8 и 8

1955 г. Февраль *Т. LV, вып. 2*

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

ВОПРОСЫ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Н. Н. Боголюбов и Д. В. Ширков

I. МАТРИЦА РАССЕЯНИЯ

СОДЕРЖАНИЕ

Введение 149
§ 1. Некоторые сведения из теории свободных волновых полей . . . 150
§ 2. Операторные выражения и сингулярные функции 157
§ 3. Основные понятия теории взаимодействующих полей 172
§ 4. Лагранжиан взаимодействия и S-матрица 182
§ 5. Раскрытие хронологических произведений 198
§ 6. Правила Фейнмана для вычисления матричных элементов и вероятности переходов 204
Цитированная литература 213

ВВЕДЕНИЕ

Развитие квантовой теории поля в её современной локализуемой форме наталкивается, как известно, на большие трудности, особенно при попытках выхода за рамки электродинамики.

В этой связи может представить интерес критическое изложение основных положений теории поля с более тщательным анализом природы возникающих в ней трудностей. Такое рассмотрение и составляет цель предлагаемого ряда статей, открывающегося данной работой.

Эта первая статья начинается с краткого изложения схемы построения теории квантованных свободных полей (§ 1). Далее рассматриваются вопросы об определении сингулярных интегрируемых операторных функций, играющие основную роль при исследовании матрицы рассеяния в теории взаимодействующих полей (§ 2). В § 4 излагается метод введения матрицы рассеяния, не основанный на гамильтоновом формализме. Его роль играют явно сформулированные физические условия, например условия причинности, ковариантности и т. д. Статья заканчивается

Академия наук СССР
Физический ин-т
БИБЛИОТЕКА

рассмотрением техники раскрытия хронологических произведений на основе теоремы Вика (§ 5) и приложения её к формулировке правил Фейнмана для вычисления матричных элементов (§ 6).

В следующих статьях предполагается исследовать вопросы устранения расходимостей из асимптотического ряда для матрицы рассеяния, вопросы обобщения уравнения Шредингера и изложить основы теории функций Грина.

§ 1. НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ СВОБОДНЫХ ВОЛНОВЫХ ПОЛЕЙ

В данном разделе мы кратко рассмотрим схему построения квантовой теории свободных полей, заострив внимание на некоторых принципиальных моментах, которые нам понадобятся при дальнейшем изложении основного материала.

Как известно, величинами, играющими основную роль в полевых теориях, являются полевые функции, подчиняющиеся линейным дифференциальным уравнениям — так называемым уравнениям поля.

Эти уравнения в каждом конкретном случае могут быть получены в качестве уравнений Эйлера из принципа стационарности некоторого квадратичного функционала, именуемого действием. Из требования инвариантности действия по отношению к четырём трансляциям, шести лоренцовым поворотам и градиентному преобразованию 1-го рода (повороту фазового множителя) могут быть получены соответствующие интегралы движения: 4-вектор энергии-импульса, тензор момента количества движения и плотность заряда (теорема Нетер).

Указанный способ построения уравнений поля и основных динамических переменных, целиком основанный на действии и его 4-плотности — функции Лагранжа, в отличие от гамильтонова формализма, основанного на функции Гамильтона и канонически сопряженных величинах, называется лагранжевым формализмом. Важным преимуществом лагранжева формализма перед гамильтоновым является его явная релятивистская ковариантность и полная симметрия пространственных и временной координат.

Рассмотрим переход от классической теории поля к квантовой теории. Классическое описание полей характеризуется тем, что теория не рассматривает явным образом процессов возникновения и уничтожения (точнее, взаимного превращения) частиц, соответствующих этим полям. Квадрат классической функции поля даёт вероятность нахождения частицы поля в данном состоянии. В квантовой теории, иначе теории вторичного квантования, волновые функции полей описывают совокупности частиц, процессы взаимных превращений которых явным образом содержатся в теории. В соответствии с этим волновые функции квантовых

полей приобретают операторный смысл и распадаются на операторы порождения и уничтожения частиц, между которыми устанавливаются перестановочные соотношения. Операторные волновые функции определяются уравнениями поля и перестановочными соотношениями с точностью до унитарного преобразования.

Функции поля, таким образом, уже не являются больше функциями в классическом смысле (c-функциями), а становятся операторами (q-функциями), действующими на общую для всех полей волновую функцию вторичного квантования, которую мы будем называть амплитудой состояния*). Во вторично проквантованной теории средние значения и вероятности состояний даются квадратичными формами амплитуды состояния.

В то время как трансформационные свойства функций поля при преобразованиях Лоренца определяются их тензорной размерностью, трансформация амплитуды состояния Φ при лоренцовых преобразованиях совершается с помощью унитарного оператора U_L

$$\Phi \to \Phi' = U_L \Phi. \tag{1.1}$$

Рассматривая бесконечно малое преобразование системы координат

$$\left.\begin{aligned} x \to x' = Lx = x + \delta x; \quad \delta x^k = a^k + \sum_l g^{ll} x^l \omega^{kl}, \\ \omega^{kl} + \omega^{lk} = 0, \quad l,k = 0,\ 1,\ 2,\ 3, \end{aligned}\right\} \tag{1.2}$$

где a^k и ω^{kl} — бесконечно малые параметры четырёх трансляций и шести поворотов, x^0 — временная переменная, x^α ($\alpha = 1, 2, 3$) — пространственные координаты, а g — тензор Минковского;

$$g^{ik} = \begin{cases} 0\ (i \neq k); \\ 1\ (i = k = 0) \\ -1\ (i = k = 1,\ 2,\ 3). \end{cases}$$

Из принципа соответствия находим, что

$$U_L = 1 + \delta U_L,$$

$$i\delta U_L = \sum_k g^{kk} P_0^k a^k + \frac{1}{2} \sum_{k,l} g^{kk} g^{ll} M_0^{kl} \omega^{kl}, \tag{1.3}$$

где P_0^k и M_0^{kl} соответственно 4-вектор энергии-импульса и тензор момента количества движения свободного поля. Разумеется,

*) Амплитуду состояния можно представлять как вектор в некотором гильбертовом пространстве, ввиду чего в американской литературе она обычно именуется вектором состояния (state vector).

в квантовом рассмотрении величины P_0 и M_0 уже являются операторами. При этом они выражаются через волновые операторные функции теми же соотношениями, вытекающими из теоремы Нетер, что и в классической теории, разумеется, с установлением надлежащего порядка операторных сомножителей, о котором мы скажем ниже.

Рассматривая матричные элементы операторов поля с помощью (1. 3), получаем уравнение, определяющее трансформацию волновой функции $u(x)$ при трансляции системы координат

$$ig^{kk}\frac{\partial u(x)}{\partial x^k} = [u(x), P_0^k]_- = u(x)P_0^k - P_0^k u(x), \qquad (1.4)$$

где P_0^k — операторный 4-вектор импульса. Уравнение (1. 4) играет важную роль в процессе вторичного квантования. Из него непосредственно следует физический смысл положительно-частотной и отрицательно-частотной частей операторных волновых функций[1]. Представляя поле $u(x)$ частиц с массой m в виде

$$u(x) = u^{(+)}(x) + u^{(-)}(x), \qquad (1.5)$$

$$u^{(+)}(x) = \int\limits_{k^0>0} e^{ikx}\delta(k^2 - m^2)\, u^{(+)}(k)\, dk, \qquad (1.6)$$

$$u^{(-)}(x) = \int\limits_{k^0>0} e^{-ikx}\delta(k^2 - m^2)\, u^{(-)}(k)\, dk, \qquad (1.7)$$

где

$$kx = \sum_i g^{ii}x^i k^i = x^0k^0 - \mathbf{kx};$$

$$k^2 = (k^0)^2 - \mathbf{k}^2;\ dk = dk^0 d\mathbf{k}$$

с помощью (1. 4) убеждаемся, что если Φ — амплитуда состояния с определённым значением 4-вектора энергии-импульса K^i

$$P^i\Phi = K^i\Phi,$$

то

$$P^i(u^{(+)}(k)\Phi) = (K^i + k^i)\Phi$$

и

$$P^i(u^{(-)}(k)\Phi) = (K^i - k^i)\Phi,$$

причём в обоих случаях

$$k^0 = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2} > 0.$$

Из этих уравнений следует, что оператор $u^{(+)}(k)$ соответствует рождению частицы с массой m и 4-импульсом k, а оператор $u^{(-)}(k)$ — её уничтожению.

Путём аналогичных рассуждений, основываясь на законе трансформации операторных функций и амплитуд состояний при градиентном преобразовании 1-го рода, можно показать, что в случае комплексного поля операторы $u^{(+)}$ и $u^{(-)}$ увеличивают на единицу заряд системы, а операторы $\overset{*}{u}{}^{(+)}$ и $\overset{*}{u}{}^{(-)}$ уменьшают его на единицу. Поэтому операторы комплексного поля описывают рождение и уничтожение частиц двух противоположных зарядов.

Определяя вакуум как состояние без частиц, получим соотношение

$$u^{(-)}(k)\Phi_{\text{вак}} = 0, \qquad (1.8)$$

которое вместе с условием нормировки

$$(\overset{*}{\Phi}_{\text{вак}}\cdot\Phi_{\text{вак}}) = 1 \qquad (1.9)$$

можно считать определением вакуума свободных полей. Очевидно также, что, действуя на $\Phi_{\text{вак}}$ различным числом положительно-частотных операторов $u^{(+)}$, мы можем получить амплитуды состояний, содержащих соответствующее число частиц. Общая амплитуда для произвольного состояния представится суперпозицией таких амплитуд

$$\Phi = \sum_{(i,j)}\int F_s(k_1,\ldots,k_s)\,\delta(k_1^2 - m_1^2)\ldots$$
$$\ldots\delta(k_s^2 - m_s^2)\, u_{j_1}^{(+)}(k_1)\ldots u_{j_s}^{(+)}(k_s)\, dk_1\ldots dk_s\Phi_{\text{вак}}. \qquad (1.10)$$

Переходя от (1. 10) к конфигурационному представлению, можно получить фоковское представление для амплитуды состояния.

Из (1. 8) следует наиболее удобный порядок операторных множителей в выражениях для динамических переменных. Требуя, чтобы средние значения этих динамических переменных по вакууму равнялись нулю, т. е.

$$(\overset{*}{\Phi}_{\text{вак}}P\Phi_{\text{вак}}) = 0 \text{ и т. д.},$$

мы получим, что в этих выражениях все операторы порождения $u^{(+)}$ должны стоять слева от всех операторов уничтожения $u^{(-)}$. Такой порядок операторов называется нормальным. Разумеется, произведение любого числа операторов поля может быть представлено в виде суммы операторных членов в нормальной форме и некоторого полинома по перестановочным функциям. Например,

$$u(x)u(y) = (u^{(+)}(x) + u^{(-)}(x))(u^{(+)}(y) + u^{(-)}(y)) =$$
$$= u^{(+)}(x)u^{(+)}(y) + u^{(+)}(x)u^{(-)}(y) \pm$$
$$\pm u^{(+)}(y)u^{(-)}(x) + u^{(-)}(x)u^{(-)}(y) + \frac{1}{i}\Delta^{(-)}(x-y), \qquad (1.11)$$

где $\Delta^{(-)}$ — результат коммутации (или антикоммутации — в зависимости от статистики) операторов $u^{(-)}(x)$ и $u^{(+)}(y)$, т. е.

$$[u^{(-)}(x),\ u^{(+)}(y)]_{\mp} = \frac{1}{i}\Delta^{(-)}(x-y).$$

Совершенно аналогично тому, как это сделано в (1. 11), в более общем случае произведение большего числа операторов

$$u(x_1)\,u(x_2)\ldots u(x_n)$$

можно представить в виде суммы произведений n $\pm$-частотных операторов в нормальной форме и некоторого полинома P по перестановочным функциям $\Delta^{(-)}$

$$u(x_1)\,u(x_2)\ldots u(x_n) =$$
$$= \sum(-1)^{\eta} u^{(+)}(x_{i_1})\,u^{(+)}(x_{i_2})\ldots u^{(-)}(x_{i_k})\ldots u^{(-)}(x_{i_n}) +$$
$$+ P\,[\Delta^{(-)}(x_i - x_j)], \tag{1.12}$$

причём коэффициенты полинома P содержат в свою очередь $m < n$ операторов $u^{(+)}$ и $u^{(-)}$, а η — чётность ферми-перестановок при переходе от порядка $(1, 2, \ldots, n)$ к порядку $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$.

Соотношение (1. 12) можно переписать в виде

$$u(x_1)\,u(x_2)\ldots u(x_n) = :u(x_1)\,u(x_2)\ldots u(x_n): + P\,[\Delta^{(-)}(x_i - x_j)],$$

причём символом $:u(x_1)\ldots u(x_n):$ [2] обозначено так называемое нормальное произведение операторов. В частном случае (см. (1. 11)) имеем по определению

$$:u(x)\,u(y): = u^{(+)}(x)\,u^{(-)}(y) + u^{(+)}(x)\,u^{(-)}(y) \pm$$
$$\pm u^{(+)}(y)\,u^{(-)}(x) + u^{(-)}(x)\,u^{(-)}(y).$$

Таким образом, в общем случае нормальное произведение можно определить либо как нулевой член разложения (1. 12) по степеням $\Delta^{(-)}$, либо, что эквивалентно, как обычное произведение данных операторов, приведённое к нормальной форме так, как если бы в процессе приведения все перестановочные функции считались равными нулю.

Среднее по вакууму от нормального произведения всегда равно нулю. Поэтому рецепт получения операторных динамических переменных P, M и т. д. из соответствующих классических выражений заключается в переходе в этих выражениях от обычных произведений классических волновых функций к нормальным произведениям операторных полевых функций. При этом из теории автоматически исключаются бессмысленные нулевые вакуумные энергия, заряд и т. п.

Перестановочные соотношения между операторными волновыми функциями однозначно определяются для каждого поля из соображений принципа соответствия, требования положительности наблюдаемого значения оператора энергии и структуры уравнений (1. 4). Опуская соответствующие выкладки *), опишем структуру получающихся коммутационных соотношений, ограничиваясь случаем комплексных полей. Все положительно-частотные операторы $u^{(+)}$ (операторы рождения) строго коммутируют (или антикоммутируют) со всеми операторами рождения. Все операторы уничтожения $u^{(-)}$ также строго коммутируют (или антикоммутируют) между собой, т. е. всегда

$$[u^{(+)}(x),\ u^{(+)}(y)]_{\pm} = [u^{(+)}(x),\ \dot{u}^{(+)}(y)]_{\pm} = [\dot{u}^{(+)}(x),\ \dot{u}^{(+)}(y)]_{\pm} = 0$$

и

$$[u^{(-)}(x),\ u^{(-)}(y)]_{\pm} = [u^{(-)}(x),\ \dot{u}^{(-)}(y)]_{\pm} = [\dot{u}^{(-)}(x),\ \dot{u}^{(-)}(y)]_{\pm} = 0.$$

Операторы рождения и уничтожения частиц с различными зарядами также всегда коммутируют (или антикоммутируют), т. е.

$$[u^{(+)}(x),\ u^{(-)}(y)]_{\pm} = [\dot{u}^{(+)}(x),\ \dot{u}^{(-)}(y)]_{\pm} = 0.$$

Отличными от нуля являются, таким образом, лишь следующие перестановки:

$$[u^{(+)}(x),\ \dot{u}^{(-)}(y)]_{\pm} = \frac{1}{i}\Delta^{(+)}(x-y), \tag{1.13}$$

$$[u^{(-)}(x),\ \dot{u}^{(+)}(y)]_{\pm} = \frac{1}{i}\Delta^{(-)}(x-y), \tag{1.14}$$

причём зависящие от разности $x - y$ $\Delta^{(+)}$- и $\Delta^{(-)}$-функции являются соответственно $(+)$- и $(-)$-частотными частями полной перестановочной функции:

$$[u(x),\ \dot{u}(y)]_{\pm} = \frac{1}{i}\Delta(x-y), \tag{1.15}$$

$$\Delta(x) = \Delta^{(+)}(x) + \Delta^{(-)}(y). \tag{1.16}$$

В том случае, если операторы данного поля коммутируют между собой, т. е.

$$[u(x),\ \dot{u}(y)]_{-} \equiv u(x)\,\dot{u}(y) - \dot{u}(y)\,u(x) = \frac{1}{i}\Delta(x-y),$$

*) См., например, [3].

частицы поля оказываются подчиняющимися статистике Бозе—Эйнштейна. В противоположном случае

$$[u(x), \overset{*}{u}(y)]_+ \equiv u(x)\overset{*}{u}(y) + \overset{*}{u}(y)u(x) = \frac{1}{i}\Delta(x-y)$$

мы приходим к статистике Ферми — Дирака и принципу Паули.

Род статистики и вид перестановочной функции определяется для каждого поля отдельно из уже указанных соображений. При этом получается:

Для комплексного скалярного поля $\varphi(x)$ (спин 0)

$$[\varphi(x), \overset{*}{\varphi}(y)]_- = \frac{1}{i}D(x-y), \tag{1.17}$$

где $D(x)$ — известная перестановочная функция Паули — Иордана

$$D(x) = \frac{1}{(2\pi)^3 i}\int dk e^{ikx}\delta(k^2-m^2)\,\varepsilon(k^0), \tag{1.18}$$

$$\varepsilon(k^0) = \begin{cases} +1, & k^0 > 0, \\ -1, & k^0 < 0. \end{cases} \tag{1.19}$$

Для векторного комплексного поля $B_n(x)$ (спин 1)

$$[B_n(x), \overset{*}{B}_k(y)]_- = i\left(g^{kn} + \frac{1}{m^2}\frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x^n}\right)D(x-y). \tag{1.20}$$

Для электромагнитного поля $A_m(x)$ (спин 1, масса 0) при квантовании с помощью индефенитной метрики [20, 21]

$$[A_n(x), A_m(y)] = ig^{mn}D_0(x-y), \tag{1.21}$$

причём

$$D_0(x) = D(x)\,|_{m=0} = \frac{1}{(2\pi)^3 i}\int dk e^{ikx}\delta(k^2)\,\varepsilon(k^0). \tag{1.22}$$

Наконец, для спинорного поля ψ, $\overline{\psi}$ $\left(\text{спин } \frac{1}{2}\right)$

$$[\psi_\alpha(x), \overline{\psi}_\beta(y)]_+ = \frac{1}{i}S_{\alpha\beta}(x-y), \tag{1.23}$$

где

$$S_{\alpha\beta}(x-y) = \left(i\sum_k \gamma^k \frac{\partial}{\partial x} + m\right)_{\alpha\beta} D(x), \tag{1.24}$$

при этом у нас принята фейнмановская система матриц Дирака

$$\left(i\sum_k \gamma^k \frac{\partial}{\partial x^k} - m\right)\psi(x) = 0; \quad \gamma^m\gamma^n + \gamma^n\gamma^m = 2g^{mn} \tag{1.25}$$

и сопряжённый спинор $\overline{\psi}$ определён соотношением

$$\overline{\psi}(x) = \overset{*}{\psi}(x)\gamma^0. \tag{1.26}$$

Важной особенностью перестановочных функций всех полей является их связь с функцией Паули—Иордана $D(x)$. Из (1.17), (1.20), (1.21) и (1.23) следует, что всегда

$$\Delta_{\alpha\beta}(x) = P_{\alpha\beta}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)D(x), \tag{1.27}$$

где $P_{\alpha\beta}$ — полином по производным $\frac{\partial}{\partial x^k}$. Ввиду того, что функция $D(x)$ обращается в нуль вне световых конусов, соотношение (1.27) выражает независимость событий, разделённых пространственно-подобным интервалом. Этим свойством обладают, таким образом, все обычно рассматриваемые локальные волновые поля.

Важной особенностью перестановочной функции $D(x)$ (а следовательно, и вообще всех функций $\Delta(x)$) и её $\pm$-частотных частей $D^{(+)}$ и $D^{(-)}$ является их сингулярный характер, выражающийся в наличии особенностей на световом конусе типа λ^{-1}, $\ln\lambda$, $\delta(\lambda)$ и конечных скачков (здесь λ — квадрат интервала, равный $\lambda = x^2 = (x^0)^2 - (\mathbf{x})^2$). Ввиду того, что матричные элементы различных переходов в теории взаимодействующих полей выражаются через интегралы от произведений различных комбинаций Δ-, $\Delta^{(+)}$- и $\Delta^{(-)}$-функций, указанные сингулярности в отдельных случаях приводят к расходящимся выражениям. Для правильного понимания природы таких бесконечностей, к которым, в частности, относятся все ультрафиолетовые катастрофы, рассмотрим несколько подробнее свойства операторных выражений, построенных из квантовых волновых функций свободных полей.

§ 2. ОПЕРАТОРНЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ И СИНГУЛЯРНЫЕ ФУНКЦИИ

Прежде чем перейти к изложению теории взаимодействующих полей, нам необходимо будет предварительно ознакомиться с рядом свойств в основном алгебраического характера, которыми обладают операторные выражения, построенные из квантованных волновых функций свободных полей.

Возьмём типичное операторное выражение, зависящее от значений $\pm$ частотных частей таких функций в ряде пространственно-временных точек $x_1, \ldots, x_n$ и представленное в нормальной форме

$$A(x_1, \ldots, x_n) = \sum K_{\ldots\alpha\ldots\beta\ldots}(x_1, \ldots, x_n)\ldots u_\alpha^{(+)}(x_r)\ldots \\ \ldots u_\beta^{(-)}(x_s)\ldots \tag{2.1}$$

В формуле (2. 1) $\ldots u_\alpha(x)\ldots$ — компоненты волновых функций, включая сопряжённые функции и их частные производные, а $K_{\ldots\alpha\ldots\beta\ldots}(x_1, \ldots, x_n)$ — некоторые c-функции переменных $x_1, \ldots, x_n$, обладающие ввиду однородности пространства-времени свойством трансляционной инвариантности

$$K_{\ldots\alpha\ldots\beta\ldots}(x_1+a, \ldots, x_n+a) = \\ = K_{\ldots\alpha\ldots\beta\ldots}(x_1, \ldots, x_n). \tag{2.2}$$

Эти функции мы условимся называть коэффициентными функциями данного операторного выражения (2. 1). В связи с сингулярностью перестановочных функций Δ они будут, вообще говоря, сингулярными, и вопрос об их математической природе будет специально обсуждён ниже. Пока же заметим, что через коэффициентные функции нетрудно непосредственно выразить матричные элементы оператора $A(x_1, \ldots, x_n)$ по всевозможным состояниям

$$\Phi_{\ldots\gamma\ldots p\ldots} = \ldots u_\gamma^{(+)}(\mathbf{p})\ldots\Phi_{\text{вак}}, \tag{2.3}$$

соответствующих наличию данных сортов частиц с заданными импульсами.

Для этого необходимо лишь определить матричные элементы типа

$$\left(\overset{*}{\Phi}_{\ldots\gamma\ldots p\ldots}\cdots u_\alpha^{(+)}(x_r)\ldots u_\beta^{(-)}(x_s)\ldots\Phi_{\ldots\gamma'\ldots p'\ldots}\right) = \\ = \left(\overset{*}{\Phi}_{\text{вак}}\ldots \overset{*}{u}{}_\gamma^{(-)}(\mathbf{p})\ldots u_\alpha^{(+)}(x_r)\ldots u_\beta^{(-)}(x_s)\ldots u_{\gamma'}^{(+)}(\mathbf{p}')\ldots\Phi_{\text{вак}}\right),$$

что нетрудно выполнить с помощью перестановочных соотношений (1. 14), записанных в форме

$$[u_\alpha^{(-)}(\mathbf{k}),\ u_\beta^{(+)}(\mathbf{p})]_\pm = \delta(\mathbf{k}-\mathbf{p})\,P_{\alpha\beta}(k), \tag{2. 4}$$

где $P_{\alpha\beta}(k)$ — полином, соответствующий $P_{\alpha\beta}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ в (1. 26).

В самом деле, перейдя от $u^{(\pm)}(x)$ к импульсному представлению, будем переставлять операторы рождения $u_\alpha^{(+)}(\mathbf{k}_r)$ налево, а операторы уничтожения $u_\beta^{(-)}(\mathbf{k}_s)$ — направо, до тех пор, пока они или не «погасят» себя соответственно с $u_\gamma^{(-)}(\mathbf{p})$, $u_{\gamma'}^{(+)}(\mathbf{p})$, или дадут нуль, подействовав на амплитуду состояния вакуума. Появившиеся при таком погашении δ-функции снимут интеграции по k_r, сделав их равными $\ldots p\ldots, \ldots, p'\ldots$

В результате указанных операций мы придём к выражениям вида

$$\left(\overset{*}{\Phi}_{\ldots\gamma\ldots p\ldots}A(x_1, \ldots, x_n)\,\Phi_{\ldots\gamma'\ldots p'\ldots}\right) = \\ = \sum P^{\ldots\alpha\ldots\beta\ldots}_{\ldots\gamma\ldots\gamma'\ldots}(\ldots p\ldots p'\ldots)\,K_{\ldots\alpha\ldots\beta\ldots}(x_1, \ldots, x_n)\times \\ \times\exp\left\{i\left(\sum_\nu p_\nu x_\nu - \sum_\lambda p'_\lambda x_\lambda\right)\right\} I(p_\omega, p'_\omega), \tag{2.5}$$

причём множитель

$$I(p_\omega, p'_\omega) = \prod_\omega \delta(\mathbf{p}_\omega - \mathbf{p}'_\omega)$$

возникает в том случае, если часть операторов $u^{(+)}(\mathbf{p}'_\omega)$ из $\Phi_{\ldots\gamma'\ldots p'\ldots}$ спаривается с операторами $u^{(-)}(\mathbf{p}_\omega)$, из $\overset{*}{\Phi}_{\ldots\gamma\ldots p\ldots}$

Ввиду очевидного удобства нормальной формы представления операторных выражений (2. 1) приобретает интерес вопрос о соответствующей методике приведения. Ясно, что для приведения к нормальной форме операторных выражений полиномиально зависящих от волновых функций, достаточно уметь приводить произведения типа

$$A_1(x_1)\ldots A_n(x_n),$$

в которых $A_j(x_j)$ будут линейными комбинациями соответствующих $u_j^{(+)}(x_j)$ и $u_j^{(-)}(x_j)$. Указанная рецептура вытекает из одной важной теоремы, установленной Виком [2], к формулировке которой мы сейчас и перейдём.

Рассмотрим прежде всего случай $n=2$, когда мы имеем произведение двух линейных операторов

$$A_1(x_1)\,A_2(x_2).$$

Согласно (1. 11) это произведение может отличаться от нормального произведения

$$:A_1(x_1)\,A_2(x_2):$$

лишь на c — выражение, которое мы будем называть спариванием и обозначать с помощью скобки снизу

$$A_1(x_1)\,A_2(x_2) = :A_1(x_1)\,A_2(x_2): + \underline{A_1(x_1)\,A_2(x_2)}. \tag{2.6}$$

Очевидно, можно также определить спаривание как вакуумное среднее от обычного произведения

$$\underbrace{A_1(x_1)\,A_2(x_2)} = \left(\overset{*}{\Phi}_{\text{вак}}\,A_1(x_1)\,A_2(x_2)\,\Phi_{\text{вак}}\right). \tag{2.7}$$

Например, для спинорного поля с помощью (1. 22) находим:

$$\underbrace{\psi_\alpha(x)\,\psi_\beta(y)} = \frac{1}{i}S^{(-)}_{\alpha\beta}(x-y). \tag{2.8}$$

Аналогичным образом можно также определить спаривания других полей.

Для того чтобы сформулировать теорему Вика, необходимо ещё ввести понятие нормального произведения со спариваниями.

Заметим, что из определения нормального произведения (см. § 1) вытекает перестановочность (с точностью до знака) операторов под знаком нормального произведения, т. е.

$$:A_1(x_1)\ldots A_n(x_n): = (-1)^\eta :A_{i1}(x_{i1})\ldots A_{in}(x_{in}):,$$

где η — чётность ферми-перестановок порядка аргументов, а также линейность нормального произведения по отношению к каждому сомножителю.

Определим теперь нормальное произведение со спариваниями, положив по определению выражение

$$:\underbrace{A_1(x_1)\,A_2(x_2)}\,A_3(x_3)\ldots\underbrace{A_k(x_k)\ldots A_{n-1}(x_{n-1})}\,A_n(x_n):$$

равным произведению всех спариваний

$$\underbrace{A_1(x_1)\,A_3(x_3)}\ldots\underbrace{A_k(x_k)\,A_n(x_n)}$$

с нормальным произведением оставшихся неспаренными операторов и с числом $(-1)^\eta$, т. е.

$$:\underbrace{A_1(x_1)\,A_2(x_2)}\,A_3(x_3)\ldots\underbrace{A_k(x_k)\ldots A_{n-1}(x_{n-1})}\,A_n(x_n):=$$

$$=(-1)^\eta\,\underbrace{A_1(x_1)\,A_3(x_3)}\ldots\underbrace{A_k(x_k)\,A_n(x_n)}\times$$

$$\times :A_2(x_2)\,A_4(x_4)\ldots A_{k-1}(x_{k-1})\,A_{k+1}(x_{k+1})\ldots A_{n-1}(x_{n-1}):, \tag{2.9}$$

где η — чётность перестановки

$$\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & \ldots, & k-1, & k, & k+1, \ldots, n-1, & n \\ 1, & 3, & \ldots, & k, & n, & 2, & 4, \ldots, k-1, & k+1, \ldots, n-1 \end{pmatrix}.$$

Мы можем дать теперь простую формулировку теоремы Вика. Согласно этой теореме обычное произведение линейных операторов равняется сумме всех соответствующих нормальных произведений со всеми возможными спариваниями, включая и нормальное произведение без спариваний

$$A_1\ldots A_n = :A_1\ldots A_n: + :\underbrace{A_1A_2}\ldots A_n: + \ldots$$

$$\ldots + :\underbrace{A_1\ldots A_{n-1}}A_n: + :\underbrace{A_1A_2}\underbrace{A_3A_4}\ldots A_n: + \ldots \tag{2.10}$$

Для доказательства нам понадобится следующая лемма: если $A_1, \ldots, A_n, B$ — линейные операторы, то

$$:A_1\ldots A_n:B = :A_1\ldots A_nB: + \sum_{1\leqslant k\leqslant n} :A_1\ldots\underbrace{A_k\ldots A_nB}:. \tag{2.11}$$

Замечая, что лемма очевидна для того случая, когда B состоит из одних операторов уничтожения и, следовательно,

$$\underbrace{A_kB} = 0,$$

рассмотрим случай, когда B есть оператор рождения. При этом, очевидно, достаточно ограничиться рассмотрением $A_1, \ldots, A_n$, являющихся операторами уничтожения. Действительно, если, например, некоторые A_i есть операторы рождения, то $\underbrace{A_iB} = 0$ и все A_i можно вынести налево из всех нормальных произведений, сведя задачу к одним операторам уничтожения. Но для того, чтобы представить выражение

$$:A_1^{(-)}\ldots A_n^{(-)}:B^{(+)} = A_1^{(-)}\ldots A_n^{(-)}B^{(+)}$$

в нормальной форме, нужно n раз прокоммутировать $B^{(+)}$ с каждым из $A_i^{(-)}$ $(i=1, \ldots, n)$. В результате мы и получим формулу (2. 11), которая, таким образом, доказана для случая, когда входящие в неё $A_1, \ldots, A_n, B$ являются каждый по отдельности либо оператором рождения, либо оператором уничтожения. Но в силу отмеченного свойства линейности лемма (2. 11) тем самым доказана и для линейных операторов.

Заметим теперь, что лемма непосредственно обобщается на случай нормальных произведений с любым числом спариваний, так как последнее с точностью до $(-1)^\eta$ равно произведению этих спариваний (c-функций) на все остальные неспаренные операторы. После этого замечания приступим к доказательству теоремы Вика.

Ясно, что теорема верна при $n=2$. Воспользуемся поэтому методом индукции. Предполагая, что соотношение (2. 10) верно для произведения n линейных операторов A, постараемся доказать

его для произведения $n+1$ операторов. Умножим для этого (2.10) справа на некоторый линейный оператор A_{n+1}.

Но, по доказанной обобщённой лемме, нормальное произведение операторов $A_1,\ldots,A_n$ с любым данным числом спариваний между ними, умноженное справа в обычном смысле на A_{n+1} равно сумме нормальных произведений операторов $A_1,\ldots,A_{n+1}$, в которых, кроме уже имевшихся спариваний между операторами $A_1,\ldots,A_n$, содержатся все возможные (в том числе и нулевое) спаривания свободных операторов из $A_1,\ldots,A_n$ с A_{n+1}. Тем самым убеждаемся, что обычное произведение $n+1$ линейных операторов $A_1,\ldots,A_{n+1}$ представляется суммой из нормальных произведений со всеми возможными спариваниями, что и завершает индукцию.

Доказательство теоремы Вика закончено. Нетрудно видеть, что эта теорема приложима и к тому случаю, когда некоторые из сомножителей входят под знаком нормальных произведений

$$:A_1\ldots A_{k_1}::A_{k_1+1}\ldots A_{k_2}:\ldots:A_{k_{s+1}}\ldots A_n:. \tag{2.12}$$

В этом случае теорема Вика формулируется точно так же, как и для чистого произведения, с тем очевидным отличием, что теперь необходимо не учитывать (положить равным нулю) спаривания между множителями из одного и того же нормального произведения.

В качестве иллюстрации теоремы Вика рассмотрим произведение двух спинорных токов. Имеем согласно (2.10) и с учётом (2.8):

$$\begin{aligned}
j^k(x)\,j^l(y) &= :\bar\psi(x)\gamma^k\psi(x)::\bar\psi(y)\gamma^l\psi(y):= \\
&= :\bar\psi(x)\gamma^k\psi(x)\bar\psi(y)\gamma^l\psi(y):+:\bar\psi(x)\gamma^k\psi(x)\bar\psi(y)\gamma^l\psi(y):+ \\
&+:\psi(x)\gamma^k\psi(x)\bar\psi(y)\gamma^l\psi(y):+:\bar\psi(x)\gamma^k\psi(x)\bar\psi(y)\gamma^l\psi(y):= \\
&= \mathrm{Sp}\{\gamma^k S^{(-)}(x-y)\gamma^l S^{(-)}(y-x)\}- \\
&- i:\bar\psi(x)\gamma^k S^{(-)}(x-y)\gamma^l\psi(y):- \\
&- i:\bar\psi(y)\gamma^l S^{(-)}(x-y)\gamma^k\psi(x):+:j^k(x)\,j^l(y):.
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Обсудим теперь вопрос о структуре коэффициентных функций, появляющихся при выполнении операции умножения операторных выражений. Возьмём два каких-либо оператора $A_1(x_1,\ldots,x_n)$ и $A_2(y_1,\ldots,y_m)$, принадлежащих к рассматриваемому типу (2.1) с коэффициентными функциями $K^{(1)}(x_1,\ldots,x_n)$ и $K^{(2)}(y_1,\ldots,y_m)$ соответственно. Ясно тогда, что произведение этих операторов

$$A_1(x_1,\ldots,x_n)\,A_2(y_1,\ldots,y_m) \tag{2.14}$$

также принадлежит к рассматриваемому типу, и его коэффициентные функции согласно теореме Вика имеют вид

$$K^{(1)}(x_1,\ldots,x_n)\,K^{(2)}(y_1,\ldots,y_m)\,\Pi\,\Delta^{(-)}(x_i-y_j). \tag{2.15}$$

Ввиду того, что функция $D^{(-)}(x)$, а тем более функции

$$\Delta^{(-)}(x)=P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)D^{(-)}(x)$$

обладают высокой степенью сингулярности на световом конусе, могут возникнуть серьёзные сомнения в наличии реального смысла у выражений вроде (2.14), (2.15), включающих их произведение в любом числе.

В связи с этим необходимо рассмотреть вопрос о том, какие условия следует наложить на коэффициентные функции выражений типа (2.1) для того, чтобы этим выражениям можно было придавать определённый смысл, или, как это говорят, чтобы в них не содержалось «расходимостей».

Ясно прежде всего, что мы не можем требовать, чтобы коэффициентные функции $K(x_1,\ldots,x_n)$ являлись функциями в общепринятом в математике смысле, так как тогда мы должны были бы вообще исключить из рассмотрения такие «сингулярные» или «несобственные» функции, как $\delta(x)$, $D(x)$, и т. п., с которыми постоянно приходится иметь дело в квантовой теории поля.

Естественно поэтому считать, что $K(x_1,\ldots,x_n)$ определены именно как несобственные функции.

Попытаемся сейчас сформулировать то, что нормально всегда вкладывается в это понятие в работах по квантовой теории, но, как правило, отчётливо не оговаривается. Нетрудно заметить, что в отличие от обычных функций сингулярные или несобственные функции определяются не заданием их значений для всех значений аргументов (для некоторого множества значений аргументов они могут быть бесконечными или вообще неопределёнными), а заданием правил интеграции их произведений с достаточно регулярными функциями.

Иначе говоря, несобственная функция определяется заданием соответствующего линейного функционала в подходящем «линейном пространстве» достаточно регулярных функций.

Разумеется, мы не можем вдаваться здесь в сколько-нибудь полное изложение общей теории несобственных функций и потому ограничимся лишь основными формулировками, относящимися только к тем свойствам специальных коэффициентных функций, которые непосредственно потребуются нам в дальнейшем.

Заметим лишь, что в теории несобственных интегрируемых функций доказывается, что они всегда обладают фурье-образами и что их всегда можно дифференцировать без нарушения свойства интегрируемости.

Перейдём к формулировке определения коэффициентных функций $K(x_1, \ldots, x_n)$. Введём для этого класс $C(q, r, n)$ функций $F(x_1, \ldots, x_n)$, непрерывных со всеми своими производными до q-го порядка включительно, для которых все произведения

$$x_{i_1}^{\alpha_1} \ldots x_{i_s}^{\alpha_s} \cdot \frac{\partial^p F(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_{j_1}^{\beta_1} \ldots \partial x_{j_p}^{\beta_p}}, \quad \begin{array}{l} s = 0, 1, \ldots, r, \\ p = 0, 1, \ldots, q, \\ \alpha, \beta = 0, 1, 2, 3, \end{array} \tag{2.16}$$

ограничены.

В соответствии с принятой точкой зрения мы будем считать функцию $K(x_1, \ldots, x_n)$ заданной и интегрируемой, если линейный функционал

$$\int K(x_1, \ldots, x_n) F(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n \tag{2.17}$$

определён в линейном пространстве функций $F(x_1, \ldots, x_n)$ из класса $C(q, r, n)$ хотя бы лишь при достаточно больших q и r. Мы будем называть это требование условием интегрируемости.

Фактическое построение коэффициентных функций удобно проводить с помощью несобственного предельного перехода.

Сходящейся в несобственном смысле назовём здесь такую последовательность

$$K_M(x_1, \ldots, x_n) \quad M \to \infty,$$

для которой соответствующая последовательность интегралов

$$\int K_M(x_1, \ldots, x_n) F(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n \tag{2.18}$$

сходится в обычном смысле для каждой функции F из некоторого класса $C(q, r, n)$, входящего в линейное пространство, на котором определён функционал (2.18).

Следует подчеркнуть, что несобственный предельный переход в сущности постоянно используется при рассмотрении сингулярных функций в квантовой теории, хотя, как правило, и не обращается внимание на его отличие от обычного предельного перехода. Это относится, например, ко всем предельным определениям δ-функции Дирака.

Рассмотрим сейчас с этой точки зрения вопрос об аппроксимации функции $\Delta_{\alpha\beta}^{(-)}(x)$, определённой формальным соотношением

$$\Delta_{\alpha\beta}^{(-)}(x) = P_{\alpha\beta}\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right) D^{(-)}(x) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3 i} \int e^{-ikx} P_{\alpha\beta}(-k)\, \theta(k^0)\, \delta(k^2 - m^2)\, dk, \tag{2.19}$$

причём

$$\theta(k^0) = \begin{cases} +1 & (k^0 > 0), \\ 0 & (k^0 < 0). \end{cases}$$

Установим прежде всего, какой смысл следует придавать фигурирующему здесь интегралу с бесконечными пределами. Как известно, обычный интеграл, взятый по бесконечной области интеграции, определяется как предел интегралов с конечными областями интеграции, неограниченно расширяющимися и в пределе охватывающими всю данную бесконечную область. Естественно поэтому интегралы типа

$$K(x) = \int e^{-ikx} P(k)\, \theta(k^0)\, \delta(k^2 - m^2)\, dk \tag{2.20}$$

с полиномиальным $P(k)$ определить как несобственный предел интеграла

$$K_G(x) = \int_G e^{-ikx} P(k)\, \theta(k^0)\, \delta(k^2 - m^2)\, dk \tag{2.21}$$

при неограниченном расширении области G.

Переходя к импульсному представлению и используя условие интегрируемости, можно показать, что такой несобственный предел действительно существует и не зависит от вида последовательности областей G_n, расширяющихся к G. При этом оказывается, что если степень $P(k)$ равна ν, то для любой $F(x)$ из класса $C(\nu + 3, 5, 1)$ этот предел имеет вид

$$\int K(x) F(x)\, dx = \int \tilde{F}(k^0, \mathbf{k}) P(k^0, \mathbf{k}) \frac{d\mathbf{k}}{2k^0};$$

$$k^0 = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}, \tag{2.22}$$

причём

$$\tilde{F}(k^0, \mathbf{k}) = \tilde{F}(k) = \int F(x)\, e^{-ikx}\, dx. \tag{2.23}$$

Таким образом, соотношение (2.19) действительно определяет интегрируемую несобственную функцию $\Delta_{\alpha\beta}^{(-)}(x)$, причём

$$\int \Delta_{\alpha\beta}^{(-)}(x) F(x)\, dx = \frac{i}{(2\pi)^3} \int \tilde{F}(k^0, \mathbf{k}) P_{\alpha\beta}(-k^0, -\mathbf{k}) \frac{d\mathbf{k}}{2k^0}. \tag{2.24}$$

Как только что установлено, $\Delta_{\alpha\beta}^{(-)}(x)$ является несобственным пределом последовательности регулярных аналитических функций

$$\frac{i}{(2\pi)^3} \int_{G_n} e^{-ikx} P_{\alpha\beta}(-k)\, \theta(k^0)\, \delta(k^2 - m^2)\, dk. \tag{2.25}$$

Такая аппроксимация, однако, страдает одним недостатком. Дело в том, что выражения (2.25) не ковариантны, поскольку при лоренцовских преобразованиях меняется область интеграции.

Чтобы аппроксимировать $\Delta^{(-)}_{\alpha\beta}(x)$, разумеется, в несобственном смысле с помощью непрерывных и вместе с тем ковариантных функций, воспользуемся известным методом регуляризации Паули — Вилларса [4] с помощью вспомогательных масс, полагая

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{reg}[\Delta^{(-)}_{\alpha\beta}(x)] &= P_{\alpha\beta}\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)\operatorname{reg}[D^{(-)}(x)], \\ \operatorname{reg}[D^{(-)}(x)] &= D^{(-)}(x) + \sum_{1\leqslant j\leqslant l} c_j D^{(-)}_{M_j}(x), \end{aligned}\right\} \quad (2.26)$$

где $D^{(-)}_M(x)$ — отрицательно частотная часть функции Паули с массой M, а числа c_j определяются из системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} 1 + \sum_{1\leqslant j\leqslant l} c_j &= 0, \\ m^2 + \sum_j c_j M_j^2 &= 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ m^{2(l-1)} + \sum_j c_j M_j^{2(l-1)} &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (2.27)$$

Как можно показать, в пределе увеличения значений вспомогательных масс функции $D^{(-)}_{M_j}$ стремятся к нулю всюду, кроме бесконечно малой окрестности световых конусов, а массы M_j можно всегда выбрать такими, чтобы при $M_j \to \infty$ все коэффициенты оставались ограниченными. Поэтому можно положить

$$D^{(-)}(x) = \lim_{M_j\to\infty} \operatorname{reg}[D^{(-)}(x)], \quad (2.28)$$

причём знак предельного перехода имеет здесь несобственный смысл.

Как следует из структуры $D^{(-)}$-функций [4], определённая таким образом $\operatorname{reg}[D^{(-)}(x)]$ непрерывна и обладает непрерывными частными производными до $(l-2)$-го порядка включительно. Поэтому при $l > \nu + 2$ (ν — степень полинома $P_{\alpha\beta}$) функция $\operatorname{reg}[\Delta^{(-)}_{\alpha\beta}]$ также будет непрерывна.

Перейдём теперь к исследованию вопроса об определении произведений спариваний из теоремы Вика

$$\prod_{(r<s)} \Delta^{(-)}_{\alpha\beta}(x_r - x_s), \quad r, s = 1, \ldots, n. \quad (2,29)$$

Подчеркнём, что необходимость специального определения произведений типична для несобственных функций. Дело в том, что

несобственная функция задаётся установлением правил её интеграции лишь с достаточно регулярными функциями, а из таких правил непосредственно не вытекает рецептура для интеграции произведения нескольких сингулярных функций.

Поэтому нам придётся воспользоваться методом несобственного предельного перехода и определить выражение (2. 29) с помощью сходящейся последовательности регулярных функций.

Выполняя в (2. 29) формальное умножение с помощью представлений (2. 19), находим:

$$\prod_{(r<s)} \Delta^{(-)}_{\alpha_s\beta_s}(x_r - x_s) = \int e^{i\sum_r k_r x_r} \Delta(k_1, \ldots, k_n)\, dk_1 \ldots dk_n, \quad (2.30)$$

где

$$\Delta(k_1, \ldots, k_n) = \frac{iN}{(2\pi)^{3N}} \int \prod_r \delta\left(k_r + \sum_{s<r} \lambda_{\alpha_s\beta_r} - \sum_{r<s} \lambda_{\alpha_r\beta_s}\right) \times$$
$$\times \prod_{r<s} \{P_{\alpha\beta}(-\lambda_{\alpha\beta})\, \theta(\lambda^0_{\alpha\beta})\, \delta(\lambda^2_{\alpha\beta} - m^2_{\alpha\beta})\, d\lambda_{\alpha\beta}\}, \quad (2.31)$$

а N — число сомножителей в произведении (2. 29). Не составляет большого труда убедиться в том, что область интеграции в (2.31) фактически конечна. Это основано на том обстоятельстве, что из условия ограниченности суммы положительных частот $\lambda^0_{\alpha\beta}$

$$\sum_{s>r} \lambda^0_{\alpha_r\beta_s} = k^0_r + \sum_{s<r} \lambda^0_{\alpha_s\beta_r}$$

вытекает ограниченность каждой отдельной частоты $\lambda^0_{\alpha\beta}$, а следовательно, и импульса

$$\bar{\lambda}_{\alpha\beta} = \sqrt{(\lambda^0_{\alpha\beta})^2 - m^2}.$$

Указанная конечность области интеграции в (2. 31) обусловливает отсутствие расходимостей и возможность строгого определения выражения (2.30) как несобственного предела последовательности регулярных аналитических функций

$$\lim_{\Gamma\to\infty} K(x_1, \ldots, x_n/\Gamma) =$$
$$= \lim_{\Gamma\to\infty} \int_\Gamma e^{i\sum_r k_r x_r} \Delta(k_1, \ldots, k_n)\, dk_1 \ldots dk_n \quad (2.32)$$

при неограниченном расширении области Γ $4n$-мерного пространства точек $k_1, \ldots, k_n$ в пределе охватывающей всё это пространство.

При этом оказывается, что соответствующее предельное равенство функционалов

$$\lim_{\Gamma\to\infty}\int K(x_1,\ldots,x_n/\Gamma)\,F(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1\ldots dx_n=$$

$$=\int F(x_1,\ldots,x_n)\prod_{(r<s)}\Delta^{(-)}_{\alpha_r\beta_s}(x_r-x_s)\,dx_1\ldots dx_n \qquad (2.33)$$

имеет место в классе $C(\nu+2N+1,\ 4n+1,n)$, где ν — сумма степеней всех N полиномов $P_{\alpha\beta}$.

Исследуемое произведение (2.29) сингулярных функций $D^{(-)}_{\alpha\beta}$ может быть также аппроксимировано с помощью соответствующих произведений регуляризованных ковариантных функций $\operatorname{reg}[D^{(-)}_{\alpha\beta}]$. В этом случае соотношение (2.33) примет вид

$$\lim_{M_i\to\infty}\int F(x_1,\ldots,x_n)\left\{\prod_{r<s}\operatorname{reg}\Delta^{(-)}_{\alpha_r\beta_s}(x_r-x_s)\right\}dx_1\ldots dx_n=$$

$$=\int F(x_1,\ldots,x_n)\left\{\prod_{r-s}\Delta^{(-)}_{\alpha_r\beta_s}(x_r-x_s)\right\}dx_1\ldots dx_n \qquad (2.34)$$

при $F(x_1,\ldots,x_n)\in C(\nu+2N+1,\ 4n+1,n)$.

Заметим ещё, что приведённые рассуждения распространяются и на общий случай коэффициентных функций, получающихся в результате умножения двух операторных функций типа (2.1) с различными аргументами и соответствующие выражения

$$K(x_1,\ldots,x_n)\,Q(y_1,\ldots,y_m)\prod\Delta^{(-)}_{\alpha\beta}(x_i-y_j)$$

(в которых $x_1,\ldots,x_n$, $y_1,\ldots,y_m$ — независимые аргументы, а K и Q — интегрируемые, трансляционно-инвариантные коэффициентные функции) могут быть определены как интегрируемые несобственные функции.

Для выражений этого вида можно доказать следующую общую теорему: если $K_M(x_1,\ldots,x_n)$, $Q_M(y_1,\ldots,y_m)$ являются трансляционно-инвариантными коэффициентными функциями и в несобственном смысле

$$K_M(x_1,\ldots,x_n)\underset{M\to\infty}{\longrightarrow}K(x_1,\ldots,x_n);\quad Q_M(y_1,\ldots,y_m)\underset{M\to\infty}{\longrightarrow}Q(y_1,\ldots,y_m),$$

а аргументы $x_1,\ldots,x_n$, $y_1,\ldots,y_m$ являются независимыми, то

$$K_M(x_1,\ldots,x_n)\,Q_M(y_1,\ldots,y_m)\prod(\operatorname{reg}\Delta^{(-)}_{\alpha\beta}(x_i-y_j))\to$$

$$\to K(x_1,\ldots,x_n)\,Q(y_1,\ldots,y_m)\prod(\Delta^{(-)}_{\alpha\beta}(x_i-y_j)). \qquad (2.35)$$

Доказательство этой теоремы, подобно доказательству соотношения (2.34), основано на том простом обстоятельстве, что из

ограниченности суммы отрицательных частот вытекает и ограниченность каждой отдельной частоты и обусловлено тем, что мы рассматриваем произведения одних только отрицательно-частотных частей Δ-функций. Наш анализ поэтому тривиально переносится и на тот случай, когда вместо $\Delta^{(-)}$ стоят одни $\Delta^{(+)}$-функции.

В теории взаимодействующих полей приходится иметь дело с произведениями так называемых причинных функций $\Delta^c_{\alpha\beta}(x)$:

$$\Delta^c_{\alpha\beta}(x)=P_{\alpha\beta}\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)D^c(x),$$

$$D^c(x)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int\frac{e^{ikx}\,dk}{m^2-k^2-i\varepsilon},$$

$$D^c(x)=\begin{cases}D^{(-)}(x) & \text{при}\quad x^0>0,\\ -D^{(+)}(x) & \text{при}\quad x^0<0,\end{cases}$$

или иначе фейнмановских факторов распространения.

Как видно, в Δ^c-функциях присутствуют и положительные и отрицательные частоты. Ввиду этого произведение типа

$$\prod_{(r<s)}\Delta^c_{\alpha_r\beta_s}(x_r-x_s)$$

уже не оказывается определённой интегрируемой функцией и несобственное предельное соотношение типа (2.34) здесь места не имеет.

Перейдём теперь к рассмотрению операторных выражений, представляемых конечными суммами вида (2.1). Заметим сначала, что наличие предельных соотношений (2.34) снимает одно возможное возражение против приведённого выше доказательства теоремы Вика, основанное на том, что в процессе этого доказательства мы выполняли умножение сингулярных функций.

Доказательство теоремы Вика, вполне свободное от такого недостатка, весьма просто проводится, например, по следующей схеме.

Рассматриваем сначала фиктивный случай, когда полевые операторы удовлетворяют перестановочным соотношениям, в которых $\Delta_{\alpha\beta}$ заменены на $\operatorname{reg}\{\Delta_{\alpha\beta}\}$, и для него проводим доказательство теоремы Вика в той точно форме, как оно излагалось выше. Ввиду непрерывности регуляризованных функций такое доказательство будет уже вполне строгим. Для перехода к реальному случаю достаточно теперь совершить предельный переход $M\to\infty$, снимающий регуляризацию.

Таким же образом с помощью более общих предельных соотношений (2.35) нетрудно обосновать законность умножения двух интегрируемых операторных функций

$$A_1(x_1,\ldots,x_n)\,A_2(y_1,\ldots,y_m)$$

с независимыми аргументами.

Интегрируемыми мы называем операторные выражения, представляемые конечными суммами типа (2.1), в которых все коэффициентные функции удовлетворяют требованию интегрируемости.

Возьмём теперь некоторую интегрируемую операторную функцию $A(x_1,\ldots,x_n)$ и рассмотрим интеграл

$$\int A(x_1,\ldots,x_n)\,F(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1\ldots dx_n. \qquad (2.36)$$

Переходя к матричным элементам выражения (2.36), с помощью формул (2.5) находим, что эти элементы будут содержать интегралы

$$\int K_{\ldots\alpha\ldots\beta\ldots}(x_1,\ldots,x_n)\,e^{i\sum p_\nu x_\nu - i\sum p'_\lambda x_\lambda}\times$$
$$\times F(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1\ldots dx_n,$$

которые на основании свойства интегрируемости коэффициентных функций $K_{\ldots\alpha\ldots\beta\ldots}$ оказываются конечными. Операторные интегралы (2.36) могут поэтому считаться сходящимися.

В таком же смысле сходящимися будут и интегралы типа

$$\int A(x,\ x_1,\ldots,x_n)\,F(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1\ldots dx_n \qquad (2.37)$$

с «одной невыполненной» интеграцией. Этот факт непосредственно вытекает из свойства трансляционной инвариантности функции $A(x_1,\ldots,x_n)$.

Установив сходимость операторных интегралов вида (2.36) и (2.37), отметим, что благодаря общности нашего условия интегрируемости класс операторных интегралов с гарантированной сходимостью оказывается несколько узким. Так, в этот класс не входят интегралы

$$\int A(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1\ldots dx_n,$$

взятые по всему бесконечному пространству точек $(x_1,\ldots,x_n)$, поскольку они соответствуют функции $F=1$, не убывающей на бесконечности. Матричные элементы операторных интегралов данного вида нуждаются поэтому в специальном определении.

До сих пор мы рассматривали операторные функции точек $x_1,\ldots,x_n$, выражавшиеся через положительно и отрицательно частотные части квантованных полевых функций.

Важное значение имеет более специальный тип операторных функций, в которые квантованные полевые функции входят, так сказать, «в целом» под знаком нормальных произведений

$$A(x_1,\ldots,x_n)=\sum K_{\ldots\alpha\ldots}(x_1,\ldots,x_n)\,{:}\ldots u_\alpha(x_j)\ldots{:}. \qquad (2.38)$$

Если фермиевские полевые функции входят сюда лишь в чётных комбинациях, то такую сумму будем называть полилокальным оператором.

Из данного определения и теоремы Вика сразу же следует, что умножение нескольких полилокальных операторов приводит опять к полилокальному оператору.

Полилокальные операторы обладают следующим важным свойством:

$$[A_1(x_1,\ldots,x_n);\ A_2(y_1,\ldots,y_m)]_-=0, \qquad (2.39)$$

если каждая из x_i пространственно-подобна каждой из y_j. Это свойство непосредственно вытекает из обращения в нуль перестановочных функций $\Delta_{\alpha\beta}(x_i-y_j)$ вне светового конуса и из чётности числа антиперестановочных фермиевских функций в полилокальных операторах A_1 и A_2.

Рассмотрим теперь случай, когда $n=1$. Тогда полилокальный оператор зависит только от поведения полевых функций в одной точке x, ввиду чего мы будем называть его локальным оператором. Из (2.39) для двух локальных операторов следует

$$[A_1(x),\quad A_2(y)]_-=0 \qquad (2.40)$$

при x, пространственно-подобном с y.

Заметим ещё, что при $n>1$ может оказаться, что полилокальный оператор фактически зависит от поведения полевых функций лишь в одной точке.

Пусть, в самом деле, в сумме (2.38) все коэффициентные функции K обращаются в нуль для всех $x_1,\ldots,x_n$, за исключением удовлетворяющих равенству

$$x_1=x_2=\ldots=x_n.$$

Ясно, что такие K могут быть построены лишь из выражения

$$\delta(x_1-x_2)\ldots\delta(x_1-x_n)$$

и его частных производных. Так как коэффициентные функции по определению должны обладать свойством трансляционной инвариантности, то общее выражение для них в рассматриваемом случае имеет вид

$$Z\left(\ldots\frac{\partial}{\partial x}\ldots\right)\delta(x_1-x_2)\ldots\delta(x_1-x_n),$$

где $Z\left(\ldots\frac{\partial}{\partial x}\ldots\right)$ — некоторый полином из $\frac{\partial}{\partial x_i^\alpha}$ с постоянными коэффициентами.

Полилокальный оператор с коэффициентными функциями этого типа мы будем называть квазилокальным.

Интеграция квазилокального оператора по всем точкам $x_1,\ldots,x_n$, кроме одной, приводит к обычному локальному оператору.

§ 3. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ПОЛЕЙ

Одним из наиболее распространённых способов, используемых в обычной квантовой механике для исследования поведения динамических систем, является известное представление Шредингера. В этом представлении поведение динамической системы описывается с помощью зависящей от времени волновой функции $\Psi(t)$, определяемой уравнением Шредингера

$$i\frac{\partial\Psi(t)}{\partial t}=H\Psi. \tag{3.1}$$

Здесь H — гамильтонов оператор, соответствующий полной энергии всей системы и не зависящий от времени для замкнутых систем. Вообще в этом представлении динамические переменные замкнутых систем характеризуются операторами, не зависящими явно от времени. Их средние значения

$$\overline{A}_t=(\overset{*}{\Psi}(t)\,A\Psi(t)) \tag{3.2}$$

могут, однако, зависеть от времени через волновые функции $\Psi(t)$. Считая оператор H постоянным во времени, мы можем формально проинтегрировать уравнение (3.1) и написать

$$\Psi(t)=e^{\frac{Ht}{i}}\Psi,$$

где $\Psi=\text{const}$ не зависит от времени.

Подставляя это выражение в (3.2), получаем:

$$\overline{A}_t=\left(\overset{*}{\Psi}e^{-\frac{Ht}{i}}Ae^{\frac{Ht}{i}}\Psi\right). \tag{3.3}$$

Формулу (3.3) можно интерпретировать как среднее по не зависящим от времени функциям Ψ от оператора

$$A(t)=e^{-\frac{Ht}{i}}Ae^{\frac{Ht}{i}}, \tag{3.4}$$

зависящего от времени. Мы приходим, таким образом, к представлению Гейзенберга, в котором явно зависящими от времени оказываются не волновые функции, а динамические переменные. Как видно, с точки зрения вычисления наблюдаемых значений динамических величин, оба представления совершенно эквивалентны. Дифференцируя (3.4) по времени, мы видим, что в представлении Гейзенберга закон эволюции динамических переменных определяется уравнением

$$i\frac{\partial A(t)}{\partial t}=[A(t),H]_- \tag{3.5}$$

где

$$[a,b]_-=ab-ba$$

— квантовые скобки Пуассона.

Интересно отметить, что в классической механике ход временной зависимости динамических величин определяется теми же уравнениями (3.5) с классическими скобками Пуассона.

При применении представления Шредингера к интересующему нас случаю взаимодействия проквантованных полей приходится разделять полный гамильтониан H на две части

$$H=H_0+H_1, \tag{3.6}$$

причём H_0 — гамильтониан свободного поля, H_1 — гамильтониан взаимодействия:

$$H_0=\int H_0(\mathbf{x})\,d\mathbf{x};\quad H_1=\int H_1(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}. \tag{3.7}$$

Здесь плотности энергии $H_0(\mathbf{x})$ и $H_1(\mathbf{x})$ есть комбинации основных функций поля, отнесённых к некоторому фиксированному моменту времени, например,

$$u(0,\mathbf{x})=u(x)\,|_{x^0=0}.$$

Поэтому при рассмотрении процессов взаимодействия полей исходят обычно из уравнения Шредингера, записанного в виде

$$i\frac{\partial\Psi(t)}{\partial t}=(H_0+H_1)\,\Psi(t). \tag{3.8}$$

Одним из весьма принципиальных недостатков современной квантовой теории полей реальных взаимодействующих частиц является необходимость вводить в рассмотрение поля фиктивных невзаимодействующих частиц и трактовать взаимодействие как данный дополнительный фактор, изменяющий свойства динамической системы, фактор, который может «включаться» и «выключаться». С первого взгляда здесь как будто бы нет особых оснований для критики. Действительно, частицы находятся в интенсивном взаимодействии друг с другом лишь при достаточном их сближении. Казалось бы поэтому, что при больших расстояниях между ними взаимодействие полей несущественно, и в каком-то приближении целесообразно отвлечься от него и рассматривать реальные частицы как свободные.

Рассуждая таким образом, мы, однако, упускаем из виду, что частицы постоянно взаимодействуют с вакуумом как со своего рода физической «средой», в которой они движутся.

Представляется поэтому желательным, чтобы при построении теории с самого начала иметь дело с реальными взаимодействующими частицами и не вводить искусственного представления о фиктивных свободных полях.

Поскольку, однако, до настоящего времени подобная программа проведена не была, то и приходится прибегать к такому разбиению.

В случае отсутствия взаимодействия основное уравнение (3.8) принимает вид

$$i\frac{\partial\Psi(t)}{\partial t}=H_0\Psi(t).$$

Выполняя формальное интегрирование, находим:

$$\Psi(t)=e^{\frac{H_0t}{i}}\Phi. \tag{3.9}$$

Постоянная Φ при изучении свободных полей была нами названа амплитудой состояния. В случае взаимодействующих полей выражение (3.9) уже не будет удовлетворять основному уравнению с Φ, не зависящим от времени. Однако мы можем обобщить его, полагая

$$\Psi(t)=e^{\frac{H_0t}{i}}\Phi(t), \tag{3.10}$$

и рассматривать $\Phi(t)$ как новую амплитуду состояния. С математической точки зрения мы совершаем здесь замену неизвестной функции способом, аналогичным используемому в теории дифференциальных уравнений методу вариации произвольной постоянной. Подставляя (3.10) в основное уравнение (3.8), получаем:

$$H_0e^{\frac{H_0t}{i}}\Phi(t)+ie^{\frac{H_0t}{i}}\frac{\partial\Phi(t)}{\partial t}=(H_0+H_1)e^{\frac{H_0t}{i}}\Phi(t),$$

откуда

$$i\frac{\partial\Phi(t)}{\partial t}=e^{-\frac{H_0t}{i}}H_1e^{\frac{H_0t}{i}}\Phi(t).$$

Обсудим смысл полученного уравнения. В уравнении (3.7) плотность энергии взаимодействия $H_1(\mathbf{x})$ является линейной комбинацией выражений типа

$$H_j(\mathbf{x})=u_\alpha(\mathbf{x},0)\ldots u_\gamma(\mathbf{x},0),$$

но

$$e^{-\frac{H_0t}{i}}H_je^{\frac{H_0t}{i}}=e^{-\frac{H_0t}{i}}u_\alpha(\mathbf{x},0)e^{\frac{H_0t}{i}}\ldots e^{-\frac{H_0t}{i}}u_\gamma(\mathbf{x},0)e^{\frac{H_0t}{i}}.$$

Поэтому действие оператора

$$e^{-\frac{H_0t}{i}}\ldots e^{\frac{H_0t}{i}}$$

на H_1 соответствует замене операторных функций поля $u(\mathbf{x},0)$,

не зависящих от времени, на зависящие от времени операторные функции

$$u(x)=u(\mathbf{x},t)=e^{-\frac{H_0t}{i}}u(\mathbf{x},0)e^{+\frac{H_0t}{i}}.$$

Мы переходим здесь, следовательно, к представлению Гейзенберга для операторных функций свободного поля.

Для определения $\Phi(t)$ имеем теперь уравнение вида:

$$i\frac{\partial\Phi}{\partial t}=H_1(t)\Phi(t),$$

$$H_1(t)=\int H_1(\mathbf{x},t)\,d\mathbf{x}, \tag{3.11}$$

причём оператор $H_1(\mathbf{x},t)$ получается из $H_1(\mathbf{x})$ заменой $u(\mathbf{x},0)$ на $u(x)$. Такое представление уравнения Шредингера называется представлением взаимодействия.

Рассмотрим вопрос о выражении динамических переменных в представлении взаимодействия. Подставляя (3.10) в (3.2), получаем:

$$(\overset{*}{\Psi}(t)A\Psi(t))=\left(\overset{*}{\Phi}(t)e^{-\frac{H_0t}{i}}Ae^{\frac{H_0t}{i}}\Phi(t)\right),$$

т. е.

$$\overline{A}_t=(\overset{*}{\Phi}(t)A_{\text{вз}}(t)\Phi(t)),$$

где

$$A_{\text{вз}}(t)=e^{-\frac{H_0t}{i}}Ae^{\frac{H_0t}{i}}.$$

Мы видим, таким образом, что в представлении взаимодействия операторные выражения динамических переменных должны рассматриваться как функции полевых операторов в представлении Гейзенберга для свободных полей. Иначе говоря, операторы динамических переменных выражаются формами, зависящими от полевых функций

$$u(\mathbf{x},t)=u(x),$$

удовлетворяющих однородным уравнениям свободных полей.

Как видно, основным недостатком всех указанных представлений уравнения Шредингера, в том числе и представления взаимодействия, является выделенная роль времени, а следовательно, явная нековариантность формулировки. Этот формальный недостаток теории был устранён в особой модификации представления взаимодействия, разработанной Томонагой и Швингером[5,6]. В указанной модификации, вместо того чтобы работать с поверхностями $t=\text{const}$ четырёхмерного пространства-времени, вводят более общий класс пространственно-подобных поверхностей σ.

Заметим, что уже с помощью уравнения (3.11) мы можем ввести в рассмотрение очень важную характеристику системы, так называемую матрицу рассеяния, или S-матрицу. Представим себе, что мы изучаем процесс, в начале и в конце которого имеются лишь далеко отстоящие друг от друга частицы, которые можно считать свободными.

Чтобы вычислить амплитуду вероятности для происходящих при этом процессе рассеяний и взаимных превращений частиц, рассмотрим такое положение, при котором взаимодействие $H_1(t)$ адиабатически включается в бесконечно удалённом прошлом и адиабатически выключается в бесконечно удалённом будущем.

Тогда, обозначая амплитуду начального состояния через $\Phi(-\infty)$, а амплитуду конечного состояния — через $\Phi(\infty)$, мы можем связать их соотношением

$$\Phi(\infty) = S\Phi(-\infty), \tag{3.12}$$

в котором оператор S называется оператором рассеяния или матрицей рассеяния. Квадраты соответствующих матричных элементов оператора S определяют вероятности переходов и эффективные сечения возможных процессов рассеяния и взаимного превращения частиц.

Для получения расчётных формул можно было бы, отправляясь от уравнения (3.11), построить его решение методом последовательных приближений в виде разложения по степеням малости взаимодействия. Мы получим тогда связь между $\Phi(-\infty)$ и $\Phi(\infty)$ вида (3.12), причём оператор S запишется в виде разложения

$$S = 1 - i\int_{-\infty}^{\infty} H_1(t)\,dt + (-i)^2\int_{-\infty}^{+\infty} H_1(t)\,dt\int_{-\infty}^{t} H_1(t')\,dt' + \ldots$$

Именно таким путём, т. е. отправляясь от уравнения Шредингера в каком-либо варианте представления взаимодействия, и проводится исследование S-матрицы в большинстве существующих исследований по квантовой теории поля [4, 5, 6, 7].

По нашему мнению, более целесообразно исходить из схемы, предложенной Штюкельбергом [8, 9], в которой вводится обобщённая S-матрица без обращения к гамильтонову формализму. Его роль в деле конкретизации формы S-матрицы заменяют явно сформулированные физические условия, важную роль среди которых играет условие причинности.

Штюкельбергу, однако, не удалось добиться достаточно ясной и общей формулировки такого условия, в связи с чем его идеи и не получили широкого применения.

В направлении дальнейшего развития этих идей мы попытаемся ниже разработать новую формулировку условия причинности

и основанного на нём метода построения квантовой теории взаимодействующих полей*).

При построении теории нам, как и в обычном изложении, придётся пользоваться операциями «включения» и «выключения» взаимодействия.

Чтобы математически описать эту операцию, введём функцию $g(x)$ со значениями из интервала (0,1), представляющую степень интенсивности включения взаимодействия. Тогда в областях, где $g(x) = 0$, взаимодействие отсутствует; в областях, где $g(x) = 1$, оно включено полностью и при $0 < g(x) < 1$ взаимодействие включено лишь частично.

Заменив действительный лагранжиан взаимодействия $L(x)$ на произведение $L(x)\,g(x)$, мы получим положение, при котором взаимодействие «включено с интенсивностью $g(x)$».

Пусть теперь $g(x)$ отлично от нуля лишь в некоторой конечной пространственно-временной области. В этом случае в достаточно отдалённом прошлом и будущем поля являются свободными и потому начальные и конечные состояния динамической системы можем характеризовать обычными постоянными амплитудами состояния.

Эти две амплитуды состояния $\Phi(-\infty)$ и $\Phi(\infty)$ будут связаны некоторым оператором $S(g)$, преобразующим $\Phi(-\infty)$ в $\Phi(\infty)$ и зависящим от поведения функции $g(x)$.

Фиксировав начальную амплитуду состояния $\Phi(-\infty) = \Phi$, мы можем рассматривать конечную амплитуду как функционал от g

$$\Phi(g) = S(g)\,\Phi. \tag{3.13}$$

По данному определению $S(g)$ естественно интерпретируется как матрица рассеяния для того случая, когда взаимодействие включено с интенсивностью $g(x)$. Реальный случай, когда взаимодействие во всём пространстве—времени включено полностью, должен в данной схеме рассматриваться с помощью предельного перехода, при котором область, где $g(x) = 1$, неограниченно расширяется и в пределе охватывает всё пространство-время. Если в этом случае хотя бы для некоторых матричных элементов $S(g)$ существуют предельные значения, то эти предельные значения можно рассматривать как соответствующие элементы обычной матрицы рассеяния, которую можно формально записать как

$$S = S(1).$$

Свяжем теперь оператор $S(g)$ с лагранжианом взаимодействия. Как известно, в классической теории взаимодействие учитывается

*) Доложено Н. Н. Боголюбовым на заседании физико-математического отделения Юбилейной сессии Академии наук СССР в апреле 1954 г.

с помощью добавки к лагранжиану свободного поля $L_0(x)$ лагранжиана взаимодействия $L(x)$ и «уравнения движения» могут быть получены с помощью принципа стационарного действия.

Рассмотрим действие A в системе классических полей в случае, когда взаимодействие включено с интенсивностью $g(x)$. Имеем тогда:

$$A = \int \{L_0(x) + g(x) L(x)\} dx, \tag{3.14}$$

причём в (3.14) под знаком интеграла стоят полевые функции, удовлетворяющие соответствующим уравнениям движения. В частности, если рассматривать $g(x)$ как бесконечно малую первого порядка, то эти полевые функции будут отличаться от свободных полевых функций также на бесконечно малые первого порядка. С другой стороны, ввиду того, что уравнения свободных полей получаются из принципа

$$\delta \int L_0(x) dx = 0,$$

следует, что если под интегралом $\int L_0 \cdot dx$ полевые функции написаны с точностью до бесконечно малой первого порядка, то в значении интеграла это вызовет ошибку второго порядка малости.

Поэтому при включении взаимодействия с бесконечно малой интенсивностью $g(x)$ действие в системе изменится на величину

$$\int L(x) g(x) dx, \tag{3.15}$$

в которой $L(x)$ зависит от волновых функций свободного поля.

Как известно*), в предельном квазиклассическом случае решение обычного уравнения Шредингера для волновой функции $\psi(t)$

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi$$

принимает вид

$$\psi = e^{iA},$$

где A — действие системы. Переходу от невозмущённого выражения

$$A_0 = \int L_0(x) dx \tag{3.16}$$

к действию (3.14) будет, очевидно, соответствовать преобразование волновой функции

$$\psi_0 = e^{iA_0} \to \psi = e^{iA} = e^{i \int L(x) g(x) dx} \psi_0.$$

*) См., например, [11, 12].

Таким образом, с учётом малости величины $g(x)$ переходу от (3.16) к (3.14) соответствует бесконечно малое преобразование волновой функции

$$\psi \to \psi' = \psi + \delta\psi; \ \delta\psi = i \int L(x) g(x) dx \psi.$$

Исходя из принципа соответствия, мы потребуем, чтобы закон преобразования вторично проквантованной амплитуды состояния Φ имел тот же вид, т. е.

$$\Phi \to \Phi' = \Phi + \delta\Phi; \quad \delta\Phi = i \int L(x) g(x) dx \Phi.$$

Иными словами, мы положим, что при бесконечно малой $g(x)$ матрица $S(g)$ имеет вид

$$S(g) = 1 + i \int L(x) g(x) dx. \tag{3.17}$$

Чтобы определить $S(g)$ через лагранжиан взаимодействия $L(x)$ в интересующем нас реальном случае, когда $g(x)$ не только не мала, но близка к единице, необходимо сформулировать остальные условия, которым $S(g)$ должна удовлетворять.

Основным физическим требованием, как всегда, является требование релятивистской ковариантности. Для формулировки этого требования рассмотрим преобразование L из расширенной группы Лоренца (включающей трансляции системы координат)

$$x \to Lx. \tag{3.18}$$

При отсутствии взаимодействия в теории свободного поля закон преобразования амплитуды состояния, соответствующий (3.18), имел вид

$$\Phi' = U_L \Phi. \tag{1.1}$$

В рассматриваемом случае, когда амплитуда состояния $\Phi(g)$ зависит от функции g, необходимо учесть, что сама функция $g(x)$, которую можно рассматривать как некоторое «классическое поле» при преобразовании (3.18), испытывает превращение вида

$$g(x) \to Lg(x) = g(Lx).$$

Поэтому закон преобразования амплитуды $\Phi(g)$ будет

$$\Phi'(Lg) = U_L \Phi(g). \tag{3.19}$$

Из соображений релятивистской ковариантности нужно также потребовать, чтобы закон преобразования (3.13) от начальной функции к конечной не зависел от системы отсчёта, т. е.

$$\Phi'(g) = S(g) \Phi'. \tag{3.20}$$

Подставляя сюда соотношение (1.1) и сдвинутое ($Lg \to g$) соотношение (3.19), находим, с учётом (3.13),

$$U_L S(L^{-1} g)\Phi = S(g) U_L \Phi.$$

Ввиду произвольности амплитуды начального состояния Φ это выражение можно записать в операторной форме

$$U_L S(L^{-1} g) = S(g) U_L$$

или, сдвигая аргументы на L и умножая справа на U_L^{-1} с учётом унитарности U_L

$$S(Lg) = U_L S(g) U_L^{-1} = U_L S(g) \overset{*}{U}_L. \tag{3.21}$$

Формула (3.21) и выражает условие ковариантности оператора $S(g)$.

Сформулируем теперь другое общее требование, предъявляемое в квантовой механике к законам изменения волновых функций, а именно требование сохранения их нормы. Применительно к данному случаю мы должны потребовать

$$(\overset{*}{\Phi}(g)\Phi(g)) = (\overset{*}{\Phi}\Phi),$$

откуда следует, что

$$(\overset{*}{\Phi}\overset{*}{S}(g) S(g)\Phi) = (\overset{*}{\Phi}\Phi),$$

т. е. оператор $S(g)$ должен быть унитарным

$$\overset{*}{S}(g) S(g) = 1. \tag{3.22}$$

Нам необходимо также обеспечить выполнение условия причинности, в соответствии с которым какое-либо событие, происшедшее в системе, может оказать влияние на ход эволюции лишь в будущем и не может оказывать влияние на поведение системы в прошлом, во времена, предшествующие данному событию.

Мы должны поэтому потребовать, чтобы изменение закона взаимодействия в какой-либо пространственно-временной области могло оказать влияние на эволюцию системы лишь в последующие моменты времени.

Для того чтобы сформулировать это условие, фиксируем в какой-либо системе отсчёта некоторый момент времени t и потребуем, чтобы унитарный оператор $S(g)$, преобразующий начальную амплитуду $\Phi(-\infty)$ и конечную $\Phi(\infty) = \Phi(g)$, можно было представить в виде произведения двух унитарных операторов

$$S(g) = S_2^t(g) S_1^t(g), \tag{3.23}$$

из которых первый оператор $S_1^t(g)$ определяет эволюцию системы от $-\infty$ вплоть до момента t и потому не зависит от поведения функции $g(x)$ для $x^0 > t$, а второй оператор $S_2^t(g)$ определяет

эволюцию системы, начиная от момента t и не зависит от поведения $g(x)$ при $x^0 < t$.

Условие (3.23) и есть выражение принципа причинности в теории матрицы $S(g)$.

Заметим, что в том случае, если область G, где функция g отлична от нуля, распадается на две отдельные подобласти такие, что все точки одной из них G_1 лежат в прошлом относительно момента времени t, а все другие точки другой G_2 — в будущем, соотношение (3.23) принимает вид

$$S(g) = S(g_2) S(g_1),$$

где g_2 — часть функции g, отличная от нуля лишь в G_2, а g_1 — часть функции g, отличная от нуля лишь в G_1. Иными словами, в этом случае матрица $S(g)$ равна произведению матриц $S(g_2)$ и $S(g_1)$, каждая из которых отвечает включению взаимодействия с интенсивностью g_2 и g_1 соответственно и зависит лишь от своей области (G_2 или G_1) и не зависит от момента времени t.

В рассматриваемом нами более общем случае матрицы S_1^t и S_2^t зависят также от бесконечно малой окрестности t и потому не являются матрицами рассеяния для соответствующих областей $x^0 > t$ и $x^0 < t$.

Для того чтобы сформулировать условия причинности без явного привлечения этих величин, рассмотрим бесконечно малую вариацию δg функции $g(x)$ в точке y такой, что

$$y^0 > t.$$

Предельная волновая функция $\Phi(g)$ получит тогда приращение

$$\delta\Phi(g) = \delta S(g)\Phi = \delta S(g)\overset{*}{S}(g)\Phi(g).$$

Подставляя сюда выражение (3.23), находим, с учётом унитарности S_1^t, что оператор

$$\delta S(g)\overset{*}{S}(g) = \delta S_2^t(g) S_1^t(g) \overset{*}{S}{}_1^t(g) \overset{*}{S}{}_2^t(g) = \delta S_2^t(g) \overset{*}{S}{}_2^t(g) \tag{3.24}$$

не зависит от поведения функции $g(x)$ при

$$x^0 < t < y^0.$$

Следовательно, по соображениям ковариантности, оператор

$$\delta S(g)\overset{*}{S}(g)$$

не может также зависеть от поведения функции $g(x)$ при $x \sim y$ ($\sim$ — знак пространственного подобия, т. е. $x \sim y$ обозначает,

что точки x и y разделены пространственно-подобным интервалом).

Воспользовавшись известным понятием вариационной производной, мы может, таким образом, сформулировать условие причинности как условие независимости выражения

$$\frac{\delta S(g)}{\delta g(y)} \overset{*}{S}(g)$$

от поведения функции $g(x)$ в точке x при $x \lessdot y$ (символ $x \lessdot y$ выражает тот факт, что точка x по времени расположена раньше y или пространственно подобна ей).

Условие причинности, очевидно, можно записать в виде

$$\frac{\delta}{\delta g(x)} \left(\frac{\delta S(g)}{\delta g(y)} \overset{*}{S}(g) \right) = 0 \quad \text{при } x \lessdot y. \tag{3.25}$$

Как будет показано в следующем параграфе, указанные условия релятивистской ковариантности (3.21), унитарности (3.22) и причинности (3.25) в совокупности с принципом соответствия (3.17) позволяют полностью определить оператор $S(g)$ через лагранжиан взаимодействия $L(x)$.

§ 4. ЛАГРАНЖИАН ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ И S-МАТРИЦА

Приступим теперь к фактическому построению матрицы рассеяния через лагранжиан взаимодействия $L(x)$. Будем искать $S(g)$ в виде формального функционального разложения по степеням g

$$S(g) = 1 + \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n!} \int S_n(x_1, \ldots, x_n)\, g(x_1) \ldots g(x_n)\, dx_1 \ldots dx_n, \tag{4.1}$$

в котором $S_n(x_1, \ldots, x_n)$ являются операторными выражениями, зависящими от полных полевых функций и их частных производных в точках $x_1, \ldots, x_n$. Для обеспечения скалярного характера S_n мы будем также предполагать, что фермиевские полевые операторы входят в S_n лишь в чётных комбинациях. Иначе говоря, мы будем требовать, чтобы $S_n(x_1, \ldots, x_n)$ являлись полилокальными операторами в смысле определения, данного в § 2. Следует подчеркнуть, что требование зависимости S_n от полевых функций в целом, а не от их отдельных $\pm$-частотных частей, представляет собой особое физическое условие. При его выполнении имеет место соотношение

$$[S_n(x_1, \ldots, x_n),\ S_m(y_1, \ldots, y_m)] = 0, \tag{4.2}$$

когда все x_i пространственно-подобны всем y_i. Поэтому если две

функции $g_1(x)$ и $g_2(x)$ локализованы в пространственно-временных областях таких, что любая точка одной области пространственно-подобна всем точкам другой области, то $S(g_2)$ коммутирует с $S(g_1)$. Этим, в сущности, выражается тот факт, что сигнал не может распространяться со скоростью, большей скорости света, и процессы включения взаимодействия во взаимно пространственно-подобных областях g_1 и g_2 не интерферируют друг с другом. Именно для обеспечения этого важного физического свойства мы и будем предполагать, что S_n является полилокальным оператором.

Заметим, в частности, что так как согласно (3.16)

$$S_1(x) = iL(x),$$

то лагранжиан взаимодействия $L(x)$ должен быть локальным оператором. Этому требованию удовлетворяют все обычно употребляемые формы $L(x)$.

Для того чтобы обеспечить сходимость хотя бы отдельных членов разложения (4.1), мы будем предполагать, что S_n являются интегрируемыми операторными функциями. Действительно, тогда при достаточно гладких и достаточно быстро убывающих функциях $g(x)$ отдельные интегралы в (4.1) будут сходиться. Разумеется, сходимость отдельных членов ряда (4.1) не имеет отношения к сходимости всего ряда в целом. В настоящее время в связи с проводившимися в последнее время исследованиями[13, 14, 15, 16] существуют даже довольно веские основания ожидать, что написанный нами ряд (4.1) должен оказаться расходящимся. В лучшем случае при малости взаимодействия можно надеяться, что, взяв некоторое небольшое число членов в разложении, мы получим приближение тем более точное, чем слабее взаимодействие. Иначе говоря, в некоторых случаях можно рассматривать ряд (4.1) как источник асимптотических приближений. Одним из таких случаев, важным в практическом отношении, является электродинамика.

Однако и при заведомо не слабом взаимодействии (например, мезон-нуклонном взаимодействии) изучение формального разложения (4.1) представляет собой большой интерес, так как на таком пути мы сможем довольно просто выяснить ряд свойств матрицы $S(g)$ как качественных, так и количественных с тем, чтобы далее попытаться их установить на более строгой основе. По нашему мнению, изучение этого формального ряда имеет, следовательно, определённую ценность как средство эвристического исследования. К тому же оно наиболее полно соответствует современному фактическому состоянию теории, где до сих пор не удаётся избавиться от различных формальных разложений по степени малости взаимодействия и где с их помощью и были получены все основные результаты.

Возвращаясь к выражению (4.1), видим, что без ограничения общности $S_n(x_1,\ldots,x_n)$ можно считать симметричными функциями своих аргументов $x_1,\ldots,x_n$, так как весовые функции $g(x_1)\ldots g(x_n)$ входят симметричным образом.

Будем теперь раскрывать условия, которым удовлетворяет матрица $S(g)$ для определения конкретного вида функций S_n.

Из условия (3.21) релятивистской ковариантности имеем:

$$\int U_L S_n(x_1,\ldots,x_n)\overset{*}{U}_L g(x_1)\ldots g(x_n)\,dx_1\ldots dx_n =$$
$$= \int S_n(x_1,\ldots,x_n)\,g(Lx_1)\ldots g(Lx_n)\,dx_1\ldots dx_n. \qquad (4,3)$$

Производя в левой части замену переменных $x \to Lx$, получаем отсюда:

$$\int U_L S_n(Lx_1,\ldots,Lx_n)\overset{*}{U}_L g(Lx_1)\ldots g(Lx_n)\,dx_1\ldots dx_n =$$
$$= \int S_n(x_1,\ldots,x_n)\,g(Lx_1)\ldots g(Lx_n)\,dx_1\ldots dx_n,$$

откуда приходим к условию лоренцовской ковариантности для S_n

$$U_L S_n(Lx_1,\ldots,Lx_n)\overset{*}{U}_L = S_n(x_1,\ldots,x_n)$$

или

$$S_n(Lx_1,\ldots,Lx_n) = \overset{*}{U}_L S_n(x_1,\ldots,x_n)\,U_L. \qquad (4.4)$$

Для того чтобы учесть унитарность S-матрицы (3.22), перемножим разложение (4.1) с ему сопряжённым

$$\overset{*}{S}(g) = 1 + \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n!}\int \overset{*}{S}_n(x_1,\ldots,x_n)\,g(x_1)\ldots g(x_n)\,dx_1\ldots dx_n \qquad (4.5)$$

и, обозначив для симметрии записи

$$S_0 = 1,$$

получим:

$$1 = \sum_{\binom{k\geqslant 0}{m\geqslant 0}}\frac{1}{k!m!}\int S_k(x_1,\ldots,x_k)\,g(x_1)\ldots g(x_k)\,dx_1\ldots dx_k \times$$
$$\times\int \overset{*}{S}_m(x_{k+1},\ldots,x_{k+m})\,g(x_{k+1})\ldots g(x_{k+m})\,dx_{k+1}\ldots dx_{k+m} =$$
$$= \sum_{(n,\,k)}\frac{1}{k!(n-k)!}\int S_k(x_1,\ldots,x_k)\,\overset{*}{S}_{n-k}(x_{k+1},\ldots,x_n)\times$$
$$\times g(x_1)\ldots g(x_n)\,dx_1\ldots dx_n. \qquad (4.6)$$

Собирая члены в (4.6) одинаковой «степени» по $g(x)$, при $n=0$ получим тождество $(1=1)$, а при $n>0$ находим:

$$\sum_k\frac{1}{k!(n-k)!}\int S_k(x_1,\ldots,x_k)\,\overset{*}{S}_{n-k}(x_{k+1},\ldots,x_n)\times$$
$$\times g(x_1)\ldots g(x_n)\,dx_1\ldots dx_n = 0. \qquad (4.7)$$

Из соотношения (4.7) при произвольных $g(x)$ ещё нельзя сделать вывода о равенстве нулю выражения

$$\sum_k\frac{1}{k!(n-k)!}\,S_k(x_1,\ldots,x_k)\,\overset{*}{S}_{n-k}(x_{k+1},\ldots,x_n). \qquad (4.8)$$

Подобный вывод можно было бы сделать, если бы выражение (4.8) оказалось симметричным по всем аргументам $x_1,\ldots,x_n$. В действительности же в каждом члене (4.8) существует симметрия лишь внутри двух групп аргументов $x_1,\ldots,x_k$ и $x_{k+1},\ldots,x_n$. Для полной симметризации выражения типа (4.8) введём символ

$$P\left(\frac{x_1,\ldots,x_k}{x_{k+1},\ldots,x_n}\right),$$

обозначающий сумму по всем $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ разбиениям совокупности точек $x_1,\ldots,x_k$ на две совокупности из k и $n-k$ точек. При этом перестановки внутри каждой из этих двух совокупностей не учитываются, так как функции S_k симметричны по своим аргументам.

Например,

$$P\left(\frac{x_1}{x_2}\right)S_1(x_1)\,\overset{*}{S}_1(x_2) = S_1(x)\,\overset{*}{S}_1(x_2) + S_1(x_2)\,\overset{*}{S}_1(x_1),$$

$$P\left(\frac{x_1,\ x_2}{x_3}\right)S_2(x_1,\ x_2)\,\overset{*}{S}_1(x_3) =$$
$$= S_2(x_1,\ x_2)\,\overset{*}{S}_1(x_3) + S_2(x_1,\ x_3)\,\overset{*}{S}_1(x_2) + S_2(x_2,\ x_3)\,\overset{*}{S}_1(x_1).$$

Для симметризации выражения (4.7) перепишем его $n!$ раз, каждый раз изменяя обозначения аргументов так, чтобы совокупность точек $x_1,\ldots,x_n$ перестраивалась в аргументах функций S_k и $\overset{*}{S}_{n-k}$ новым образом. Складывая полученные соотношения в силу неизменности весового множителя $g(x_1)\ldots g(x_n)$, получим тогда

$$\sum_k\int P\left(\frac{x_1,\ldots,x_k}{x_{k+1},\ldots,x_n}\right)S_k(x_1,\ldots,x_k)\times$$
$$\times\overset{*}{S}_{n-k}(x_{k+1},\ldots,x_n)\,g(x_1)\ldots g(x_n)\,dx_1\ldots dx_n = 0,$$

откуда следует равенство нулю выражения

$$\sum_k P\left(\frac{x_1,\ldots,x_k}{x_{k+1},\ldots,x_n}\right) S_k(x_1,\ldots,x_k)\,\overset{*}{S}_{n-k}(x_{k+1},\ldots,x_n)=0$$

ввиду его симметрии по всем n аргументам. Вспоминая, что $S_0=1$, имеем отсюда

$$S_n(x_1,\ldots,x_n)+\overset{*}{S}_n(x_1,\ldots,x_n)+$$
$$+\sum_{(1\leqslant k\leqslant n-1)} P\left(\frac{x_1,\ldots,x_k}{x_{k+1},\ldots,x_n}\right) S_k(x_1,\ldots,x_k)\times$$
$$\times\,\overset{*}{S}_{n-k}(x_{k+1},\ldots,x_n)=0. \qquad (4.9)$$

Обратимся теперь к условию причинности (3.25). Заметим с самого начала, что удобнее оперировать не с величиной

$$\frac{\delta S(g)}{\delta g(y)}\overset{*}{S}(g),$$

которая в силу условия унитарности

$$S\overset{*}{S}=1;\quad \frac{\delta S(g)}{\delta g(y)}\overset{*}{S}(g)+S(g)\frac{\delta \overset{*}{S}(g)}{\delta g(y)}=0$$

антиэрмитова, а с выражением

$$H(y;\,g)=i\frac{\delta S(g)}{\delta g(y)}\overset{*}{S}(g),$$

которое, очевидно, эрмитово. Используя (4.1), находим:

$$H(y;\,g)=i\sum_{n_1\geqslant 0}\frac{1}{n_1!}\int S_{n_1+1}(y,\,x_1,\ldots,x_{n_1})\,g(x_1)\ldots g(x_{n_1})\times$$
$$\times\,dx_1\ldots dx_{n_1}\sum_{n_2\geqslant 0}\frac{1}{n_2!}\int \overset{*}{S}_{n_2}(x_{n_1+1},\ldots,x_{n_1+n_2})\,g(x_{n_1+1})\ldots g(x_{n_1+n_2})\times$$
$$\times\,dx_{n_1+1}\ldots dx_{n_1+n_2}=\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{n!}\int H_n(y,\,x_1,\ldots,x_n)\times$$
$$\times\,g(x_1)\ldots g(x_n)\,dx_1\ldots dx_n, \qquad (4.10)$$

где введены величины

$$H_n(y,\,x_1,\ldots,x_n)=i\sum_{0\leqslant k\leqslant n} P\left(\frac{x_1,\ldots,x_k}{x_{k+1},\ldots,x_n}\right)\times$$
$$\times\,S_{k+1}(y,\,x_1,\ldots,x_k)\,\overset{*}{S}_{n-k}(x_{k+1},\ldots,x_n)=$$
$$=iS_{n+1}(y,\,x_1,\ldots,x_n)+i\sum_{0\leqslant k\leqslant n-1} P\left(\frac{x_1,\ldots,x_k}{x_{k+1},\ldots,x_n}\right)\times$$
$$\times\,S_{k+1}(y,\,x_1,\ldots,x_k)\,\overset{*}{S}_{n-k}(x_{k+1},\ldots,x_n), \qquad (4.11)$$

симметричные по всем своим аргументам, кроме первого. Вычисляя теперь функциональную производную $\frac{\delta}{\delta g(x)}$ от выражения (4.9), получаем:

$$i\frac{\delta}{\delta g(x)}\left(\frac{\delta S(g)}{\delta g(y)}\overset{*}{S}(g)\right)=$$
$$=\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n!}\int H_n(y,\,x,\,x_1,\ldots,x_{n-1})\,g(x_1)\ldots g(x_{n-1})\,dx_1\ldots dx_{n-1},$$

откуда, в силу условия причинности (3.25) и на основании симметрии функций H_n по всем аргументам, кроме первого, следует, что

$$H_n(y,\,x_1,\,x_2,\ldots,x_n)=0, \qquad (4.12)$$

если хотя бы для одного x_j, $j=1,\ldots,n$

$$y\geqslant x_j.$$

Итак, с помощью условий ковариантности, унитарности и причинности, которым подчиняется матрица $S(g)$ в целом, мы вывели соответствующие условия ковариантности (4.4), унитарности (4.9) и причинности (4.12) для функций $S_n(x_1,\ldots,x_n)$. Покажем теперь, что совокупность условий (4.4), (4.9) и (4.12) вместе с соотношением (4.3), выражающим принцип соответствия, достаточны для определения вида функций

$$S_n(x_1,\ldots,x_n).$$

Начнём с $S_1(x)$. По принципу соответствия (4.3) мы имеем, что

$$S_1(x)=iL(x).$$

Проверим непротиворечивость этому соотношению основных трёх требований. Выполнение условия ковариантности (4.4) очевидно,

условие причинности для одной функции $S_1(x)$ ещё не может быть сформулировано, а условие унитарности (4.9) даёт

$$S_1(x) + \overset{*}{S}_1(x) = 0, \tag{4.13}$$

откуда следует условие эрмитовости

$$L(x) = \overset{*}{L}(x) \tag{4.14}$$

на лагранжиан взаимодействия. Таким образом, кроме условия локальности лагранжиан $L(x)$ должен удовлетворять также условию эрмитовости.

Перейдём к $S_2(x, y)$.

Из условия причинности (4.12) при $n=1$ получаем при $x \geqslant y$

$$H_1(x, y) = iS_2(x, y) + iS_1(x)\overset{*}{S}_1(y) = 0,$$

откуда, принимая во внимание (4.3), следует

$$S_2(x, y) = -S_1(x)\overset{*}{S}_1(y) = -L(x)L(y) \quad \text{при } x \geqslant y. \tag{4.15}$$

Пусть теперь $y \geqslant x$. Имеем в виду симметрии S_2

$$S_2(x, y) = S_2(y, x) = -L(y)L(x) \quad \text{при } y \geqslant x. \tag{4.16}$$

Области определения соотношений (4.15) и (4.16) перекрываются при $x \sim y$, но здесь в силу локального характера оператора L имеет место соотношение

$$L(x)L(y) = L(y)L(x)$$

и противоречия между (4.15) и (4.16) не возникает.

Итак, получено определение функции $S_2(x, y)$

$$S_2(x, y) = \begin{cases} -L(x)L(y), & x \geqslant y, \\ -L(y)L(x), & y \geqslant x, \end{cases} \tag{4.17}$$

беря от которого эрмитово сопряжение, имеем, с учётом (4.14)

$$\overset{*}{S}_2(x, y) = \begin{cases} -L(y)L(x), & x \geqslant y, \\ -L(x)L(y), & y \geqslant x. \end{cases} \tag{4.18}$$

Симметрия и полилокальность $S_2(x, y)$ следует из формы записи. Ясно, что выражение (4.17) удовлетворяет условию ковариантности. Нетрудно убедиться также в выполнении условия унитарности. В соответствии с (4.9) нам нужно проверить соотношение

$$S_2(x, y) + \overset{*}{S}_2(x, y) + S_1(x)\overset{*}{S}_1(y) + S_1(y)\overset{*}{S}_1(x) = 0,$$

справедливость которого непосредственно следует из формул (4.3), (4.13), (4.17) и (4.18). Действительно, имеем, например, при $x \geqslant y$

$$S_2(x, y) + \overset{*}{S}_2(x, y) + S_1(x)\overset{*}{S}_1(y) + S_1(y)\overset{*}{S}_1(x) =$$
$$= -L(x)L(y) - L(y)L(x) + L(x)L(y) + L(y)L(x) = 0.$$

Аналогично убеждаемся в его справедливости при $y \geqslant x$.

Мы установили, таким образом, что выражение (4.17) удовлетворяет всем наложенным на S_2 требованиям.

Целесообразно ввести теперь понятие упорядоченного или хронологического произведения операторов. Мы введём его пока лишь для локальных операторов.

Хронологическое произведение ряда локальных операторов $\Phi_1(x_1), \ldots, \Phi_n(x_n)$ обозначается символом $T[\Phi_1(x_1)\ldots\Phi_n(x_n)]$ и по определению равно обычному произведению этих операторов, взятых в определённом порядке, соответствующем убыванию временных компонент аргументов сомножителей слева направо, т. е.

$$T[\Phi_1(x_1)\ldots\Phi_n(x_n)] = \Phi_{j1}(x_{j1})\Phi_{j2}(x_{j2})\ldots\Phi_{jn}(x_{jn}), \tag{4.19}$$

где последовательность $x_{j1}, \ldots, x_{jn}$ представляет собой последовательность аргументов $x_1, \ldots, x_n$, расположенных в порядке убывания временных компонент, т. е.

$$x^0_{j1} \geqslant x^0_{j2} \geqslant \ldots \geqslant x^0_{jn}.$$

Для краткости мы часто будем называть хронологическое произведение T-произведением. Нам потребуется также понятие антихронологического произведения, по определению соответствующего возрастанию временных компонент аргументов слева направо. Беря, например, эрмитово сопряжение от правой части (4.19), получим выражение

$$\overset{*}{\Phi}_{jn}(x_{jn})\ldots\overset{*}{\Phi}_{j1}(x_{j1}),$$
$$x^0_{jn} \leqslant x^0_{jn-1} \leqslant \ldots \leqslant x^0_{j1},$$

которое удобно назвать антихронологическим произведением (или T^*-произведением) операторов $\overset{*}{\Phi}_1(x_1)\ldots\overset{*}{\Phi}_n(x_n)$. Положим поэтому

$$T^*(\Phi_1(x_1)\ldots\Phi_n(x_n)) = \Phi_{j1}(x_{j1})\Phi_{j2}(x_{j2})\ldots\Phi_{jn}(x_{jn}), \tag{4.20}$$
$$x^0_{j1} \leqslant x^0_{j2} \leqslant \ldots \leqslant x^0_{jn}.$$

Покажем, что определение T-произведения ковариантно, несмотря на выделенную роль времени.

Для значения T-произведения существенен хронологический порядок точек $x_1, \ldots, x_n$, который может меняться при переходе от одной лоренцовой системы отсчёта к другой при лоренцовом повороте. Нетрудно, однако, убедиться, что такой переход не изменяет значения T-произведения. Представим себе для этого, что мы совершаем интересующее нас преобразование путём большого числа малых преобразований, что всегда возможно ввиду непрерывного характера преобразований из расширенной группы Лоренца. Процесс изменения хронологического порядка точек $x_1, \ldots, x_n$ разобьётся при этом на некоторое число этапов, на каждом из которых будет одновременно меняться временной порядок внутри некоторой группы $x_j, \ldots, x_k$ (двух или более) точек. Но хронологический порядок нескольких точек $x_j, \ldots, x_k$ может быть изменён лоренцовским поворотом лишь в случае взаимного пространственного подобия этих точек. Соответствующие операторы $\Phi_j(x_j) \ldots \Phi_k(x_k)$ в силу свойства локальности в этом случае коммутируют между собой и порядок их несущественен. Поэтому на каждом этапе преобразования значение T-произведения не изменится, а следовательно, оно и вообще не изменится.

Нетрудно заметить также, что согласно определению (4.19) локальные операторы можно коммутировать под знаком T-произведения, не меняя его значения. Отсюда следует, в частности, что если все операторы Φ одинаковы, то T-произведение оказывается симметричной функцией своих аргументов.

Возвращаясь к формуле (4.17), видим, что с помощью T-произведения её можно записать в виде

$$S_2(x, y) = -T[L(x), L(y)]. \tag{4.21}$$

Соответственно (4.18) принимает вид

$$\hat{S}_2(x, y) = -T^*[L(x), L(y)]. \tag{4.22}$$

Покажем теперь, что вообще выражение

$$S_n(x_1, \ldots, x_n) = i^n T[L(x_1) \ldots L(x_n)], \tag{4.23}$$

являющееся естественным обобщением формул (4.3) и (4.21), удовлетворяет всем налагаемым на S_n формальным условиям. Выполнение условий симметрии, ковариантности и полилокальности теперь очевидны и проверки требуют лишь условия унитарности и причинности.

Нам будет удобнее, однако, оперировать для этого не с формулой (4.23), а с оператором $S(g)$ в целом. Подставляя (4.23) в (4.1), получаем для $S(g)$

$$S(g) = 1 + \sum_{n \geqslant 1} \frac{i^n}{n!} \int T[L(x_1), \ldots, L(x_n)] \times$$
$$\times g(x_1) \ldots g(x_n) dx_1 \ldots dx_n. \tag{4.24}$$

Это выражение представляет собой разложение оператора $S(g)$ в функциональный ряд по степеням $g(x)$. Нас интересуют в настоящий момент некоторые свойства коэффициентов разложения. Подобно тому как в теории специальных функций нередко бывает удобнее выводить взаимные свойства функций не из их конкретной структуры, а из некоторой общей производящей функции, в данном положении оказывается более простым проверить условие унитарности и причинности для всего ряда (4.24) в целом.

Для этого запишем выражение (4.24) в несколько другой форме. Представим n-й член ряда в следующем виде:

$$\frac{i^n}{n!} T\left[\int L(x_1) g(x_1) dx_1 \ldots \int L(x_n) g(x_n) dx_n\right] =$$
$$= \frac{i^n}{n!} T\left[\left(\int L(x) g(x) dx\right)^n\right].$$

Ряд (4.24) можно теперь формально просуммировать, введя T-экспоненту [17]

$$S(g) = T\left[1 + \sum_{n \geqslant 1} \frac{i^n}{n!} \left(\int L(x) g(x) dx\right)^n\right] = T\left(e^{i\int L(x) g(x) dx}\right). \tag{4.25}$$

Мы получим, таким образом, новое выражение матрицы рассеяния.

К важному понятию T-экспоненты можно подойти и с другой стороны. Разобьём область включения взаимодействия, описываемую функцией $g(x)$, пространственно-подобными поверхностями $t = \text{const}$ на бесконечно большое число бесконечно тонких слоёв Δ_j. Имеем тогда

$$T\left(e^{i\int L(x) g(x) dx}\right) = T\left(e^{i \sum_j \int_{\Delta_j} L(x) g(x) dx}\right) =$$
$$= T\left(\prod_j e^{i \int_{\Delta_j} L(x) g(x) dx}\right).$$

T-экспоненту (4.25) естественно поэтому определить как предел T-произведения

$$T\left(e^{i\int L(x) g(x) dx}\right) = \lim_{\Delta_j \to 0} T\left[\prod_j \left(1 + i \int_{\Delta_j} L(x) g(x) dx\right)\right]. \tag{4.26}$$

С помощью представления (4.26) свойство унитарности матрицы $S(g)$ делается очевидным.

В самом деле, T-произведение (4.26) является обычным произведением

$$\prod_j \left(1 + i \int_{\Delta_j} L(x)\, g(x)\, dx\right),$$

взятым в надлежащем хронологическом порядке следования слоёв Δ_j. Но каждый сомножитель этого произведения при достаточно малых Δ_j является унитарным с точностью до величин высшего порядка малости. Поэтому все произведение является унитарным. Тем самым доказана унитарность предела этого произведения, равного $S(g)$.

Перейдём теперь к проверке условия причинности. Вычисляя вариационную производную от $S(g)$ в точке y, найдём:

$$-i\frac{\delta S(g)}{\delta g(y)} = T\left(L(y)\, e^{i\int L(z)\, g(z)\, dz}\right).$$

Разобьём четырёхмерное пространство на две части G_+ и G_- пространственно-подобной поверхностью

$$x^0 = \text{const} = y^0.$$

Пусть G_+ лежит «в будущем», а G_- «в прошедшем». Имеем тогда

$$-i\frac{\delta S(g)}{\delta g(y)} = T\left(L(y)\, e^{i\int_{G_+} L(z)\, g(z)\, dz}\, e^{i\int_{G_-} L(z)\, g(z)\, dz}\right) =$$

$$= T\left(L(y)\, e^{i\int_{G_+} L(z)\, g(z)\, dz}\right) T\left(e^{i\int_{G_-} L(z)\, g(z)\, dz}\right). \qquad (4.27)$$

С другой стороны, получим совершенно аналогично:

$$S(g) = T\left(e^{i\int_{G_+} L(z)\, g(z)\, dz + i\int_{G_-} L(z)\, g(z)\, dz}\right) =$$

$$= T\left(e^{i\int_{G_+} L(z)\, g(z)\, dz}\right) \cdot T\left(e^{i\int_{G_-} L(z)\, g(z)\, dz}\right),$$

и потому

$$\overset{*}{S}(g) = \overset{*}{T}\left(e^{i\int_{G_-} L(z)\, g(z)\, dz}\right) \cdot \overset{*}{T}\left(e^{i\int_{G_+} L(z)\, g(z)\, dz}\right).$$

Принимая во внимание свойство унитарности выражения

$$T\left(e^{i\int_{G_-} L(z)\, g(z)\, dz}\right),$$

отсюда на основании (4.27) найдём:

$$-i\frac{\delta S(g)}{\delta g(y)}\overset{*}{S}(g) = T\left(L(y)\, e^{i\int_{G_+} L(z)\, g(z)\, dz}\right) T\left(e^{i\int_{G_+} L(z)\, g(z)\, dz}\right). \qquad (4.28)$$

Таким образом,

$$-i\frac{\delta S(g)}{\delta g(y)}\overset{*}{S}(g)$$

не зависит от поведения функции $g(x)$ в области G_-, т. е. при $x^0 < y^0$.

По соображениям ковариантности это соотношение имеет место также и в случае пространственного подобия точек x и y (при $x \sim y$). Проверка условия причинности, таким образом, закончена.

Данные выше доказательства причинности и унитарности оператора весьма просты и наглядны. Необходимо, однако, отметить, что с чисто математической точки зрения они не являются вполне последовательными. В самом деле, в ходе рассуждений мы связали вопрос о выполнении для произведений (4.23) элементарных соотношений (4.9) и (4.12) с совершенно неясными вопросами о суммировании ряда (4.1) в целом, о предельных переходах и т. п. Строго говоря, всех этих элементов для доказательства совсем не требуется.

Дело в том, что вместо того, чтобы оперировать с T-экспонентой, мы можем ввести «T-экспоненту с точностью до заданной степени g» и тогда все вопросы суммирования ряда автоматически снимаются.

Мы убедились, таким образом, что выражение

$$S_n(x_1, \ldots, x_n) = i^n T(L(x_1) \ldots L(x_n))$$

является допустимым в смысле удовлетворения всем наложенным на S_n условиям. Оказывается, однако, что это выражение не является самым общим выражением, удовлетворяющим всем наложенным условиям. Рассмотрим поэтому вопрос о построении самого общего выражения для $S_n(x_1, \ldots, x_n)$, удовлетворяющего условиям симметрии, ковариантности, причинности и унитарности и тем самым полностью решим поставленную задачу построения оператора $S(g)$.

Исследуем для этого прежде всего процедуру определения функции $S_n(x_1, \ldots, x_n)$ по данным предыдущим функциям $S_1, S_2, \ldots, S_{n-1}$. Условием унитарности (4.9) S_n определяется через них с точностью до некоторого антиэрмитового оператора, который мы обозначим через $i\Lambda_n(x_1, \ldots, x_n)$. В соответствии с условием симметрии величина $\Lambda_n(x_1, \ldots, x_n)$ должна быть симметричной функцией своих аргументов $x_1, \ldots, x_n$. Условием

причинности (4.12) операторная функция $S_n(x_1, \ldots, x_n)$ полностью определяется через предыдущие функции в области определения своих аргументов, в которой

$$x_1 \geqslant \text{ хотя бы одного из } x_j,\ j = 2, 3, \ldots, n.$$

Поэтому в указанной области антиэрмитов оператор $i\Lambda_n(x_1, \ldots, x_n)$ должен равняться нулю. Из свойства его симметрии по всем аргументам следует, что он также равен нулю, если хотя бы для одной пары аргументов x_i и x_j

$$x_i \neq x_j$$

и может, следовательно, отличаться от нуля лишь при полном совпадении всех аргументов

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n.$$

Таким образом, из условий причинности, унитарности и симметрии вытекает, что эрмитов оператор $\Lambda_n(x_1, \ldots, x_n)$ есть квазилокальный оператор, в смысле определения, данного в § 2, и его коэффициентные функции имеют вид

$$Z\left(\ldots \frac{\partial}{\partial x_i} \ldots\right)\delta(x_1 - x_2) \ldots \delta(x_1 - x_n),$$

причём по соображениям трансляционной инвариантности Z не может зависеть от x_i.

Итак, установлено, что условия инвариантности, симметрии, унитарности и причинности при данных $S_1, S_2, \ldots, S_{n-1}$ определяют S_n с точностью до $i\Lambda_n$, где $\Lambda_n(x_1, \ldots, x_n)$ — эрмитовый симметричный квазилокальный оператор, преобразующийся как скаляр. Поэтому для того, чтобы получить выражение для $S_1, S_2, \ldots, S_n$, кроме локального оператора $L(x)$, необходимо задать ещё цепочку квазилокальных операторов

$$\Lambda_2(x_1, x_2), \ldots, \Lambda_n(x_1, \ldots, x_n). \tag{4.29}$$

Мы пришли на первый взгляд к несколько странным результатам. Для полного определения матрицы $S(g)$ задание лагранжиана взаимодействия оказывается недостаточным, и необходимо задать ещё бесконечную цепочку квазилокальных операторов (4.29).

Для уяснения существа положения подойдём к рассматриваемому нами вопросу несколько с другой стороны. Рассмотрим для этого выражение

$$T\left(e^{i\int L(x;\, g)\, g(x)\, dx}\right), \tag{4.30}$$

где «лагранжиан» $L(x;\, g)$ определяется соотношением

$$L(x;\, g) = L(x) + \sum_{\nu \geqslant 2} \frac{1}{\nu!} \times \int \Lambda_\nu(x, x_1, \ldots, x_{\nu-1})\, g(x_1) \ldots g(x_{\nu-1})\, dx_1 \ldots dx_{\nu-1}. \tag{4.31}$$

В силу квазилокального характера функций Λ_ν все интеграции в (4.31) снимаются и $L(x;\, g)$ фактически зависит от полевых функций $u(x)$ в точке x. Поэтому $L(x;\, g)$ является локальным оператором, который, кроме полевых операторов $u(x)$, зависит от функций $g(x)$, которые можно рассматривать как «классическое» поле. Следовательно, выражение (4.30) удовлетворяет всем наложенным на $S(g)$ условиям, в том числе и условию соответствия (4.3), и может рассматриваться как матрица рассеяния $S(g)$. Разлагая (4.30) в ряд по степеням g, мы получим поэтому некоторые выражения для $S_n(x_1, \ldots, x_n)$, удовлетворяющие всем наложенным условиям. Имеем:

$$T\left(e^{i\int L(x;\, g)\, g(x)\, dx}\right) = 1 + \sum_{m \geqslant 1} \frac{i^m}{m!} \int T\{L(x_1;\, g) \ldots L(x_m;\, g)\} \times$$
$$\times\, g(x_1) \ldots g(x_m)\, dx_1 \ldots dx_m.$$

Подставляя сюда разложения (4.31), получаем:

$$T\left(e^{i\int L(x;\, g)\, g(x)\, dx}\right) = 1 + \sum_{\substack{m \geqslant 1 \\ (\nu_1 \geqslant 0, \ldots, \nu_m \geqslant 0)}} \frac{i^m}{m!} \frac{1}{\nu_1! \ldots \nu_m!} \times$$
$$\times \int T\{\Lambda_{\nu_1}(x_1, \ldots, x_{\nu_1}) \ldots \Lambda_{\nu_m}(x_{\nu_1 + \cdots + \nu_{m-1} + 1} \ldots$$
$$\ldots x_{\nu_1 + \cdots + \nu_m})\}\, g(x_1) \ldots g(x_{\nu_1 + \cdots + \nu_m}) \times$$
$$\times\, dx_1 \ldots dx_{\nu_1 + \cdots + \nu_m},$$

где мы положили для симметрии $L(x) = \Lambda_1(x)$. Символом

$$T\{\Lambda_{\nu_1}(x_1, \ldots, x_{\nu_1}) \ldots \Lambda_{\nu_s}(x_\lambda \ldots x_{\nu + \nu_s})\}$$

обозначено произведение операторов $\Lambda_{\nu_1}, \ldots, \Lambda_{\nu_s}$, взятых в хронологическом порядке временных аргументов. Множественность аргументов у каждого из Λ_ν не должна нас смущать, так как по определению Λ_ν отлично от нуля лишь при совпадении своих аргументов.

Перестроим теперь этот ряд по степеням $g(x)$, выделив члены, в которых $g(x)$ входит в определённой n-й степени и которые

содержат ровно n интеграций:

$$T\left(e^{i\int L(x;g)\,g(x)\,dx}\right)=1+\sum_{n\geqslant 1}\sum_{\left(\substack{1\leqslant m\leqslant n\\ \Sigma\nu_i=n}\right)}\frac{i^m}{m!}\frac{1}{\nu_1!\ldots\nu_m!}\times$$

$$\times\int T\left\{\Lambda_\nu(x_1,\ldots,x_{\nu_1})\ldots\Lambda_{\nu_m}(x_{\nu_1+\cdots+\nu_{m-1}+1}\ldots x_n)\right\}\times$$

$$\times g(x_1)\ldots g(x_n)\,dx_1\ldots dx_n.$$

Последнее разложение отличается ещё от разложения (4.1) несимметричным характером коэффициентов при «степенях» функции $g(x)$. Для их симметризации, пользуясь симметрией весового множителя $g(x_1)\ldots g(x_n)$ при каждом данном n и симметрией функций λ_ν произведём $\frac{n!}{\nu_1!\ldots\nu_m!}$ раз замену обозначений переменных $x_1,\ldots,x_n$ так, чтобы сумма всех полученных выражений с учётом симметрии Λ_ν была бы симметричной функцией всех аргументов $x_1,\ldots,x_n$. Разделив результат на число $\frac{n!}{\nu_1!\ldots\nu_m!}$, мы приходим к выражению

$$T\left(e^{i\int L(x;g)\,g(x)\,dx}\right)=1+\sum_{n\geqslant 1}\sum_{\left(\substack{1\leqslant m\leqslant n\\ \Sigma\nu_i=n}\right)}\frac{i^m}{n!m!}\times$$

$$\times\int P(x_1,\ldots,x_{\nu_1}|x_{\nu_1+1}\ldots|\ldots x_n)\times$$

$$\times T\left\{\Lambda_{\nu_1}(x_1,\ldots,x_{\nu_1})\ldots\Lambda_{\nu_m}(\ldots x_n)\right\}g(x_1)\ldots g(x_n)\,dx_1\ldots dx_n,$$

где $P(x_1,\ldots,x_{\nu_1}|x_{\nu_1+1}\ldots|\ldots x_n)$ — оператор симметризации по произвольным разбиениям совокупности n точек на $\frac{n!}{\nu_1!\ldots\nu_m!}$ $(\Sigma\nu_i=n)$ всевозможных разбиений по $\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_m$ точек. Этот оператор является естественным обобщением оператора

$$P\left(\frac{x_1,\ldots,x_\nu}{x_{\nu+1}\ldots x_n}\right)=P(x_1,\ldots,x_\nu|x_{\nu+1}\ldots x_n).$$

Итак, матрица (4.29) представлена в виде

$$T\left(e^{i\int L(x;g)\,g(x)\,dx}\right)=$$

$$=1+\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n!}\int S_n(x_1,\ldots,x_n)\,g(x_1)\ldots g(x_n)\,dx_1\ldots dx_n,$$

где коэффициенты S_n имеют вид

$$S_n(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{\left(\substack{1\leqslant m\leqslant n\\ \Sigma\nu_i=n}\right)}\frac{i^m}{m!}P(x_1,\ldots,x_{\nu_1}|\ldots|\ldots x_n)\times$$

$$\times T\left\{\Lambda_{\nu_1}(x_1,\ldots,x_{\nu_1})\ldots\Lambda_{\nu_n}(\ldots x_n)\right\}.$$

Вспоминая, что $\Lambda_1(x)=L(x)$, можем переписать S_n в виде

$$S_n(x_1,\ldots,x_n)=i^nT\left[L(x_1)\ldots L(x_n)\right]+$$

$$+\sum_{\left(\substack{2\leqslant m\leqslant n-1\\ \Sigma\nu_i=n}\right)}\frac{i^m}{m!}P(x_1,\ldots,x_{\nu_1}|\ldots|\ldots x_n)\times$$

$$\times T\left[\Lambda_{\nu_1}(x_1,\ldots,x_{\nu_1})\ldots\Lambda_{\nu_m}(1\ldots x_n)\right]+i\Lambda_n(x_1,\ldots,x_n).\quad(4.32)$$

Рассмотрим несколько простых конкретных случаев полученной формулы (4.32).

При $n=2$ получаем:

$$S_2(x_1,x_2)=i^2T\left[L(x_1)\,L(x_2)\right]+i\Lambda_2(x_1,x_2).\qquad(4.33а)$$

При $n=3$ имеем соответственно:

$$S_3(x_1,x_2,x_3)=i^3T\left[L(x_1)\,L(x_2)\,L(x_3)\right]+$$

$$+\sum_{\left(\substack{\nu_1+\nu_2=3\\ m=2}\right)}\frac{i^2}{2!}P(x_1,x_\nu|\ldots x_3)\,T\left[\Lambda_{\nu_1}(x_1,x_{\nu_1})\,\lambda_{\nu_2}(\ldots x_3)\right]+$$

$$+i\lambda_3(x_1,x_2,x_3)=-iT\left[L(x_1)\,L(x_2)\,L(x_3)\right]-$$

$$-T\left[L(x_1)\,\Lambda_2(x_2,x_3)\right]-T\left[L(x_2)\,L(x_1,x_3)\right]-$$

$$-T\left[L(x_3)\,L(x_1,x_2)\right]+i\Lambda_3(x_1,x_2,x_3).\qquad(4.33б)$$

Мы видим отсюда, что каждая последующая функция S_n выражается через предыдущие $S_1,\ldots,S_{n-1}$ с точностью до симметричного, антиэрмитового, квазилокального оператора $i\Lambda_n(x_1,\ldots,x_n)$. Поэтому выражение (4.32) является самым общим выражением для S_n, а выражение

$$S(g)=T\left(e^{i\int L(x;g)\,g(x)\,dx}\right),\qquad(4.34)$$

где $L(x;g)$ определяется разложением (4.31), самым общим выражением для матрицы рассеяния.

Таким образом, цепочка квазилокальных операторов (4.29), которую необходимо задать для полного определения матрицы рассеяния $S(g)$, фактически может быть включена в «лагранжиан» взаимодействия.

Возникает теперь вопрос о физическом смысле линейной комбинации (4.31) $L(x)$ и интегралов от квазилокальных операторов, играющей роль наиболее полного допустимого лагранжиана.

Дело в том, что в наших рассуждениях была использована нефизическая операция «включения» взаимодействия. При этом получилось, что часть лагранжиана «включилась» в первом приближении, часть — во втором, часть — в n-м и лагранжиан взаимодействия оказался разбитым на цепочку отдельных кусков. Физический смысл, однако, имеет положение, когда взаимодейст-

вие включено полностью. При этом функция $g(x)$ равна единице и выражения (4.31) и (4.34) принимают вид

$$L(x;1) = L(x) + \sum_{\nu \geqslant 2} \frac{1}{\nu!} \int \Lambda_\nu (x, x_1, \ldots, x_{\nu-1})\, dx_1 \ldots dx_{\nu-1}, \tag{4.35}$$

$$S(1) = T\left(e^{i \int L(x;1)\, dx}\right). \tag{4.36}$$

Поэтому действительная матрица рассеяния $S(1)$ полностью характеризуется действительным лагранжианом взаимодействия системы $L(x;1)$, который в теории возмущений иногда представляется в виде ряда отдельных членов.

При обычном изложении теории поля, исходя из уравнения Шредингера, получают представление для матрицы рассеяния в виде

$$T\left(e^{-i \int H(x)\, dx}\right), \tag{4.37}$$

где $H(x)$ — плотность гамильтониана взаимодействия.

$H(x)$ совпадает с $-L(x)$ лишь в особо простых случаях, когда $L(x)$ не зависит от производных функций поля. В общем случае $H(x)$, кроме члена $-L(x)$, содержит ещё некоторые нековариантные члены. Однако в результате довольно сложной процедуры[18] эти члены полностью исключаются и выражение (4.37) приводится к виду (4.36).

§ 5. РАСКРЫТИЕ ХРОНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ

Обладая явным выражением для матрицы рассеяния, можем приступить к вычислению её матричных элементов по различным состояниям.

В процессе этого вычисления нам придётся приводить члены матрицы к нормальной форме, т. е. к такой форме, когда в отдельных слагаемых все операторы уничтожения стоят справа, а операторы порождения — слева.

Займёмся поэтому выражением T-произведений локальных операторов $L(x)$ через нормальные произведения соответственных полевых операторов. Нам будет удобно для этого распространить понятие T-произведения на случай общей системы линейных операторов, определённых в § 2.

Определим хронологическое или упорядоченное произведение

$$T(A_1(x_1) \ldots A_n(x_n))$$

линейных операторов $A_1(x_1) \ldots A_n(x_n)$ как обычное произведение в хронологическом порядке, умноженное на $\varepsilon = (-1)^\eta$, где η —

чётность ферми-перестановок при переходе от порядка $1, \ldots, n$ к хронологическому порядку, т. е.

$$T(A_1(x_1) \ldots A_n(x_n)) = \varepsilon A_{j1}(x_{j1}) \ldots A_{jn}(x_{jn}) \tag{5.1}$$

при

$$x^0_{j1} \geqslant x^0_{j2} \geqslant \ldots \geqslant x^0_{jn}; \quad \varepsilon = (-1)^\eta,$$

где η — чётность перестановки ферми-операторов при переходе от порядка $(1, 2, \ldots, n)$ к порядку $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$.

Рецепт раскрытия таких произведений даёт «теорема Вика для T-произведений», являющаяся аналогом «теоремы Вика для обычных произведений». Прежде чем приступить к доказательству этой теоремы, введём важное понятие «хронологического спаривания операторов».

Рассмотрим для этого (5.1) в случае $n = 2$. Тогда

$$T(A_1(x_1) A_2(x_2)) = \begin{cases} A_1(x_1) A_2(x_2), & x^0_1 > x^0_2; \\ \varepsilon A_2(x_2) A_1(x_1), & x^0_2 > x^0_1. \end{cases}$$

Это выражение в соответствии с определением обычного спаривания

$$A_1(x_1) A_2(x_2) = :A_1(x_1) A_2(x_2): + \underbrace{A_1(x_1) A_2}(x_2)$$

может быть преобразовано к виду

$$\begin{aligned} &T(A_1(x_1) A_2(x_2)) = \\ &= \begin{cases} :A_1(x_1) A_2(x_2): + \underbrace{A_1(x_1) A_2}(x_2), & x^0_1 > x^0_2, \\ \varepsilon :A_2(x_2) A_1(x_1): + \varepsilon \underbrace{A_2(x_2) A_1}(x_1) = \\ \quad = :A_1(x_1) A_2(x_2): + \varepsilon \underbrace{A_2(x_2) A_1}(x_1), & x^0_2 > x^0_1. \end{cases} \end{aligned} \tag{5.2}$$

Мы видим отсюда, что в любом случае $T(A_1(x_1) A_2(x_2))$ отличается от $:A_1(x_1) A_2(x_2):$ на c — число, которое мы назовём хронологическим спариванием и обозначим символом $\overline{A_1(x_1) A_2}(x_2)$, т. е по определению

$$T(A_1(x_1) A_2(x_2)) = :A_1(x_1) A_2(x_2): + \overline{A_1(x_1) A_2}(x_2), \tag{5.3}$$

причём согласно (5.2)

$$\overline{A_1(x_1) A_2}(x_2) = \begin{cases} \underbrace{A_1(x_1) A_2}(x_2), & x^0_1 > x^0_2, \\ \varepsilon \underbrace{A_2(x_2) A_1}(x_1), & x^0_2 > x^0_1. \end{cases} \tag{5.4}$$

Отметим прежде всего характерное отличие хронологического спаривания. Под знаком хронологического спаривания можно из-

менить порядок сомножителей, так же как и под знаком нормального произведения, т. е.

$$\overline{A_1(x_1)\,A_2(x_2)} = \varepsilon\,\overline{A_2(x_2)\,A_1(x_1)},$$

что непосредственно вытекает из (5.4).

Определим сейчас хронологическое спаривание для основных типов нами исследованных полей.

Для комплексного скалярного поля, используя выражения обычных спариваний (типа (2.8)), находим:

$$\overline{\varphi(x)\overset{*}{\varphi}(y)} = \begin{cases} -iD^{(-)}(x-y), & x^0 > y^0, \\ -iD^{(-)}(y-x) = iD^{(+)}(x-y), & y^0 > x^0. \end{cases} \quad (5.5)$$

Таким образом, мы видим, что при $x^0 > y^0$ и $y^0 > x^0$, а также и при $x \cong y$, где обе формы совпадают, хронологическое спаривание $\overline{\varphi(x)\overset{*}{\varphi}(y)}$ совпадает с причинной функцией Грина $D^c(x-y)$ (с точностью до множителя i^{-1}). Мы условимся считать поэтому, что это совпадение имеет место и в бесконечно малой окрестности точки $x = y$, т. е. всегда

$$\overline{\varphi(x)\overset{*}{\varphi}(y)} = \frac{1}{i}\,D^c(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^4 i}\int \frac{e^{ik(x-y)}dk}{m^2 - k^2 - i\varepsilon}. \quad (5.6)$$

Как видно, при введении спариваний имеется некоторый произвол. Действительно, соотношения (5.5) определяют его лишь при $x \neq y$.

Правила же интеграции данного выражения в бесконечно малой окрестности точки $x = y$ можно фиксировать произвольно. Всегда можно, например, добавить к правой части (5.6) любую коэффициентную функцию квазилокального оператора

$$P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\delta(x-y),$$

где $P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ — какой-либо полином из $\frac{\partial}{\partial x^\alpha}$. Эта необходимость дополнительного доопределения спаривания в бесконечно малой окрестности точки $x = y$ является частным проявлением произвола, содержащегося в T-произведении. Дело в том, что само T-произведение задано нашим формальным «определением» (4.19) лишь при несовпадающих значениях своих аргументов. Необходимо поэтому вообще доопределить T-произведения в соответствующих бесконечно малых окрестностях точек совпадения аргументов, задав правила интеграции их коэффициентных функций, т. е., иначе говоря, следует определить коэффициентные функции T-произведений как интегрируемые несобственные функции.

Таким образом, мы приходим к выводу о необходимости не только выбора лагранжиана взаимодействия, но и одновременного доопределения T-произведений.

Следует, однако, отметить, что влияние изменения T-произведений на $S(g)$ можно учесть изменением лагранжиана $L(x)$. Действительно, при изменении T-произведений функций поля мы тем самым вводим в T-произведения лагранжианов взаимодействия различные квазилокальные операторы, что, как было показано в предыдущем параграфе, сводится к добавлению некоторых выражений к лагранжиану взаимодействия.

Тем самым мы приходим к выводу, что для получения матричных элементов матрицы рассеяния $S(g)$, определяющих собой структуру физических процессов, необходимо одновременно задать лагранжиан взаимодействия и правила интегрирования T-произведений. Если правила интегрирования T-произведений уже фиксированы, то лагранжиан взаимодействия $L(x)$ необходимо выбирать применительно к этим правилам.

Зависимость формы лагранжиана от некоторых дополнительных соображений отнюдь не является специфической особенностью вторичного квантования. В классической физике, например, для фиксирования формы лагранжиана необходимо прежде выбрать независимые динамические переменные (сравни, например, трактовку скалярного поля обычным путём и в формализе Кеммера [19]).

Итак, нам необходимо сначала доопределить все спаривания, а также и их произведения, чтобы последние оказались интегрируемыми функциями. Тем самым T-произведения окажутся полностью заданными и станет возможным фиксировать лагранжиан.

Этими вопросами, связанными с задачей регуляризации S-матрицы, мы займёмся подробно в следующей статье. Здесь же мы ограничимся доопределением спариваний полевых функций. Мы условимся считать, что если при $x \neq y$ спаривание совпадает с некоторой функцией Грина

$$\Delta^c_{\alpha\beta}(x-y) = P_{\alpha\beta}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)D^c(x-y),$$

то оно совпадает с этой функцией и в бесконечно малой окрестности точки $x = y$.

Так, проводя соответствующие выкладки для электромагнитного и спинорного полей, убеждаемся, что хронологические спаривания полевых функций этих полей

$$\overline{A_m(x)\,A_n(y)} = \begin{cases} ig^{mn}D_0^{(-)}(x-y), & x^0 > y^0, \\ -ig^{mn}D_0^{(+)}(x-y), & y^0 > x^0, \end{cases}$$

$$\overline{\psi(x)\,\bar{\psi}(y)} = \begin{cases} -iS^{(-)}(x-y), & x^0 > y^0, \\ +iS^{(+)}(x-y), & y^0 > x^0 \end{cases}$$

при $x \neq y$ совпадают с причинными функциями соответствующих полей. Мы будем считать поэтому, что всегда

$$\overline{A_m(x)\,A_n(y)} = ig^{mn}D_0^c(x-y) = \frac{g^{mn}}{(2\pi)^4 i}\int \frac{dk e^{ik(x-y)}}{k^2+i\varepsilon}, \quad (5.7)$$

$$\overline{\psi(x)\,\bar{\psi}(y)} = \frac{1}{i}S^c(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^4 i}\int \frac{dp e^{ip(x-y)}(\hat{p}-m)}{p^2-m^2+i\varepsilon}. \quad (5.8)$$

Как уже отмечалось в § 1, функции обычно рассматриваемых полей удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$[u_\alpha(x),\ \overset{+}{u}_\beta(y)] = \frac{1}{i}\Delta_{\alpha\beta}(x-y) = P_{\alpha\beta}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)D(x-y),$$

$$[u_\alpha^{(-)}(x),\ \overset{+}{u}_\beta^{(+)}(y)] = \frac{1}{i}\Delta_{\alpha\beta}^{(-)}(x-y) = P_{\alpha\beta}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)D^{(-)}(x-y).$$

Поэтому, вычисляя обычное спаривание, получаем:

$$\overline{u_\alpha(x)\,\overset{+}{u}_\beta(y)} = \frac{1}{i}\Delta_{\alpha\beta}^{(-)}(x-y),$$

откуда стандартным путём находим для хронологического спаривания выражения

$$\overline{u_\alpha(x)\overset{+}{u}_\beta(y)} = \begin{cases} -i\Delta_{\alpha\beta}^{(-)}(x-y), & x^0 > y^0, \\ +i\Delta_{\alpha\beta}^{(+)}(x-y), & y^0 > x^0, \end{cases}$$

при $x \neq y$ совпадающие с

$$\frac{1}{i}\Delta_{\alpha\beta}^c(x-y) = \frac{1}{i}P_{\alpha\beta}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)D^c(x-y).$$

Мы положим поэтому, что при любых x и y

$$\overline{u_\alpha(x)\,\overset{+}{u}_\beta(y)} = \frac{1}{i}\Delta_{\alpha\beta}^c(x-y). \quad (5.9)$$

В ряде случаев в лагранжиан взаимодействия могут входить производные полевых функций. Целесообразно ввести поэтому условие для полного определения и их спаривания.

Замечая, что при $x^0 \lesseqgtr y^0$

$$\overline{\frac{\partial^k u_\alpha(x)}{(\partial x^0)^{k_0}\ldots(\partial x^3)^{k_3}}\cdot\frac{\partial^q \overset{+}{u}_\beta(y)}{(\partial y^0)^{q_0}\ldots(\partial y^3)^{q_3}}} =$$

$$= \frac{\partial^k}{(\partial x^0)^{k_0}\ldots(\partial x^3)^{k_3}}\cdot\frac{\partial^q}{(\partial y^0)^{q_0}\ldots(\partial y^3)^{q_3}}\,\overline{u_\alpha(x)\,\overset{+}{u}_\beta(y)},$$

мы положим по определению

$$\overline{\frac{\partial^k u_\alpha(x)}{(\partial x^0)^{k_0}\ldots(\partial x^3)^{k_3}}\cdot\frac{\partial^q \overset{+}{u}_\beta(y)}{(\partial y^0)^{q_0}\ldots(\partial y^3)^{q_3}}} =$$

$$= \frac{1}{i}\,\frac{\partial^k}{(\partial x^0)^{k_0}\ldots(\partial x^3)^{k_3}}\cdot\frac{\partial^q}{(\partial y^0)^{q_0}\ldots(\partial y^3)^{q_3}}\Delta_{\alpha\beta}^c(x-y). \quad (5.10)$$

Определив хронологическое спаривание, перейдём к формулировке теоремы Вика для T-произведения.

«Теорема Вика для T-произведений» состоит в утверждении, что «T-произведение системы n линейных операторов равно сумме их нормальных произведений со всевозможными хронологическими спариваниями (включая член без спариваний)».

Доказательство сводится фактически к доказательству теоремы Вика для обычных произведений. В самом деле, согласно определению (5.1) T-произведение равно некоторому обычному произведению

$$T(A_1(x_1)\ldots A_n(x_n)) = \varepsilon A_{j1}(x_{j1})\ldots A_{jn}(x_{jn}).$$

Применяя для этого обычного произведения теорему Вика, видим, что оно равно сумме нормальных произведений операторов $A_{j1}(x_{j1})\ldots A_{jn}(x_{jn})$ со всеми возможными обычными спариваниями. Но так как порядок следования $x_{j1},\ldots,x_{jn}$ является хронологически правильным, то обычные спаривания совпадут с хронологическими. Мы пришли к выводу, что

$$T(A_1(x_1)\ldots A_n(x_n))$$

равняется сумме умноженных на ε нормальных произведений операторов

$$A_{j1}(x_{j1})\ldots A_{jn}(x_{jn})$$

со всеми возможными хронологическими спариваниями.

Как уже отмечалось, под знаком хронологического спаривания, как и под знаком нормального произведения, можно переставить (с учётом изменения знака) линейные операторы. Тем самым под знаком нормальных произведений со всевозможными хронологическими спариваниями мы можем восстановить нормальный порядок сомножителей 1, 2,..., n, опустив одновременно множитель ε. Теорема доказана.

Введём в рассмотрение T-произведение нескольких нормальных произведений полевых линейных операторов $A_i(x)\ldots D_j(z)\ldots$

$$T(:A_1(x)\,A_2(x)\ldots A_n(x):\ldots:D_1(z)\ldots D_m(z):). \quad (5.11)$$

Как раз такие T-произведения и необходимы для раскрытия T-произведений локальных операторов, так как по определению

локальный оператор $L(x)$ представляется линейной комбинацией членов типа

$$:A_1(x)\,A_2(x)\ldots A_n(x):.$$

Для T-произведений вида (5.11) формулировка теоремы Вика имеет лишь ту особенность, что не должны учитываться взаимные хронологические спаривания операторов, входящих в одно и то же нормальное произведение.

Отметим в заключение, что, отправляясь от (5.11), можно также определить T-произведение нормальных произведений более общего вида

$$T(:A_1(x_1)\ldots A_n(x_n):\ldots:D_1(z_1)\ldots D_m(z_m):) \qquad (5.12)$$

как сумму нормальных произведений операторов

$$A_1(x_1)\ldots D_m(z_m)$$

со всеми возможными спариваниями, исключая взаимные спаривания операторов, стоящих в одном и том же нормальном произведении.

Основываясь на таком определении T-произведения (5.12), можно ввести T-произведение полилокальных операторов

$$T(A_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,D(z_1,\ldots,z_m)), \qquad (5.13)$$

представляя его линейной комбинацией выражений типа (5.12). Прямое определение T-произведения (5.13) по хронологическому признаку в данном случае неудобно из-за множественности аргументов у операторов $A,\ldots,D$.

Видно отсюда, что в сущности T-произведение представляет собой новую алгебраическую операцию, которая может быть введена и независимо от обычных произведений.

С математической точки зрения T-произведение особенно привлекательно тем, что в отличие от обычных произведений под знаком T-произведения можно переставлять операторы, как если бы они точно коммутировали или антикоммутировали.

§ 6. ПРАВИЛА ФЕЙНМАНА ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ МАТРИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ И ВЕРОЯТНОСТИ ПЕРЕХОДОВ

Изложенная в предыдущем параграфе теорема Вика позволяет сформулировать удобный рецепт приведения к нормальной форме T-произведений лагранжианов, определяющих собой операторные выражения $S_n(x_1,\ldots,x_n)$, входящие в матрицу рассеяния. Для большей наглядности удобно начать изложение с какого-либо конкретного случая. Рассмотрим поэтому взаимодействие электромагнитного и спинорного электрон-позитронного полей, лагранжиан взаимодействия которых имеет вид *)

$$L(x)=\sqrt{4\pi}\,e\sum_m :\bar\psi(x)\,\gamma^m\psi(x)\,A_m(x):. \qquad (6.1)$$

Из теоремы Вика для T-произведений следует, что коэффициент $S_n(x_1,\ldots,x_n)$ (с точностью до множителя i^n) равен сумме нормальных произведений n лагранжианов (6.1)

$$:L(x_1)\ldots L(x_n): \qquad (6.2)$$

со всеми возможными хронологическими спариваниями входящих в $L(x)$ операторов A, ψ и $\bar\psi$.

Ставя в соответствие спариванию спинорных операторов

$$\overline{\psi_\alpha(x_1)\,\bar\psi_\beta(x_2)}=\frac{1}{i}S^c_{\alpha\beta}(x_1-x_2) \qquad (6.3)$$

электронную линию, направленную из точки x_2 в точку x_1, электромагнитному спариванию

$$\overline{A_m(x_1)\,A_n(x_2)}=ig^{mn}D^c_0(x_1-x_2) \qquad (6.4)$$

ненаправленную фотонную линию, соединяющую точки x_1 и x_2, матрице γ^n из лагранжиана $L(x_l)$ точку x_l, в которой сходятся две электронные и одна фотонная линии, и, наконец, неспаренным операторам $\bar\psi(x_i)$, $\psi(x_j)$ и $A(x_k)$ соответственно внешнюю электронную линию, выходящую из точки x_i, внешнюю электронную линию, входящую в точку x_j, и внешнюю фотонную линию, связанную с точкой x_k, мы получим известные правила соответствия для построения так называемых фейнмановских диаграмм, соответствующих элементам $S_n(x_1,\ldots,x_n)$.

Эти правила должны быть ещё дополнены правилом знаков, учитывающим антикоммутативность спинорных операторов ψ и $\bar\psi$. Условившись записывать эти операторы и их спаривания в порядке слева направо, соответствующем движению против направления электронных линий, т. е. в виде

$$:\bar\psi(x_{i_1})\,\overline{\psi(x_{i_1})\,\bar\psi(x_{i_2})}\ldots\overline{\psi(x_{i_{k-1}})\,\psi(x_{i_k})}\,\psi(x_{i_k}):, \qquad (6.5)$$

нетрудно придти к заключению, что выражения этого типа должны быть умножены на фактор

$$\varepsilon=(-1)^{n-l-m}, \qquad (6.5а)$$

*) Множитель $\sqrt{4\pi}$ обязан своим появлением используемой нами нормировке потенциала электромагнитного поля (сравни также (6.7), (6.8)).

где n — порядок диаграммы, l — число замкнутых спинорных циклов, m — число незамкнутых спинорных циклов.

Вспоминая ещё о множителях e^n и $i^n(n!)^{-1}$, мы приходим к простой методике построения членов разложения S-матрицы в x-представлении, которая, как видно, сводится к тому, что по вышеприведённым правилам строятся операторные выражения, соответствующие всем возможным диаграммам Фейнмана данного порядка.

Заметим, что при этом вид и число неспаренных операторов зависят от внешних линий диаграмм, а структура коэффициентных функций полностью определяется внутренними частями этих диаграмм.

Изложенная методика построения членов S-матрицы с помощью правил и диаграмм Фейнмана может быть применена к любому другому локальному взаимодействию. При этом топология диаграмм полностью определяется структурой членов, составляющих лагранжиан взаимодействия, а правила соответствия определяются матричным строением этих членов и видом спариваний входящих в них операторов.

Рассмотрим теперь процедуру вычисления матричных элементов матрицы рассеяния, занимающую важную роль при расчётах эффективных сечений различных процессов рассеяния и взаимопревращения частиц.

Для вычисления матричных элементов удобно перейти к импульсному представлению. Дело в том, что, с одной стороны, причинные функции (хронологические спаривания) в импульсном представлении имеют простую структуру, а, с другой стороны, матричные элементы, как правило, берутся между состояниями, содержащими частицы с фиксированными импульсами.

В целях наглядности этого положения запишем импульсные разложения электрон-позитронного и электромагнитного полей и соответствующих спариваний. Имеем для операторов электромагнитного поля:

$$A_m(x) = A_m^{(+)}(x) + A_m^{(-)}(x), \tag{6.6}$$

$$A_m^{(\pm)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{\pm ikx} \delta(k^2)\, \theta(k^0)\, A_m^{(\pm)}(k)\, dk, \tag{6.7}$$

$$A_m^{(\pm)}(k) = \sum_{\nu=0,1,2,3} e_\nu^m a_\nu^{(\pm)}(k), \tag{6.8}$$

причём

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Здесь e_ν — векторы поляризации, $a_\nu^{(+)}(k)$ и $a_\nu^{(-)}(k)$ — соответственно операторы рождения и уничтожения фотона с поляризацией ν и 4-импульсом k ($k^2 = 0$).

Для электрон-позитронного поля

$$\psi(x) = \psi^{(+)}(x) + \psi^{(-)}(x), \tag{6.9}$$

$$\bar{\psi}(x) = \bar{\psi}^{(+)}(x) + \bar{\psi}^{(-)}(x), \tag{6.10}$$

$$\psi^{(\pm)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{\pm ipx} \delta(p^2 - m^2)\, \theta(p^0)\, \psi^{(\pm)}(p)\, dp, \tag{6.11}$$

$$\psi_\sigma^{(\pm)}(p) = \sum_{\mu=1,2} u_\sigma^{\pm,\mu}(p)\, a^{\pm,\mu}(p), \tag{6.12}$$

$$\bar{\psi}^{(\pm)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{\pm ipx} \delta(p^2 - m^2)\, \theta(p^0)\, \bar{\psi}^{(\pm)}(p)\, dp, \tag{6.13}$$

$$\bar{\psi}_\sigma^{(\pm)}(p) = \sum_\mu \bar{u}_\sigma^{\pm,\mu}(p)\, \overset{*}{a}{}^{\pm,\mu}(p). \tag{6.14}$$

Здесь μ — спиновая переменная, $u^{\pm,\mu}$ и $\bar{u}^{\pm,\mu}$ — спинорные амплитуды, $\overset{*}{a}{}^+$ и a^- — операторы рождения и уничтожения электронов, a^+ и $\overset{*}{a}{}^-$ — такие же операторы для позитронов.

Наконец, для спариваний

$$\overline{A_m(x)\, A_n(y)} = i g^{mn} D_0^c(x-y) = \frac{g^{mn}}{(2\pi)^4 i} \int \frac{e^{ik(x-y)}}{k^2 + i\varepsilon}\, dk, \tag{6.15}$$

$$\overline{\psi_\alpha(x)\, \bar{\psi}_\beta(y)} = \frac{1}{i} S_{\alpha\beta}^c(x-y) =$$

$$= \frac{i}{(2\pi)^4} \int \frac{\hat{p} + m}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}\, e^{-ip(x-y)}\, dp, \tag{6.16}$$

$$\hat{p} = \gamma p = \gamma^0 p^0 - \boldsymbol{\gamma}\mathbf{p}. \tag{6.17}$$

Благодаря наличию факторов типа $\delta(k^2 - m^2)\,\theta(k^0)$ в (6.7), (6.11) и (6.13) может быть тривиально проведена интеграция по k^0 (или p^0). В результате мы получим выражение типа

$$\psi^{(\pm)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{\pm ipx} \frac{\psi^{(\pm)}(\mathbf{p})}{\sqrt{2p^0}}\, d\mathbf{p} \quad (p^0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}), \tag{6.18}$$

$$\psi^{(\pm)}(\mathbf{p}) = \sum_\mu u^{\pm,\mu}(\mathbf{p})\, a^{\pm,\mu}(\mathbf{p}), \tag{6.19}$$

причём

$$u^{\pm,\mu}(\mathbf{p}) = u^{\pm,\mu}(p)\big|_{p^0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}},$$

а «трёхмерные» операторы $a(\mathbf{p})$ выражаются через «четырёхмерные» операторы $a(p)$ соотношениями

$$a^{\pm}(\mathbf{p}) = \frac{a^{\pm}(p)}{\sqrt{2p^0}}\Big|_{p^0=+\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}} =$$

$$= \int a^{\pm}(p)\sqrt{2p^0}\,\delta(p^2-m^2)\,\theta(p^0)\,dp^0 \qquad (6.20)$$

и подчиняются коммутационным соотношениям типа

$$[a^{+}(\mathbf{p}),\ \overset{*}{a}{}^{-}(\mathbf{p}')] = \delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}'). \qquad (6.21)$$

Амплитуда состояния, содержащего m частиц различных сортов с определёнными значениями импульсов, представится теперь выражением вида

$$\Phi_{\ldots k\ldots} = a_1^{(+)}(\mathbf{k}_1)\,a_2^{(+)}(\mathbf{k}_2)\ldots a_m^{(+)}(\mathbf{k}_m)\,\Phi_{\text{вак}}. \qquad (6.22)$$

При вычислении матричного элемента

$$(\overset{*}{\Phi}_{\ldots k'\ldots} : \ldots u_i(x_i)\ldots : \Phi_{\ldots k\ldots}) \qquad (6.23)$$

операторы рождения $u^{(+)}$ должны коммутироваться с операторами уничтожения $a^{(-)}(\mathbf{k}')$ из амплитуды $\overset{*}{\Phi}_{\ldots k'\ldots}$, а операторы $u^{(-)}$ с операторами $a^{(+)}(\mathbf{k})$ из амплитуды $\Phi_{\ldots k\ldots}$ до тех пор, пока один из них, подействовав на $\overset{*}{\Phi}_{\text{вак}}$ или $\Phi_{\text{вак}}$, не даст нуль. Этот процесс был вкратце рассмотрен в § 2.

Ограничиваясь случаем, когда ни для одной из частиц импульс в начальном состоянии не равен импульсу в конечном состоянии, приходим к выводу, что матричный элемент (6.23) представляется в виде произведения результатов коммутаций операторов

$$u^{(-)}(x_j) \quad \text{с} \quad a^{(+)}(\mathbf{k})$$

и

$$u^{(+)}(x_l) \quad \text{с} \quad a^{(-)}(\mathbf{k}'),$$

равного выражению

$$\prod_{(\mathbf{k})} \frac{u^{(-)}(\mathbf{k})}{(2\pi)^{3/2}}\, e^{-ix_jk} \prod_{(\mathbf{k}')} \frac{u^{(+)}(\mathbf{k}')\,e^{ik'x_l}}{(2\pi)^{3/2}}. \qquad (6.24)$$

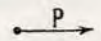
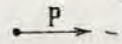
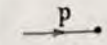
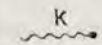
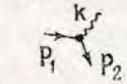
Существенным является тот факт, что каждой внешней линии диаграммы с точки зрения матричных элементов соответствует реальная частица в начальном или конечном состоянии. Это обстоятельство и позволяет считать фейнмановские диаграммы схематическими изображениями процессов взаимодействия элементарных частиц.

Используя разложение причинных функций типа (6.15), (6.16) и выражение (6.24), можем теперь выполнить содержащуюся в членах S-матрицы интеграцию по переменным x, после чего получим правила Фейнмана для вычисления матричных элементов матрицы рассеяния

$$(\overset{*}{\Phi}_{\ldots k'\ldots}\ S(1)\,\Phi_{\ldots k\ldots}). \qquad (6.25)$$

Например, для спинорной электродинамики в используемых нами обозначениях мы получим следующие правила соответствия (таблица):

Таблица

Частица	Элемент диаграммы	Фактор в матричном элементе
1. Электрон в начальном состоянии		$(2\pi)^{-3/2}\,u^{-,\nu}(\mathbf{p})$
2. Позитрон в начальном состоянии		$(2\pi)^{-3/2}\,\bar{u}^{-,\nu}(\mathbf{p})$
3. Электрон в конечном состоянии		$(2\pi)^{-3/2}\,\bar{u}^{+,\nu}(\mathbf{p})$
4. Позитрон в конечном состоянии		$(2\pi)^{-3/2}\,u^{+,\nu}(\mathbf{p})$
5. Фотон в начальном или конечном состояниях с поляризацией e_n		$\dfrac{e_n^m}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2k^0}}\quad n=1,\ 2$
6. Виртуальный электрон с импульсом, движущийся из *1* в *2* или виртуальный позитрон с импульсом $\mathbf{p}$, движущийся из *2* в *1*		$\dfrac{i}{(2\pi)^4}\ \dfrac{\hat{p}+m}{p^2-m^2+i\varepsilon}$
7. Виртуальный фотон с импульсом $\mathbf{k}$		$\dfrac{g^{mn}}{(2\pi)^4 i}\ \dfrac{1}{k^2+i\varepsilon}$
8. Вершина диаграммы		$\sqrt{4\pi}e\gamma^m(2\pi)^4\,\delta(p_2-p_1\pm k)$

При составлении матричных элементов в импульсном представлении необходимо также учитывать свойства симметрии функций $S_n(x_1,\ldots,x_n)$. Это свойство приводит к тому, что когда среди n вершин диаграммы имеется k групп из $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k$ вершин,

входящих симметрично, всё выражение должно быть умножено на фактор

$$\frac{n!}{\nu_1!\,\nu_2!\ldots\nu_k!}.$$

Должен быть также отмечен случай, когда в начальном и конечном состоянии находится несколько частиц одной и той же природы (несколько фотонов, несколько электронов и т. п.). В этом случае операторы рождения и уничтожения из амплитуд $\overset{*}{\Phi}$ и Φ могут коммутировать с операторами из матрицы рассеяния несколькими различными способами. Соответствующие диаграммы будут отличаться перестановкой импульсов внешних линий одинаковых частиц. При этом следует также учесть, что нормированная амплитуда состояния, содержащего k групп из $N_1, \ldots, N_k$ одинаковых частиц, содержит множитель

$$(N_1!\ N_2!\ldots N_k!)^{-1/2}$$

и что в случае одинаковых фермионов результирующий матричный элемент должен быть антисимметричен относительно перестановки любой пары ферми-частиц.

Как было установлено, матричные элементы (6.25) являются функциями начальных и конечных импульсов p и p' и в силу правил соответствия пропорциональны δ-функции

$$\delta\left(\sum p - \sum p'\right),$$

выражающей общий закон сохранения 4-импульса, т. е.

$$(\overset{*}{\Phi}_{\ldots p'\ldots} S(1)\,\Phi_{\ldots p\ldots}) = \delta\left(\sum p - \sum p'\right) F(p', p). \quad (6.26)$$

При определении вероятностей процессов рассеяния приходится вычислять квадраты матричных элементов типа

$$|(\overset{*}{\Phi}_{\ldots p'\ldots} S(1)\,\Phi_{\ldots p\ldots})|^2,$$

непосредственное вычисление которых с помощью (6.26) приводит к бессмысленному выражению. Более детальное рассмотрение *) показывает, что в этом случае мы получаем

$$|(\overset{*}{\Phi}_{\ldots p'\ldots} S(1)\,\Phi_{\ldots p\ldots})|^2 = \frac{VT}{(2\pi)^4}\,\delta\left(\sum p - \sum p'\right)|F(p', p)|^2, \quad (6.27)$$

где V и T — пространственная область и временной интервал, в котором происходит взаимодействие.

*) См., например, [10].

В частном случае рассеяния частиц классическим стационарным полем, когда импульс не сохраняется, а сохраняется только энергия, мы имеем:

$$(\overset{*}{\Phi}_{\ldots p'\ldots} S(1)\,\Phi_{\ldots p\ldots}) = \delta\left(\sum E - \sum E'\right) F(p', p), \quad (6.28)$$

$$|(\overset{*}{\Phi}_{\ldots p'\ldots} S(1)\,\Phi_{\ldots p\ldots})|^2 = \frac{T}{2\pi}\,\delta\left(\sum E - \sum E'\right)|F(p', p)|^2. \quad (6.29)$$

Установим, наконец, связь между матричными элементами S-матрицы и вероятностями переходов.

Рассматривая амплитуду одночастичного состояния с фиксированным импульсом $\mathbf{p}_0$ как предел амплитуды волнового пакета частиц с импульсами, лежащими в малой области около $\mathbf{p}_0$ при сужении этой области, можно показать, что амплитуда одночастичного состояния, нормированного на единицу объёма, имеет вид

$$\Phi = (2\pi)^{3/2}\, a^+(\mathbf{p}_0)\,\Phi_{\text{вак}}.$$

Поэтому нормированная амплитуда начального состояния, содержащая s частиц с определёнными импульсами, может быть записана в форме

$$\Phi = (2\pi)^{\frac{3s}{2}}\, a_1^+(\mathbf{p}_1)\ldots a_s^+(\mathbf{p}_s)\,\Phi_{\text{вак}} = (2\pi)^{\frac{3s}{2}}\,\Phi_{\ldots p\ldots} \quad (6.30)$$

Выбирая амплитуду конечного состояния Φ_α в виде

$$\Phi_\alpha = \int\limits_G \Phi_{\ldots k\ldots}\, d\mathbf{k}_1\ldots d\mathbf{k}_s\,(2\pi)^{\frac{3r}{2}}, \quad (6.31)$$

проинтегрированном по области G, равной произведению объёмов

$$\Delta\mathbf{p}_1'\ldots\Delta\mathbf{p}_r',$$

мы получим вероятность перехода из состояния (6.30) в состояние (6.31) согласно общим правилам квантовой механики в виде

$$dw = \frac{(\overset{*}{\Phi}_\alpha S(1)\,\Phi)^2}{(\overset{*}{\Phi}_\alpha\,\Phi_\alpha)} =$$

$$= (2\pi)^{3s}\,\Delta\mathbf{p}_1'\ldots\Delta\mathbf{p}_r'\,|(\overset{*}{\Phi}_{\ldots p'\ldots} S(1)\,\Phi_{\ldots p\ldots})|^2. \quad (6.32)$$

Здесь предполагается в связи с выбором нормировки, что в начальном состоянии средние числа частиц на единицу объёма равны единице. Если же эти числа равны соответственно $n_1, \ldots, n_s$, то выражение (6.32) следует заменить на

$$dw = n_1\ldots n_s\,(2\pi)^{3s}\,\Delta\mathbf{p}_1'\ldots\Delta\mathbf{p}_r'\,|(\overset{*}{\Phi}_{\ldots p'\ldots}(S)(1)\Phi_{\ldots p\ldots})|^2. \quad (6.33)$$

В качестве иллюстрации рассмотрим процесс рассеяния частицы на частице. В этом случае $r = s = 2$. Вместо (6.33), с учётом (6.27), получаем вероятность перехода в единицу времени и в единичном объёме

$$(2\pi)^2 n_1 \cdot n_2\, \delta(p_1 + p_2 - p_1' - \mathbf{p}_2')\, |F(p', p)|^2\, d\mathbf{p}_1'\, d\mathbf{p}_2'.$$

Ввиду того что $\mathbf{p}_2'$ полностью определяется $\mathbf{p}_1'$ и начальными импульсами, выполняя интеграцию по $\mathbf{p}_2'$, находим:

$$(2\pi)^2 n_1 \cdot n_2\, |F(p', p)|^2\, \delta(p_1^0 + p_2^0 - p_1'^0 - p_2'^0)\, d\mathbf{p}_1', \qquad (6.34)$$

причём в F положено

$$\mathbf{p}_2' = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_2'.$$

Выражение (6.34) обычно представляют в виде произведения

$$n_1 \cdot n_2 \cdot v_1 d\sigma_1,$$

где v_1 — модуль скорости частицы с импульсом $\mathbf{p}_1$, равный

$$v_1 = \frac{|\mathbf{p}_1|}{p_1^0},$$

а $d\sigma_1$ имеет размерность площади, пропорционален элементу телесного угла импульса частицы $\mathbf{p}_1'$ после рассеяния, называется дифференциальным эффективным сечением и имеет вид

$$d\sigma_1 = \frac{(2\pi)^2}{v_1} |F(p', p)|^2\, \delta(E_1 + E_2 - E_1' - E_2')\, dp_1' \cdot p_1'^2\, d\Omega_1', \qquad (6.35)$$

где обозначено

$$E_i = p_i^0; \quad p_i' = |\mathbf{p}_i'|.$$

Переходя от p_1' к E_1' по соотношению

$$E_2'^2 = p_1'^2 + m^2$$

и выполняя интегрирование по E_1', находим окончательную формулу

$$d\sigma_1 = \frac{(2\pi^2)\, p_1' E_1'}{v_1 |f^1(E_1')|} |F(p', p)|^2\, d\bar{\Omega}'|_{p_1 + p_2 - p_1' - p_2' = 0}, \qquad (6.36)$$

где обозначено

$$f'(E_1') = \frac{d}{dE_1'}(E_1' + E_2' - E_2 - E_1).$$

Полное эффективное сечение рассеяния получим, интегрируя (6.36) по Ω

$$\sigma_1 = \frac{(2\pi)^2}{v_1} \int_{\Omega'} \frac{p_1' E_1'}{|f'(E_1')|} |F(p', p)|^2\, d\Omega'. \qquad (6.37)$$

Заметим ещё, что обычно при вычислении сечений не интересуются спиновыми состояниями частиц. Поэтому по спиновым индексам рассеянных частиц производят суммирование, а по спиновым индексам рассеивающихся частиц усреднение. Обозначая эти операции сокращённо символом Σ_σ, получаем формулы дифференциального и полного эффективного сечения в виде

$$d\sigma_1 = \frac{(2\pi)^2 p_1' E_1'}{v_1 \cdot |f'(E_1')|} \sum_\sigma |F(p', p)|^2\, d\Omega_1'|_{p_1 + p_2 - p_1' - p_2' = 0}, \qquad (6.38)$$

$$\sigma_1 = \frac{(2\pi)^2}{v_1} \int_{\Omega'} \frac{p_1' E_1'}{|f'(E_1')|} \sum_\sigma |F(p', p)|^2\, d\Omega_1'|_{p_1 + p_2 - p_1' - p_2' = 0}. \qquad (6.39)$$

Подобным образом из общей формулы (6.33) могут быть получены выражения для вероятностей и сечений других возможных процессов.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. J. Schwinger, Phys. Rev., **75**, № 4; 651 (1949). Русский перевод в сборнике «Новейшее развитие квантовой электродинамики» (НРКЭ), ИЛ, 1954 г., стр. 40.
2. G. Wick, Phys. Rev., **80**, № 2, 268 (1950). Русский перевод в сборнике «НРКЭ», стр. 244.
3. А. Соколов, Д. Иваненко, Квантовая теория поля, Гостехиздат, 1952 г., часть первая.
4. W. Pauli and F. Villars, Rev. Mod. Phys., **21**, 434 (1949). Русский перевод в сборнике «Сдвиг уровней атомных электронов» (СУАЭ), ИЛ, 1950 г., стр. 139.
5. S. Tomonaga, Prog. Theor. Phys., **1**, № 2, 27 (1946). Перевод в сборнике «НРКЭ», стр. 1.
6. J. Schwinger, Phys. Rev., **74**, № 10, 1439 (1948). Перевод в сборнике «НРКЭ», стр. 12.
7. F. Dyson, Phys. Rev., **75**, 486 (1949). Перевод в сборнике «СУАЭ», стр. 94.
8. E. G. Stueckelberg et D. Rivier, Helv. Phys. Acta, **22**, № 1 и 2, 215 (1949).
9. E. G. Stueckelberg and T. Green, Helv. Phys. Acta, **24**, 153 (1951).

10. B. Lippmann and J. Schwinger, Phys. Rev., **79**, № 3, 469 (1950).
11. Д. И. Блохинцев, Ввведение в квантовую механику, Гостехиздат, 1944 г.
12. В. Паули, Общие принципы волновой механики, Гостехиздат, 1947 г.
13. F. Dyson, Phys. Rev., **85**, № 4, 631 (1952).
14. W. Thirring, Helv. Phys. Acta, **26**, № 1, 33 (1953).
15. S. Edwards, Phys. Rev., **90**, № 2, 284 (1953).
16. Б. Иоффе, ДАН СССР, **94**, № 3, 437 (1954).
17. R. Feynman, Phys. Rev., **84**, № 1, 108 (1951).
18. P. Mattews, Phys. Rev., **76**, 1657 (1949).
19. N. Kemmer, Proc. Roy. Soc., **173 A**, № 952, 91 (1939).
20. S. N. Gupta, Proc. Phys. Sos., **63 A**, 681 (1950).
21. K. Bleuler, Helv. Phys. Acta, **23**, 567 (1950).