

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

УСТРАНЕНИЕ РАСХОДИМОСТЕЙ В КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

А. Ахиезер и Р. Половин

1. ВВЕДЕНИЕ

1. Объясняя и предсказывая огромный круг явлений, квантовая электродинамика приводит, однако, к целому ряду характерных трудностей — бесконечным собственным энергиям электрона и фотона и расходящимся выражениям для высших приближений теории возмущений. Эти расходимости возникают при учёте взаимодействия электрона и фотона с нулевыми колебаниями электромагнитного и электронно-позитронного полей.

Развитая в последние годы новая релятивистски-инвариантная форма теории возмущений привела к значительному прогрессу квантовой электродинамики. Она дала возможность произвести классификацию встречающихся в теории расходимостей и привела к выводу, что независимо от степени приближения теории возмущений существуют только три основных типа расходимостей, связанных с собственными энергиями электрона и фотона во втором приближении теории возмущений и с рассеянием электрона во внешнем поле, сопровождающимся испусканием и последующим поглощением виртуального фотона.

В достаточно высоких приближениях теории возмущений могут появляться очень сложные бесконечные выражения, но чрезвычайно существенно то, что всегда эти расходимости можно представить в виде комбинации указанных выше трёх простейших типов расходимостей.

Возможность классификации расходимостей представляет собой очень важный результат теории, но новый этап в развитии квантовой электродинамики связан не только с установлением классификации расходимостей, но и с установлением общих правил, дающих возможность однозначным образом устранять эти расходимости.

Формулировка этих правил — так называемых правил регуляризации — основывается на новой идее о перенормировке массы и заряда электрона.

Эта идея заключается в следующем. Взаимодействие электрона с нулевыми колебаниями электромагнитного и электронно-позитронного полей*) приводит к расходящейся добавке к энергии электрона. Эта добавка к энергии эквивалентна некоторой добавке к массе электрона, которая называется электромагнитной массой электрона.

Процесс регуляризации состоит в том, что мы не учитываем этой добавки, считая, что она для свободного электрона уже включена в его массу. Таким образом, мы как бы производим перенормировку массы электрона.

Энергия взаимодействия связанного в атоме электрона с нулевыми колебаниями электромагнитного и электронно-позитронного полей также оказывается бесконечной, но её уже нельзя отбрасывать. Напротив, оказывается, что разность энергий взаимодействия связанного и свободного электронов с нулевыми колебаниями электромагнитного и электронно-позитронного полей представляет собой конечную величину. Эта разность, которая может быть однозначным образом определена, представляет собой радиационное смещение уровней энергии электрона в атоме.

Аналогичным образом обстоит дело с зарядом электрона. Благодаря взаимодействию заряда с нулевыми колебаниями электронно-позитронного и электромагнитного полей**) он приобретает бесконечную добавку. Процесс регуляризации состоит в том, что мы не учитываем этой добавки, считая, что она неотделима от самого заряда. Таким образом мы как бы производим перенормировку заряда электрона.

Важнейшим результатом теории является то, что устранение всех встречающихся в квантовой электродинамике расходимостей достигается, в сущности говоря, перенормировкой двух констант — массы и заряда электрона.

Установление правил регуляризации сделало возможным вычисление высших приближений теории возмущений — так называемых радиационных поправок. Таким образом нашли объяснение обнаруженные на опыте радиационное смещение уровней атома водорода и аномальный магнитный момент электрона. В этих эффектах замечательным образом проявляется взаимодействие электромагнитного поля с «вакуумом» электронно-позитронного поля и взаимодействие электронов с «вакуумом» электромагнитного поля.

Радиационное смещение атомных уровней, дополнительный магнитный момент электрона и радиационные поправки к рассеянию электрона показывают, что «вакуум» обладает физическими свойствами и что его нельзя рассматривать как метафизическое «пустое» про-

*) В первом приближении следует учитывать только взаимодействие электрона с нулевыми колебаниями электромагнитного поля.

**) В первом приближении следует учитывать только взаимодействие заряда с нулевыми колебаниями электронно-позитронного поля.

странство. Развитие представления о физическом вакууме является существенным результатом современной квантовой электродинамики.

В эффектах, связанных с взаимодействием электронно-позитронного и электромагнитного полей с «вакуумом», нашёл новое подтверждение известный тезис Ленина о неисчерпаемости свойств электрона.

Правила регуляризации не могут быть пока строго выведены из основных уравнений, описывающих электромагнитное и электронно-позитронное поля. Однако можно сказать, что аппарат современной квантовой электродинамики даёт возможность однозначно выделять из расходящихся выражений конечные значения, имеющие физический смысл.

В настоящей статье излагаются идеи и методы устранения расходимостей в квантовой электродинамике. Так как вероятности различных процессов естественнее всего определять с помощью матрицы рассеяния, то далее излагаются методы устранения расходимостей из матрицы рассеяния.

2. Напомним прежде всего некоторые общие свойства матрицы рассеяния *).

Матрицу рассеяния S можно разложить в ряд по степеням заряда электрона e :

$$S = \sum_n S^{(n)};$$

n -й член в этом разложении, пропорциональный e^n , описывает все процессы n -го порядка. Матричный элемент $S^{(n)}$, отвечающий какому-либо процессу $i \rightarrow f$, может быть представлен в виде

$$S_{i \rightarrow f}^{(n)} = \sum_n M_{i \rightarrow f}^{(n)}, \quad (1.1)$$

где отдельные члены в сумме отличаются друг от друга расположением операторов испускания и поглощения частиц. Эти члены можно, как известно, изображать графически, причём графики, соответствующие $M_{i \rightarrow f}^{(n)}$, топологически эквивалентны и отличаются друг от друга только порядком раскладки электронных и фотонных линий.

Чтобы определить величину $M_{i \rightarrow f}^{(n)}$, соответствующую какому-либо графику, нужно помнить следующие правила³:

1) Каждой внешней электронной линии соответствует спинор одного из типов u , $\bar{u}$, v , $\bar{v}$, причём u и $\bar{u}$ соответствуют поглощению и испусканию электрона, а $\bar{v}$ и v — поглощению и испусканию позитрона. Четырёхмерный импульс позитрона равен взятому с обратным знаком четырёхмерному импульсу, определяющему спинор v (v соответствует плоской волне с отрицательной частотой).

*) См. обзор¹.

2) Каждой внешней фотонной линии, изображающей фотон с частотой ω и поляризацией $\hat{e}$, соответствует оператор $\frac{\hat{e}}{\sqrt{2\omega}}$ *). Каждой внешней фотонной линии, изображающей внешнее электромагнитное поле $A_\mu(x)$, соответствует оператор $\frac{1}{(2\pi)^4} \hat{a}(q)$, где

$$\hat{a}(q) = \int \hat{A}(x) e^{-iqx} d^4x.$$

3) Каждой внутренней электронной линии соответствует оператор $\frac{\hat{i}p - m}{p^2 + m^2}$, где p — четырёхмерный импульс, связанный с линией, и m — масса электрона. (Внутренней электронной линии соответствует функция $\frac{1}{2} S^F = - \frac{i}{(2\pi)^4} \frac{\hat{i}p - m}{p^2 + m^2}$.)

4) Каждой внутренней фотонной линии с импульсом k соответствует множитель $\frac{1}{k^2}$, а её концам — операторы γ_ν . (Внутренней фотонной линии соответствует функция $\frac{1}{2} D^F = - \frac{i}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2}$.)

5) Каждой вершине графика соответствует $\delta(\Sigma p)$, содержащая импульсы всех линий, сходящихся в эту вершину (импульсы на обоих концах внутренней линии следует брать с противоположными знаками).

6) Все операторы (действующие на спинорные индексы) располагаются справа налево в такой последовательности, в которой они встречаются, если двигаться по направлению электронной линии.

7) Если график содержит замкнутую электронную петлю, то в выражение $M_i^{(n)} \rightarrow f$ входит след (шпур) произведения матриц $\frac{\hat{i}p - m}{p^2 + m^2}$ и γ_ν , относящихся к отдельным линиям петли и её вершинам.

*) Если $a_\mu(a, ia_0)$ — некоторый четырёхмерный вектор, то $\hat{a} = a_\mu \gamma_\mu$, где γ_μ — дираковские матрицы, удовлетворяющие условиям $\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2\delta_{\mu\nu}$. Под скалярным произведением двух векторов a и b мы понимаем величину $ab = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - a_0 b_0$. Скорость света c и постоянная Планка $\hbar$ считаются всюду равными единице.

Матричные элементы графиков, содержащих одну или несколько замкнутых электронных петель с нечётным числом электронных линий, равны нулю (теорема Фарри).

8) По четырёхмерным импульсам внутренних линий, изображающих виртуальные*) частицы, и по переменным q производится интегрирование, а по четырёхмерным поляризациям виртуальных фотонов — суммирование.

9) Численный множитель, стоящий перед общим выражением для $M_i^{(n)} \rightarrow f$, равен $\pm \xi e^n (-i)^F (2\pi)^4 (n-F)$, где $\xi = \frac{r}{n!}$, F — общее число внутренних линий, r — число подобных членов, соответствующих $M_i^{(n)} \rightarrow f$ в $S^{(n)}$ (знак следует находить в соответствии с правилом перестановки электронно-позитронных операторов).

В качестве иллюстрации этих правил определим матричный элемент для рассеяния электрона во внешнем поле с испусканием и поглощением виртуального фотона. Этот процесс изображается графиком 2 на рис. 1. В общую формулу (1.1) для $S_i^{(n)} \rightarrow f$ входит в этом

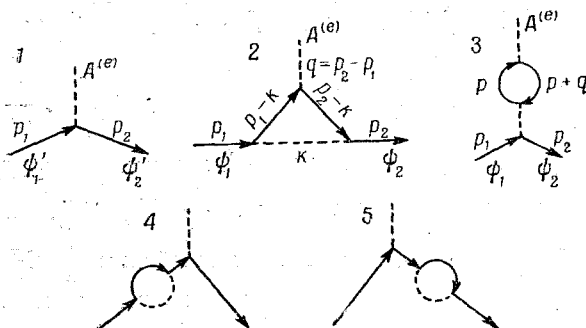


Рис. 1.

случае только одно слагаемое $M_i^{(n)} \rightarrow f$, которое согласно изложенным правилам может быть представлено в виде

$$M_i^{(n)} \rightarrow f = (-i)^3 e^3 \bar{u}_2 \left(\int \gamma_\nu \frac{i (\hat{p}_2 - \hat{k}) - m}{(p_2 - k)^2 + m^2} \frac{\hat{a}(q)}{(2\pi)^4} \times \right. \\ \left. \times \frac{i (\hat{p}_1 - \hat{k}) - m}{(p_1 - k)^2 + m^2} \gamma_\nu \frac{d^4 k}{k^2} \right) u_1, \quad (1.2)$$

где u_1 и u_2 — спинорные амплитуды, относящиеся к четырёхмерным импульсам p_1 и p_2 электрона до и после рассеяния, $q = p_2 - p_1$. Вхо-

*) Импульс виртуального электрона в отличие от реального электрона не удовлетворяет соотношению $p^2 + m^2 = 0$, а импульс виртуального фотона в отличие от реального фотона не удовлетворяет соотношению $p^2 = 0$.

дящие в выражение для $M_i^{(3)} \rightarrow f$ три четырёхмерные δ -функции мы устранили интегрированием по q и по импульсам внутренних электронных линий и заменили при этом q на $p_2 - p_1$ и импульсы внутренних электронных линий на $p_1 - k$ и $p_2 - k$. По этой причине интегрирование в (1.2) производится только по четырёхмерному импульсу виртуального фотона k . В (1.2) производится также суммирование по состояниям поляризации виртуального фотона, т. е. по четырём значениям индекса ν .

3. Можно показать, что в общем случае $M_i^{(n)} \rightarrow f$ определяется следующим интегралом в импульсном пространстве:

$$M_i^{(n)} \rightarrow f = \pm \xi e^n (-i)^F (2\pi)^{4(n-F)} \int d^4 p_1 \dots d^4 p_{F_e} \int d^4 k_1 \dots d^4 k_{F_p} \times \\ \times \int d^4 q_1 \dots d^4 q_s \cdot \sum_{\nu} \prod_1^n \delta(\Sigma_p) O \left\{ \prod \left(u(p_i) \bar{v}(p_i) \frac{\hat{e}_i}{\sqrt{2\omega_i}} \right) \times \right. \\ \times \prod \left(\bar{u}(p_f) v(p_f) \frac{\hat{e}_f}{\sqrt{2\omega_f}} \right) \cdot \prod_1^s \frac{\hat{a}(q)}{(2\pi)^4} \prod_1^{F_e} \left(\frac{i \hat{p} - m}{p^2 + m^2} \right) \times \\ \left. \times \prod_1^{F_p} \gamma_{\nu} \frac{1}{k^2} \gamma_{\nu} \right\}, \quad (1.3)$$

где интегрирование производится по $4F_e$ переменным $p_1, p_2, \dots, p_{F_e}$, происходящим от множителей типа $\frac{1}{2} S^F$, $4F_p$ переменным $k_1, k_2, \dots, k_{F_p}$, происходящим от множителей типа $\frac{1}{2} D^F$, а также по $4S$ переменным $q_1, \dots, q_s$, происходящим от разложения внешних потенциалов в интеграл Фурье. Можно сказать, что интегрирование производится по четырёхмерным импульсам виртуальных частиц (F_e и F_p — числа внутренних электронных и фотонных линий, т. е. числа виртуальных электронов и фотонов; $F_e + F_p = F$), а также по переменным q . Суммирование производится по четырём значениям индексов ν , обозначающим различные поляризации виртуальных фотонов, причём каждому виртуальному фотону соответствует определённый индекс ν , принимающий значения $\nu = 1, 2, 3, 4$.

Отдельные множители в (1.3) имеют следующее значение.

$\prod \left(u(p_i) \bar{v}(p_i) \frac{\hat{e}_i}{\sqrt{2\omega_i}} \right)$ обозначает произведение спиноров u , $\bar{v}$ и операторов $\frac{\hat{e}_i}{\sqrt{2\omega_i}}$, описывающих электроны, позитроны и фотоны в начальном состоянии i (p_i — четырёхмерный импульс электрона или позитрона, e_i — единичный вектор поляризации фотона с импульсом

$k_f, \hat{e} = e_\mu \gamma_\mu$); $\Pi \left(\bar{u}(p_f) v(p_f) \frac{\hat{e}_f}{\sqrt{2\omega_f}} \right)$ обозначает аналогичное произведение для конечного состояния f .

Множители $\frac{i\hat{p} - m}{p^2 + m^2}$ ($\hat{p} = p_\mu \gamma_\mu$) и $\gamma_\mu \frac{1}{k^2} \gamma_\mu$ происходят от связей электронных и фотонных операторов, причём число первых равно F_e , а вторых — F_p .

Численный множитель $\xi = \frac{r}{n!}$ учитывает наличие r эквивалентных нормальных (N) произведений интересующего нас типа в разложении $S^{(n)}$ на N -произведения*). Все они, как легко показать, имеют одинаковый знак и вносят поэтому одинаковый вклад в $M_i^{(n)} \rightarrow f$.

Отдельные слагаемые в (1.3) могут иметь разные знаки. Знак $\pm$, стоящий в правой части (1.3), может быть просто определён в каждом конкретном случае в соответствии с правилом перестановки электронных операторов.

Наконец, символ O служит для обозначения определённого порядка в расположении операторов в (1.3), а именно, операторы (действующие на спинорные индексы) должны быть расположены, считая справа налево, в такой последовательности, в какой они встречаются, если двигаться по направлению электронной линии графика.

2. СТРУКТУРА ГРАФИКОВ

1. Импульсное представление матрицы рассеяния даёт возможность произвести общее исследование особенностей её матричных элементов. Переходя к рассмотрению этого вопроса, мы сделаем предварительно несколько общих замечаний о структуре графиков, изображающих матричные элементы.

Если график содержит несколько не связанных между собой частей, то он изображает, очевидно, такое же число не связанных между собой процессов рассеяния. Соответствующий графику матричный элемент распадается при этом на ряд отдельных множителей, которые представляют собой матричные элементы, соответствующие отдельным процессам рассеяния. Ясно, что достаточно ограничиться изучением таких матричных элементов и графиков, которые не распадаются на отдельные, не связанные между собой части.

*) В N -произведении справа стоят операторы поглощения, а слева — операторы испускания частиц.

Во многих случаях график может содержать одну или несколько частей, которые связаны с остальными частями графика только двумя однородными (т. е. электронными или фотонными) линиями. Такие части мы будем называть частями собственной энергии *).

Часть графика, связанную с остальными частями только двумя электронными линиями, будем называть частью собственной энергии электрона.

Часть графика, связанную с остальными частями только двумя электронными линиями, будем называть частью собственной энергии фотона.

Если в графике может быть выделена часть, которая связана с остальными частями только двумя электронными и одной фотонной линиями, то такую часть мы будем называть вершинной или угловой частью.

Схематически эти части графиков изображены на рис. 2, на

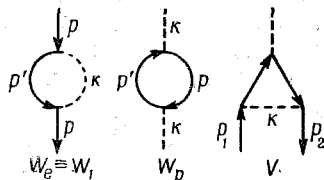
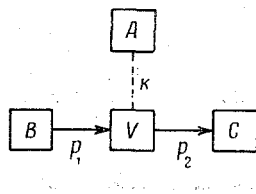
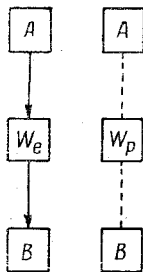


Рис. 2.

Рис. 3.

котором они обозначены соответственно через W_e , W_p , V (квадратиками A , B , C обозначены остальные части графика). Простейшие структуры W_e , W_p и V представлены на рис. 3.

Мы будем различать две группы частей графиков, соответствующих собственной энергии, вершинным частям и другим внутренним частям графика: приводимые и неприводимые части.

Неприводимой будем называть такую часть, которая не может быть разделена на части, соединённые между собой только одной линией и которая не содержит внутри себя частей собственной энергии и вершинных частей. В противном случае мы называем

*) Это название связано с тем, что части собственной энергии описывают взаимодействие электрона с нулевыми колебаниями электромагнитного поля и взаимодействие фотона с нулевыми колебаниями электропозитронного поля; см. ниже.

часть собственной энергии, вершинную часть или другую внутреннюю часть графика приводимой.

На рис. 4 изображены части собственной энергии электрона второго и четвертого порядков.

График 1 является неприводимым, остальные графики приводимые. Из них график 2 разделяется на две части собственной энергии, которые соединены между собой одной электронной линией;

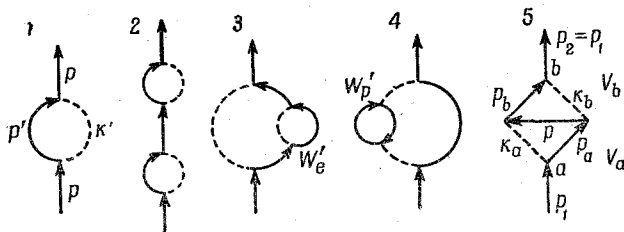


Рис. 4.

график 3 содержит часть собственной энергии электрона W'_e ; график 4 содержит часть собственной энергии фотона W'_p ; график 5 содержит вершинную часть V_a в вершине a и вершинную часть V_b в вершине b (к V_a относятся внутренняя фотонная линия k_a и внутренние электронные линии p_a и p ; фотонная линия k_b и электронные линии p_b и p_1 являются внешними по отношению к V_a ; аналогичным образом к V_b относятся внутренняя фотонная линия k_b и внутренние электронные линии p_b и p ; фотонная линия k_a и электронные линии p_a и p_2 являются внешними по отношению к V_b).

Легко убедиться, что график 1 представляет собой единственный неприводимый график собственной энергии электрона.

На рис. 5 изображены части собственной энергии фотона второго и четвертого порядков.

График 1 является неприводимым, остальные графики — приводимые. Легко убедиться, что график 1, изображенный на рис. 5, представляет собой единственный неприводимый график собственной энергии фотона.

2. Целесообразность выделения частей собственной энергии и вершинных частей и отдельного их изучения связана с тем, что в общем выражении (1.3) для $M_{i \rightarrow f}^{(n)}$ частям собственной энергии и вершинным частям соответствуют отдельные множители, которые не зависят от структуры остальных частей графика (т. е. от структуры квадратиков A , B , C на рис. 2) и поэтому, если их вычислить заранее, то ими можно пользоваться при определении матричных элементов многих процессов.

При этом графики могут быть заменены некоторыми «эквивалентными» графиками-скелетами, не содержащими частей собствен-

ной энергии и вершинных частей, но с модифицированными выражениями для связей операторов и других величин, относящихся к линиям и вершинам графика, из которых удалены части собственной энергии и вершинные части.

Скелетные графики изображены на рис. 6.

Электронной линии, соединяющей A и B , из которой удалена часть собственной энергии электрона, соответствует теперь не $\frac{1}{2} S^F$,

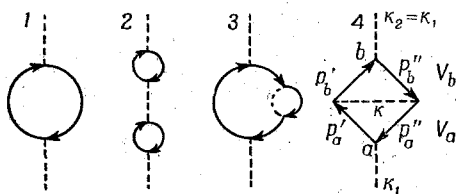


Рис. 5.

а некоторый другой оператор $\frac{1}{2} \delta S^F$, зависящий от импульса p электронной линии и от конкретного вида части собственной энергии электрона W_e . Если W_e представляет собой неприводимую

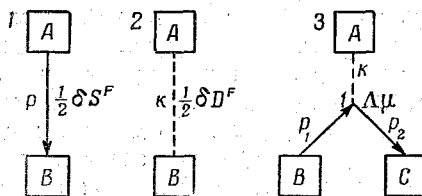


Рис. 6.

часть собственной энергии электрона, изображённую на рис. 3, то $\frac{1}{2} \delta S^F(p)$ согласно (1.3) можно представить в виде

$$\frac{1}{2} \delta S^F(p) = \frac{e^2}{(2\pi)^8} \frac{i \hat{p} - m}{p^2 + m^2} \left(\int \gamma \cdot \frac{i(\hat{p} - \hat{k}) - m}{(p - k)^2 + m^2} \gamma \cdot \frac{d^4 k}{k^2} \right) \frac{i \hat{p} - m}{p^2 + m^2}. \quad (2.1)$$

Таким образом*),

$$\frac{1}{2} \delta S^F(p) = \frac{1}{2} S^F(p) \Sigma(W_e, p) \frac{1}{2} S^F(p), \quad (2.2)$$

*) Напомним, что

$$\frac{1}{2} S^F(p) = - \frac{i}{(2\pi)^4} \frac{i \hat{p} - m}{p^2 + m^2}.$$

где

$$\Sigma(W_e, p) = e^2 \Sigma^{(2)}(W_e, p) = -e^2 \int \gamma_\nu \frac{i(\hat{p} - \hat{k}) - m}{(p-k)^2 + m^2} \gamma_\nu \frac{d^4 k}{k^2}. \quad (2.3)$$

Эта формула справедлива для неприводимой части собственной энергии электрона, но $\frac{1}{2} \delta S^F$ всегда можно представить в виде (2.3), где $\Sigma(W_e, p)$ будет определяться более сложной, нежели (2.3), формулой, зависящей от конкретной структуры собственной энергии электрона W_e .

Обратим внимание на то обстоятельство, что интеграл (2.3) линейно расходится в области больших импульсов k .

Если часть графика A отсутствует, т. е. электронная линия, соединяющая W_e с A , изображает свободный электрон или позитрон, то электронной линии с изъятой частью собственной энергии электрона будет соответствовать не спинор $u(p)$, а модифицированный спинор $\bar{u}(p)$, имеющий вид

$$\bar{u}(p) = \frac{1}{2} S^F(p) \Sigma(W_e, p) u(p), \quad (2.4)$$

где $\Sigma(W_e, p)$ — тот же оператор, который входит в (2.2). Аналогичным образом, спинор $\bar{u}(p)$ должен быть заменён на скелетном графике спинором

$$\bar{u}(p) = \bar{u}(p) \Sigma(W_e, p) \frac{1}{2} S^F(p). \quad (2.4')$$

Такие же формулы справедливы для спиноров v и $\bar{v}$.

Фотонной линии, соединяющей A и B , на скелетном графике соответствует не $\frac{1}{2} D^F$, а некоторая другая функция $\frac{1}{2} \delta D^F$, зависящая от импульса k фотонной линии и конкретного вида части собственной энергии фотона W_p .

Если W_p представляет собой неприводимую часть собственной энергии фотона, изображённую на рис. 3, то $\frac{1}{2} \delta D^F$ можно согласно (1.3) представить в виде

$$\frac{1}{2} \delta D^F(k) = -\frac{1}{2} \frac{e^2}{(2\pi)^3} \frac{1}{k^2} \int \text{Spur} \left\{ \gamma_\nu \frac{i\hat{n} - m}{p^2 + m^2} \gamma_\nu \frac{i(\hat{p} + \hat{k}) - m}{(p+k)^2 + m^2} \right\} \frac{d^4 p}{k^2}.$$

Таким образом*),

$$\frac{1}{2} \delta D^F(k) = \frac{1}{2} D^F(k) \Pi(W_p, k) \frac{1}{2} D^F(k), \quad (2.5)$$

*) Напомним, что

$$\frac{1}{2} D^F(p) = -\frac{i}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2}.$$

где

$$\Pi(W_p, k) = e^2 \Pi^{(2)}(W_p, k) = \\ = \frac{1}{2} e^2 \int \text{Spur} \left\{ \gamma_\nu \frac{i \hat{p} - m}{p^2 + m^2} \gamma_\nu \frac{i (\hat{p} + \hat{k}) - m}{(p+k)^2 + m^2} \right\} d^4 p. \quad (2.6)$$

Эта формула справедлива для неприводимой части собственной энергии фотона, но $\frac{1}{2} \delta D^F(k)$ всегда можно представить в виде (2.5), где $\Pi(W_p, k)$ будет определяться более сложной, нежели (2.6), формулой, зависящей от конкретной структуры части собственной энергии фотона W_p .

Обратим внимание на то обстоятельство, что интеграл (2.6) квадратично расходится в области больших импульсов p .

Если часть графика A отсутствует, т. е. фотонная линия, соединяющая W_p с A , изображает свободный фотон или внешнее электромагнитное поле, то фотонной линии с изъятой частью собственной энергии фотона будет соответствовать не оператор $\hat{A}(k)$, а модифицированный оператор $\delta \hat{A}(k)$, имеющий вид

$$\delta \hat{A}(k) = \hat{A}(k) \Pi(W_p, k) \frac{1}{2} D^F(p), \quad (2.7)$$

где Π та же величина, которая входит в (2.5).

Наконец, если график содержит вершинную часть, то точке I скелетного графика (см. график 3 рис. 6) будет соответствовать не матрица γ_μ , а некоторый другой оператор Λ_μ , зависящий от вида вершинной части V и импульсов электронных линий p_1 и p_2 , подходящих к точке I .

В случае неприводимой вершинной части третьего порядка, изображённой на рис. 3, оператор Λ_μ согласно (1.3) может быть представлен в виде

$$\Lambda_\mu(V, p_1, p_2) = e^3 \Lambda_\mu^{(3)}(V, p_1, p_2) = \\ = \frac{ie^3}{(2\pi)^4} \int \gamma_\nu \frac{i (\hat{p}_2 - \hat{k}) - m}{(p_2 - k)^2 + m^2} \gamma_\mu \frac{i (\hat{p}_1 - \hat{k}) - m}{(p_1 - k)^2 + m^2} \gamma_\nu \frac{d^4 k}{k^2}. \quad (2.8)$$

Мы видим, что Λ_μ выражается интегралом, который логарифмически расходится в области больших k .

Итак, если график содержит части собственной энергии и вершинные части, то его матричный элемент может быть получен из матричного элемента скелетного графика, если в соответствующую

щих местах последнего сделать замену:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} S^F &\rightarrow \frac{1}{2} \delta S^F, \quad \frac{1}{2} D^F \rightarrow \frac{1}{2} \delta D^F, \\ u, v &\rightarrow \delta u, \delta v; \quad \bar{u}, \bar{v} \rightarrow \delta \bar{u}, \delta \bar{v}, \\ A_\mu &\rightarrow \delta A_\mu, \quad \gamma_\mu \rightarrow \Lambda_\mu. \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

3. Естественно, что изучение внутренних, вставных частей графика не следует ограничивать рассмотренными только что частями собственной энергии и вершинными частями: нужно изучать также части графика, которые связаны с остальными частями большим числом линий, чем в рассмотренных случаях. При этом следует, однако, иметь в виду, что если график содержит некоторую часть, связанную с остальными частями только нечётным числом фотонных линий, то соответствующий ему матричный элемент равен нулю (теорема Фарри).

При анализе особенностей матрицы рассеяния существенны, помимо частей собственной энергии и вершинных частей, те части графика, которые связаны с остальными частями только четырьмя фотонными линиями. Простейший вид такой части графика изображён на рис. 7.

Мы будем называть её частью рассеяния фотона фотоном, так как если части A, B, C, D отсутствуют, то этот график изображает рассеяние фотона фотоном.

Части собственной энергии и вершинные части приводят к расходящимся матричным элемен-

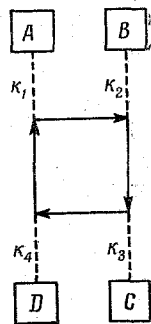


Рис. 7.

там, так как операторы δS^F , Λ_μ , δA_μ , а также спиноры δu и $\delta \bar{u}$ и функция δD^F выражаются интегралами, которые расходятся в области больших импульсов виртуальных частиц *).

Наша основная дальнейшая задача состоит в устранении этих расходимостей, возникающих при интегрировании в области больших импульсов виртуальных частиц, и выделении из расходящихся матричных элементов конечных величин, имеющих физический смысл.

Заметим, что в ряде вопросов возникает расходимость в области малых импульсов. Эта расходимость, известная под названием инфракрасной катастрофы, связана с неприменимостью теории возмущений и может быть сравнительно просто устранена. Поэтому мы ниже рассматриваем только расходимости в области больших импульсов виртуальных частиц.

*) Напомним, что виртуальные частицы связаны с внутренними линиями графиков и что временная часть их четырёхмерного «импульса» не связана с пространственной частью.

3. КЛАССИФИКАЦИЯ РАСХОДИМОСТЕЙ

1. Прежде чем переходить к решению поставленной задачи, мы выясним характер возникающих расходимостей. Заметим, что при достаточно сложной структуре частей собственной энергии и вершинных частей в матричном элементе появятся расходящиеся множители, которые могут, вообще говоря, привести к бесконечности сколь угодно высокого порядка. Если, например, часть собственной энергии, изображённая на графике 1 рис. 4, приводит к некоторой бесконечности, которую мы будем условно считать бесконечностью первого порядка, то часть собственной энергии, изображённая на графике 2 рис. 4, приведёт, очевидно, к бесконечности второго порядка.

Отсюда следует, что прежде всего надлежит изучить расходимости, которые возникают от неприводимых внутренних частей графика (т. е. неприводимых частей собственной энергии и вершинных частей). Мы покажем сейчас, что неприводимые внутренние части графиков приводят всего к четырём видам расходимостей матричных элементов.

Обозначим через n число вершин неприводимой внутренней части графика, через F — число её внутренних линий и через N — число внешних линий этой части, соединяющих её с остальными частями графика (т. е. с квадратиками A, B, C на рис. 2). Пусть N_e обозначает при этом число внешних электронных, а N_p — число внешних фотонных линий, $N = N_e + N_p$. Рассмотрим часть общего матричного элемента, связанную с переменными, относящимися к рассматриваемой внутренней части графика. Эта часть матричного элемента представляет собой, очевидно, интеграл по $4F$ переменным — импульсам внутренних линий неприводимой внутренней части графика. Импульсы N внешних линий будут входить в этот интеграл как постоянные параметры.

Так как подинтегральное выражение содержит n четырёхмерных δ -функций, то не все из $4F$ переменных интегрирования будут независимыми. Мы можем, очевидно, устранить только $n - 1$ из этих δ -функций интегрированием по $4(n - 1)$ переменным, но должны сохранить одну четырёхмерную δ -функцию, которая будет выражать закон сохранения четырёхмерного импульса для рассматриваемой части графика. Этот закон сохранения выражает связь между импульсами линий, соединяющих части собственной энергии W_e, W_p и вершинные части V с остальными частями графика. Поэтому можно утверждать, что независимых переменных интегрирования будет $4(F - n + 1)$.

Подинтегральное выражение представляет собой, очевидно, рациональную функцию, причём согласно (1.3) степень числителя будет F_e , а знаменателя $2F$ (F_e — число внутренних электронных линий).

Так как наш график является неприводимым, то подинтегральное выражение не распадается на отдельные множители, содержащие не связанные между собой переменные, и расходимость интеграла в области больших импульсов определяется разностью степеней числителя и знаменателя или, выражаясь точнее, величиной

$$K = 2F - F_e - 4(F - n + 1).$$

Если $K \geq 1$, то интеграл сходится; при $K = 0$ интеграл расходится логарифмически; при $K = -1$ линейно; при $K = -2$ квадратично и т. д.

Так как через каждую точку графика проходят две электронные и одна фотонная линии, то, очевидно,

$$2F_e + N_e = 2n, \quad 2F_p + N_p = n,$$

откуда следует, что

$$K = \frac{3}{2}N_e + N_p - 4. \quad (3.1)$$

2. Соотношение (3.1) даёт возможность перечислить все возможные случаи расходимости неприводимых внутренних частей графиков. Существует, очевидно, семь типов расходимостей, возникающих при следующих значениях чисел N_e и N_p :

- 1) $N_e = 2, N_p = 0, K = -1$, — линейная расходимость;
- 2) $N_e = 2, N_p = 1, K = 0$, — логарифмическая расходимость;
- 3) $N_e = 0, N_p = 1, K = -3$, — кубическая расходимость;
- 4) $N_e = 0, N_p = 2, K = -2$, — квадратичная расходимость;
- 5) $N_e = 0, N_p = 3, K = -1$, — линейная расходимость;
- 6) $N_e = 0, N_p = 4, K = 0$, — логарифмическая расходимость;
- 7) $N_e = 0, N_p = 0, K = -4$, — расходимость четвёртого порядка.

На рис. 8 изображены простейшие неприводимые графики, соответствующие этим расходимостям.

Напомним, что существует только один неприводимый график собственной энергии электрона и один неприводимый график собственной энергии фотона; неприводимых графиков вершинной части и части рассеяния фотона фотоном может быть сколько угодно (на рис. 8 изображены простейшие графики этих типов).

Пользуясь теоремой Фарри, мы можем сразу исключить из рассмотрения случаи 3) и 5), так как в этих случаях внутренние части графиков соединяются с остальными частями нечётным числом фотонных линий и соответствующие графикам матричные элементы равны нулю.

Далее, не имеет, очевидно, физического смысла случай 7), так как здесь внутренняя часть графика вообще не связана с его остальными частями. График 7 описывает, очевидно, переход вакуум — вакуум в отсутствие внешних полей во втором приближении,

рассеяние
малых
фотон.
переход
см. стр. 7

а соответствующий ему матричный элемент определяет поправку второго порядка к амплитуде этого перехода. С другой стороны, очевидно, что вероятность перехода вакуум — вакуум в отсутствии

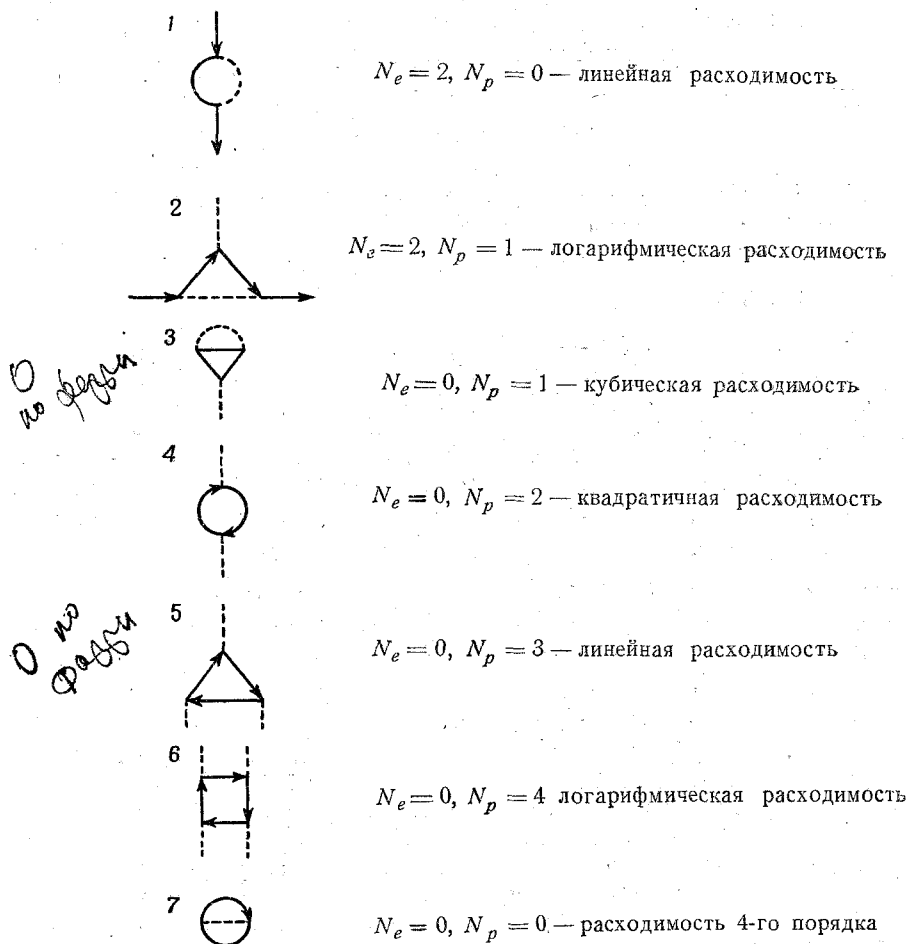


Рис. 8.

полей равна единице и поэтому все поправки к ней следует считать равными нулю.

Что касается рассеяния фотона фотоном, то, как можно показать непосредственным расчётом, по крайней мере в наинизшем (четвёртом) приближении сумма матричных элементов, соответствующих различным графикам рассеяния фотона фотоном (они отли-

чаются порядком расположения фотонных линий), не содержит расходимости. Поэтому можно утверждать, что реально существует только три типа расходимостей, связанных с неприводимыми частями собственной энергии электрона и фотона и неприводимыми вершинными частями. К исследованиям этих расходимостей мы теперь и перейдём.

4. УСТРАНЕНИЕ РАСХОДИМОСТЕЙ ИЗ МАТРИЦЫ РАССЕЯНИЯ

1. Поставим теперь следующий вопрос: можно ли устранить расходимости из матрицы рассеяния и однозначным образом выделить из расходящихся матричных элементов конечные выражения, имеющие физический смысл.

Заметим предварительно, что процессы, изображаемые частями собственной энергии, приводят к бесконечным собственным энергиям свободного электрона и фотона*). Чтобы убедиться в этом, рассмотрим взаимодействие свободного электрона с нулевыми колебаниями электромагнитного поля, т. е. с вакуумом электромагнитного поля. Этот процесс изображается, очевидно, графиком 1 рис. 3, т. е. частью собственной энергии электрона. Отличие от общего случая, изображённого на рис. 2, состоит в том, что здесь отсутствуют части A и B и импульс p представляет собой импульс реального электрона, удовлетворяющий соотношению $p^2 + m^2 = 0$.

Пользуясь общими правилами написания матричных элементов, мы получим следующее выражение для матричного элемента, соответствующего рассматриваемому процессу:

$$S_{p \rightarrow p}^{(2)} = -e^2 \bar{u}(p) \left(\int \gamma_\nu \frac{i \hat{p}' - m}{p'^2 + m^2} \gamma_\nu \frac{1}{k^2} \times \right. \\ \left. \times \delta(p - k - p') \delta(p - k - p') d^4 p' d^4 k u(p) \right). \quad (4.1)$$

Устранив одну δ -функцию интегрированием по p' , мы заменим вторую δ -функцию интегралом по четырёхмерному пространству:

$$\delta(q) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{iqx} d^4 x, \quad q = p - k - p'.$$

Так как $q = 0$, то здесь следует считать область интегрирования ограниченной. Предполагая, что пространственный объём равен единице, а интервал изменения времени, т. е. времени взаимодействия электрона с электромагнитным полем, равен Δt , получим сле-

*) По этой причине эти части графиков и называются частями собственной энергии.

дующее выражение для матричного элемента $S_{p \rightarrow p}^{(2)}$:

$$S_{p \rightarrow p}^{(2)} = -\frac{\Delta t e^2}{(2\pi)^4} \bar{u}(p) \left(\int \gamma_\nu \frac{i(\hat{p} - \hat{k}) - m}{(p-k)^2 + m^2} \gamma_\nu \frac{d^4 k}{k^2} \right) u(p).$$

С другой стороны, мы можем считать, что взаимодействие электрона с нулевыми колебаниями электромагнитного поля приводит к изменению энергии электрона. Если это изменение равно $\Delta\varepsilon$, то за время Δt волновая функция электрона изменится на $(e^{-i\Delta\varepsilon\Delta t} - 1)u(p)^3$. Чтобы найти матричный элемент перехода электрона из начального состояния с энергией ε , когда электрон ещё не взаимодействовал с полем, в конечное состояние с энергией $\varepsilon + \Delta\varepsilon$, нужно это выражение умножить на $u^*(p)$ (напомним, что спиноры $u(p)$ и $u^*(p)$ связаны условием нормировки $u^*u = 1$). Предполагая, что $\Delta\varepsilon\Delta t \ll 1$, найдём, что матричный элемент равняется

$$S_{p \rightarrow p}^{(2)} = -i\Delta t \Delta\varepsilon.$$

Сравнение этого выражения с полученным выше показывает, что собственная энергия электрона равна *)

$$\Delta\varepsilon = \frac{ie^2}{(2\pi)^4} \bar{u}(p) \left(\int \gamma_\nu \frac{i(\hat{p} - \hat{k}) - m}{(p-k)^2 + m^2} \gamma_\nu \frac{d^4 k}{k^2} \right) u(p).$$

Это выражение легко привести к эквивалентному изменению массы электрона Δm :

$$\varepsilon\Delta\varepsilon = m\Delta m.$$

Замечая, что из уравнения Дирака вытекает соотношение

$$\varepsilon \bar{u}(p) u(p) = m u^*(p) u(p) = m,$$

получим следующее выражение для изменения массы Δm :

$$\Delta m = -\frac{ie^2}{(2\pi)^4} \frac{1}{uu} \bar{u} \left(\int \gamma_\nu \frac{i(\hat{p} - \hat{k}) - m}{(p-k)^2 + m^2} \gamma_\nu \frac{d^4 k}{k^2} \right) u. \quad (4.2)$$

Эта масса может быть названа электромагнитной массой электрона. Мы видим, что выражение (4.2) линейно расходится в области больших импульсов виртуального фотона, что находится в соответствии с полученными выше результатами о классификации расходимостей **).

Рассмотрим теперь взаимодействие фотона с нулевыми колебаниями, т. е. с вакуумом электронно-позитронного поля. Этот про-

*) ε измеряется здесь в хевисайдовских единицах.

**) Выполнив сперва интегрирование по углам, можно показать, что это выражение в действительности расходится логарифмически.

цесс изображается графиком 2 рис. 3, т. е. частью собственной энергии фотона. Отличие от общего случая, изображённого на рис. 2, состоит в том, что здесь отсутствуют части A и B и импульс k представляет собой импульс реального фотона, удовлетворяющий соотношению $k^2 = 0$.

Пользуясь общими правилами написания матричных элементов и повторяя предыдущие рассуждения, получим следующее выражение для собственной энергии фотона частоты ω , обусловленной его взаимодействием с вакуумом электронно-позитронного поля

$$\Delta\epsilon_p = \frac{e^2}{2\omega} \int \text{Spur} \left\{ \gamma_v \frac{i \hat{p} - m}{p^2 + m^2} \gamma_v \frac{i (\hat{p} - \hat{k}) - m}{(p - k)^2 + m^2} \right\} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4}. \quad (4.3)$$

Это выражение квадратично расходится в области больших импульсов виртуального электрона, что находится в соответствии с полученными выше результатами о классификации расхождений.

2. Итак, части собственной энергии действительно приводят к бесконечным собственным энергиям свободного электрона и фотона.

Наличие этих бесконечных энергий является существенным пороком теории. Однако то обстоятельство, что части графиков, названные нами частями собственной энергии, связаны с бесконечными собственными энергиями свободного электрона и фотона, позволяет установить общий и однозначный приём выделения из расходящихся матричных элементов, содержащих неприводимые части собственной энергии, конечных выражений, имеющих физический смысл. Этот приём основан на том, что собственные энергии свободного электрона и фотона только формально в существующей теории являются бесконечными, в действительности же они равны нулю. Иными словами, когда мы имеем дело со свободным электроном, то его экспериментально определяемая масса m уже включает в себя как составную часть (если таковая имеется вообще) электромагнитную массу. Поэтому нам не нужно учитывать изменения массы электрона Δm , и мы должны наложить физическое требование, чтобы это изменение равнялось нулю, т. е.

$$\Delta\epsilon = 0. \quad (4.4)$$

Аналогичным образом фотон есть частица, масса и собственная энергия которой равна нулю. Поэтому нам не нужно учитывать собственной энергии фотона и мы должны наложить физическое требование, чтобы она равнялась нулю:

$$\Delta\epsilon_p = 0. \quad (4.5)$$

Отсюда вытекают важные следствия относительно расходящихся величин $\Sigma(W_e, p)$ и $\Pi(W_p, k)$, введённых в (2.3) и (2.6).

Рассмотрим прежде всего неприводимую часть собственной энергии электрона, изображённую на графике 1 рис. 9. Здесь A изображает некоторый процесс, в результате которого появляется свободный электрон с импульсом p , но, прежде чем этот электрон окончательно появляется как свободная частица, имеет место взаимодействие электрона с вакуумом электромагнитного поля, которое

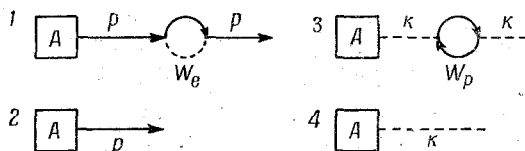


Рис. 9.

изображается частью собственной энергии W_e . Ясно, что график 1 рис. 9 описывает поправку второго порядка к процессу рассеяния, изображённому на графике 2 рис. 9, в результате которого электрон сразу появляется как свободный.

Руководствуясь общими правилами написания матричных элементов, мы можем согласно (2.9) не учитывать части собственной энергии W_e на графике 1 рис. 9, но зато должны заменить на скелетном графике спинор $u(p)$ спинором $\delta u(p)$

$$\delta u(p) = \frac{1}{2} S^F(p) \Sigma(W_e, p) u(p).$$

С другой стороны, согласно изложенным выше соображениям мы вообще не должны учитывать процесс 1, так как электромагнитная масса электрона уже включена в его общую массу m . Поэтому спинор $\delta u(p)$ должен физически равняться нулю, а так как оператор $S^F(p)$ для свободного электрона ($p^2 + m^2 = 0$) имеет, очевидно, при $\hat{p} = im$ полюс первого порядка, то $\Sigma(W_e, p)$ должно физически при $\hat{p} = im$ иметь нуль второго порядка.

Рассмотрим теперь оператор $\Sigma(W_e, p)$, где импульс p виртуального электрона не удовлетворяет, вообще говоря, соотношению $p^2 + m^2 = 0$. Такой оператор появляется, как мы знаем, если часть собственной энергии электрона соединяет две части графика (см. рис. 2). Выше мы видели (см. формулу (2.3)), что оператор $\Sigma(W_e, p)$ имеет вид интеграла от некоторой рациональной функции $R(\hat{t}, \hat{p})$

$$\Sigma(W_e, p) = \int R(\hat{t}, \hat{p}) d^4t,$$

причём матричный вектор $\hat{p}$ входит в R не независимо, а в виде суммы с вектором $\hat{t}$ (t обозначает импульс виртуальной частицы —

фотона, — по которому производится интегрирование). Этот интеграл линейно расходится в области больших $|t|$.

Покажем, что $\Sigma(W_e, p)$ можно представить в виде

$$\Sigma(W_e, p) = \Sigma_1 + \Sigma_0(\hat{p} - im) + \Sigma_R(W_e, p), \quad (4.6)$$

где Σ_1 и Σ_0 — расходящиеся константы, не зависящие от $\hat{p}$, а $\Sigma_R = (\hat{p} - im)s(\hat{p})$ — оператор, не содержащий расходимостей, причём $s(\hat{p})$ обращается в нуль при $\hat{p} = im$.

С этой целью представим $R(\hat{t}, \hat{p})$ в виде

$$R(\hat{t}, \hat{p}) = R(\hat{t}, 0) + p_\alpha \left(\frac{\partial R}{\partial p_\alpha} \right)_{p=0} + R_c(\hat{t}, \hat{p}).$$

Мы получим тогда следующее выражение для $\Sigma(W_e, p)$:

$$\Sigma(W_e, p) = A' + B'_\alpha p'_\alpha + \Sigma_c(W_e, p), \quad \Sigma_c = \int R_c(\hat{t}, \hat{p}) d^4t, \quad (4.6')$$

где A' и B'_α — расходящиеся операторы, не зависящие от p , а $\Sigma_c(W_e, p)$ — оператор, не содержащий расходимостей. Действительно, R_c имеет, очевидно, вид:

$$\begin{aligned} R_c(\hat{t}, \hat{p}) &= R(\hat{t}, \hat{p}) - R(\hat{t}, 0) - p_\alpha \left(\frac{\partial R}{\partial p_\alpha} \right)_{p=0} = \\ &= \frac{1}{2} p_\alpha p_\beta \left(\frac{\partial^2 R}{\partial p_\alpha \partial p_\beta} \right)_{p=\xi \neq 0}, \end{aligned}$$

где вторая производная берётся в некоторой точке $p = \xi \neq 0$. Так как $\hat{p}$ входит в R в виде суммы с вектором $\hat{t}$, то можно утверждать, что Σ_c определяется интегралом от второй производной R по $\hat{t}$. Отсюда следует, что при больших $|t|$ подынтегральное выражение Σ_c будет содержать дополнительный множитель порядка $|t|^{-2}$ по сравнению с подынтегральным выражением Σ , а так как Σ расходится линейно, то Σ_c будет абсолютно сходиться.

Из соображений инвариантности следует, что оператор Σ_c должен иметь вид

$$\Sigma_c(W_e, p) = s_1(W_e, p^2) + s_2(W_e, p^2)\hat{p}, \quad (4.6'')$$

где s_1 и s_2 — некоторые функции от p^2 . Из этих же соображений

следует, что расходящийся оператор B'_α имеет вид

$$B'_\alpha = \gamma_\alpha B',$$

где B' — некоторая расходящаяся константа.

Выражение (4.6'') можно, очевидно, переписать в виде

$$\Sigma_c(W_e, p) = \Sigma_c(W_e, 0) + b(\hat{p} - im) + \Sigma_R(W_e, p),$$

где $\Sigma_R(W_e, p) = (\hat{p} - im) s(\hat{p})$ обращается в нуль при $\hat{p} = im$. Подставляя это выражение в (4.6') и вводя обозначения

$$A' + \Sigma_c(W_e, 0) = \Sigma_1, \quad B' + b = \Sigma_0,$$

мы получим соотношение (4.6), которое представляет собой разложение оператора $\Sigma(W_e, p)$ в ряд по степеням $\hat{p} - im$.

Выше мы разъяснили, что расходящийся оператор $\Sigma(W_e, p)$ должен физически иметь нуль второго порядка при $\hat{p} = im$. Этому условию удовлетворяет оператор $\Sigma_R(W_e, p)$, но не удовлетворяют расходящиеся операторы Σ_1 и $\Sigma_0(\hat{p} - im)$ (первый из этих операторов расходится, очевидно, линейно, а второй логарифмически).

Мы примем теперь в качестве постулата, что физический смысл имеет оператор $\Sigma_R(W_e, p)$, а не оператор $\Sigma(W_e, p)$. Иными словами, мы отбросим в (4.6) расходящиеся члены Σ_1 и $\Sigma_0(\hat{p} - im)$ и во всех матричных элементах, содержащих линейно-расходящийся оператор $\Sigma(W_e, p)$, заменим Σ на Σ_R .

Сходящийся оператор $\Sigma_R(W_e, p)$, которым следует заменить в матричных элементах линейно-расходящийся оператор $\Sigma(W_e, p)$, будем называть регуляризованным оператором Σ .

3. Рассмотрим теперь неприводимую часть собственной энергии фотона, представленную на графике 3 рис. 9. Здесь A изображает некоторый процесс, в результате которого возникает фотон с импульсом k , но прежде чем этот фотон окончательно появляется как свободная частица, имеет место взаимодействие фотона с нулевыми колебаниями электронно-позитронного поля, которое изображается частью собственной энергии фотона W_p . Ясно, что график 3 рис. 9 описывает поправку второго порядка к процессу рассеяния, изображённому на графике 4 рис. 9, в результате которого сразу вылетает свободный фотон. Согласно (2.9) мы можем не учитывать части собственной энергии W_p , но зато должны на скелетном графике заменить оператор $\hat{A}(k)$ оператором

$$\delta \hat{A}(k) = \hat{A}(k) \Pi(W_p, k) \frac{1}{2} D^F(k).$$

С другой стороны, руководствуясь изложенными выше соображениями, мы вообще не должны учитывать процесса 3. Поэтому

оператор $\delta \hat{A}(k)$ должен физически равняться нулю, а так как функция $D^F(k)$ имеет полюс второго порядка при $k=0$, то функция $\Pi(W_p, k)$ должна физически иметь при $k=0$ нуль третьего порядка.

Обратимся теперь к функции $\Pi(W_p, k)$, где импульс виртуального фотона k , вообще говоря, не удовлетворяет соотношению $k^2=0$. Такая функция, как мы знаем, квадратично расходится и появляется, если часть собственной энергии фотона соединяет две части графика A и B (см. рис. 2).

Согласно (2.6) функция $\Pi(W_p, k)$ имеет вид интеграла от некоторой рациональной функции $Q(\hat{t}, \hat{k})$

$$\Pi(W_p, k) = \int Q(\hat{t}, \hat{k}) d^4t,$$

причем матричный вектор $\hat{k}$ входит в Q не независимо, а в виде суммы с вектором $\hat{t}$. Этот интеграл, как мы знаем, квадратично расходится в области больших $|t|$.

Поступая так же, как при выводе (4.6), легко показать, что функция $\Pi(W_p, k)$ может быть представлена в виде

$$\Pi(W_p, k) = \Pi_2 + \Pi_0 k^2 + \Pi_R(W_p, k), \quad (4.7)$$

где Π_2 и Π_0 — расходящиеся константы, не зависящие от k , и $\Pi_R(W_p, k) = k^2 P(W_p, k)$ — функция, не содержащая расходимостей, причем $P(W_p, k)$ обращается в нуль при $k=0$.

Выше мы разъяснили, что расходящееся выражение $\Pi(W_p, k)$ должно физически при $k=0$ иметь нуль третьего порядка. Этому условию удовлетворяет $\Pi_R(W_p, k)$, но не удовлетворяют первые два члена в правой части (4.7) (из них первый член расходится квадратично, а второй логарифмически).

Мы примем в качестве постулата, что физический смысл имеет величина $\Pi_R(W_p, k)$, а не $\Pi(W_p, k)$. Иными словами, мы отбросим в (4.7) расходящиеся члены Π_2 и $\Pi_0 k^2$ и во всех матричных элементах, содержащих квадратично расходящееся выражение $\Pi(W_p, k)$, заменим $\Pi(W_p, k)$ конечной функцией $\Pi_R(W_p, k)$. Функцию $\Pi_R(W_p, k)$ мы будем называть регуляризованной функцией $\Pi(W_p, k)$.

4. Мы показали, каким образом могут быть освобождены от расходимостей матричные элементы, содержащие неприводимые части собственной энергии.

Покажем теперь, что однозначное освобождение от расходимостей может быть произведено также и в тех случаях, когда график содержит неприводимую вершинную часть.

Если график содержит неприводимую вершинную часть V (см. рис. 2), то в вершине I скелетного графика (не содержащего

этой вершинной части, см. график 3 рис. 6) оператор γ_μ должен быть заменён оператором

$$\Lambda_\mu = \Lambda_\mu(V, p_1, p_2, k).$$

Как мы видели выше, этот оператор логарифмически расходится в области больших импульсов виртуальных частиц. Для устранения этой расходимости достаточно заметить, что если $p_1 = p_2 = p_0$, где p_0 — импульс свободного электрона, то вершине I вообще не должен сопоставляться оператор Λ_μ , так как в этом случае график не изображает никакого реального процесса рассеяния. Иными словами, оператор $\Lambda_\mu(V, p_0, p_0, 0)$ (если $p_1 = p_2$, то $k = 0$) следует считать физическим нулём и его можно вычесть из оператора $\Lambda_\mu(V, p_1, p_2, k)$. Легко видеть, что разность этих операторов

$$\Lambda_{\mu R}(V, p_1, p_2, k) = \Lambda_\mu(V, p_1, p_2, k) - \Lambda_\mu(V, p_0, p_0, 0) \quad (4.8)$$

не содержит расходимостей.

Мы примем в качестве постулата, что физический смысл имеет не оператор Λ_μ , а оператор $\Lambda_{\mu R}$, которым мы и должны заменить в расходящихся матричных элементах оператор Λ_μ . Оператор $\Lambda_{\mu R}$ мы будем называть регуляризованным оператором Λ_μ .

5. Итак, мы видим, что существующие три типа расходимостей, связанных с неприводимыми частями собственной энергии, вершинными частями и частями рассеяния фотона фотоном, могут быть однозначным образом устранены, исходя из простых физических соображений *).

Устранение расходимостей производится одним общим приёмом, который заключается в следующем. Если $M(p, k)$ — расходящаяся часть матричного элемента, связанная с неприводимыми внутренними частями графика (т. е. частями собственной энергии, вершинными частями и частями рассеяния фотона фотоном) и p и k — импульсы электронных и фотонных линий, соединяющих рассматриваемую часть графика с остальными частями, то для устранения расходимости в $M(p, k)$ следует из $M(p, k)$ вычесть несколько первых членов разложения $M(p, k)$ в ряд по степеням $\hat{p} - im$ или k . Число вычитаемых членов должно быть минимально необходимым для обеспечения сходимости остатка $M_R(p, k)$. Этот остаток и представляет собой регуляризованное, имеющее физический смысл значение матричного элемента $M(p, k)$. Что касается p и k , то это могут быть как импульсы внутренних, так и импульсы внешних линий графика.

*) Этот метод устранения расходимостей принадлежит Дайсону^{4, 8}.

Практически при решении конкретных задач можно в расходящемся интеграле, определяющем $M(p, k)$,

$$M(p, k) = \int R(\hat{p}, \hat{k}, \hat{t}) dt$$

выполнить сначала интегрирование по некоторой конечной инвариантной области *). Полученное выражение следует регуляризовать, вычтя из него необходимое число членов в разложении в степенной ряд, а затем сделать предельный переход к бесконечно большой области интегрирования $N \rightarrow \infty$ **).

Так как регуляризация состоит в вычитании из расходящегося выражения нескольких первых членов разложения этого выражения в степенной ряд, то отсюда следует, что операция регуляризации аддитивна, т. е. если расходящееся выражение представляет собой сумму нескольких слагаемых, то их можно регуляризовать отдельно. При этом следует иметь в виду, что если некоторое слагаемое конечно, то это ещё не значит, что оно совпадает с регуляризованным выражением.

Регуляризацию можно выполнять в несколько приёмов, сразу отбрасывая те члены, которые должны исчезнуть в конечном результате.

До сих пор мы рассматривали расходимости, связанные с неприводимыми внутренними частями графиков. Однако изложенный метод регуляризации достаточен для устранения расходимостей, связанных со сколь угодно сложными приводимыми частями собственной энергии, вершинными частями рассеяния фотона фотоном.

Рассмотрим, например, график, который содержит приводимую вершинную часть V_{11} , изображённую на рис. 10. В состав V_{11} входят неприводимые части собственной энергии W'_e , W''_e , W_p и неприводимая вершинная часть V_3 . Ясно, что часть матричного элемента, связанная с V_{11} , будет расходиться не только при интегрировании по переменным p, k , относящимся к графику как целому, но также и при интегрировании по переменным p', p'', p''' , относящимся

*) Конечная инвариантная область может быть определена с помощью неравенств

$$t^2 \leq N, \quad \frac{|ts|^2}{|s^2|} \leq N,$$

где s — некоторый произвольный времениподобный вектор, а N — положительный скаляр, который после регуляризации устремляется к бесконечности.

**) Можно также при интегрировании по импульсам виртуальных частиц вводить под знаком интеграла различные «обрезающие» множители, которые обеспечивают сходимость интеграла при больших $|t|$ (см. в связи с этим метод регуляризации с помощью вспомогательных масс ^{6, 12}).

к каждой из вставных частей, т. е. W'_e , W''_e , W_p , V_3 , если остальные переменные остаются при этом фиксированными.

Устранение расходимостей в этом случае может быть произведено последовательно согласно данным выше правилам, начиная

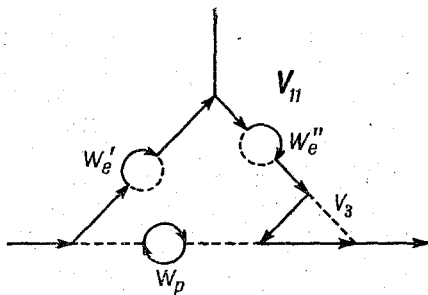


Рис. 10.

с внутренних частей W'_e , W''_e , W_p , V_3 и кончая частью V_{11} как целым.

Аналогичным образом, начиная с внутренних вставных частей и кончая всей частью как целым, могут быть устранены расходимости, связанные с приводимыми частями собственной энергии.

5. ПЕРЕНОРМИРОВКИ МАССЫ И ЗАРЯДА

1. Перейдём теперь к разъяснению тех физических идей, которые лежат в основе изложенного метода регуляризации.

Изучая расходимость, связанную с частью собственной энергии фотона, мы показали, что она приводит к бесконечной собственной энергии фотона и на основании этого считали физическим нулём расходящийся оператор $\hat{\Delta}(k)$, соответствующий пунктирной линии на графике 3 рис. 9. Однако если пунктирная линия на графике 3 рис. 9 изображает не фотон, а некоторое заданное внешнее электромагнитное поле, то расходящийся оператор $\hat{\Delta}(k)$ уже нельзя считать физическим нулём. В этом случае из $\hat{\Delta}(k)$ согласно данным только что правилам может быть выделено конечное выражение, имеющее физический смысл и описывающее поляризацию вакуума.

Известно, что оператор Даламбера, применённый к потенциалу $A_\mu^{(e)}(x)$, описывающему заданное внешнее поле, определяет ток $I_\mu^{(e)}(x)$, создающий это поле. Поэтому $-\square A_\mu(x)$ представляет собой поправку к внешнему току $I_\mu^{(e)}(x)$, обусловленную взаимодействием этого тока с нулевыми колебаниями электронно-позитрон-

ного поля. Можно показать, что

$$-\square \delta A_\mu(x) = a_2 I_\mu^{(e)}(x) + I_\mu^{(p)}(x),$$

где a_2 — квадратично расходящаяся константа, а $I_\mu^{(p)}(x)$ — конечная величина. Если устранить из $\delta A_\mu(x)$ расходимость, то регуляризованное значение $\delta A_{\mu R}(x)$ будет удовлетворять соотношению

$$-\square \delta A_{\mu R}(x) = I_\mu^{(p)}(x). \quad (5.1)$$

Поэтому можно сказать, что регуляризация устраняет в поправке к внешнему току, обусловленной взаимодействием этого тока с нулевыми колебаниями электронно-позитронного поля, бесконечный член $a_2 I_\mu^{(e)}(x)$, пропорциональный исходному внешнему току $I_\mu^{(e)}(x)$.

В частности, если мы имеем некоторый заряд e (например, заряд электрона), то, благодаря взаимодействию этого заряда с нулевыми колебаниями электронно-позитронного поля, он приобретает бесконечную добавку, пропорциональную e . Процесс регуляризации состоит в том, что мы не учитываем этой добавки, считая, что она не имеет физического смысла. Можно сказать, что добавка к заряду электрона неотделима от самого его заряда и что процесс регуляризации, в сущности говоря, сводится к перенормировке заряда: сумма заряда гипотетического электрона, не взаимодействующего с нулевыми колебаниями электронно-позитронного поля, и даваемой современной теорией бесконечной добавки к заряду, обусловленной взаимодействием с этими колебаниями, на самом деле конечна и представляет собою общий экспериментально наблюдаемый заряд электрона.

2. Аналогичная ситуация имеет место при устранении расходимостей, связанных с частями собственной энергии электрона. Выше мы видели, что эти расходимости приводят к бесконечной электромагнитной массе электрона, т. е. к расходящейся добавке к массе электрона, обусловленной взаимодействием электрона с нулевыми колебаниями электромагнитного поля. Изложенный метод регуляризации состоит в том, что мы не учитываем этой добавки, считая, что она неотделима от общей массы электрона. Можно поэтому сказать, что процесс регуляризации сводится к перенормировке массы электрона: сумма массы «голого» электрона, т. е. гипотетического электрона, не взаимодействующего с нулевыми колебаниями электромагнитного поля, и даваемой теорией бесконечной электромагнитной массы электрона, обусловленной взаимодействием с этими колебаниями, на самом деле конечна и представляет собой экспериментально наблюдаемую массу электрона.

Таким образом, физическая идея, лежащая в основе метода регуляризации, состоит, в сущности, в перенормировке констант m и e ^{9, 7}.

3. Мы попытаемся теперь более строго сформулировать идею перенормировки массы и заряда электрона. Напомним предварительно

(см. п. 4), что в квантовой электродинамике содержится по существу пять бесконечных констант, связанных с неприводимыми графиками собственной энергии электрона и фотона, неприводимыми вершинными частями и неприводимыми частями рассеяния фотона фотоном. Эти константы Σ_1 , Σ_0 , Π_2 , Π_0 , L_0 входят следующим образом в операторы $\Sigma(W_e, p)$, $\Pi(W_p, k)$ и Λ_μ :

$$\left. \begin{aligned} \Sigma(W_e, p) &= \Sigma_1 + (\hat{p} - im) \Sigma_0 + \Sigma_R(W_e, p), \\ \Pi(W_p, k) &= \Pi_2 + k^2 \Pi_0 + \Pi_R(W_p, k), \\ \Lambda_\mu(V, p_1, p_2, k) &= L_0 \gamma_\mu + \Lambda_{\mu R}(V, p_1, p_2, k). \end{aligned} \right\} \quad (5.2)$$

Выше мы видели, что константы Σ_0 , Π_0 , L_0 расходятся логарифмически, Σ_1 — линейно и Π_2 — квадратично. Что касается расходящейся константы Π_2 , то она не зависит от импульса фотона и может быть поэтому просто отброшена из соображений градиентной инвариантности. Можно, следовательно, считать, что реально существуют четыре расходящиеся константы Σ_1 , Σ_0 , Π_0 , L_0 .

Мы покажем теперь, что две из этих констант, а именно, линейно расходящаяся константа Σ_1 и логарифмически расходящаяся константа Π_0 могут быть устранены, если несколько изменить вид энергии взаимодействия между электронно-позитронным и электромагнитным полями¹⁰.

Как известно, обычно исходят из следующего выражения для плотности энергии взаимодействия между полями:

$$V(x) = -j_\mu(x) A_\mu(x). \quad (5.3)$$

Добавим к этому выражению два члена $-\delta m \bar{\psi} \psi$ и $-\delta f F_{\mu\nu}^2$, где $F_{\mu\nu}$ — тензор электромагнитного поля, а δm и δf — некоторые две константы (расходящиеся, но не зависящие от ψ и $F_{\mu\nu}$), т. е. будем считать, что плотность энергии взаимодействия между полями определяется формулой

$$V^*(x) = -j_\mu(x) A_\mu(x) - \delta m \bar{\psi}(x) \psi(x) - \frac{1}{4} \delta f F_{\mu\nu}^2(x). \quad (5.4)$$

Подстановка этого выражения, взамен $V(x)$, в общую формулу для матрицы рассеяния $S = P e^{-i \int V d^4x}$ приведёт к изменению вида S , а также операторов $\Sigma(W_e, p)$ и $\Pi(W_p, k)$. Ясно, что второй член в (5.4) будет оказывать влияние на электронные переходы, а так как он не содержит импульса электрона, то, подобрав соответствующим образом константу δm , мы сможем устранить расходящийся член Σ_1 в выражении для $\Sigma(W_e, p)$. Аналогичным образом, третий член в (5.4) будет оказывать влияние на фотонные переходы, а так как он пропорционален квадрату тензора поля,

*) P обозначает хронологический оператор.

т. е. пропорционален квадрату импульса фотона, то соответствующим подбором константы δf мы сможем устранить расходящийся член $\Pi_0 k^2$ в выражении для $\Pi(W_p, k)$.

Таким образом, добавление в выражение для плотности энергии взаимодействия полей двух членов $-\delta m \bar{\psi} \psi$ и $-\frac{1}{4} \delta f F_{\mu\nu}^2$ даёт возможность устранить из теории две расходящиеся константы Σ_1 и Π_0 . С другой стороны, это добавление физически означает перенормировку массы электрона и перенормировку электромагнитного поля. Действительно, функция Лагранжа свободного электронного позитронного поля содержит член $-m \bar{\psi} \psi$, поэтому добавление члена $-\delta m \bar{\psi} \psi$ можно трактовать как перенормировку массы электрона. Функция Лагранжа свободного электромагнитного поля равна $-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}$; поэтому добавление члена $-\frac{1}{4} \delta f F_{\mu\nu}^2$ означает перенормировку электромагнитного поля, т. е. переход от поля $F_{\mu\nu}$ к полю $F_{\mu\nu}^*$, равному

$$F_{\mu\nu}^* = F_{\mu\nu} (1 + \delta f)^{1/2}.$$

Эту перенормировку поля можно трактовать также как перенормировку заряда электрона, т. е. переход от заряда e к заряду e^* :

$$e^* = e (1 + \delta f)^{-1/2}.$$

Мы видим, таким образом, что устранение расходящихся констант Σ_1 и Π_0 достигается, в сущности говоря, перенормировкой массы и заряда электрона. После перенормировки массы и заряда электрона у нас остаются ещё две расходящиеся константы Σ_0 и L_0 . Можно показать, что в матричных элементах они приводят к выражениям, которые всегда сокращаются⁵.

4. Изложенные методы регуляризации устраняют расхожимости не сразу во всей матрице рассеяния, а в отдельных её матричных элементах или, иначе говоря, в отдельных членах разложения матрицы рассеяния в ряд по степеням заряда электрона. Возникает вопрос, будет ли этот степенной ряд после регуляризации его отдельных членов сходящимся. Если бы он сходился, то можно было бы считать, что его сумма представляет собой истинную матрицу рассеяния. Существуют, однако, соображения, которые указывают на расхожимость разложения матрицы рассеяния в ряд по степеням e после регуляризации отдельных членов разложения⁶. Члены этого разложения сперва уменьшаются, а затем, по всей вероятности, начинают неограниченно расти, причём рост начинается, когда число членов достигает ~ 137 . Используемые нами обычно при оценке конкретных физических эффектов первые несколько членов разложения дают только асимптотическое представление матрицы рассеяния, которое, как показывает сравнение теории с опытом, является, однако, достаточно хорошим приближением.

6. РАДИАЦИОННЫЕ ПОПРАВКИ К РАССЕЯНИЮ ЭЛЕКТРОНА. ПОЛЯРИЗАЦИЯ ВАКУУМА

1. Рассмотрим в качестве примера устранение расходимостей из матричных элементов, определяющих поляризацию вакуума и радиационные поправки к рассеянию электрона во внешнем поле. Эти эффекты проявляются в третьем приближении теории возмущений, которым мы и ограничимся. Графики, изображающие интересные нас эффекты, даны на рис. 1. Используя полученные результаты, можно сразу исключить из рассмотрения графики 4 и 5, так как они содержат части собственной энергии «на пути» свободного электрона.

График 2 мы будем называть графиком собственно радиационных поправок, а график 3 — графиком поляризации вакуума. Соответствующие им матричные элементы согласно (1.3) равны

$$M_1^{(3)} = (-i)^3 e^3 \bar{u}_2 \left(\int \gamma_\mu \frac{i(\hat{p}_2 - \hat{k}) - m}{(p_2 - k)^2 + m^2} \frac{\hat{a}(q)}{(2\pi)^4} \times \right. \\ \left. \times \frac{i(\hat{p}_1 - \hat{k}) - m}{(p_1 - k)^2 + m^2} \gamma_\mu \frac{d^4 k}{k^2} \right) u_1, \quad (6.1)$$

$$M_2^{(3)} = -(-i)^3 e^3 \bar{u}_2 \left(\gamma_\mu \frac{1}{q^2} \int \text{Spur} \left\{ \frac{i(\hat{p} + \hat{q}) - m}{(p + q)^2 + m^2} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \frac{\hat{a}(q)}{(2\pi)^4} \frac{i\hat{p} - m}{p^2 + m^2} \gamma_\mu \right\} d^4 p \right) u_1, \quad (6.2)$$

где $a_\mu(q)$ — компонента Фурье внешнего потенциала $A_\mu^{(e)}(x)$:

$$a_\mu(q) = \int A_\mu^{(e)}(x) e^{-iqx} d^4 x$$

и u_1 и u_2 — спинорные амплитуды, относящиеся к состояниям электрона с импульсами p_1 и p_2 ; $q = p_2 - p_1$. Лишний знак минус в (6.2) по сравнению с (6.1) происходит из-за того, что график 3 имеет замкнутую электронную линию. По этой же причине в (6.2) входит след (шпур) матриц, относящихся к этой замкнутой линии.

Матричный элемент $M_1^{(3)}$ можно представить в виде

$$M_1^{(3)} = \frac{ie^3}{(2\pi)^4} \bar{u}_2 \mathcal{M} u_1, \quad (6.3)$$

где

$$\mathcal{M} = [4m^2 \hat{a}(q) + 2q^2 \hat{a}(q)] I + \\ + i [4ma_3(q) + 2i(\gamma_3 \hat{a}(q) \hat{q} - \hat{q} \hat{a}(q) \gamma_3)] I_3 + 2\gamma_3 \hat{a}(q) \gamma_3 I_{\sigma_3}$$

и

$$\left. \begin{aligned} I &= \int R^{-1} d^4 k, \\ I_\sigma &= \int k_\sigma R^{-1} d^4 k, \\ I_{\sigma\tau} &= \int k_\sigma k_\tau R^{-1} d^4 k, \\ R &= (k^2 - 2p_1 k)(k^2 - 2p_2 k) k^2 \end{aligned} \right\} \quad (6.4)$$

(pk — скалярное произведение четырехмерных векторов p и k).

Из этих интегралов в области больших $|k|$ расходится только третий интеграл и притом логарифмически, в соответствии с полученными выше результатами о классификации расходимостей (график I изображает неприводимую вершинную часть). Поэтому необходимо регуляризовать интеграл $I_{\sigma\tau}$, отняв от него значение $I_{\sigma\tau}$ при $q=0$:

$$I_{\sigma\tau} R = I_{\sigma\tau} - I_{\sigma\tau q=0}.$$

Заметим, что интеграл I расходится при малых $|k|$. Эта расходимость носит название инфракрасной катастрофы и связана с неприменимостью теории возмущений в области малых $|k|$.

Мы ограничимся здесь рассмотрением взаимодействия электрона с фотонами, частота которых превосходит некоторое минимальное значение $\omega_{\min}$. Практически при интегрировании по импульсам фотонов удобнее пользоваться несколько иным условием, эквивалентным условию $\omega > \omega_{\min}$, а именно, не накладывая ограничений на частоту фотонов, считать, что фотон обладает некоторой малой массой λ , отличной от нуля. Можно показать⁷, что если импульс электрона мал по сравнению с m , то λ связана с $\omega_{\min}$ соотношением

$$\ln \lambda = \ln 2\omega_{\min} + \frac{5}{6}. \quad (6.5)$$

В результате несложных, но длинных вычислений получается следующее выражение для $\mathfrak{M}$:

$$\begin{aligned} \mathfrak{M} = & 4\pi^2 i \hat{a}(q) \left\{ 2\theta \operatorname{ctg} 2\theta \left(\ln \frac{m}{\lambda} - 1 \right) - 2 \operatorname{ctg} 2\theta \int_0^\theta \xi \operatorname{tg} \xi d\xi - \frac{\theta}{2} \operatorname{tg} \theta \right\} + \\ & + \frac{\pi^2}{2m} \left[\hat{a}(q) \hat{q} - \hat{q} \hat{a}(q) \right] \frac{2\theta}{\sin 2\theta} + \\ & + \left(\frac{1}{4} A_0(N) - \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \ln m \right) \cdot 4\pi^2 i \hat{a}(q), \quad (6.6) \end{aligned}$$

где $4m^2 + q^2 = 4m^2 \cos^2 \theta$, $q = p_2 - p_1$ и $A_0(N)$ — логарифмически расходящаяся константа.

Это выражение мы должны теперь регуляризовать. Так как $\mathcal{M}$ расходится логарифмически, то, как было показано выше, для регуляризации $\mathcal{M}$ нужно отнять от $\mathcal{M}$ значение $\mathcal{M}$ при $q=0$, т. е. при $\theta=0$ (см. (4.8); в данном случае p_1 и p_2 — импульсы свободного электрона).

Регуляризованное выражение $\mathcal{M}$ имеет следующий вид:

$$\mathcal{M}_R = 4\pi^2 i \hat{a}(q) \left[\left(\frac{2\theta}{\lg 2\theta} - 1 \right) \left(\ln \frac{m}{\lambda} - 1 \right) - \frac{2}{\lg 2\theta} \int_0^\theta \xi \lg \xi d\xi - \right. \\ \left. - \frac{\theta}{2} \lg \theta \right] + \frac{\pi^2}{2m} [\hat{a}(q) \hat{q} - \hat{q} \hat{a}(q)] \frac{2\theta}{\sin 2\theta}. \quad (6.7)$$

Подставив (6.7) в (6.3), получим матричный элемент, отвечающий графику 2 рис. 1:

$$M_1^{(3)} = i \frac{e^3}{(2\pi)^4} \bar{u}_2 \mathcal{M}_R u_1, \quad (6.8)$$

причём здесь не учитывается взаимодействие электрона с длинноволновыми фотонами.

2. Матричный элемент $M_2^{(3)}$, описывающий поляризацию электрон-позитронного вакуума (график 3 рис. 1), определяется формулой (6.2).

Вводя обозначение

$$T_{\mu\nu} = \int \text{Spur} \left\{ \frac{i(\hat{p} + \hat{q}) - m}{(p+q)^2 + m^2} \gamma_\nu \frac{i\hat{p} - m}{p^2 + m^2} \gamma_\mu \right\} d^4 p, \quad (6.9)$$

перепишем $M_2^{(3)}$ в виде

$$M_2^{(3)} = -i \frac{e^3}{(2\pi)^4} \bar{u}_2 \left(\gamma_\mu \frac{a_\nu(q)}{q^2} T_{\mu\nu} \right) u_1. \quad (6.10)$$

Тензор $T_{\mu\nu}$ имеет простой физический смысл. Действительно, заменяя график 3 рис. 1 скелетным графиком, не содержащим части собственной энергии фотона, мы должны заменить внешний потенциал $A_\mu^{(e)}(x)$ некоторым новым потенциалом $\delta A_\mu(x)$, который в первом приближении теории возмущений приводит к матричному элементу $M_2^{(3)}$:

$$M_2^{(3)} = e \bar{u}_2 \gamma_\mu \delta a_\mu(q) u_1, \quad \delta a_\mu(q) = \int \delta A_\mu(x) e^{-iqx} d^4 x.$$

Сравнение этой формулы с (6.10) показывает, что

$$\delta a_\mu(q) = -i \frac{e^2}{(2\pi)^4} \frac{T_{\mu\nu}}{q^2} a_\nu(q). \quad (6.11)$$

Потенциал $\delta A_\mu(x)$ следует рассматривать как добавку к «заданному» внешнему потенциалу $A_\mu^{(e)}(x)$, обусловленную поляризацией электронно-позитронного вакуума. Применив к $\delta A_\mu(x)$ оператор $-\square$, мы найдём добавку к внешнему току $I_\mu^{(e)}(x)$, обусловленную взаимодействием $I_\mu^{(e)}(x)$ с нулевыми колебаниями электронно-позитронного поля. Обозначая q -компоненту Фурье этой добавки через $\delta I_\mu(q)$, получим согласно (6.11)

$$\delta I_\mu(q) = -i \frac{e^2}{(2\pi)^4} T_{\mu\nu} a_\nu(q). \quad (6.12)$$

Можно показать, что $T_{\mu\nu}$ определяется следующей формулой³:

$$T_{\mu\nu} = 4\pi^2 i (q_\mu q_\nu - \delta_{\mu\nu} q^2) \frac{4m^2 - 2q^2}{-3q^2} (1 - \theta \operatorname{ctg} \theta). \quad (6.13)$$

Это выражение нужно регуляризовать, т. е. отнять от $T_{\mu\nu}$ три первых члена разложения $T_{\mu\nu}$ в ряд по степеням q^2 . Поскольку $T_{\mu\nu}$ содержит квадратичный относительно q^2 множитель $q_\mu q_\nu - \delta_{\mu\nu} q^2$, то регуляризация сводится к вычитанию из множителя $\frac{4m^2 - 2q^2}{-3q^2} (1 - \theta \operatorname{ctg} \theta)$ свободного члена. Легко убедиться, что этот свободный член равен $\frac{1}{9}$. Поэтому окончательное регуляризованное выражение тензора $T_{\mu\nu}$ имеет вид³:

$$T_{\mu\nu R} = 4\pi^2 i (q_\mu q_\nu - \delta_{\mu\nu} q^2) \left[\frac{4m^2 - 2q^2}{-3q^2} (1 - \theta \operatorname{ctg} \theta) - \frac{1}{9} \right]. \quad (6.14)$$

Если умножить $T_{\mu\nu R}$ на $-i \frac{e^2}{(2\pi)^4} a_\nu(q)$, то мы получим согласно (6.12) добавку $I_\mu^{(p)}(q)$ к компоненте Фурье исходного «внешнего» тока $I_\mu^{(e)}(q)$, обусловленную его взаимодействием с нулевыми колебаниями электронно-позитронного поля:

$$I_\mu^{(p)}(q) = \frac{e^2}{(2\pi)^4} (q_\mu q_\nu - \delta_{\mu\nu} q^2) \left[\frac{4m^2 - 2q^2}{-3q^2} (1 - \theta \operatorname{ctg} \theta) - \frac{1}{9} \right] a_\nu(q). \quad (6.15)$$

Легко видеть, что эта добавка удовлетворяет закону сохранения заряда

$$q_\mu I_\mu^{(p)}(q) = 0.$$

Замечая, что $q_\mu a_\mu(q) = 0$ и $q^2 a_\mu(q) = I_\mu^{(e)}(q)$, перепишем $I_\mu^{(p)}(q)$ в виде

$$I_\mu^{(p)}(q) = -\frac{e^2}{(2\pi)^2} \left[\frac{4m^2 - 2q^2}{-3q^2} (1 - \theta \operatorname{ctg} \theta) - \frac{1}{9} \right] I_\mu^{(e)}(q). \quad (6.16)$$

Разлагая $T_{\mu\nu R}$ в ряд по степеням q_σ и ограничиваясь членами четвертого порядка, получим:

$$T_{\mu\nu R} = -\frac{4\pi^2 i}{15m^2} (q_\mu q_\nu - \delta_{\mu\nu} q^2) q^2. \quad (6.17)$$

В этом случае добавка к компоненте Фурье тока, обусловленная поляризацией электронно-позитронного вакуума, имеет вид ²

$$I_\mu^{(p)}(q) = \frac{e^2}{60\pi^2 m^2} q^2 I_\mu^{(e)}(q). \quad (6.18)$$

От компонент Фурье легко перейти к самим функциям координат и времени ²:

$$I_\mu^{(p)}(x) = -\frac{e^2}{60\pi^2 m^2} \square I_\mu^{(e)}(x). \quad (6.19)$$

Если сохранить в разложении $T_{\mu\nu R}$ по степеням q_σ члены шестого порядка, то взамен (6.19) мы получим ²:

$$I_\mu^{(p)}(x) = -\frac{e^2}{60\pi^2 m^2} \square I_\mu^{(e)}(x) - \frac{e^2}{680\pi^2} \left(\frac{1}{m^2} \square \right)^2 I_\mu^{(e)}(x). \quad (6.20)$$

Подставив формулу (6.14), определяющую $T_{\mu\nu R}$ в (6.10), получим следующее выражение для матричного элемента $M_2^{(3)}$:

$$M_2^{(3)} = -i \frac{e^3}{(2\pi)^4} \bar{u}_2 \left(\gamma_\mu \frac{a_\nu(q)}{q^2} - T_{\mu\nu R} \right) u_1. \quad (6.21)$$

3. Для определения вероятности процессов, изображаемых графиками рис. 1, нужно, очевидно, найти суммарный матричный элемент, равный $S_{i \rightarrow f}^{(3)} = M_1^{(3)} + M_2^{(3)}$. Используя формулы (6.8), (6.21), (6.7) и (6.14), представим суммарный матричный элемент в виде

$$S_{i \rightarrow f}^{(3)} = \bar{u}_2 S^{(3)}(q) u_1, \quad (6.22)$$

где

$$S^{(3)}(q) = i \frac{e^3}{(2\pi)^4} \left[\mathcal{M}_R - \gamma_\mu \frac{a_\nu(q)}{q^2} - T_{\mu\nu} R \right].$$

Разложение $S^{(3)}(q)$ в ряд по степеням q_σ с точностью до членов третьего порядка имеет следующий вид:

$$S^{(3)}(q) = - \frac{e^3}{(4\pi)^2} \left\{ \frac{4q^2}{3m^2} \hat{a}(q) \left(\ln \frac{m}{\lambda} - \frac{3}{8} - \frac{1}{5} \right) + \right. \\ \left. + \frac{i}{2m} \left[\hat{q}^1 \hat{q}(q) - \hat{a}(q) \hat{q} \right] \right\}. \quad (6.23)$$

Если прибавить к $S_{i \rightarrow f}^{(3)}$ матричный элемент $S_{i \rightarrow f}^{(1)} = \bar{u}_2 e a(q) u_1$, определяющий рассеяние электрона в первом приближении, то мы найдём результирующий матричный элемент $S_{i \rightarrow f}^{(1)+^{(3)}}$, учитывающий взаимодействие электрона с нулевыми колебаниями поля с точностью до членов порядка e^4 :

$$S_{i \rightarrow f}^{(1)+^{(3)}} = \bar{u}_2 \{ \gamma e a(q) + i\beta [e\varphi(q) + \delta U(q)] \} u_1, \quad (6.24)$$

где

$$\delta U(q) = \frac{1}{i} \beta S^{(3)}(q).$$

Выражение (6.24) показывает, что величину $\delta U(q)$ можно трактовать как компоненту Фурье добавки к потенциальной энергии электрона, обусловленной взаимодействием электрона с нулевыми колебаниями поля. Мы будем называть эту добавку эффективной потенциальной энергией, определяющей взаимодействие электрона с нулевыми колебаниями поля.

Эффективную потенциальную энергию как функцию координат можно представить в виде

$$\delta U(x) = - \frac{e^3}{(4\pi)^2} \frac{1}{m} (\beta \sigma \mathbf{H} - i\beta \alpha \mathbf{E}) + \\ + \frac{e^3}{(4\pi)^2} \frac{4}{3m^2} \left(\ln \frac{m}{\lambda} - \frac{3}{8} - \frac{1}{5} \right) (\square \varphi - \alpha \square A), \quad (6.25)$$

где $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ — электрическое и магнитное поля, φ и A — скалярный и векторный потенциалы, и σ_i — спинорные матрицы, связанные с γ_i соотношениями

$$\sigma_1 = \frac{1}{i} \gamma_2 \gamma_3, \quad \sigma_2 = \frac{1}{i} \gamma_3 \gamma_1, \quad \sigma_3 = \frac{1}{i} \gamma_1 \gamma_2.$$

Из выражения (6.25) для δU следует, что электрон, находящийся в постоянном магнитном поле, благодаря взаимодействию с нулевыми колебаниями электромагнитного поля приобретает добавочную энергию, равную $-\frac{1}{2\pi} \frac{1}{137} \frac{e}{2m} \beta \hbar H$. С другой стороны, энергия электрона в магнитном поле равна

$$U_m = -\mu \beta \hbar H,$$

где μ — магнитный момент электрона. Поэтому можно сказать, что благодаря взаимодействию электрона с нулевыми колебаниями электромагнитного поля он приобретает добавочный магнитный момент, равный²

$$\Delta\mu = \frac{\alpha}{2\pi} \mu_0, \quad (6.26)$$

где $\mu_0 = \frac{e\hbar}{2mc}$ — боровский магнетон и $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137}$ — постоянная тонкой структуры. Таким образом, с точностью до членов порядка e^4 магнитный момент электрона равен

$$\mu = \mu_0 \left(1 + \frac{\alpha}{2\pi}\right).$$

4. Выражение для δU позволяет также определить радиационные поправки к рассеянию электрона в кулоновском поле ядра. Мы приведём здесь только результаты вычислений^{2, 11}.

Сечение чисто упругого рассеяния с учётом радиационных поправок и второго борновского приближения определяется следующей формулой*):

$$d\sigma_s = \left(\frac{Z\alpha}{2mv^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}} \right)^2 (1-v^2) \left(1 - v^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \right) \{1 - \chi + \delta_B\} d\vartheta, \quad (6.27)$$

где

$$\begin{aligned} \delta_B = & \pi\alpha v Z \sin \frac{\vartheta}{2} \left(1 - \sin \frac{\vartheta}{2} \right) \left(1 - v^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \right)^{-1}, \\ \chi = & \frac{\alpha}{\pi} \left[2 \left(1 - \Phi \operatorname{cth} \Phi \right) \left(1 - \frac{1}{3} \operatorname{cth}^2 \Phi \right) - \frac{2}{9} + \Phi \operatorname{th} \Phi + \right. \\ & + 2 \left(1 - 2\Phi \operatorname{cth} 2\Phi \right) \left(1 + \ln \frac{\lambda}{m} \right) + \\ & + (1-v^2) \frac{\operatorname{ch} 2\Phi}{\sin \frac{\vartheta}{2}} \int_{\cos \frac{\vartheta}{2}}^1 \frac{\zeta \ln (1-v^2 \zeta^2) d\zeta}{(1-v^2 \zeta^2) \sqrt{\zeta^2 - \cos^2 \frac{\vartheta}{2}}} + \\ & \left. + 2\Phi \operatorname{cth} 2\Phi \ln \frac{1}{1-v^2} + \frac{v^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}}{1-v^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}} \frac{2\Phi}{\operatorname{sh} 2\Phi} \right] \end{aligned}$$

*) δ_B учитывает второе борновское приближение.

и Φ связано с углом рассеяния ϑ соотношением

$$\operatorname{sh} \Phi = \frac{v}{1-v^2} \sin \frac{\vartheta}{2}$$

(v — скорость электрона).

В это выражение входит «масса» фотона λ , которая может быть устранена, если наряду с чисто упругим рассматривать также неупругое рассеяние электрона с излучением фотона, энергия которого не превосходит величины $\Delta\varepsilon$ ($\Delta\varepsilon \ll m$). Обозначим сечение этого рассеяния через $d\sigma'$. В суммарное сечение рассеяния $d\sigma_{\Delta\varepsilon} = d\sigma_s + d\sigma'$, которое только и имеет физический смысл, «масса» фотона не входит.

Суммарное сечение рассеяния $d\sigma_{\Delta\varepsilon}$ с потерей энергии, не превосходящей $\Delta\varepsilon$, можно представить в виде^{2, 11}

$$d\sigma_{\Delta\varepsilon} = \left(\frac{Z\alpha}{2mv^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}} \right)^2 (1-v^2) \left(1 - v^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \right) (1 + \delta_B - \delta_R),$$

где δ_B и δ_R учитывают второе борновское приближение и радиационные поправки. Последняя величина равна¹¹

$$\begin{aligned} \delta_R = \frac{\alpha}{\pi} & \left\{ 2(1 - 2\Phi \operatorname{cth} 2\Phi) \left(1 + \ln \frac{2\Delta\varepsilon}{m} \right) + \Phi \operatorname{th} \Phi + \right. \\ & + 2(1 - \Phi \operatorname{cth} \Phi) \left(1 - \frac{1}{3} \operatorname{cth}^2 \Phi \right) - \frac{2}{9} + \frac{1}{v} \ln \frac{1-v}{1+v} + \\ & + 2\Phi \operatorname{cth} 2\Phi \ln \frac{1}{1-v^2} + \frac{v^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}}{1-v^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}} \frac{2\Phi}{\operatorname{sh} 2\Phi} + \\ & + \frac{(1-v^2) \operatorname{ch} 2\Phi}{v \sin \frac{\vartheta}{2}} \int_{\cos \frac{\vartheta}{2}}^1 \left[\frac{\ln(1+v\xi)}{1-v\xi} - \right. \\ & \left. \left. - \frac{\ln(1-v\xi)}{1+v\xi} \right] \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2 - \cos^2 \frac{\vartheta}{2}}} \right\}. \quad (6.28) \end{aligned}$$

Подчеркнём, что этими формулами можно пользоваться только при достаточно малых значениях δ_B и δ_R . Что касается второго борновского приближения, то оно даёт правильные результаты для значений Z , меньших примерно 15, поэтому формула (6.23) справедлива для достаточно лёгких ядер. Ниже мы приводим значения δ_R для различных значений энергии электрона ε и потери энергии $\Delta\varepsilon$ ¹¹

Значения δ_R в процентах

ε (Мэв)	2,5			4,0			9,5		
ϑ (град)	45	90	135	45	90	135	45	90	135
$\Delta\varepsilon = 10$ кэв	4,8	7,4	8,7	6,9	9,9	11,3	12,4	15,9	17,5
$\Delta\varepsilon = 25$ "	3,9	6,0	7,1	5,7	8,1	9,3	10,5	13,5	14,8
$\Delta\varepsilon = 50$ "	3,2	5,0	5,9	4,7	6,8	7,9	9,0	11,7	12,8
$\Delta\varepsilon = 100$ "	2,5	3,9	4,7	3,8	5,5	6,4	7,6	9,9	10,8

Заметим, что формула (6.28) для δ_R становится неприменимой при $\Delta\varepsilon \rightarrow 0$. Так как, строго говоря, при $\Delta\varepsilon \rightarrow 0$ сечение рассеяния должно стремиться к нулю, то мы получим правильное поведение сечения рассеяния при $\Delta\varepsilon \rightarrow 0$, если заменим $1 - \delta_R + \delta_B$ на $e^{-\delta_R + \delta_B}$ (дальнейшие члены разложения $e^{-\delta_R + \delta_B}$ в ряд по степеням $-\delta_R + \delta_B$ описывают при этом эффекты высшего порядка).

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. В. Б. Берестецкий, УФН **46**, 231 (1952).
2. J. Schwinger, Phys. Rev. **74**, 1439 (1948); **75**, 651 (1949); **75**, 1912 (1949).
3. R. Feynman, Phys. Rev. **76**, 749, 769 (1949).
4. F. Dyson, Phys. Rev. **75**, 486 (1949).
5. F. Dyson, Phys. Rev. **83**, 608 (1951).
6. F. Dyson, Phys. Rev. **85**, 631 (1952).
7. Сдвиг уровней атомных электронов. Сборник статей, М. 1950.
8. Проблемы современной физики, серия третья, выпуск 11, ИЛ, Москва, 1951.
9. H. Bethe, Phys. Rev. **72**, 339 (1947).
10. S. Gupta, Proc. Phys. Soc. **64**, 426 (1951).
11. L. Elton a. H. Robertson, Proc. Phys. Soc. **65**, 145 (1952).
12. W. Pauli a. F. Villars, Rev. Mod. Phys. **21**, 434 (1949).