1954 г. Май *Т. LIII, вып. 1*

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

РЕЛАКСАЦИОННЫЕ ЯВЛЕНИЯ В МЕТАЛЛАХ И СПЛАВАХ, ПОДВЕРГНУТЫХ ДЕФОРМИРОВАНИЮ

В. С. Постников

ВВЕДЕНИЕ

При деформировании реальных твёрдых тел даже в чисто упругой области в их поведении обнаруживаются явления, не находящие объяснения в обычной теории упругости.

Так, например, если к стержню приложить растягивающее усилие конечной величины, то мгновенно возникает лишь часть полной деформации, соответствующей заданному усилию (рис. 1), остальная часть деформации возникает постепенно. При снятии усилия деформация исчезает, но опять-таки не сразу, а постепенно. Это явление получило название упругого последействия.

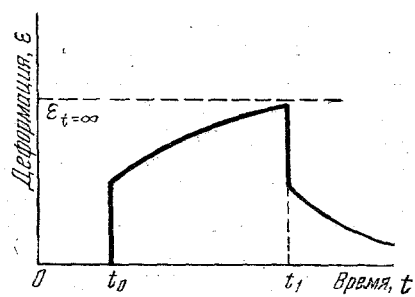

Рис. 1. Зависимость деформации ε от времени t. Постоянное усилие начинает действовать в момент t_0 и кончает действовать (снимается) в момент t_1.

Если постоянное усилие (пусть даже очень малое) длительно приложено к стержню, то возникает деформация, непрерывно изменяющаяся во времени и тем заметнее, чем выше температура стержня. Это явление получило название ползучести.

Если сохранять деформацию постоянной, то на поддержание заданной деформации в каждый последующий момент времени требуется меньшее усилие; напряжение, вызванное в стержне, как говорят, релаксирует или ослабевает.

Если, наконец, к стержню прикладывается периодически меняющееся усилие, то благодаря возникающему при этом сдвигу по фазе напряжения относительно деформации в образце произойдёт необратимое превращение части механической энергии в теплоту,

объясняемое наличием в твёрдых телах «внутреннего трения»[1]. Упругие модули в этом случае оказываются зависящими от частоты приложенного усилия.

Эта группа свойств («внутреннее трение», обратимая ползучесть, изменение упругих постоянных с частотой и т. п.), благодаря которым твёрдое тело ведёт себя неупругим образом в упругой области, получила название в иностранной литературе «упругих несовершенств» материла или «неупругости». Такое название, однако, не отражает внутреннего механизма явлений.

В соответствии с установившейся в нашей литературе терминологией целесообразно называть эти свойства релаксационными, имея в виду, что они связаны с установлением статистического равновесия в теле, деформируемом с конечной скоростью. Такой процесс называется релаксационным, так как под релаксацией понимается всякое приближение к статистическому равновесию.

Интерес к изучению этих явлений возник давно. Ещё в первой четверти нашего столетия Б. П. Вейнберг и В. Д. Кузнецов провели ряд экспериментальных работ, посвящённых изучению внутреннего трения в твёрдых телах[1].

А. Ф. Иоффе принадлежит классическое исследование упругого последействия в кристаллическом кварце[2]. Упругое последействие в сплаве изучалось Н. Н. Давиденковым и Г. А. Кусмирской[3]. Исследования В. С. Горского[4] и Е. Я. Пумпера[5] и др.[6] проливают свет на явления, связанные с нарушением статистического равновесия в сплавах.

Наряду с экспериментальным изучением релаксационных явлений в твёрдых телах делались также попытки теоретического исследования этих явлений ([6—13] и др.) с помощью механических и электрических аналогий, путём формального обобщения закона Гука и др.

Мы ограничимся рассмотрением основных направлений, не останавливаясь на методе аналогий, который не может дать физической картины изучаемых явлений.

1. ФОРМАЛЬНОЕ ОБОБЩЕНИЕ ЗАКОНА ГУКА

Поскольку для реальных твёрдых тел, подвергнутых деформации, имеет место постепенное изменение деформации и напряжения, то обобщение закона Гука в первом приближении может заключаться в учёте зависимости величины напряжения σ не только от деформации ε, но и от скорости деформации $\dot{\varepsilon}$. Для случая линейного напряжённого состояния эту зависимость можно представить соотношением

$$\sigma = a \cdot \varepsilon + b \cdot \dot{\varepsilon}. \tag{1}$$

Более общей зависимостью такого рода будет соотношение

$$\sigma + a \cdot \dot{\sigma} = b \cdot \varepsilon + c \cdot \dot{\varepsilon}. \tag{2}$$

Такое обобщение для случая простого растяжения (или сжатия) делалось рядом исследователей[6, 8, 9].

Уравнение (2) описывает релаксацию напряжения, обратимую ползучесть, внутреннее трение, зависимость упругих модулей от частоты внешнего усилия.

Для выяснения физической картины в поведении тела, подчиняющегося уравнению (2), последнее переписывают в виде

$$\sigma + \tau_\varepsilon \dot{\sigma} = M_p \cdot \varepsilon + M_p \cdot \tau_\sigma \cdot \dot{\varepsilon}, \tag{3}$$

где постоянные a, b и c заменены новыми независимыми постоянными τ_ε, τ_σ, M_p, смысл которых будет выяснен ниже.

Полагая

$$\varepsilon = \text{const}, \quad \dot{\varepsilon} = 0,$$

получаем:

$$\sigma + \tau_\varepsilon \dot{\sigma} = 0, \quad \text{откуда} \quad \sigma(t) = \sigma_0 \cdot e^{-t/\tau_\varepsilon}.$$

Следовательно, τ_ε есть время, необходимое для уменьшения напряжения (при постоянной деформации ε) в e раз; его называют временем релаксации напряжения при постоянной деформации.

Аналогично, полагая $\sigma = \text{const}$, $\dot{\sigma} = 0$, выясняем смысл величины τ_σ, являющейся временем релаксации деформации при постоянном напряжении. Что касается постоянной M_p, то её физический смысл обнаруживается, если допустить, что в момент времени $t = 0$ мгновенно создаётся деформация $\varepsilon = \varepsilon_0$.

Тогда напряжение $\sigma(t)$ будет релаксировать к равновесной величине $M_p \cdot \varepsilon_0$. Действительно, при $\varepsilon = \varepsilon_0$, $\dot{\varepsilon} = 0$ и $\sigma = \sigma_0$ в момент времени $t = 0$ из (3) имеем:

$$\sigma + \tau_\varepsilon \cdot \dot{\sigma} = M_p \cdot \varepsilon,$$

откуда

$$\sigma(t) = M_p \cdot \varepsilon_0 + (\sigma_0 - M_p \cdot \varepsilon_0)\, e^{-t/\tau_\varepsilon}. \tag{4}$$

При $t = \infty$ из (4) имеем $\sigma(\infty) = M_p \cdot \varepsilon_0$, т. е. величина

$$M_p = \frac{\sigma(\infty)}{\varepsilon_0}$$

есть «релаксированный» модуль (под M_p можно понимать модуль сдвига, модуль упругости) в отличие от величины

$$M_н = \frac{\sigma(0)}{\varepsilon_0},$$

которую можно назвать «нерелаксированным» модулем. Здесь $\sigma(0)$ — начальное значение напряжения (при $t = 0$).

Полагая $\sigma(0) = \sigma_0$, получаем уравнение

$$\varepsilon(t) = M_p^{-1} \cdot \sigma_0 + \left(\varepsilon_0 - M_p^{-1} \cdot \sigma_0\right) \cdot e^{-t/\tau_\sigma}, \tag{5}$$

совершенно аналогичное уравнению (4).

Если к твёрдому телу приложить периодически меняющееся усилие, то возникает периодически меняющаяся деформация. Однако теперь деформация ε и напряжение σ не будут совпадать по фазе. Это значит, что графическая связь между напряжением и деформацией будет представлять собою уже не прямую линию, а эллипс, площадь которого пропорциональна энергии, рассеиваемой за период колебаний.

Аналитически это означает, что связь между напряжением и деформацией осуществляется через комплексный модуль, выражение которого находится подстановкой в уравнение (3)

$$\sigma(t) = \sigma_0 \cdot e^{i(\omega t + \alpha)} \quad \text{и} \quad \varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cdot e^{i\omega t},$$

что даёт

$$(1 + i\omega \cdot \tau_\varepsilon) \cdot \sigma = M_р \cdot (1 + i\omega \cdot \tau_\sigma) \cdot \varepsilon,$$

или

$$\sigma = M^* \cdot \varepsilon,$$

где комплексный модуль M^* имеет вид

$$M^* = \frac{1 + i\omega \cdot \tau_\sigma}{1 + i\omega \cdot \tau_\varepsilon} \cdot M_р. \tag{6}$$

Тангенс угла отставания деформации α от напряжения, равный отношению мнимой части комплексного модуля к его вещественной части, определяется соотношением

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\omega(\tau_\sigma - \tau_\varepsilon)}{1 + \omega^2 \cdot \tau_\sigma \cdot \tau_\varepsilon}. \tag{7}$$

Если ввести геометрические средние

$$\tau = (\tau_\varepsilon \cdot \tau_\sigma)^{1/2}, \qquad M = (M_н \cdot M_р)^{1/2}$$

и использовать соотношение

$$\frac{M_н}{M_р} = \frac{\tau_\sigma}{\tau_\varepsilon},$$

то выражение (7) примет вид

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{M_н - M_р}{M} \cdot \frac{\omega \cdot \tau}{1 + (\omega \cdot \tau)^2}. \tag{8}$$

Так как обычно $\operatorname{tg} \alpha$ используется в качестве меры внутреннего трения, то, следовательно, мы получили зависимость внутреннего трения от частоты, вернее от параметра $\omega \cdot \tau$.

В качестве динамического модуля применяют обычно величину, равную отношению напряжения к той части деформации, которая находится в фазе с напряжением, а именно:

$$M_\omega = \frac{1 + \omega^2 \cdot \tau_\sigma^2}{1 + \omega^2 \cdot \tau_\sigma \cdot \tau_\varepsilon} \cdot M_р \tag{9}$$

или

$$M_\omega = M_н - \frac{M_н - M_р}{1 + (\omega\tau)^2}. \qquad (10)$$

На рис. 2 представлено изменение внутреннего трения $Q = \operatorname{tg}\alpha$ и динамического модуля M_ω в функции параметра $\omega \cdot \tau$. Как видно из рис. 2, величина внутреннего трения достигает максимума при $\omega \cdot \tau = 1$; динамический модуль в этой точке имеет наибольшую скорость изменения в зависимости от параметра $\omega \cdot \tau$.

Для $\omega \cdot \tau > 10$ внутреннее трение незначительно, а изменение модуля практически равно нулю, т. е. динамический модуль равен «нерелаксированному» модулю $M_н$. Следовательно, в этой области частот ($\omega \cdot \tau > 10$) практически никакой релаксации нет. Для $\omega \cdot \tau < 0{,}1$ динамический модуль практически равен «релаксационному» модулю $M_р$, а внутреннее трение вновь очень мало. В промежуточной области частот мы имеем частичную релаксацию динамического модуля и значительное внутреннее трение, достигающее максимума при $\omega\tau = 1$.

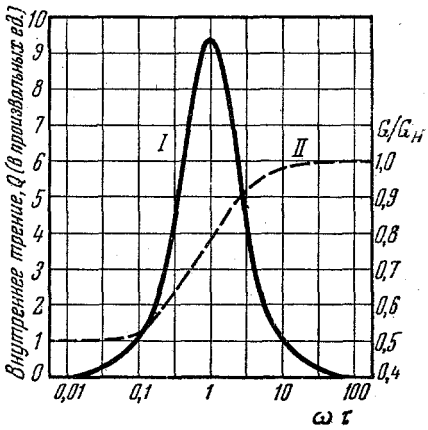

Рис. 2. Частотная зависимость внутреннего трения (*I*) и модуля сдвига (*II*).

Подводя итоги изложенному, можно сказать, что указанное обобщение закона Гука даёт возможность описать релаксацию напряжения при постоянной деформации, обратимую ползучесть, зависимость динамических модулей от частоты. Внутреннее трение в твёрдом теле, подчиняющемся уравнению (3), вытекает само собой, являясь результатом существования сдвига фаз между напряжением и деформацией при периодическом изменении внешнего усилия.

Однако уравнение (3) не описывает чисто упругих явлений и явлений упрочнения и наклёпа, наблюдаемых в металлах и сплавах. Учёт этого приводит к дальнейшему, но уже малоэффективному обобщению[9] уравнения (3). Отметим также, что реальные твёрдые тела, как правило, обнаруживают не одно время релаксации τ, а целый набор их или даже непрерывный спектр.

2. БОЛЬЦМАНОВСКАЯ ТЕОРИЯ УПРУГОГО ПОСЛЕДЕЙСТВИЯ

Согласно теории упругости деформация и напряжение связаны в любой момент времени соотношением

$$\sigma(t) = M \cdot \varepsilon(t). \qquad (11)$$

Это уравнение имеет два важных свойства: 1) оно линейно, 2) оно связывает мгновенную величину деформации с мгновенной величиной напряжения.

Больцман[14] при построении теории упругого последействия исходил из принципа наложения, но дополнил его предположением, что деформация в данный момент зависит от поведения образца в предшествующие моменты времени. Математически наложение можно сформулировать следующим образом: пусть единичное напряжение в момент $t=0$ создаёт результирующую деформацию $\varphi(t)$. Если в течение более раннего временнóго интервала от t' до $t'+dt'$ напряжение изменилось от $\sigma(t')$ до $\sigma(t'+dt')$, то можно считать, что в течение этого интервала времени dt' действовало постоянное по величине напряжение

$$\sigma(t'+dt')-\sigma(t')\cong\dot{\sigma}(t')\cdot dt',$$

которое вызвало деформацию

$$\varphi(t'+dt')\cdot\dot{\sigma}(t')\cdot dt'.$$

Полная деформация к моменту времени t будет равна интегралу по времени от выражения

$$\varphi(t-t')\cdot\dot{\sigma}(t')\cdot dt',$$

т. е.

$$\varepsilon(t)=\int_{-\infty}^{t}\varphi(t-t')\,\dot{\sigma}(t')\,dt'. \tag{12}$$

Обращение этого интеграла даёт:

$$\sigma(t)=\int_{-\infty}^{t}f(t-t')\,\dot{\varepsilon}(t')\,dt'. \tag{13}$$

Если функции $\varphi(t-t')$ или $f(t-t')$ однажды определены, то уравнения (12) или (13) могут быть использованы для отыскания «неупругого» поведения твёрдого тела. Однако теория Больцмана не позволяет ничего сказать относительно вида функций $\varphi(t-t')$ и $f(t-t')$.

Обычно уравнения (12) и (13) записываются в несколько ином виде. Интегрируя правую часть уравнения (12) по частям, получаем:

$$\varepsilon(t)=\varphi(0)\cdot\sigma(t)+\int_{-\infty}^{t}\dot{\varphi}(t-t')\cdot\sigma(t')\cdot dt'. \tag{14}$$

Функция $\varphi(0)$ связана со статическим модулем соотношением

$$1=M_{\text{н}}\cdot\varphi(0).$$

Подставляя $\varphi(0)=\frac{1}{M_{\text{н}}}$ в (14) и вводя $\Phi(t-t')=\dot{\varphi}(t-t')$,

получаем уравнение

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{M_н} \cdot \sigma(t) + \int_{-\infty}^{t} \Phi(t - t') \sigma(t') dt', \tag{15}$$

которое часто встречается в литературе[6, 9]. Можно показать, что уравнение (3) является частным случаем интегрального уравнения (15) при выборе ядра $\Phi(t - t')$ в виде

$$\Phi(t - t') = \frac{\tau_\sigma - \tau_\varepsilon}{M_р \cdot \tau_\sigma^2} \cdot e^{-\frac{(t - t')}{\tau_\sigma}}. \tag{16}$$

Таким образом, почти всё, что было сказано выше (о формальном обобщении уравнения Гука), остаётся в силе и для теории Больцмана с ядром вида (16).

Из всех релаксационных свойств материалов наибольшее внимание привлекает изменение динамических модулей с частотой и внутреннее трение. Можно показать, что эти две характеристики связаны с функцией $\Phi(t)$ следующими уравнениями:

$$\Delta(\omega) = \int_0^\infty \Phi(t) \cdot \cos \omega t \cdot dt \tag{17}$$

и

$$Q(\omega) = \int_0^\infty \Phi(t) \sin \omega t \cdot dt, \tag{18}$$

где

$$\Delta(\omega) = \frac{M_\infty - M_\omega}{M_0}$$

есть степень релаксации модуля (дефект модуля) при заданной частоте ω колебаний.

Из уравнений (17) и (18) видно, что неизвестная функция $\Phi(t)$ может быть в принципе определена путём измерения дефекта $\Delta(\omega)$ динамического модуля или по величине внутреннего трения. Такое вычисление, однако, связано с большими ошибками, так как для определения $\Phi(t)$ необходима операция обращения интеграла (17) или (18) и небольшая ошибка в измерении $\Delta(\omega)$ или $Q(\omega)$ скажется как относительно большая ошибка в определении $\Phi(t)$.

Релаксационный спектр

Если предположить, что материал характеризуется одной временной константой (временем релаксации) τ, и функцию $\Phi(t)$ выбрать в виде

$$\Phi(t) = \Delta_0 \tau^{-1} \cdot e^{-t/\tau}, \tag{19}$$

то уравнения (17) и (18) принимают знакомый вид (см. (9) и (10)):

$$\Delta(\omega) = \frac{\Delta_0}{1+(\omega\cdot\tau)^2} \tag{20}$$

и

$$Q(\omega) = \frac{\Delta_0\,\omega\tau}{1+(\omega\tau)^2}. \tag{21}$$

Здесь $\Delta_0 = \frac{M_\infty - M_0}{M_0}$ — наибольшее значение дефекта (полная релаксация) модуля. Соотношения (20) и (21) в функции параметра $\omega\cdot\tau$ могут быть представлены графически так, как это показано на рис. 2.

Если в образце одновременно происходит несколько релаксационных процессов, каждый из которых характеризуется своим особым временем релаксации τ_i, то «вклад» каждого из этих процессов, например, в релаксацию напряжения будет составлять определённую долю полной релаксации напряжения, определяемой соотношением

$$\frac{\sigma(t)-\sigma(\infty)}{\sigma(\infty)}.$$

Совокупность всех времён релаксации отдельных релаксационных процессов образует так называемый релаксационный спектр данного материала. Он может быть и дискретным и непрерывным.

Рассмотрим случай непрерывного распределения релаксационных постоянных. В связи с тем, что времена релаксации лежат часто в весьма широком интервале значений, целесообразно перейти к логарифмической шкале. Введём функцию распределения $\psi(\tau)$, которую определим так, чтобы произведение $\psi(\tau)\cdot d(\ln\tau)$ представляло «вклад» в полный дефект модуля Δ_0, обусловленный процессами, времена релаксации которых лежат в интервале $d(\ln\tau)$, расположенном в окрестности значения τ. Совокупность всех «вкладов» даёт полный дефект модуля, т. е.

$$\Delta_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\tau)\cdot d(\ln\tau). \tag{22}$$

Для материала с одной релаксационной постоянной напряжение $\sigma(t)$ релаксирует, как показано выше, по простому показательному закону, а именно:

$$\sigma(t) = \sigma_0\cdot e^{-t/\tau}. \tag{23}$$

Следовательно, в том приближении, в котором справедлив принцип наложения, для рассматриваемого здесь случая материала с непрерывным распределением релаксационных постоянных в окрестности значений τ получаем, что для относительной величины

напряжения релаксация происходит по закону

$$\psi(\tau)\, e^{-t/\tau} \cdot d(\ln \tau).$$

Полная релаксация относительной величины напряжения определяется соотношением

$$\frac{\sigma(t) - \sigma(\infty)}{\sigma(\infty)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\tau)\, e^{-t/\tau}\, d(\ln \tau). \tag{24}$$

На основании выражений (19), (20), (21) можно написать:

$$\Phi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\tau) \cdot \tau^{-1} \cdot e^{-t/\tau} d(\ln \tau), \tag{25}$$

$$\Delta(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\psi(\tau)}{1 + (\omega \cdot \tau)^2}\, d(\ln \tau), \tag{26}$$

$$Q(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\psi(\tau) \cdot \omega\tau}{1 + (\omega\tau)^2} \cdot d(\ln \tau). \tag{27}$$

Следовательно, если известна функция распределения $\psi(\tau)$, то можно легко найти все основные величины (Δ, Q, Φ), характеризующие релаксационные свойства твёрдого тела.

Однако в то время как функция $\Phi(t)$ может быть довольно просто определена (хотя и не совсем точно) экспериментально, пока не существует способов непосредственного определения функции $\psi(\tau)$. Можно сделать некоторые упрощающие предположения [6] относительно функции $\psi(\tau)$, но они не приводят к результатам, сколько-нибудь хорошо согласующимся с опытом. Следует также заметить, что для определения функции $\psi(\tau)$ по известному виду функций $\frac{\sigma(t) - \sigma(\infty)}{\sigma(\infty)}$, $\Delta(\omega)$ и $Q(\omega)$ в общем случае необходима операция обращения интеграла (24), (26) или (27), вносящая значительную неточность в результат. Из-за чрезвычайной чувствительности функции $\psi(\tau)$ к ошибкам в определении $Q(\omega)$ и $\Delta(\omega)$ для характеристики релаксационного спектра вместо неё рассматривается величина $Q(\omega) = \operatorname{tg} \alpha$ в функции времени релаксации или частоты колебаний.

На рис. 3 представлен типичный релаксационный спектр (подробнее см. ниже, § 4). Здесь *I* — внутреннее трение, обусловленное наличием пар атомов с разными атомными радиусами (растворы замещения); *II* — внутреннее трение, обусловленное вязким течением по границам зёрен; *III* — внутреннее трение, обусловленное вязким течением в «аморфных» областях, введённых пластической

деформацией; *IV* — внутреннее трение, обусловленное диффузией атомов внедрения, например атомов углерода или азота (переход этих атомов в преимущественные позиции внедрения); *V* — внутреннее трение, обусловленное поперечной теплопроводностью при изгибе образца; *VI* — внутреннее трение, обусловленное межкристаллитной теплопроводностью.

Этот релаксационный спектр будет характеризовать данный материал при данных условиях. Каждое изменение в образце, будь

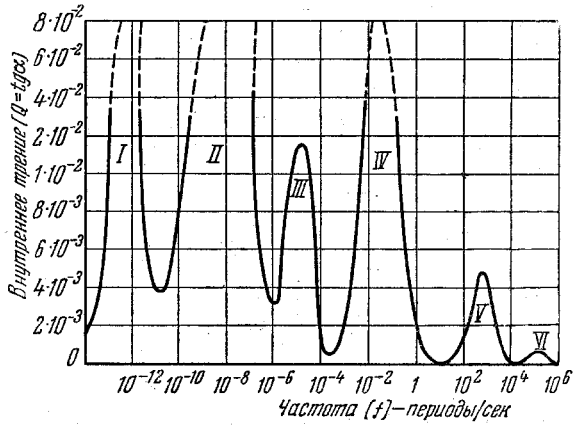

Рис. 3. Типичный релаксационный спектр твёрдого тела при комнатной температуре.

то изменение размеров, состава, степени деформации, отжига, размеров зерна, температуры и т. п., отражается характерным изменением релаксационного спектра. Изучение этих изменений позволит глубже проникнуть в механизм некоторых процессов в металлах и сплавах, чем это позволяют другие методы. Несколько странно то, что два пика (*V* и *VI*), которые обусловлены термической релаксацией и которые имеют незначительное отношение (или совсем не имеют отношения) к пластическим и прочностным свойствам тел, хорошо изучены [2, 6, 15], в то время как два пика (*II*, *III*), которые имеют прямое отношение к пластическим свойствам тел, изучаются слабо [1, 4, 17, 18].

3. ТЕОРИЯ РЕЛАКСАЦИОННЫХ ЯВЛЕНИЙ НА ОСНОВЕ ОБЩИХ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИХ СООБРАЖЕНИЙ

Ограничиваясь, как и раньше, случаем линейного напряжённого состояния (объёмный случай см. [7, 16]), рассмотрим изотермическое (неизотермический случай рассмотрен недавно Н. С. Фастовым [22]) деформирование однородного изотропного тела.

При деформировании упругого тела с конечной скоростью деформированное тело в каждый данный момент времени может и не находиться в состоянии статистического равновесия. В классической теории упругости состояние упруго деформированного тела полностью определяется значением температуры T и величины деформации ε. В рассматриваемом же нами случае этих величин недостаточно и следует ввести новую независимую термодинамическую переменную, которая характеризует мгновенное отклонение упруго деформированного тела от состояния статистического равновесия и которую можно назвать параметром релаксации. (В применении к жидкостям представление о релаксационном механизме поглощения звука впервые было выдвинуто Мандельштамом и Леонтовичем [19].) Для случая объёмного напряжённого состояния параметр релаксации является тензором 2-го ранга.

Для небольших деформаций и малых отклонений от состояния статистического равновесия свободную энергию упруго деформированного тела, отнесённую к единице объёма, можно представить формулой

$$F = F_0(T) + a \cdot \varepsilon^2 + b \cdot \xi^2 + c \cdot \varepsilon \cdot \xi, \tag{28}$$

где F_0 — свободная энергия недеформированного тела, находящегося в состоянии статистического равновесия, ξ — параметр релаксации. Применяя к интересующей нас задаче «термодинамическую» теорию неравновесных систем, развитую академиком М. А. Леонтовичем [20], обозначим через $\bar{\xi}$ «равновесное» значение параметра релаксации, которое при заданной деформации определяется соотношением

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \xi}\right)_{T,\,\varepsilon} = 0. \tag{29}$$

Из (28) и (29) следует:

$$2b \cdot \bar{\xi} + c \cdot \varepsilon = 0,$$

откуда

$$\bar{\xi} = -\frac{c}{2b} \cdot \varepsilon. \tag{30}$$

Введём новую величину ζ, определяемую соотношением

$$\zeta = \xi - \bar{\xi}. \tag{31}$$

Тогда условие (29) выполняется при $\zeta = 0$. В переменных ε и ζ свободная энергия F принимает вид

$$F = F_0 + \left(a - \frac{c^2}{4b}\right) \cdot \varepsilon^2 + b \cdot \zeta^2. \tag{32}$$

С другой стороны, свободная энергия упругого тела, деформированного квазистатическим образом и, следовательно, находя-

щегося в состоянии статистического равновесия, равна:

$$F = F_0 + \frac{M}{2} \cdot \varepsilon^2, \tag{33}$$

где M — изотермический модуль упругости (E или G). Полагая в (32) $\zeta = 0$ и сравнивая с (33), получаем:

$$a - \frac{c^2}{4b} = \frac{M}{2}, \tag{34}$$

откуда

$$F = F_0 + \frac{M}{2} \cdot \varepsilon^2 + b \cdot \zeta^2. \tag{35}$$

Из известных минимальных свойств свободной энергии следует, что

$$b > 0. \tag{36}$$

Определяя упругое напряжение соотношением

$$\sigma = \left(\frac{\partial F}{\partial \varepsilon}\right)_\xi, \tag{37}$$

получим:

$$\sigma = M \cdot \varepsilon + 2b \cdot \zeta \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial \varepsilon}. \tag{38}$$

Так как

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \varepsilon} = -\frac{\partial \xi}{\partial \varepsilon} = \frac{c}{2b}$$

на основании выражения (30), то

$$\sigma = M \cdot \varepsilon + c \cdot \zeta. \tag{39}$$

Параметр релаксации ξ является величиной, скорость изменения которой представляет собой функцию ζ; эта скорость тем меньше, чем ближе тело к состоянию равновесия, и обращается в нуль при достижении равновесия, т. е. при $\zeta = 0$. Считая ζ малой величиной, положим

$$\dot{\xi} = f(\zeta) \tag{40}$$

и, разложив эту функцию в ряд, ограничимся в разложении линейным членом

$$\dot{\xi} = f(0) + f'(0) \cdot \zeta.$$

Ввиду того, что при $\zeta = 0$ величина $\dot{\xi}$ также равна нулю, получаем:

$$f(0) = 0$$

и, следовательно,

$$\dot{\xi} = f'(0) \cdot \zeta.$$

Коэффициент $f'(0)$ должен быть отрицательным и иметь размер-

ность *сек*$^{-1}$. Полагая $f'(0) = -\frac{1}{\tau}$, где τ — характерный для данного тела параметр (время релаксации), получаем:

$$\dot{\xi} = -\frac{1}{\tau}\cdot\zeta \quad (\tau > 0). \tag{41}$$

Принимая во внимание (30) и (31), получаем:

$$\dot{\zeta} + \frac{1}{\tau}\zeta = -\frac{c}{2b}\cdot\dot{\varepsilon}. \tag{42}$$

Проинтегрируем это дифференциальное уравнение, считая, что в бесконечно удалённом прошлом тело находилось в статистическом равновесии. Тогда

$$\zeta(t) = \frac{c}{2b}\int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{t-t'}{\tau}}\dot{\varepsilon}(t')\cdot dt' \tag{43}$$

и

$$\sigma(t) = M\cdot\varepsilon(t) + \frac{c^2}{2b}\int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{t-t'}{\tau}}\dot{\varepsilon}(t')\cdot dt'. \tag{44}$$

Введём новую величину

$$\eta = \frac{c^2\cdot\tau}{2b},$$

имеющую размерность внутреннего трения $\left(\frac{г}{см\cdot сек}\right)$. Тогда

$$\sigma(t) = M\cdot\varepsilon + \frac{\eta}{\tau}\int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{t-t'}{\tau}}\dot{\varepsilon}(t')\,dt'. \tag{45}$$

Для случая, когда деформация является чисто периодической функцией времени, т. е.

$$\varepsilon = \varepsilon_0\cdot e^{i\omega t},$$

получаем обобщённый закон Гука в следующей форме:

$$\sigma = M\cdot\varepsilon + \frac{i\cdot\omega\cdot\eta\varepsilon}{1+i\omega\tau},$$

откуда

$$\sigma = M^*\cdot\varepsilon, \tag{46}$$

где

$$M^* = M + \frac{i\cdot\omega\cdot\eta}{1+i\omega\cdot\tau} \tag{47}$$

— комплексный модуль. То обстоятельство, что модуль является комплексной величиной, свидетельствует, как мы видели выше, о наличии сдвига фаз между напряжением и деформацией, обусловливающего упругий гистерезис, затухание колебаний и другие релаксационные свойства [16].

Формальное обобщение закона Гука [6, 9] вытекает как следствие более общей, сейчас рассмотренной теории. Чтобы в этом убедиться, найдём $\Delta(\omega)$ и $Q(\omega)$ на основе выражения (47), которое несколько преобразуем.

Умножая числитель и знаменатель второго члена правой части (47) на $(1 - i\omega\cdot\tau)$, получаем:

$$M^* = M + \frac{\omega^2\cdot\tau^2}{1+\omega^2\tau^2}\,\frac{\eta}{\tau} + \frac{i\omega\cdot\tau}{1+\omega^2\tau^2}\,\frac{\eta}{\tau}.$$

В качестве динамического модуля обычно принимают вещественную часть комплексного модуля, т. е.

$$M_\omega = M + \frac{\omega^2\tau^2}{1+\omega^2\tau^2}\,\frac{\eta}{\tau}. \tag{48}$$

Из выражения (48) находим:

$$\left.\begin{aligned} M_\infty &= M + \frac{\eta}{\tau}, \\ M_0 &= M. \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

Учитывая (48) и (49), получаем:

$$\Delta(\omega) = \frac{M_\infty - M_\omega}{M} = \frac{\Delta_0}{1+(\omega\cdot\tau)^2}, \tag{50}$$

где

$$\Delta_0 = \frac{M_\infty - M}{M}.$$

Полученное выражение полностью совпадает с выражением (20). Если взять за меру внутреннего трения $\operatorname{tg}\alpha$, равный отношению мнимой части комплексного модуля к его вещественной части, то можно убедиться в том, что

$$Q(\omega) = \frac{\Delta_0\cdot\omega\cdot\tau}{1+\frac{M_\infty}{M}\cdot(\omega\tau)^2}. \tag{51}$$

Полученное выражение отличается от выражения (21) множителем $\frac{M_\infty}{M}$ (порядка единицы) в знаменателе.

4. РАЗЛИЧНЫЕ МЕХАНИЗМЫ РЕЛАКСАЦИОННЫХ ЯВЛЕНИЙ В ТВЁРДЫХ ТЕЛАХ

Деформация, возникающая в упругом теле, определяется не только приложенными к нему внешними механическими силами, но также и температурой тела, его химическим составом, внешними магнитными и электрическими полями (магнито- и электрострикция), изменением степени порядка в сплаве и т. д. Эта зависимость полной деформации от указанных переменных приво-

дит к многообразию релаксационных явлений, каждое из которых вносит свой вклад во внутреннее трение $Q(\omega)$, в дефект модулей $\Delta(\omega)$ и другие релаксационные характеристики материала.

Рассмотрим кратко различные источники «упругих несовершенств» материала.

Теплопроводность

Теплопроводность является одним из источников релаксационных явлений в металлах. Повышение температуры при постоянном внешнем давлении обычно сопровождается увеличением объёма. Обратно, адиабатическое приложение всестороннего или линейного растягивающего усилия (уменьшение «внешнего давления») ведёт к понижению температуры и, следовательно, вызывает поток тепла в образец из окружающей среды. Так как разность температур постепенно уменьшается, образец испытывает незначительное увеличение в длине.

Время релаксации для выравнивания температуры по образцу равно [6, 15, 21]

$$\tau \cong \frac{d^2}{D}, \tag{52}$$

где d — линейный размер образца, D — коэффициент температуропроводности

$$D = \frac{\lambda}{c_v}, \tag{53}$$

λ — удельная теплопроводность, c_v — удельная теплоёмкость при постоянном объёме.

Степень релаксации в этом случае

$$\Delta_0^{(T)} = T \cdot E_s \frac{\alpha^2}{\rho c_p}, \tag{54}$$

где T — абсолютная температура, E_s — адиабатический модуль упругости, α — линейный коэффициент термического расширения, ρ — плотность, c_p — удельная теплоёмкость при постоянном давлении.

Выравнивание температуры может осуществляться не только между образцом и средой, но и между различными частями образца. Для этого необходимо создать в образце неоднородное напряжение, которое может быть макроскопическим или микроскопическим. Наиболее простой случай неоднородного макроскопического напряжения встречается при изгибе образца. Здесь материал с одной стороны нейтральной плоскости подвергается растяжению, а с другой — сжатию. Для образца круглого сечения время релаксации τ определяют [6] формулой

$$\tau = \frac{d^2}{4{,}3 \cdot 2\pi D}, \tag{55}$$

где d — диаметр образца, D — коэффициент температуропровод-

ности. Степень релаксации и в этом случае определяется выражением (54).

Микроскопическое неоднородное напряжение возникает благодаря упругой анизотропии зёрен или из-за беспорядочной ориентации индивидуальных кристаллитов. Макроскопически однородное усилие, приложенное к образцу, будет иметь результатом микроскопическую неоднородность напряжения от кристалла к кристаллу, что поведёт к изменению температуры в кристаллах и возникновению вследствие этого (наличие градиента температуры в зёрнах) тепловых потоков.

Время релаксации в этом случае

$$\tau \cong \frac{d^2}{D}, \tag{56}$$

где d — средний линейный размер зерна. Степень релаксации равна [6]:

$$\Delta_0 = R \cdot \Delta_0^{(T)}. \tag{57}$$

Здесь

$$R = \frac{\overline{(E^{-2})} - (\overline{E^{-1}})^2}{\overline{(E^{-2})}}$$

— относительная величина среднего квадратичного отклонения упругого модуля соседних кристаллитов. Фактор R указывает, что степень релаксации (и максимум внутреннего трения) будет тем больше, чем больше упругая анизотропия индивидуальных кристаллитов.

Диффузия

В ненапряжённом твёрдом растворе состоянию статистического равновесия соответствует некоторое (вообще говоря, беспорядочное) распределение растворённых атомов. Если сплав деформируется, то в нём возникает перераспределение растворённых атомов, протекающее с некоторой скоростью (со своим временем релаксации τ). В случае периодически меняющегося напряжения это перераспределение будет приводить к дополнительному рассеянию упругой энергии колебаний.

То, что диффузия будет приводить к неупругим явлениям, было впервые признано В. С. Горским [4], который теоретически рассмотрел этот эффект и осуществил эксперименты, подтверждающие его теорию.

Характерной чертой релаксации, обусловленной диффузией, является относительно большое значение τ и сильная зависимость этой величины от температуры. Время релаксации и в этом случае определяется соотношением

$$\tau \cong \frac{d^2}{D}, \tag{58}$$

где d — расстояние, на котором диффузия может иметь место, D — коэффициент диффузии. Этот коэффициент диффузии может быть записан как

$$D \cong \frac{a^2}{\theta}, \tag{59}$$

где a — расстояние, на которое атом перемещается за элементарный диффузионный акт, θ — средний временной интервал между элементарными диффузионными актами[23]. Комбинируя (58) и (59), получаем:

$$\tau \cong \left(\frac{d}{a}\right)^2 \cdot \theta. \tag{60}$$

Сильная температурная зависимость времени релаксации τ обусловлена быстрым температурным изменением θ. Средний временной интервал, как известно[24], определяется так:

$$\theta \cong \frac{h \cdot N}{H} e^{H/RT}, \tag{61}$$

где h — квантовая постоянная, N — число Авогадро, R — газовая постоянная, T — абсолютная температура, H — так называемая теплота активации, отнесённая к молю вещества. Комбинируя (60) и (61), получаем:

$$\tau \cong \left(\frac{d}{a}\right)^2 \frac{h \cdot N}{H} e^{H/RT}. \tag{62}$$

Степень релаксации для случая разбавленных твёрдых растворов[15] в этом случае равна

$$\Delta_0^{(D)} = \frac{E_н \cdot w}{\rho \cdot R \cdot T} \cdot \left(\frac{\delta\varepsilon}{\delta c}\right)_\sigma \cdot (1 - c) \cdot c, \tag{63}$$

где c — атомная концентрация твёрдого раствора, ρ — плотность, w — атомный вес растворителя, $E_н$ — нерелаксированный модуль упругости, R — газовая постоянная, T — абсолютная температура.

Релаксация, обусловленная диффузией, достигает большой величины. Например, для α-латуни (70% меди, 30% цинка) из уравнения (63) имеем для $\Delta_0^{(D)}$ величину 0,5, в то время как для термоупругой релаксации величина $\Delta_0^{(T)} = 0{,}0036$. Это означает, что внутреннее трение, обусловленное релаксацией концентрационного потока, будет в 140 раз больше, чем внутреннее трение, обусловленное релаксацией теплового потока (см. рис. 3). Однако релаксационные явления, связанные с диффузией, трудно наблюдать из-за очень большого времени релаксации. Так как время релаксации пропорционально $\frac{d^2}{D}$, то малое время релаксации можно получить, уменьшая величину зерна и повышая температуру измерения (увеличивая D). С повышением температуры увеличивается не только D, но и размер зерна, так что время релаксации не может стать меньше чем 10^6 сек. при любой температуре.

Преимущественное распределение атомов в поле напряжений

В свободном от напряжений разупорядоченном твёрдом растворе распределение растворённых атомов изотропно относительно каждого отдельного атома основной решётки. Это означает, что ближайший растворённый атом имеет одинаковую вероятность располагаться вдоль любого возможного кристаллографического направления. Например, в объёмноцентрированной кубической решётке атомы внедрения могут занимать позиции типа (0, 1/2, 1/2), или (1/2, 0, 1/2) или (1/2, 1/2, 0), которые имеют тетрагональную симметрию с тетрагональными осями вдоль главных осей.

Если приложить растягивающее усилие, например, вдоль оси z, то изотропное распределение атомов нарушится; равновесным распределением теперь будет такое, в котором большее число растворённых атомов находится в позициях с тетрагональной осью z.

Переход в новое положение равновесия связан с некоторым временем релаксации τ.

В гранецентрированной решётке ось, соединяющая ближайших соседей, лежит в одном из направлений $\langle 110 \rangle$. Если растворённый атом (по типу замещения) больше, чем атом растворителя, то два соседних атома по одному из этих направлений $\langle 110 \rangle$ произведут локальное растяжение решётки по сравнению с направлением, перпендикулярным к линии, соединяющей эти атомы.

Если приложить растягивающее усилие, например, вдоль направления $\langle 110 \rangle$, то это направление станет преимущественным. Переход в это преимущественное положение других пар атомов и здесь будет связан с некоторым временем релаксации τ.

Релаксационные явления, связанные с указанным здесь процессом перераспределения атомов, наблюдались различными исследователями на α-латуни [15], на Fe-C, Fe-N [23] и на Ti-O, Ti-C, Ti-N [17]. Так как перераспределение атомов в решётке под влиянием напряжений осуществляется путём диффузии, то для степени релаксации Δ_0 будет с некоторым приближением пригодна формула (63), если в ней заменить величину $\left(\frac{\delta\varepsilon}{\delta c}\right)_\sigma$ величиной $\left(\frac{\delta\varepsilon}{\delta c_1} - \frac{\delta\varepsilon}{\delta c_2}\right)$, где c_1 и c_2 — атомные концентрации преимущественных и непреимущественных положений, соответственно, а величина c заменяется некоторым средним из этих двух атомных концентраций [6].

Для твёрдого раствора типа внедрения время релаксации должно быть сравнимо с временем жизни внедрённого атома в позиции внедрения. Это время жизни в свою очередь определяется [23] выражением

$$\tau \cong \frac{1}{\nu} \cdot e^{H/RT}, \tag{64}$$

где ν — частота колебаний внедрённого атома в позиции внедре-

ния, H — теплота активации моля внедрённых атомов, определяемая типом позиции внедрения и природой как внедрённых атомов, так и атомов растворителя.

Для твёрдых растворов замещения время релаксации определяется формулой, аналогичной формуле (62).

Развитая здесь теория Зинера недавно встретила возражение, выдвинутое Новиком [31], который показал, что применение её ограничивается областью очень малых концентраций.

Упорядоченное распределение атомов в решётке

В упорядочивающихся сплавах (Cu, Zn, AuCu и др.) после критической температуры $T_к$ устанавливается некоторая степень порядка в распределении атомов, вполне определённая для каждой температуры. Как было впервые указано В. С. Горским [4], создание напряжённого состояния в сплаве изменяет равновесную степень порядка. Новое равновесное распределение устанавливается не мгновенно, а с некоторым временем τ. Единственное исследование, которое было сделано для определения времени релаксации, принадлежит В. С. Горскому [4], который нашёл для сплава CuAu, что

$$\tau \sim e^{H/RT}, \tag{65}$$

где H — теплота активации, имеющая ту же величину, что и для макроскопической диффузии, а именно 27 400 *кал/моль*. При температуре 270°, которая на 100° ниже $T_к$, это время релаксации равно 10 сек.

Степень релаксации для упорядочивающихся сплавов можно определить приближённо [6] как

$$\Delta_0 = E_н \cdot \mu_c \left(\frac{\Delta\varepsilon}{\Delta S_c}\right)^2, \tag{66}$$

где $E_н$ — нерелаксированный модуль упругости, $\mu_c = \left(\frac{\partial S_c}{\partial T_c}\right)_\sigma$ — производная от энтропии смеси S_c по температуре смеси $T_c = \left(\frac{\partial H}{\partial S_c}\right)_\sigma$ при постоянном напряжении, $\Delta\varepsilon$ — изменение деформации, связанное с изменением степени порядка, ΔS — изменение энтропии смеси, связанное с этим же изменением, H — тепловая функция единицы объёма сплава. Например, для сплава типа Cu_3Au $\Delta_0 = 0{,}004$ при критической температуре ($\sim 400°$) и $\Delta_0 = 0{,}1$ при температуре, несколько ниже критической.

Полосы скольжения и границы зёрен

Поликристаллические тела имеют сложный релаксационный спектр, который включает в себя как резкие максимумы, обусловленные явлением с одним (например, термоупругая релаксация)

или несколькими близкими временами релаксации (например, позиции внедрения), так и максимумы, «размытые» на значительный интервал времён τ, которые могут быть описаны целым набором времён релаксации.

Для объяснения размытия релаксационных максимумов в релаксационном спектре поликристаллических тел была введена идея «двухкомпонентной системы»[6, 23]. Эта идея заключается в том, что твёрдое тело представляется состоящим из двух фаз, одна из которых аморфна, другая совершенно упруга. Упругая фаза подчиняется закону Гука:

$$\varphi = G^{-1} \cdot P_{xy},$$

а аморфная фаза подчиняется релаксационному уравнению Максвелла:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{G} \cdot \frac{dP_{xy}}{dt} + \frac{P_{xy}}{\eta}, \tag{67}$$

где φ — угол сдвига, характеризующий деформацию, происходящую под влиянием скалывающего напряжения P_{xy}; G — модуль сдвига, η — коэффициент вязкости аморфного тела. Для аморфной фазы в случае внезапной остановки деформации на значении φ_0 скалывающее напряжение P_{xy} исчезает не мгновенно, а по закону

$$P_{xy} = P^0_{xy} \cdot e^{-\frac{G \cdot t}{\eta}}, \tag{68}$$

который получается интегрированием дифференциального уравнения (67) при $\frac{d\varphi_0}{dt} = 0$.

Как видно из (68), напряжение постепенно ослабевает (релаксирует) со временем релаксации

$$\tau = \frac{\eta}{G}. \tag{69}$$

Это время релаксации будет зависеть от физической природы аморфной области, а также от её размеров и формы. Нетрудно показать, что если аморфная область имеет ширину c и длину l, то коэффициент вязкости этой области связан с временем релаксации уравнением [17]:

$$\eta = \frac{G \cdot \tau}{l} \cdot c, \tag{70}$$

откуда видно, что время релаксации зависит от размеров аморфной области (и её формы).

Если в упругую матрицу (основа твёрдого тела) вкраплены аморфные области, то каждая область будет ослаблять напряжение со своим временем релаксации τ_i и поведение такого твёрдого

тела будет определяться всей совокупностью времён релаксации τ_i, что и приведёт к «размытию» максимумов полного релаксационного спектра твёрдого тела.

Внутреннее трение, обусловленное явлением с одним временем релаксации, определяется формулой (51). Для поликристаллического тела внутреннее трение будет определяться, очевидно, уравнением

$$Q(\omega)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\Delta(\tau_i)\cdot\omega\cdot\tau_i}{1+\frac{M_\infty}{M}\cdot(\omega\cdot\tau_i)^2}, \qquad (71)$$

где $\Delta(\tau_i)$ — степень релаксации, обусловленная наличием релаксационного явления с временем релаксации τ_i.

Двухкомпонентная система имеет ряд особенностей. Первой особенностью двухкомпонентной системы является значительная величина релаксационных эффектов, которые могут обусловливаться совершенно незначительными количествами аморфного материала (в форме дисков, полос, сетки).

Второй замечательной особенностью является создание высокой концентрации напряжения внутри упругой матрицы во время релаксации напряжения внутри аморфной области.

Третьей особенностью является большое разнообразие типов релаксационного спектра в зависимости от формы и размеров аморфных областей и их распределения в упругой матрице.

Это разнообразие возможных типов релаксационного спектра не даёт возможности в общем виде решить задачу о величине времён релаксации и степени релаксации для произвольного твёрдого тела.

Роль аморфных областей, как показывают опыты, могут выполнять полосы скольжения[6, 17], образованные в процессе пластической деформации, или границы зёрен[6, 17, 18, 26, 27, 28]. Идея аморфных полос скольжения является сходной с так называемой идеей дислокаций[6, 17, 29], на основе которой часто пытаются объяснить неоднородные (несколько времён релаксации) релаксационные явления в твёрдых телах[17, 30] и другие явления. Приятным фактом является появление в нашей печати справедливой критики по адресу этой теории[32].

Подводя краткий итог изложенному, можно сказать, что если физическая картина релаксационных явлений в металлах и сплавах более или менее ясна, то теоретическое объяснение имеющихся данных ещё не совсем удовлетворительное.

Обобщения закона Гука, метод механических и электрических аналогий приводят к формальному построению теории, которая не может дать физической картины изучаемых явлений.

Теория, основанная на общих термодинамических соображениях, является наиболее удовлетворительной. Но и она является ограниченной в своих возможностях, так как исходит из рассмотрения только случая однородного изотропного тела. Ни одна из сущест-

вующих теорий не рассматривает зависимости релаксационных характеристик от температуры, остаточной деформации (предварительное пластическое деформирование) и др. факторов. Наконец, необходимо отметить то, что наши учёные мало занимаются этим очень важным и многообещающим вопросом физики твёрдого тела.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. В. Д. Кузнецов, Физика твёрдого тела, т. 4, изд-во Полиграфиздата, Томск, 1947.
2. А. Ф. Иоффе, Известия С.-Петерб. политехнического ин-та **24**, (1915).
3. Н. Н. Давиденков и Г. А. Кусмирская, ЖТФ **16**, 1261 (1946).
4. В. С. Горский, Сов. физика **8**, 443, 462 (1935); ЖЭТФ **6**, 272 (1936).
5. Е. Я. Пумпер, ДАН **66**, 41 (1949).
6. C. Zener, Elasticity and Anelasticity of Metals, 1948.
7. Б. Н. Финкельштейн, Н. С. Фастов, ДАН **71**, 875 (1950).
8. А. Н. Герасимов, Журн. прикладной матем. и мех. **1**, 493 (1938).
9. А. Ю. Ишлинский, Журн. прикладной матем. и мех. **4**, 79 (1940).
10. А. Ахиезер, ЖЭТФ **8**, 1330 (1938).
11. С. Н. Ткаченко, ЖЭТФ **9**, 314 (1939).
12. А. С. Компанеец, ДАН **14**, 267 (1937).
13. Л. М. Качанов, Механика пластических сред, Гостехиздат, 1948.
14. L. Bolzman, Ann. d. Phys. **7**, 624 (1876).
15. C. Zener, J. Appl. Phys. **18**, 1022 (1947); Metals Technology **13**, 1992 (1946); Trans. AIME **152**, 122 (1943); Phys. Rev. **60**, 906 (1941;) Phys. Rev. **71**, 846 (1947).
16. Б. Н. Финкельштейн, Н. С. Фастов, Проблемы металловедения и физики металлов, 1951, стр. 245.
17. T'ing-Sui Kê, Phys. Rev. **71**, 533 (1947); Rev. Scient. Instr. **20**, 795 (1949); Phys. Rev. **72**, 41 (1947); J. Appl. Phys. **20**, 274 (1949); Metals Technology **15**, 2370 (1948); Phys. Rev. **74**, 9, 16 и 914 (1948); Phys. Rev. **78**, 420 (1950); J. Appl. Phys. **19**, 285 (1948); Trans. AIME **188**, 575 (1950); Science record of Acad. Science, Peking **3**, 61 (1950); Phys. Rev. **76**, 569 (1949).
18. В. С. Постников, ДАН **71**, 79 (1953); Труды Кемеровского горного института, 1954.
19. Л. И. Мандельштам и М. А. Леонтович, ЖЭТФ **7**, 438 (1937).
20. М. А. Леонтович, ЖЭТФ **8** (1938).
21. Л. Ландау и Е. Лифшиц, Механика сплошных сред, Гостехиздат, 1941.
22. Н. С. Фастов, ЖЭТФ **22**, 487 (1952).
23. Я. И. Френкель, Введение в теорию металлов, Гостехиздат, 1950.
24. Р. Бэррер, Диффузия в твёрдых телах, ИЛ, 1948.
25. G. L. Snoeu, Physica **8**, 741 (1941).
26. N. F. Mott, Proc. Phys. Soc. **60**, 391 (1948).
27. L. Rotherham, N. Smith, B. A. and G. B. Greanaugh, J. Inst. of Met. **79**, 439 (1951).
28. К. М. Розин и Б. Н. Финкельштейн, ДАН **91**, 811 (1953).
29. Seitz and Read, J. Appl. Phys. **12**, 100, 170, 470, 538 (1941).
30. Ф. Зейтц, Физика металлов, Гостехиздат, 1947.
31. Progress in Metal Physics. **4**, 1—70 (1953).
32. М. В. Классен-Неклюдова и Т. А. Конторова, УФН **52**, 143 (1954).