ (μ)	$n_{эфф}$	$\kappa_{эфф}$	$A \cdot 10^2$ рассчи- тано по (1.19)
1,00	3,42	6,3	23
1,52	4,71	8,3	19
1,97	5,92	9,8	16
3,29	7,50	12,2	14
3,41	8,82	13,8	12
4,65	10,9	15,5	11

Таблица XI

Экспериментальные значения $n_{эфф}$ и $\kappa_{эфф}$ и рассчитанные значения N для олова, отлитого на стекло ⁴⁸

λ (μ)	$n_{эфф}$	$\kappa_{эфф}$	$A \cdot 10^2$ рассчи- тано по (1.19)	$N \cdot 10^{-22}$ рассчи- тано по (3.21)
0,325	0,980	2,396	40,6	7,83
0,361	0,905	1,931	49,2	4,44
0,425	0,701	2,487	30,8	4,62
0,468	0,703	3,124	22,3	5,70
0,502	0,780	3,575	19,6	6,35
0,588	0,121	4,512	18	7,25
0,668	1,418	5,007	18,3	7,05

Значения $n_{эфф}$ и $\chi_{эфф}$ использованы для вычисления концентрации свободных электронов N по формуле (3.21). Как указывалось в §§ 3, 4, использование этой формулы вполне законно лишь, если

Таблица XII*)

Экспериментальные значения $n_{эфф}$ и $\chi_{эфф}$ и рассчитанные значения N для висмута, отлитого на стекло и механически отполированного⁴⁴

λ (μ)	$n_{эфф}$	$\chi_{эфф}$	$A \cdot 10^2$ рассчитано по (1.19)	$N \cdot 10^{-22}$ рассчитано по (3.21)
1,0	4,6	5,0	33	2,4
1,9	6,5	3,7	37	1,65
2,7	8,0	2,7	36	1,10
3,45	8,6	1,15	37	0,71
5,0	8,2	1,5	38	0,31
5,7	7,6	2,2	39	0,22

длина волны λ больше длины волны λ_0 , отвечающей границе внутреннего фотоэффекта. Значения λ_0 согласно¹⁷ приведены в таблице XIII. Кроме того, должно, конечно, выполняться неравенство $\epsilon \gg 1$.

Таблица XIII

Верхняя граница внутреннего фотоэффекта в металлах

Металл	Cu	Ag	Au	Pt	Sn	Al
Верхняя граница внутреннего фотоэффекта λ_0 . . .	0,6 μ	0,4 μ	0,5 μ	~7 μ	~9 μ	~8 μ

Из таблицы XIII ясно, что данные для Cu, Ag и Au в области $1 \div 5 \mu$ можно использовать для вычисления N с той оговоркой, что нет уверенности в том, что эти значения N относятся к массивному металлу. Данные же для Pt и Sn нельзя сколько-нибудь уверенно использовать для вычисления N . Однако Sn — сверхпроводник и получение хотя бы приблизительных данных относительно Sn представляет интерес, поэтому для ориентировки в таблице XI приводятся значения N , вычисленные по формуле (3.21).

*) Таблица составлена по данным графика, приведённого в⁴⁴.

В таблице XIV приведены результаты обработки данных по оптическим постоянным, электронной теплоёмкости и поверхностному импеданцу на радиочастотах для различных металлов.

Таблица XIV

Металл	$N_a \cdot 10^{-22}$	$N \cdot 10^{-22}$ по (3.21)	$\gamma \cdot 10^{-3}$ $\text{эрг} \cdot \text{см}^{-3} \cdot \text{град}^{-1}$ согласно 57, 58, 59	$\nu_0 \cdot 10^{-8}$ $\text{см} \cdot \text{сек}^{-1}$ по (4.26)	$\frac{\sigma(0)}{l} \cdot 10^{-22}$ в CGSE согласно ²²	$N \cdot 10^{-22}$ по (4.27)	$\nu_0 \cdot 10^{-8}$ $\text{см} \cdot \text{сек}^{-1}$ по (4.24)	$\nu_0 \cdot 10^{-8}$ $\text{см} \cdot \text{сек}^{-1}$ по (4.27a)
	1	2	3	4	5	6	7	8
Cu	8,5	3,3	1,02	0,825	13,9	6,1	0,60	1,11
Ag	5,9	5,7	0,65	1,35	8,3	3,4	1,75	1,04
Au	5,9	5,1	~ 0,65	~ 1,3	7,6	~ 2,9	1,70	~ 1,0
Sn	3,7	6,9 (?)	1,03	1,2 (?)	8,6	2,3	2,0 (?)	0,68
Al	6,0	5,4	1,46	0,88	5,5	0,67	2,5	0,31

В столбце 1 таблицы XIV приводятся концентрации атомов N_a . В столбце 2 даны значения концентрации электронов N , вычисленные по формуле (3.21) (указаны значения, являющиеся средними для трёх наибольших λ в таблицах VII, VIII, IX и XI). В столбце 3 приводятся значения $\gamma = \frac{C_e}{T}$, где C_e — электронная теплоёмкость металлов по данным^{57, 58, 59}. В столбце 4 даны значения ν_0 , вычисленные по формуле (4.26). В столбце 5 приводятся значения $\frac{\sigma(0)}{l}$ по данным²². В столбце 6 даны значения N , вычисленные по формуле (4.27). В столбцах 7 и 8 даны значения ν_0 , вычисленные по формулам (4.24) и (4.27a). Следует, однако, иметь в виду, что последние формулы, в которые входит величина $\frac{\sigma(0)}{l}$, менее надёжны, чем формулы (3.21) и (4.26). Это связано с тем, что на опытах в области радиочастот измеряется не $\frac{\sigma(0)}{l}$, а $R = \text{Re } Z$ и переход к $\frac{\sigma(0)}{l}$ осуществляется с помощью формулы (см. ^{16, 19, 20, 22}), зависящей от предположения о характере отражения и других моментов. В этой связи формулу (4.27) нужно использовать скорее не для определения N , а для проверки теории аномального скин-эффекта по независимо измеренным значениям N и γ (если теория правильна, то значения N из (3.21) и из (4.27) должны, конечно, совпадать). Данные, приведённые в таб-

лице XIV, не могут, к сожалению, использоваться для такой проверки, так как все величины N , γ и $\frac{\sigma}{l}$ получены на разных образцах с различной обработкой их поверхности и т. п. Поэтому на данные таблицы XIV нужно смотреть лишь как на ориентировочные и носящие преимущественно иллюстративный характер.

Рассматривая данные для коэффициента A , следует отметить, что в основной член формул для A в общем случае входит зависящая от статической электропроводности σ_0 величина q , а это значит, что величина A сильно зависит от примесей, от наличия натяжений, от обработки поверхности и т. п. Поэтому тут нужна особая тщательность в эксперименте. Из всех имеющихся данных наиболее надёжными следует признать появившиеся в последнее время измерения³⁴, выполненные с чистой, отождённой и электролитически отполированной медью при температуре $4,2^\circ \text{K}$ в монохроматическом свете. Для коэффициента A получено значение $0,39\%$. Расчёт по формуле (4.36) с использованием значений N и v_0 из таблицы XIV и σ_0 из¹⁷ (приведено ниже в таблице XV) приводит к значению $A = 0,21\%$. Расхождение выходит за пределы ошибок эксперимента. Причина расхождения лежит, вероятно, в необходимости учесть при температуре жидкого гелия и $\lambda \leq 4 \mu$ квантовые эффекты (см. § 4, в)).

Что касается остальных данных, то по ряду причин, указанных в § 5, их нельзя использовать для точного количественного сравнения эксперимента с теорией. Но даже грубое сравнение ясно указывает на необходимость учёта аномального характера скин-эффекта при диффузном отражении электронов от поверхности. Соответствующее сравнение экспериментальных и теоретических данных проведено в таблице XV.

Таблица XV

Экспериментальная и теоретическая зависимости коэффициента A (в процентах) от температуры для меди

T	A эксперим.	A теоретич. по теории нормального скин-эффекта	A теоретич. по теории аномального скин-эффекта		$\sigma_0 \cdot 10^{-17}$ CGSE согласно ¹⁷
			Диффузное отражение электронов	Зеркальное отражение электронов	
Комнатная температура	1,17	0,31	0,52	0,32	5,2
Жидк. воздух	0,86	0,058	0,265	0,059	28,3
Жидк. гелий	0,39	0,0020	0,21	0,0025	820

Экспериментальные данные для комнатной температуры и температуры жидкого воздуха взяты из работы³², для температуры жидкого гелия — из работы³⁴. Теоретические значения подсчитаны по формулам (3.19), (4.36) и (4.42), исходя из данных для N и v_0 , приведённых в столбцах 2 и 4 таблицы IV и данных для σ_0 , приведённых в работе¹⁷.

Как наглядно видно из таблицы XV, аномальный характер скин-эффекта при диффузном отражении электронов от поверхности металла, как это и следует из теории, особенно сильно проявляется при низких температурах. Что же касается имеющих в таблице XV расхождений между экспериментальными данными и теорией аномального скин-эффекта с учётом диффузного характера отражения электронов, то им не следует пока придавать особого значения (в случае комнатной температуры и температуры жидкого воздуха особенно существенно, что измерения проводились с недостаточно хорошей поверхностью; в случае измерений при температуре жидкого гелия расхождение в основном обусловлено, по видимому, неучётом квантовых эффектов, которые могут быть исключены при переходе в значительно более длинноволновую область спектра).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате всего изложенного ясно, что исследование оптических свойств металлов путём измерения величин $n_{\text{эфф}}(\omega)$, $\chi_{\text{эфф}}(\omega)$ и $A(\omega)$ открывает целый ряд возможностей, представляющих несомненный интерес для физики металлов. Наиболее важным представляется определение оптическим методом, который является в этом отношении наиболее прямым и надёжным, концентрации электронов проводимости N . Подобные измерения нужно провести для большого числа металлов и, в частности, для металлов, могущих находиться в сверхпроводящем состоянии. Имеющиеся в этой области экспериментальные данные весьма немногочисленны и ненадёжны. Помимо определения N , нужно по измерениям электронной части теплоёмкости или поверхностного импеданца на радиочастотах найти скорость электронов на поверхности Ферми. После этого, а в известном отношении и независимо от этого, измерения в инфракрасной части спектра могут быть использованы для проверки теории аномального скин-эффекта, выяснения характера отражения электронов от поверхности металла и т. п. Дальнейшей задачей теории, могущей развиваться лишь в тесном контакте с экспериментом, является, с одной стороны, обобщение имеющихся результатов на случай анизотропных поверхностей Ферми и, вообще, на случай многовалентных металлов. С другой стороны, перед теорией стоит не менее важная задача, состоящая в детальном учёте квантовых эффектов, о которых была речь в § 4, в).

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. М. Борн, Оптика, ОНТИ, 1937.
2. М. В. Волькенштейн, Молекулярная оптика, Гостехиздат, 1951.
3. А. В. Соколов, УФН **50**, 161 (1953).
4. Я. Л. Альперт, В. Л. Гинзбург и Е. Л. Фейнберг, Распространение радиоволн, Гостехиздат, 1953.
5. В. Л. Гинзбург, ЖЭТФ **29**, № 2 (1955).
6. В. Л. Гинзбург, Акустический журнал **1**, № 1 (1955).
7. Г. Бете и А. Зоммерфельд, Электронная теория металлов, ОНТИ, М. — Л. (1938).
8. А. Вильсон, Квантовая теория металлов, Гостехиздат, 1941.
9. В. Л. Гинзбург и В. П. Силин, ЖЭТФ **29**, № 1 (1955).
10. W. Benthem a. R. Kronig, Physica **20**, 293 (1954).
11. E. H. Sondheimer, Proc. Roy. Soc. **224**, 260 (1954).
12. A. V. Pippard, Proc. Roy. Soc. **224**, 273 (1954).
13. М. Я. Азбель и М. И. Каганов, ДАН **95**, 41 (1954).
- 13а. K. Ljoije, Zeits. f. Phys. **139**, 388 (1954).
14. В. Л. Гинзбург, ДАН **97**, 999 (1954).
15. С. В. Вонсовский, Изв. АН СССР (серия физ.), **12**, 337, (1948); УФН **48**, 289 (1952).
16. В. Л. Гинзбург, УФН **42**, 333 (1950); **48**, 25 (1952).
17. R. B. Dingle, Physica **19**, 348 (1953).
18. T. Holstein, Phys. Rev. **88**, 1427 (1952).
19. G. E. Reuter a. E. H. Sondheimer, Proc. Roy. Soc. **195**, 336 (1948).
20. R. B. Dingle, Physica **19**, 311, 729 (1953).
21. R. G. Chambers, Proc. Roy. Soc. **215**, 481 (1952).
22. E. H. Sondheimer, Adv. in Phys. **1**, 1 (1952).
23. В. Л. Гинзбург, ЖЭТФ **21**, 979 (1951).
24. R. G. Chambers, Physica **19**, 365 (1953).
25. H. A. Müser, Phil. Mag. **45**, 1237 (1954).
26. T. Holstein, Phys. Rev. **96**, 535 (1954).
- 26а. H. Schmidt, Zeits. f. Phys. **139**, 433 (1954).
27. G. Martin, Ann. d. Phys. **38**, 615 (1940).
28. G. Joos and A. Klopfer, Zeits. f. Phys. **138**, 251 (1954).
29. L. G. Schulz, J. Opt. Soc. Am. **44**, 357, 540 (1954).
30. L. G. Schulz and F. R. Tangherlini, J. Opt. Soc. Am. **44**, 362 (1954).
31. Lameris, Diss. Groningen, 1936 (данные авторы приведены в работе ¹⁷).
32. K. Weiss, Ann. d. Phys. **2**, 1 (1948).
33. K. G. Ramanathan, Proc. Roy. Soc. A. **65**, 532 (1952).
34. Manfred A. Biondi, Phys. Rev. **96**, 534 (1954).
35. W. W. Coblentz, B. S. Scientific Paper № 45 (1906), № 152 (1911), № 308, 1917, № 379 (1920).
36. Joseph I. Gier, Robert V. Dunkle a. Jerry T. Bevans, J. Opt. Soc. Am. **44**, 558 (1954).
37. R. G. Chambers, Nature **165**, 239 (1950).
38. H. Lowery, H. Wilkinson, Phil. Mag. **22**, 769 (1936).
39. R. Kretzmann, Ann. d. Phys. **37**, 303 (1940).
40. K. Försterting und V. Fredericksz, Ann. d. Phys. **40**, 201 (1913).
41. R. Tousey, J. Opt. Soc. Am. **29**, 235 (1939).
42. J. Simon, J. Opt. Soc. Am. **41**, 336 (1951).
43. D. G. Avery, Proc. Phys. Soc. **64**, B, 1087 (1951); **65**, B, 425 (1952).
44. J. N. Hodgson, Proc. Phys. Soc. **67**, B, 269 (1954).
45. R. S. Minor, Ann. d. Phys. **10**, 581 (1903).

46. W. Meier, Ann. d. Phys. **31**, 1017 (1910).
47. V. Freedericksz, Ann. d. Phys. **34**, 780 (1911).
48. P. Erochin, Ann. d. Phys. **39**, 213 (1912).
49. P. Drude, Wied. Ann. **39**, 481 (1890).
50. C. V. Kent, Phys. Rev. **14**, 459 (1919).
51. P. Drude, Wied. Ann. **64**, 161 (1898).
52. L. R. Ingersoll, Astrophys. Journ. **32**, 265 (1910).
53. M. Czerny, Zeits. f. Phys. **16**, 321 (1923).
54. A. Elliott, E. J. Ambrose a. R. Temple, J. Opt. Soc. Am. **38**, 212, 1948.
55. G. K. T. Conn a. G. K. Eaton, J. Opt. Soc. Am. **44**, 484 (1954).
56. G. R. Conn a. G. K. Eaton, J. Opt. Soc. Am. **44**, 546 (1954).
57. J. Rayne, Phys. Rev. **95**, 1428 (1954).
58. J. Eisenstein, Rev. of. Mod. Phys. **26**, 277 (1954).
59. C. F. Squire, Low Temperature Physics, New York — Toronto — London (1953).
60. А. Шустер, Введение в теоретическую оптику, стр. 19, ОНТИ, 1935.
61. Ю. Л. Климонтович и В. П. Силин, ЖЭТФ **23**, 151 (1952).
62. K. Wolfe, Proc. Phys. Soc. **68A**, 121 (1955).
63. J. R. Beattie and G. K. T. Conn, Phyl. Mag. **46**, 222 (1955).
64. J. R. Beattie, Phyl. Mag. **46**, 235 (1955).

*

* *

Примечание при корректуре.

В появившихся в последнее время работах ^{63, 64} детально обсуждаются методы измерения $n_{эфф}$ и $\kappa_{эфф}$ в инфракрасной области. При этом авторы приходят, в общем, к такому же заключению, как и в § 5 этой статьи (наиболее эффективным является измерение Δ и $\operatorname{tg} \rho$; в случае определения оптических постоянных хороших проводников необходимо использовать многократное отражение). В ⁶⁴ приводятся данные об оптических постоянных напылённого алюминия, которые использованы нами в таблице XIV (столбцы 2, 4 и 7 в последней строке).