1954 г. Март *Т. LII, вып. 3*

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ

О ТЕРМОДИНАМИЧЕСКОМ РАССМОТРЕНИИ РАВНОВЕСНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ФЛУКТУАЦИЙ

Вопрос о применении феноменологической термодинамики к тепловым электрическим флуктуациям в квазистационарных цепях уже обсуждался на страницах этого журнала. В статье Г. С. Горелика[1] с помощью второго начала термодинамики и общих уравнений теории переменных токов выводилась теорема о равномерном распределении энергии по степеням свободы в электродинамике — результат, парадоксальность которого была отмечена самим автором. Разъяснению этого парадокса уделено заметное место в статье В. Л. Гинзбурга[2]. Однако аргументация В. Л. Гинзбурга, содержащая наряду с правильными утверждениями и ошибочные, в целом не представляется нам убедительной. Между тем интересующий нас вопрос может быть изложен с должной ясностью, что и составляет задачу настоящей статьи.

1. СРЕДНЯЯ ЭНЕРГИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ФЛУКТУАЦИЙ В КОЛЕБАТЕЛЬНОМ КОНТУРЕ

Пусть макроскопический LCR-контур находится в тепловом равновесии с термостатом температуры T. Средняя магнитная энергия W_m и средняя электрическая энергия W_e контура равны соответственно

$$W_m = \frac{1}{2} L\overline{I^2}; \qquad W_e = \frac{\overline{q^2}}{2C}, \tag{1.1}$$

где I — флуктуационный ток в цепи, q — флуктуационный заряд на обкладках конденсатора, а черта означает усреднение. Поскольку контур находится в состоянии термодинамического равновесия, величины W_m и W_e есть некоторые функции температуры и параметров цепи

$$W_m = T\varphi(T, L, C, R); \qquad W_e = T\psi(T, L, C, R). \tag{1.2}$$

Здесь φ и ψ пока ещё неопределённые функции своих аргументов, так что выделение множителя T, произведённое для упрощения дальнейших выкладок, не уменьшает общности рассуждения.

Работа, совершаемая при изменении параметров контура, равна

$$\delta A = \left(\frac{\partial W_m}{\partial L}\right)_I dL - \left(\frac{\partial W_e}{\partial C}\right) dC = \frac{1}{2}\overline{I^2}\, dL + \frac{\overline{q^2}}{2C^2} dC =$$

$$= \frac{W_m}{L} dL + \frac{W_e}{C} dC \tag{1.3}$$

(при изменении R работа не совершается), или на основании (1.2)

$$\delta A = T\left(\frac{\varphi}{L}\,dL + \frac{\psi}{C}\,dC\right). \tag{1.4}$$

Подставляя (1.2) и (1.4) в уравнение второго начала термодинамики *)

$$T\,dS = d\,(W_m + W_e) + \delta A,$$

мы получим:

$$dS = d\,(\varphi + \psi) + \frac{\varphi + \psi}{T}\,dT + \frac{\varphi}{L}\,dL + \frac{\psi}{C}\,dC. \tag{1.5}$$

Первый член в правой части (1.5) есть полный дифференциал; для того чтобы три последние члена тоже составляли полный дифференциал, функции φ и ψ, во-первых, не должны зависеть от R, а, во-вторых, должны удовлетворять системе уравнений

$$T\frac{\partial\varphi}{\partial T} = L\frac{\partial}{\partial L}(\varphi + \psi), \qquad L\frac{\partial\psi}{\partial L} = C\frac{\partial\varphi}{\partial C},$$
$$T\frac{\partial\psi}{\partial T} = C\frac{\partial}{\partial C}(\varphi + \psi),$$

или эквивалентной ей системе

$$T\frac{\partial\varphi}{\partial T} = L\frac{\partial\varphi}{\partial L} + C\frac{\partial\varphi}{\partial C}, \qquad L\frac{\partial\psi}{\partial L} = C\frac{\partial\varphi}{\partial C}. \tag{1.6}$$
$$T\frac{\partial\psi}{\partial T} = L\frac{\partial\psi}{\partial L} + C\frac{\partial\psi}{\partial C},$$

Решение (1.6) есть

$$\varphi = \varphi\,(LT,\ CT); \qquad \psi = \psi\,(LT,\ CT), \tag{1.7}$$

где $\varphi\,(x,\ y)$, $\psi\,(x,\ y)$ связаны соотношением

$$x\frac{\partial\psi}{\partial x} = y\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \tag{1.8}$$

а в остальном совершенно произвольные функции своих аргументов.

Итак, из второго начала термодинамики следует, что энергия колебательного контура (магнитная, электрическая или равная их сумме полная), первоначально рассматриваемая как функция четырёх аргументов, имеет вид произведения температуры на функцию двух аргументов: LT и CT. В частности, при $L = 0$ мы приходим к результату Г. С. Горелика [1], с самого начала рассматривавшего вырожденный CR-контур. Если же принять, что средняя магнитная энергия равна средней электрической (теорема вириала), т. е. что $\varphi = \psi$, то из (1.8) сразу следует, что $\varphi\,(x,\ y)$ будет функцией от произведения xy. Тогда

$$\varphi\,(LT,\ CT) = \psi\,(LT,\ CT) = \Phi\left(\frac{\omega_0}{T}\right), \tag{1.9}$$

где $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$, а Φ — пока произвольная функция. Формула (1.9) была

*) Внутренняя энергия контура может отличаться от $W_m + W_e$ на некоторую функцию сопротивления и температуры (см. [1]). Однако, обобщая рассуждения [1], легко показать, что и для LCR-цепи эта функция не зависит от R. Поэтому мы её сразу опустили.

получена В. Л. Гинзбургом [2], с самого начала полагавшим, что для колебательного контура выполняется теорема вириала. Однако поскольку последняя не является термодинамической теоремой, то и опирающийся на неё вывод формулы (1.9) не может считаться строго термодинамическим (как указывает сам В. Л. Гинзбург, он законен лишь при $R \to 0$).

2. СПЕКТРАЛЬНАЯ ПЛОТНОСТЬ ФЛУКТУАЦИОННОЙ Э. Д. С.

Для более детального описания флуктуационных токов и зарядов введём, как это обычно делается, случайную стороннюю э. д. с. $E(t)$ и её спектральную плотность $|E_\omega|^2$, связанные между собой соотношениями

$$\overline{E^2} = \int_0^\infty |E_\omega|^2 \, d\omega, \tag{2.1}$$

$$|E_\omega|^2 = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{\pi T} \left| \int_0^T E(t) e^{-i\omega t} dt \right|^2. \tag{2.2}$$

Точно такими же соотношениями связаны с флуктуационным током $I(t)$ его спектральная плотность $|I_\omega|^2$, а с флуктуационным зарядом $q(t)$ его спектральная плотность $|q_\omega|^2$ *). При этом, очевидно,

$$|E_\omega|^2 = |Z|^2 |I_\omega|^2 = \omega^2 |Z|^2 |q_\omega|^2, \tag{2.3}$$

где Z — импеданс контура на частоте ω:

$$Z = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right). \tag{2.4}$$

Легко показать (см. [1]), что выражение для спектральной плотности флуктуационной э.д.с. имеет вид

$$|E_\omega|^2 = Rf(\omega, T). \tag{2.5}$$

Здесь $f(\omega, T)$ — некоторая универсальная функция, определение которой и является задачей теории тепловых электрических флуктуаций.

Для её решения воспользуемся результатами предыдущего параграфа. Из формул (2.3), (2.5) и определения спектральной плотности следует, что средние квадраты флуктуационного тока и флуктуационного заряда равны

$$\overline{I^2} = \int_0^\infty |I_\omega|^2 \, d\omega = \int_0^\infty \frac{Rf(\omega, T)}{|Z|^2} \, d\omega, \quad \overline{q^2} = \int_0^\infty |q_\omega|^2 \, d\omega = \int_0^\infty \frac{Rf(\omega, T)}{\omega^2 |Z|^2} \, d\omega. \tag{2.6}$$

---

*) Формулы (2.1) и (2.2) отличаются от формул (1.3) статьи В. Л. Гинзбурга [2] отсутствием коэффициента 4π соответственно в числителе и в знаменателе. Называя $|E_\omega|^2$ спектральной плотностью, естественно нормировать её по формуле (2.1). Иногда удобнее другая нормировка (см. [3], § 117), при которой в формуле (2.2), определяющей $|E_\omega|^2$, нет лишних числовых множителей, но в этом случае $|E_\omega|^2$ уже не является, строго говоря, плотностью. То же можно сказать и о нормировке, предложенной В. Л. Гинзбургом.

Согласно же термодинамическим формулам (1.1), (1.2) и (1.7)

$$\overline{I^2} = \frac{2T}{L}\varphi(LT,\ CT); \qquad \overline{q^2} = 2CT\psi(LT,\ CT). \tag{2.7}$$

Подставляя (2.7) в (2.6) и заменяя $|Z|^2$ его явным выражением по формуле (2.4), мы получим:

$$\left.\begin{aligned} 2T\varphi(LT,\ CT) &= \int_0^\infty \frac{\beta}{\beta^2 + \left(\omega - \frac{\omega_0^2}{\omega}\right)^2} f(\omega,\ T)\,d\omega, \\ 2T\psi(LT,\ CT) &= \int_0^\infty \frac{\beta}{\beta^2 + \left(\omega - \frac{\omega_0^2}{\omega}\right)^2} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} f(\omega,\ T)\,d\omega, \end{aligned}\right\} \tag{2.8}$$

где

$$\beta = \frac{R}{L}; \qquad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}.$$

Уравнения (2.8) должны выполняться при любых значениях параметров контура L, C и R. Но при $R \to 0$ функция

$$G(\beta,\ \omega,\ \omega_0) = \frac{2}{\pi}\frac{\beta}{\beta^2 + \left(\omega - \frac{\omega_0^2}{\omega}\right)^2} \tag{2.9}$$

переходит в несобственную дираковскую функцию $\delta(\omega - \omega_0)$, так что правые части уравнений (2.8) становятся равными $\frac{\pi}{2} f(\omega_0,\ T)$. Следовательно, равны и левые части, а так как они не зависят от R, то всегда $\varphi = \psi$ и на основании (1.9)

$$\varphi = \psi = \Phi\left(\frac{\omega_0}{T}\right), \tag{2.10}$$

так что

$$f(\omega, T) = \frac{4}{\pi} T\Phi\left(\frac{\omega}{T}\right). \tag{2.11}$$

Формула (2.11) была получена В. Л. Гинзбургом [2] при дополнительном предположении о справедливости теоремы вириала для колебательного контура. Приведённый здесь вывод показывает, что в этом дополнительном предположении нет надобности: и теорема вириала ($\varphi = \psi$) и формула (2.11) являются следствиями второго начала термодинамики и общих уравнений теории переменных токов.

Пока $\Phi\left(\frac{\omega}{T}\right)$ — произвольная функция, выражения (2.10), (2.11) автоматически удовлетворяют соотношениям (2.8) лишь при $R \to 0$. Для того чтобы соотношения (2.8) выполнялись при любых значениях R, функция Φ

должна удовлетворять двум интегральным уравнениям

$$\Phi\left(\frac{\omega_0}{T}\right)=\int_0^\infty G(\beta,\ \omega,\ \omega_0)\,\Phi\left(\frac{\omega}{T}\right)d\omega,$$

$$\frac{1}{\omega_0^2}\Phi\left(\frac{\omega_0}{T}\right)=\int_0^\infty G(\beta,\ \omega,\ \omega_0)\,\frac{1}{\omega^2}\,\Phi\left(\frac{\omega}{T}\right)d\omega,$$

т. е. и функция Φ и функция $\frac{\Phi}{\omega^2}$ являются решениями интегрального уравнения

$$F(\omega_0)=\int_0^\infty G(\beta,\ \omega,\ \omega_0)\,F(\omega)\,d\omega. \qquad (2.12)$$

Не зависящее от β общее решение этого уравнения имеет вид (см. Добавление)

$$F(\omega)=C_1+\frac{C_2}{\omega^2}, \qquad (2.13)$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Следовательно, для того чтобы и Φ и $\frac{\Phi}{\omega^2}$ удовлетворяли уравнению (2.12), функция Φ должна равняться постоянной величине. Но тогда из формул (2.5) и (2.11) сразу следует, что

$$|E_\omega|^2=aRT, \qquad (2.14)$$

где a — некоторая постоянная. С точностью до значения постоянной a (2.14) выражает собою классическую формулу Найквиста[4], эквивалентную формуле Рэлея-Джинса для спектральной плотности равновесного излучения (см.[5]).

Формула (2.14) была получена Г. С. Гореликом[1] при термодинамическом рассмотрении вырожденного CR-контура. Однако такой вывод (2.14) не вполне корректен, так как из формулы (2.14) сразу следует, что в CR-контуре $\overline{I^2}=\infty$, а это противоречит исходному предположению о тепловом равновесии между сопротивлением и термостатом.

3. О ПАРАДОКСЕ Г. С. ГОРЕЛИКА

При доказательстве независимости равновесной энергии колебательного контура от сопротивления и выводе формул (1.7) мы исходили из того, что W_m и W_e есть некоторые функции индуктивности L, ёмкости C и сопротивления R, и оперировали с L, C и R как с термодинамическими параметрами системы. Тем самым мы уже считали, что R (а также L и C) не зависят от частоты, так как в противном случае W_m и W_e были бы не функциями, а функционалами, и обычная форма термодинамических равенств не имела бы смысла.

Более того, зависимость R от частоты может быть обусловлена либо скин-эффектом, либо дисперсией проводимости. В первом случае от частоты зависит и L, во втором—проводимость будет комплексной величиной (действительная часть комплексной диэлектрической проницаемости также меняется с частотой). Поэтому и чисто электродинамические уравнения (1.1) и (1.3) фактически перестают быть верными при $R(\omega)\neq\text{const}$.

При нахождении спектральной плотности флуктуационной э. д. с. мы использовали результаты § 1 и, кроме того, явно предполагали, что параметры рассматриваемого колебательного контура не зависят от частоты.

Таким образом, формула (2.14), при обычном выводе которой опираются на классическую теорему о равномерном распределении энергии по степеням свободы, есть следствие термодинамики, теории переменных токов и допущения о существовании проводников с не зависящим от частоты сопротивлением. Но в такой уточнённой формулировке утверждение Г. С. Горелика[1] не содержит в себе, как мы сейчас покажем, ничего парадоксального.

Необходимым условием независимости сопротивления от частоты является, очевидно, мгновенность соударений, претерпеваемых электронами проводимости *). Однако предположение о мгновенности соударений не совместимо, как легко видеть, с квантовыми представлениями. Действительно, продолжительность соударения имеет тот же порядок величины, что и время прохождения волнового пакета мимо фиксированной точки пространства. Но при движении в любом потенциальном силовом поле (см.[6], стр. 306) это время прохождения τ удовлетворяет неравенству

$$\tau \gtrsim \frac{\hbar}{2\Delta E},$$

где ΔE — разброс энергии в пакете. Для электронов проводимости $2\Delta E \approx kT$ (полоса размытости распределения Ферми), так что

$$\tau \gtrsim \frac{\hbar}{kT}$$

и, следовательно, в квантовой области частот соударения нельзя считать мгновенными, а сопротивление не зависящим от частоты. Для классической же области частот мгновенность соударений влечёт за собой мгновенность дифференциальных толчков флуктуационной э. д. с., откуда сразу следует, что универсальная функция $f(\omega, T)$ не зависит от частоты.

Итак, допущение о существовании проводников с не зависящим от частоты сопротивлением равнозначно весьма сильному статистическому утверждению (мгновенность соударений), имеющему сугубо классический характер. Этим и объясняется кажущаяся парадоксальность термодинамического вывода формулы (2.14).

Никакого парадокса нет и с более формальной точки зрения. В самом деле, и сопротивление проводника, и флуктуационные токи в нём имеют своей причиной один и тот же случайный процесс, спектральными характеристиками которого являются и $[E_\omega]^2$ и $R(\omega)$ (здесь, как и раньше мы отвлекаемся от скин-эффекта, считая проводник достаточно тонким). Естественно, что эти две спектральные характеристики одного процесса связаны между собой, и поэтому нет ничего удивительного в том, что, полагая $R(\omega) = \text{const}$, мы получаем с помощью термодинамики вполне конкретное выражение для $[E_\omega]^2$.

Если $R = R(\omega)$, то, как уже было сказано, термодинамическое рассмотрение электрических флуктуаций невозможно: $R(\omega)$ не является параметром

---

*) По мнению В. Л. Гинзбурга[2], механизм немгновенных соударений таков, что при $\omega \to \infty$ $R(\omega) \to 0$, так как иначе в классическом случае средний квадрат флуктуационной э. д. с. $\overline{E^2} \sim \int R(\omega)\, d\omega$ не будет конечной величиной. Однако с таким же основанием можно было бы утверждать, что при $\omega \to \infty$ $R \to \infty$, ибо только тогда не будет расходиться выражение для среднего квадрата флуктуационного тока $\overline{I^2} \sim \int \frac{d\omega}{R(\omega)}$ в цепи, содержащей одни сопротивления (в работе[2] предполагается, что в принципе такие цепи могут существовать).

в термодинамическом смысле. Исключение составляет случай, рассмотренный В. Л. Гинзбургом [2], когда $R(\omega)$ исчезающе мало. Тогда можно пренебречь зависимостью W_m и W_e от R, с той же степенью точности не зависят от частоты L и C, и следовательно, все результаты § 1 и результаты § 2 до формулы (2.11) включительно остаются в силе. Поэтому для квантовой области частот, где принципиально $R(\omega) \neq \text{const}$, термодинамика не может дать большего, чем общий результат, выражаемый формулой (2.11).

К такому же заключению приходит в своей работе [2] В. Л. Гинзбург, однако его аргументация содержит, на наш взгляд, ошибочные утверждения, на которых мы считаем нужным остановиться. Прежде всего В. Л. Гинзбург считает, что мыслимы проводники, сопротивление которых не зависит от частоты даже в квантовой области, но что термодинамическое рассмотрение таких проводников (при неисчезающем сопротивлении) незаконно, так как, вообще говоря, R есть мера неаддитивности энергии системы контур + термостат. Последнее утверждение основано, как нам кажется, на смешении понятий: сопротивление макроскопического контура при тепловом равновесии есть не мера неаддитивности энергии*), а мера неадиабатичности этого контура. Поэтому с таким же основанием можно было бы утверждать, что термодинамика, вообще говоря, неприменима к телам с неисчезающим коэффициентом теплопроводности. Развитая же в работе [2] общая точка зрения, согласно которой перед тем, как применять термодинамические законы к макроскопической системе, находящейся в состоянии теплового равновесия, фактически необходимо сначала обосновать с помощью статистического рассмотрения законность такого применения, приводит в конечном счёте к незаслуженной дискредитации феноменологической термодинамики. В том, что формула (2.14) противоречит квантовой формуле Найквиста, повинна, разумеется, не термодинамика, а исходное допущение о $R(\omega) = \text{const}$, не совместимое с квантовыми законами.

Проведённое выше в §§ 1, 2 термодинамическое рассмотрение тепловых электрических флуктуаций в колебательном контуре с постоянными параметрами имеет, как нам кажется, не только педагогический интерес. Во-первых, она показывает, что при обычном статистическом выводе классической формулы Найквиста (см., например, [4, 8, 9]), когда в качестве «шумового эталона» берётся сопротивление с $R(\omega) = \text{const}$, можно опускать довольно длинное доказательство независимости универсальной функции $f(\omega, T)$ от частоты — это следует из термодинамики. Во-вторых, из него ясно, что в квантовой области частот нельзя, даже не учитывая скин-эффекта, считать сопротивление не зависящим от частоты. В частности, вычисление различных интегральных (по спектру) величин, выполненное с помощью квантовой формулы Найквиста, но в предположении $R(\omega) = \text{const}$ (см. стр. 366—669 работы [2]), даёт результаты, не имеющие, по нашему мнению, физического смысла.

*) В дальнейшем, говоря о неаддитивности энергии, В. Л. Гинзбург утверждает ([2], стр. 376), что энергией взаимодействия контура с термостатом можно пренебречь лишь тогда, когда $[E_\omega]^2$ не зависит от частоты, т. е. когда толчки интегральной флуктуационной э. д. с. мгновенны. Но это тоже неверно. Для того чтобы можно было пренебречь энергией взаимодействия, достаточно мгновенности толчков дифференциальных флуктуационных полей (мгновенность соударений!). При этом, однако, толчки интегральной э. д. с. вследствие скин-эффекта могут и не быть мгновенными: $[E_\omega]^2$ пропорционально сопротивлению, меняющемуся, вообще говоря, с частотой из-за скин-эффекта (см. [7]). Таким образом, в этом классическом случае энергией взаимодействия термостата с контуром можно пренебречь, а применять термодинамику к контуру нельзя: сопротивление зависит от частоты и, следовательно, не является термодинамическим параметром.

ДОБАВЛЕНИЕ

Решение интегрального уравнения

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\beta}{\beta^2+\left(x-\frac{y^2}{x}\right)^2} F(x)\,dx = F(y). \qquad (А)$$

Для нахождения не зависящего от параметра β решения уравнения (А) разложим его ядро в следующий формальный ряд по степеням β:

$$\frac{2}{\pi}\frac{\beta}{\beta^2+z^2} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-\beta u}\cos zu\,du = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}K_n(z)\beta^n, \qquad (Б)$$

где

$$K_n(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty u^n \cos zu\,du, \qquad (В)$$

а

$$z = x - \frac{y^2}{x}.$$

Подставляя разложение (Б) в уравнение (А) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях β, получим систему уравнений

$$2\int_0^\infty K_n(z)F(x)\,dx = \delta_{0n}F(y), \qquad (Г)$$

где δ_{0n} — символ Кронекера.

Если n чётно, то правая часть (В) с точностью до знака равна n-й производной дираковской δ-функции

$$K_{2m}(z) = (-1)^m\,\delta^{(2m)}(z).$$

Поэтому, переходя в левых частях уравнений (Г) от переменной интегрирования x к переменной интегрирования z (при $y = \text{const}$), мы можем для чётных n переписать эти уравнения в виде

$$\left\{\frac{d^n}{dz^n}[gF(x)]\right\} = \frac{1}{2}\delta_{0n}F(y), \qquad (Д)$$

где

$$g = \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y = \frac{x^2}{x^2+y^2},$$

а фигурная скобка означает, что положено $z = 0$, т. е. $x = y$.

При $n = 0$ уравнение (Д) выполняется автоматически, так как $\{g\} = \frac{1}{2}$.

При $n = 2$, снова переходя к переменной x, мы будем иметь:

$$\left\{\frac{d}{dx}\left[g\frac{d}{dx}(gF)\right]\right\} = 0,$$

или

$$\{g^2\}F'' + 3\{gg'\}F' + \{g'^2 + gg''\}F = 0,$$

где штрих, как обычно, означает производную по x. Но

$$\{g\} = \frac{1}{2}; \qquad \{g'\} = \frac{1}{x}; \qquad \{g''\} = -\frac{1}{2x^2},$$

так что окончательно $F'' + \frac{3}{x} F' = 0$ и, следовательно,

$$F(x) = C_1 + \frac{C_2}{x^2}, \tag{E}$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные. Легко проверить, что (E) действительно удовлетворяет исходному уравнению (A).

Формальный приём, с помощью которого мы сейчас нашли решение уравнения (A), ни в коей мере не может, конечно, претендовать на математическую строгость. Однако он имеет, как нам кажется, некоторую эвристическую ценность, так как позволяет довольно быстро находить решения интегральных уравнений, ядра которых $G(\beta, x, y)$ могут быть представлены в виде ряда по несобственным функциям от какой-нибудь комбинации переменных x и y, соответствующей области нерегулярности ядра.

М. Л. Левин

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Г. С. Горелик, УФН **44**, 33 (1951).
2. В. Л. Гинзбург, УФН **46**, 348 (1952).
3. Л. Ландау и Е. Лифшиц, Статистическая физика, Гостехиздат, 1951.
4. H. Nyquist Phys. Rev. **32**, 110 (1928).
5. R. Burgess, Proc. Phys. Soc. **53**, 1, 293 (1941).
6. Л. И. Мандельштам, Полн. собр. Трудов, том 2, АН СССР, 1947.
7. М. А. Леонтович и С. М. Рытов, ЖЭТФ **23**, 246 (1952).
8. В. Л. Грановский, Электрические флуктуации, ОНТИ, 1936.
9. С. Гольдман, Гармонический анализ, модуляция и шумы, ИЛ, 1951.