

## УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

### РАССЕЯНИЕ $\pi$ -МЕЗОНОВ НА НУКЛЕОНАХ

*В. П. Силин и В. Я. Файнбэрг*

#### ВВЕДЕНИЕ

В последнее время значительный интерес вызвали экспериментальные работы по рассеянию  $\pi$ -мезонов на нуклонах. Это объясняется тем, что проблема взаимодействия элементарных частиц и в особенности взаимодействие тяжёлых ядерных частиц, нуклеонов (ядерные силы), является центральной проблемой современной физики. О природе сил, действующих между нуклонами, мы знаем пока очень мало. Поскольку эти силы, по крайней мере частично, обусловлены  $\pi$ -мезонами, выяснение характера взаимодействия этих последних с нуклонами имеет важное значение для построения последовательной теории ядерных взаимодействий.

В этом вопросе особое место принадлежит опытам по рассеянию  $\pi$ -мезонов на нуклонах, так как в них, в отличие, например, от фоторождения  $\pi$ -мезонов на нуклонах<sup>1</sup>, при достаточно больших энергиях ( $> 20$  Мэв) взаимодействие частиц с электромагнитным полем пренебрежимо мало и основную роль играет чисто ядерное рассеяние.

Настоящий обзор посвящён обсуждению как экспериментальных работ по рассеянию  $\pi$ -мезонов на нуклонах, так и попыток теоретического истолкования обнаруженных в опытах закономерностей.

В § 1 собраны результаты экспериментальных работ по рассеянию  $\pi$ -мезонов на водороде и дейтерии.

Главные результаты опытов таковы: во-первых, отношение сечений рассеяния положительных и отрицательных (включая перезарядку)  $\pi$ -мезонов на водороде заметно превышает единицу при 60 Мэв, а для 150 Мэв это отношение достигает примерно 3.

Рассеяние положительных и отрицательных  $\pi$ -мезонов на дейтерии оказывается одинаковым.

Во-вторых, заметный вклад в рассеяние даёт  $S$ -волна (в связи с чем в угловом распределении появляются члены  $\sim \cos \theta$ ). В-третьих, сечения рассеяния быстро растут с энергией; при энергиях  $\sim 200$  Мэв сечение для отрицательных  $\pi$ -мезонов достигает насыщения (для

$\pi^+$ -мезонов сечение измерено приблизительно до 150 Мэв). Полученное в опытах отношение между сечениями для  $\pi^+$ - и  $\pi^-$ -мезонов в водороде и дейтерии, повидимому, подтверждает гипотезу о зарядовой независимости ядерных сил. В наиболее общем виде, независимо от конкретного вида взаимодействия (предполагая зарядовую независимость), указанные соотношения между сечениями могут быть получены в теории изотопического спина. Этому вопросу посвящён § 2.

Несмотря на отсутствие последовательной теории взаимодействия  $\pi$ -мезонов и нуклеонов (см., например, <sup>3</sup>), важные заключения о характере сил, действующих между этими частицами, удаётся сделать на основе феноменологического анализа опытных данных по рассеянию. В § 3 проводится такой анализ, исходя из весьма общих положений фазовой теории рассеяния. Этот анализ позволяет найти соотношение между вкладом в рассеяние от различных состояний участвующих в рассеянии ( $S$ - и  $P$ -волн). Наиболее существенным результатом при этом является то, что вклад в рассеяние от  $S$ -волны оказывается сравнимым с вкладом от  $P$ -волн.

В заключение этого параграфа делается попытка найти экстраполяционную формулу для зависимости полного сечения от энергии.

Наконец, § 4 посвящён сравнению с опытными данными существующей мезонной теории взаимодействия  $\pi$ -мезонов и нуклеонов в приближении слабой и сильной связи, а также с учётом затухания. При этом рассматривается только один из вариантов теории, а именно симметричная псевдоскалярная мезонная теория с псевдовекторной (градиентной) связью. Такое ограничение обусловлено тем, что из ряда экспериментов можно заключить <sup>1, 2, 2а</sup>, что  $\pi$ -мезоны являются псевдоскалярными частицами. Другие опыты, в частности быстрый рост сечения рассеяния  $\pi$ -мезонов с энергией, частично могут быть поняты с точки зрения градиентной связи.

Сравнение результатов опубликованных на сегодняшний день исследований по рассеянию  $\pi$ -мезонов, основанных на теории мезонного поля, с экспериментальными данными приводит к неутешительным выводам. В особенности важно подчеркнуть, что в рассмотренных приближениях мезонная теория, предполагающая градиентную связь мезонов с нуклеонами, не в состоянии объяснить появление большой  $S$ -волны при рассеянии.

В конце § 4 обсуждаются некоторые возможные пути объяснения экспериментальных результатов.

## § 1. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Количество имеющихся в настоящее время экспериментальных работ по рассеянию  $\pi$ -мезонов невелико. Однако уже из имеющихся данных можно сделать ряд интересных заключений.

Мы не будем рассматривать результаты экспериментальных работ, в которых изучалось рассеяние  $\pi$ -мезонов на сложных ядрах,

поскольку влияние строения ядра значительно усложняет это явление, а ограничимся лишь рассмотрением рассеяния  $\pi$ -мезонов на протонах и на дейтеронах. При этом рассеяние  $\pi$ -мезонов на дейтеронах мы рассмотрим постольку, поскольку в ряде случаев можно пренебречь взаимодействием нуклеонов дейтерона.

Наиболее богатыми по результатам являются работы<sup>4-8</sup>. В этих работах получена энергетическая зависимость полных сечений рассеяния отрицательных<sup>4</sup> и положительных  $\pi$ -мезонов на протонах<sup>5</sup> и на дейтерии<sup>6</sup>. Кроме того, получено соотношение сечений упругого рассеяния отрицательных  $\pi$ -мезонов на протонах и их рассеяния с перезарядкой<sup>7</sup>, а также изучена угловая зависимость рассеяния отрицательных и положительных  $\pi$ -мезонов на протонах<sup>8</sup>.

Этот же круг вопросов исследовался также при меньших энергиях другими авторами как сходными<sup>9, 10, 11</sup>, так и иными методами<sup>12, 13</sup>.

В работах<sup>4-8</sup>  $\pi$ -мезоны образовывались при столкновениях с медными или бериллиевыми мишенями быстрых протонов, ускоренных до энергии 450 *Мэв*. После образования  $\pi$ -мезоны отклонялись магнитным полем фазотрона и входили в каналы, выводящие мезоны из фазотрона (рис. 1). При этом пучок положительных  $\pi$ -мезонов оказывался менее интенсивным, нежели пучок отрицательных  $\pi$ -мезонов. Последнее связано с тем, что выводимые из фазотрона отрицательные  $\pi$ -мезоны испускаются в направлении пучка протонов, а положительные — испускаются в обратном направлении, причём интенсивность испускания  $\pi$ -мезонов назад меньше интенсивности испускания вперёд. Пучок  $\pi$ -мезонов, выведенный из фазотрона, монохроматизовался и очищался, причём был получен хорошо коллимированный пучок  $\pi$ -мезонов с энергией, определённой с точностью  $\pm 3\%$ . Кроме  $\pi$ -мезонов, пучок содержал  $\mu$ -мезоны и электроны с тем же импульсом. В связи с этим вводились соответствующие поправки, учитывающие кулоновское рассеяние  $\mu$ -мезонов и электронов. Количество  $\mu$ -мезонов колебалось между пятью и десятью процентами, количество же электронов для пучков с энергией больше 100 *Мэв* было пренебрежимо мало. При меньших энергиях число электронов быстро росло. Поэтому для измерений при небольших энергиях использовался пучок  $\pi$ -мезонов с энергией 122 *Мэв*, на пути которого ставился бериллиевый поглотитель, понижающий энергию пучка.

Для измерения полных сечений рассеяния применялась следующая методика. Пучок  $\pi$ -мезонов фиксировался двумя сцинтилляционными

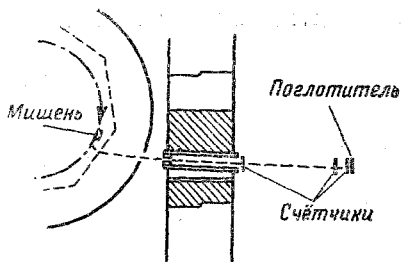


Рис. 1. Схема экспериментальной установки.

кристаллическими счётчиками площадью  $\sim 6,5 \text{ см}^2$ , находящимися на расстоянии метра друг от друга. Совпадения этих двух счётчиков указывали число частиц, входящих в камеру рассеяния. Камера могла

Таблица I

Полное сечение рассеяния положительных  $\pi$ -мезонов на водороде

Энергия [Мэв]	Сечение ( $10^{-27} \text{ см}^2$ )
$56 \pm 8$	$20 \pm 10$
$82 \pm 7$	$50 \pm 13$
$118 \pm 6$	$91 \pm 6$
$136 \pm 6$	$152 \pm 14$

Таблица II

Полное сечение рассеяния отрицательных  $\pi$ -мезонов на водороде

Энергия [Мэв]	Сечение ( $10^{-27} \text{ см}^2$ )
$89 \pm 8$	$21 \pm 8$
$112 \pm 6$	$31 \pm 9$
$135 \pm 6$	$52 \pm 6$
$176 \pm 6$	$66 \pm 6$
$217 \pm 6$	$60 \pm 6$

наполняться жидким водородом и опорожняться. Частицы, не выведенные из пучка рассеивателем, фиксировались совпадением двух сцинтилляционных счётчиков, один из которых имел диаметр 7,6 см,

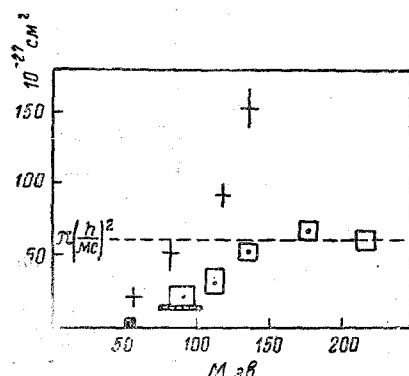


Рис. 2. Полное эффективное сечение рассеяния положительных (+) и отрицательных (□)  $\pi$ -мезонов на водороде как функция энергии падающих мезонов.

а второй — 10 см. В опыте регистрировались двойные совпадения первых двух счётчиков и одновременно четверные совпадения всех четырёх счётчиков. Ослабление пучка определялось из сравнения отношения четверных и двойных совпадений в случае наполненной рассеивающим веществом и в случае пустой камеры. Получаемые отсюда полные эффективные сечения рассеяния положительных и отрицательных  $\pi$ -мезонов на водороде представлены в таблицах I и II и на рис. 2.

Рассеяние положительных  $\pi$ -мезонов измерено для энергий от 60 Мэв до 150 Мэв, а отрицательных  $\pi$ -мезонов — от

80 Мэв до 230 Мэв. В области энергий  $\geq 100$  Мэв сечение рассеяния положительных  $\pi$ -мезонов оказывается примерно в три раза большим сечения рассеяния отрицательных  $\pi$ -мезонов. Полное сечение рассеяния отрицательных  $\pi$ -мезонов на водороде быстро растёт и при

150 *Мэв* достигает «геометрического» значения  $\pi(\hbar/\mu c)^2$ , после чего остаётся примерно постоянным.

На рис. 2 приведены также результаты работ <sup>9-11</sup> и <sup>13</sup>. В работах <sup>9-11</sup> эффективное сечение рассеяния  $\pi$ -мезонов на водороде определялось по разности ослаблений пучка  $\pi$ -мезонов в углероде и полиэтилене, а для регистрации частиц применялись счётчики. При этом в <sup>9</sup> для полного сечения рассеяния отрицательных  $\pi$ -мезонов с энергией 85 *Мэв* получено значение  $\sigma(p^-) = (13,3 \pm 1,1) \cdot 10^{-27} \text{ см}^2$ . В <sup>10</sup> для средней энергии мезонов 58 *Мэв* оказалось

$$\sigma(p^+) = (27,8 \pm 2,5) \cdot 10^{-27} \text{ см}^2, \quad \sigma(p^-) = (17,6 \pm 2,2) \cdot 10^{-27} \text{ см}^2.$$

При средней энергии пучка 37 *Мэв* в <sup>11</sup> исследовалось полное сечение рассеяния положительных  $\pi$ -мезонов на водороде. Измеренное сечение оказалось равным  $(12,4 \pm 3) \cdot 10^{-27} \text{ см}^2$ . Геометрия счётчиков исключала возможность регистрации частиц, рассеянных под малыми углами. Поэтому для получения полного сечения необходимо было сделать предположение о характере углового распределения. Предположение об изотропности сечения в системе центра инерции приводит к  $\sigma = (16,6 \pm 4) \cdot 10^{-27} \text{ см}^2$ , закон распределения  $\cos^2 \theta$  даёт  $20,8 \cdot 10^{-27} \text{ см}^2$ , а  $\sin^2 \theta$  даёт  $\sigma = 14,9 \cdot 10^{-27} \text{ см}^2$ .

В работах <sup>12</sup> и <sup>13</sup> рассеяние наблюдалось в камере Вильсона. В <sup>13</sup> при энергии 53 *Мэв* для рассеяния положительных  $\pi$ -мезонов протонами получено сечение величиной  $(20 \pm 4) \cdot 10^{-27} \text{ см}^2$ . При энергии 60 *Мэв* в <sup>12</sup> наблюдалось рассеяние отрицательных  $\pi$ -мезонов на водороде. Полученное там сечение равно  $\sim 3 \cdot 10^{-27} \text{ см}^2$ . Следует указать, что это сечение соответствует процессу, отличному от наблюдаемого в методе, использующем ослабление пучка.

Действительно, полное сечение рассеяния отрицательных  $\pi$ -мезонов складывается из сечений трёх процессов

$$\pi^- + p \rightarrow \pi^- + p, \quad (1.1)$$

$$\pi^- + p \rightarrow \pi^0 + n \rightarrow 2\gamma + n, \quad (1.2)$$

$$\pi^- + p \rightarrow n + \gamma. \quad (1.3)$$

В методе, использующем ослабление пучка, измеряется сечение всех трёх процессов. Напротив — в <sup>12</sup> измеряется лишь сечение процесса (1.1) (упругое рассеяние отрицательных  $\pi$ -мезонов).

При изучении рассеяния  $\pi$ -мезонов на дейтерии <sup>6</sup> измерялась разность ослабления пучка  $\pi$ -мезонов на мишенях  $\text{H}_2\text{O}$  и  $\text{D}_2\text{O}$ . Камера рассеяния в обоих случаях имела одинаковую форму и размеры и содержала примерно одинаковое число атомов на  $1 \text{ см}^2$ . Это приводило к тому, что потери энергии, кулоновское рассеяние, а также ядерные эффекты, обусловленные наличием кислорода, были примерно одинаковы в обоих случаях. Следовательно, полуразность наблюдаемых эффективных сечений рассеяния на  $\text{D}_2\text{O}$  и  $\text{H}_2\text{O}$  даёт разность

сечений рассеяния  $\pi$ -мезонов на дейтерии и водороде. Эта разность  $\sigma_D - \sigma_H$  с учётом поправок приведена в таблице III. В первом столбце этой таблицы указан телесный угол, под которым виден из рассеивающей мишени последний счётчик. Этот угол характеризует качество «геометрии» эксперимента. Важно, что значения сечения рассеяния при различной геометрии (различный телесный угол) согласуются с точностью до ошибок опыта.

Таблица III

Эффективное сечение рассеяния положительных и отрицательных  $\pi$ -мезонов на дейтерии

Телесный угол (сте- радиан)	Энергия (Мэв)	$\sigma_D - \sigma_H$ ( $10^{-27}$ см <sup>2</sup> )	$\sigma_H$ ( $10^{-27}$ см <sup>2</sup> )	$\sigma_D$ ( $10^{-27}$ см <sup>2</sup> )
		$\pi^-$	$\pi^-$	$\pi^-$
0,63	79 $\pm$ 10	34 $\pm$ 10	48 $\pm$ 10	54 $\pm$ 13
0,63	109 $\pm$ 15	72 $\pm$ 5	80 $\pm$ 10	103 $\pm$ 10
0,088	115 $\pm$ 9	88 $\pm$ 7	95 $\pm$ 15	124 $\pm$ 11
0,63	115 $\pm$ 9	84 $\pm$ 18	—	—
0,43	127 $\pm$ 15	84 $\pm$ 8	125 $\pm$ 15	129 $\pm$ 11
0,63	133 $\pm$ 9	76 $\pm$ 15	135 $\pm$ 15	128 $\pm$ 16
0,088	164 $\pm$ 9	139 $\pm$ 13	—	198 $\pm$ 12
0,63	164 $\pm$ 9	128 $\pm$ 14	—	—
0,088	179 $\pm$ 9	172 $\pm$ 10	—	234 $\pm$ 12
0,63	179 $\pm$ 9	163 $\pm$ 12	—	—
0,43	209 $\pm$ 15	131 $\pm$ 25	—	192 $\pm$ 26
		$\pi^+$	$\pi^+$	$\pi^+$
0,43	72 $\pm$ 17	24 $\pm$ 6	15 $\pm$ 8	60 $\pm$ 9
0,63	79 $\pm$ 10	31 $\pm$ 13	20 $\pm$ 8	79 $\pm$ 15
0,43	109 $\pm$ 15	29 $\pm$ 12	31 $\pm$ 9	109 $\pm$ 16
0,43	127 $\pm$ 15	26 $\pm$ 15	45 $\pm$ 10	151 $\pm$ 21

Во втором столбце приведены энергии  $\pi$ -мезонов. Эффективное сечение рассеяния  $\pi$ -мезонов на дейтерии получается добавлением  $\sigma_H$  к  $\sigma_D - \sigma_H$ . С точностью до ошибок опыта оно оказывается не зависящим от знака заряда  $\pi$ -мезонов. Такой же результат был получен в<sup>10</sup> для рассеяния на дейтерии мезонов со средней энергией 58 Мэв. Именно там получено:

$$\sigma(d^+) = (38,3 \pm 3,1) \cdot 10^{-27} \text{ см}^2; \quad \sigma(d^-) = (32,8 \pm 3,1) \cdot 10^{-27} \text{ см}^2.$$

На рис. 3 представлено сечение рассеяния  $\pi$ -мезонов на дейтерии, а также для сравнения приведена сумма  $\sigma_H(\pi^+) + \sigma_H(\pi^-)$ . На сравнении этих данных мы остановимся ниже.

Вернёмся вновь к рассеянию отрицательных  $\pi$ -мезонов. Оценки, основанные на принципе детального равновесия, указывают на то, что сечение процесса (1.3), являющегося обратным процессу фоторождения  $\pi$ -мезона  $\gamma$ -квантом на нейтроне<sup>1</sup>, имеет величину порядка нескольких единиц  $10^{-27} \text{ см}^2$ , а следовательно, много меньше полного сечения рассеяния отрицательных  $\pi$ -мезонов, которое при энергии 120 Мэв составляет примерно  $40 \cdot 10^{-27} \text{ см}^2$ . Далее, важно разделить вклады в эту величину от процессов (1.1) и (1.2).

Методика исследования<sup>7</sup> рассеяния с перезарядкой [процесс (1.2)] незначительно отличалась от используемой при изучении полного рассеяния и прежде всего тем, что третий и четвёртый счётчики уже не ставились на пути пучка, а располагались под углом  $90^\circ$  к пучку  $\pi$ -мезонов.

Для регистрации  $\gamma$ -квантов перед третьим счётчиком была расположена свинцовая пластина толщиной  $\sim 0,6 \text{ см}$ . Измерение сводилось к определению отношения чисел рассеянных и падающих частиц при наличии водорода в камере рассеяния и без него, а также со свинцом и без него. При этом можно провести разделение событий, обусловленных рассеянными отрицательными  $\pi$ -мезонами, и событий, обусловленных  $\gamma$ -квантами. Для телесного угла, под которым видны из рассеивателя вторые два счётчика, отношение четверных совпадений к двойным, обусловленное  $\pi$ -мезонами, рассеивающимися с энергией 118 Мэв, равно  $(0,34 \pm 0,12) \cdot 10^{-4}$ , а обусловленное фотонами  $(1,41 \pm 0,32) \cdot 10^{-4}$ . Для получения полных сечений процессов (1.1) и (1.2) необходимо сделать предположение о характере углового распределения. Если принять угловое распределение в системе центра инерции изотропным и учесть, что  $\gamma$ -кванты образуются парами при распаде нейтрального  $\pi$ -мезона, то сечения процессов (1.1) и (1.2) оказываются соответственно равными  $(10 \pm 4) \cdot 10^{-27} \text{ см}^2$  и  $(20 \pm 5) \cdot 10^{-27} \text{ см}^2$ . Таким образом, рассеяние с перезарядкой обладает сечением, примерно в два раза превышающим сечение упругого рассеяния отрицательных  $\pi$ -мезонов. Этот результат подтверждается и в опыте по исследованию углового распределения (табл. IV см. стр. 332).

Измерения дифференциальных эффективных сечений в<sup>8</sup> проводились на основании той же методики. Вторая пара счётчиков распола-

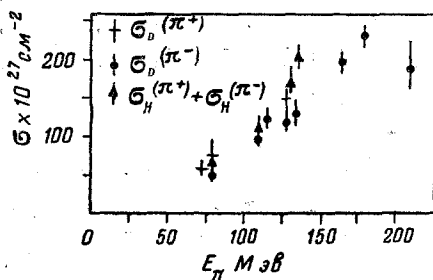


Рис. 3. Полное эффективное сечение рассеяния  $\pi$ -мезонов на дейтерии. Для сравнения нанесены точки, соответствующие  $\sigma_H(\pi^+) + \sigma_H(\pi^-)$ .

Таблица IV

Энергия [Мэв]	Процесс	$a$ $(10^{-27} \frac{\text{см}^2}{\text{стр}})$	$b$ $(10^{-27} \frac{\text{см}^2}{\text{стр}})$	$c$ $(10^{-27} \frac{\text{см}^2}{\text{стр}})$	$\int \frac{d\sigma}{d\Omega}$ $(10^{-27} \text{см}^2)$
110	$\pi^+ \rightarrow \pi^+$	$3,5 \pm 0,6$	$-4,6 \pm 0,8$	$7,2 \pm 1,8$	$74,5 \pm 5,4$
135	$\pi^+ \rightarrow \pi^+$	$3,8 \pm 2,2$	$-6,8 \pm 2,7$	$17,5 \pm 6,6$	$121 \pm 19$
135	$\pi^- \rightarrow \pi^-$	$1,2 \pm 0,2$	$-0,1 \pm 0,3$	$0,3 \pm 0,7$	$16,2 \pm 2,3$
135	$\pi^- \rightarrow \pi^0$	$1,1 \pm 0,6$	$-2,5 \pm 0,5$	$6,3 \pm 1,9$	$40,6 \pm 2,3$

галась под тем углом к пучку  $\pi$ -мезонов, под которым изучались продукты рассеяния. Рассеяние с перезарядкой отличалось от упругого рассеяния отрицательных  $\pi$ -мезонов путём помещения свинцовой пластинки перед второй парой счётчиков. Было измерено угловое распределение упругого рассеяния положительных  $\pi$ -мезонов при 110 Мэв и 135 Мэв, а также упругое рассеяние и рассеяние с перезарядкой отрицательных  $\pi$ -мезонов при энергии 135 Мэв. Наблюдения производились под углами к пучку мезонов (в лабораторной системе координат)  $45^\circ$ ,  $90^\circ$  и  $135^\circ$ .

В системе центра инерции результаты могут быть выражены с помощью формулы:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = a + b \cos \vartheta + c \cos^2 \vartheta. \quad (1.4)$$

Коэффициенты  $a$ ,  $b$  и  $c$  приведены в таблице IV вместе со статистическими ошибками. Полные сечения, получаемые интегрированием (1.4) по углам, находятся в хорошем согласии со значениями, приведёнными выше (см. табл. I и II).

Угловое распределение при рассеянии положительных  $\pi$ -мезонов с энергией 53 Мэв на протонах

наблюдалось в камере Вильсона<sup>13</sup>. Полученное при этом дифференциальное сечение (рис. 4) определено со значительной ошибкой. Но несмотря на это, оно всё же, повидимому, говорит о том, что угловое распределение заметно отклоняется от изотропного.

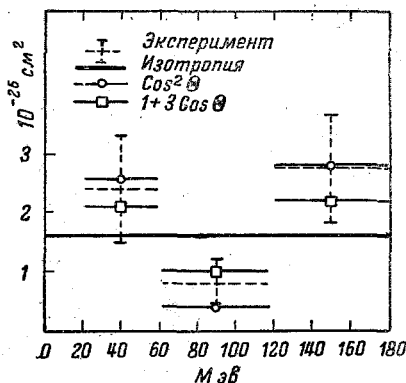


Рис. 4. Угловое распределение положительных  $\pi$ -мезонов, рассеянных на протонах при энергии 53 Мэв.



## § 2. ТЕОРИЯ ИЗОТОПИЧЕСКОГО СПИНА

Взаимодействуя с заряженными  $\pi$ -мезонами, протон и нейтрон могут превращаться друг в друга. (Например, протон, поглощая отрицательный  $\pi$ -мезон, превращается в нейтрон). При рассмотрении таких превращений удобно трактовать протон и нейтрон как два состояния одной и той же частицы, которую называют нуклеоном. Оба состояния нуклеона характеризуют значением зарядовой переменной (заряда), причём она равна 1 в протонном состоянии нуклеона и 0 — в нейтронном.

Волновая функция нуклеона, помимо координат и спина, должна зависеть от зарядовой переменной, пробегаящей два значения. По аналогии с обычным спином можно ввести эту зависимость, представив волновую функцию нуклеона в виде

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

Условие нормировки волновой функции на единицу налагает требование

$$|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 = 1.$$

Если теперь предположить, что в протонном состоянии нуклеона отлична от нуля верхняя компонента  $\psi$ , а в нейтронном — нижняя, то волновые функции этих состояний будут иметь следующий вид:

$$\psi_p = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

По аналогии с теорией спина операторы, действующие на зарядовую переменную (или, что то же самое, на двухкомпонентные функции (2.1) и (2.2)), называются операторами изотопического спина\*).

Можно ввести три матрицы  $1/2 \tau_x$ ,  $1/2 \tau_y$  и  $1/2 \tau_z$ , образующие вектор изотопического спина  $\tau$

$$\begin{aligned} 1/2 \tau_x &= 1/2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad 1/2 \tau_y = 1/2 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \\ 1/2 \tau_z &= 1/2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

которые по виду полностью совпадают с матрицами  $1/2 \sigma_x$ ,  $1/2 \sigma_y$  и  $1/2 \sigma_z$  обычного спина, но имеют совершенно отличный от них физический смысл. Если в теории спина собственные значения оператора  $1/2 \sigma_z$  определяют проекцию спина частицы на ось  $z$ , то оператор  $1/2 \tau_z$  в теории изотопического спина непосредственного

\*) Впервые изотопический спин был введён в теорию при рассмотрении  $\beta$ -распада<sup>14</sup>.

физического смысла не имеет. Однако с его помощью можно построить оператор заряда нуклона  $q$ . Действительно, нетрудно проверить, что оператор

$$q = \frac{1 + \tau_z}{2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.4)$$

будучи применён к функции  $\psi_p$ , даёт единицу, а к функции  $\psi_N$  — нуль. Следовательно, собственные значения этого оператора равны  $\lambda = 1$  и  $\lambda = 0$ , в зависимости от того, находится нуклон в протонном или нейтронном состоянии (заряд нуклона равен  $e\lambda$ ).

Вместо двух других операторов  $\tau_x$  и  $\tau_y$  в теории чаще пользуются операторами возникновения и исчезновения заряда  $\tau$  и  $\tau^*$ <sup>17, 18</sup>, которые выражаются в виде линейной комбинации  $\tau_x$  и  $\tau_y$ ,

$$\left. \begin{aligned} \tau &= \frac{1}{2}(\tau_x + i\tau_y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \tau^* &= \frac{1}{2}(\tau_x - i\tau_y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

Операторы  $\tau$  и  $\tau^*$  действуют на  $\psi_p$  и  $\psi_N$  следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \tau\psi_p &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \psi_N, \quad \tau\psi_N = 0, \\ \tau^*\psi_p &= 0; \quad \tau^*\psi_N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \psi_p. \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

Оператор  $\tau$  превращает протон в нейтрон, оператор  $\tau^*$  — нейтрон в протон.

Заметим, что если рассматривать  $\psi$ -функцию нуклона как спинор в некотором трёхмерном изотопическом пространстве, то  $i\tau_x$ ,  $i\tau_y$ ,  $i\tau_z$  будут представлять собой операторы бесконечно малого поворота спинора  $\psi$ . На языке теории групп<sup>19</sup> говорят, что матрицы  $\tau_x$ ,  $\tau_y$ ,  $\tau_z$  и единичная матрица образуют представление двухмерной группы вращений в трёхмерном изотопическом пространстве.

В том случае, когда нуклоны взаимодействуют как с заряженными, так и с нейтральными мезонами, оказывается плодотворным, помимо изотопического спина нуклона, введение также операторов изотопического спина мезона<sup>20, 21</sup>. Действительно, три сорта  $\pi$ -мезонов:  $\pi^+$ ,  $\pi^-$  и  $\pi^0$  можно рассматривать как три различных состояния одной и той же частицы. Волновая функция такой частицы, в отличие от волновой функции нуклона<sup>21</sup>, должна обладать тремя компонентами

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix}, \quad (2.7)$$

соответственно трём возможным зарядовым состояниям  $\pi$ -мезона. Примем, с учётом нормировки, что для положительного, отрицательного

и нейтрального  $\pi$ -мезонов  $\varphi$  имеет вид

$$\varphi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \varphi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

Аналогично изотопическому спину нуклона  $\tau$  можно ввести вектор изотопического спина мезона  $T$ . Поскольку волновая функция (2.7) имеет три компоненты, проекции оператора на различные оси будут представлять собой матрицы с тремя строками и столбцами. Эти матрицы имеют следующий вид <sup>16\*</sup>):

$$T_x = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad T_y = \begin{pmatrix} 0 & i/\sqrt{2} & 0 \\ -i/\sqrt{2} & 0 & i/\sqrt{2} \\ 0 & -i/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix},$$

$$T_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

По виду они в точности совпадают с матрицами  $-M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_z$  орбитального момента количества движения в состоянии с  $l=1$  (орбитальный момент равен единице) <sup>16</sup>. Поэтому иногда оператор изотопического спина мезона называют оператором орбитального изотопического момента.

Собственные значения оператора  $T_z$  в состояниях  $\varphi_+$ ,  $\varphi_-$  и  $\varphi_0$  равны соответственно  $+1$ ,  $-1$  и  $0$ .

Мы видим, таким образом, что для мезона, в отличие от случая нуклона, оператор заряда просто равен  $T_z$  — проекции изотопического спина мезона на ось  $Z$ .

Волновую функцию мезона (2.7) можно рассматривать как вектор  $\varphi$  в изотопическом пространстве. Компоненты этого вектора  $\varphi_x$ ,  $\varphi_y$  и  $\varphi_z$  могут быть выражены через волновые функции  $\varphi_+$ ,  $\varphi_-$  и  $\varphi_0$  положительного, отрицательного и нейтрального мезонов. Именно:

$$\varphi_x = \frac{1}{\sqrt{2}} (\varphi_+ + \varphi_-), \quad \varphi_y = \frac{i}{\sqrt{2}} (\varphi_- - \varphi_+), \quad \varphi_z = \varphi_0. \quad (2.10)$$

При различных преобразованиях в изотопическом пространстве эти величины преобразуются друг в друга.

Проекции вектора изотопического спина мезона  $T$ , будучи умножены на  $i$ , являются операторами бесконечно малого поворота вектора  $\varphi$  в изотопическом пространстве и совместно с единичной матрицей

\* Оператор  $T$  можно выразить также через операторы поглощения и испускания мезонов  $a^*$  и  $a$ :  $T = i(a^* a)$ , где проекции  $a$  (соответственно  $a^*$ ) относятся к различным зарядовым состояниям  $\pi$ -мезона <sup>22</sup>.

задают трёхмерное представление трёхмерной группы вращений в этом пространстве.

Перейдём теперь к рассмотрению изотопических свойств простейшей системы, образованной из  $\pi$ -мезона \*) и нуклеона.

Такую систему, так же как и каждую входящую в неё частицу, можно характеризовать полным изотопическим моментом  $I$ , оператор которого будет складываться из оператора изотопического спина нуклеона  $1/2\tau$  и оператора изотопического спина мезона  $T$

$$I = 1/2\tau + T. \quad (2.11)$$

Оператор полного заряда системы мезон — нуклеон будет равняться сумме операторов заряда каждой частицы

$$\varphi = q + T_z = \frac{1}{2} + I_z. \quad (2.12)$$

Чтобы получить собственные функции системы, состоящей из  $\pi$ -мезона и нуклеона, мы должны построить всевозможные произведения из функции  $\psi$  и  $\varphi$ . Всего имеется шесть различных собственных функций:

$$\left. \begin{aligned} (p^+) &= \varphi_+ \psi_p, & (p^-) &= \varphi_- \psi_p, & (p^0) &= \varphi_0 \psi_p, \\ (n^+) &= \varphi_+ \psi_n, & (n^-) &= \varphi_- \psi_n, & (n^0) &= \varphi_0 \psi_n. \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

Здесь через  $(p^+)$  обозначена функция системы, состоящей из положительного мезона и протона и т. д. Выписанные функции, вообще говоря, не являются собственными функциями квадрата оператора полного изотопического момента системы  $(I)^2$ .

Однако, взяв определённые линейные комбинации функций (2.13), можно построить собственные функции  $(I)^2$ , одновременно принадлежащие заданному значению проекции  $I_z$  полного момента на ось  $z$ .

Всего таких функций будет также шесть, причём две будут принадлежать состоянию, в котором  $(I)^2 = \frac{1}{2}(\frac{1}{2} + 1)$  (для простоты мы будем ниже говорить, что  $I = \frac{1}{2}$ ), а  $I_z = \pm \frac{1}{2}$ , и четыре — состоянию, в котором  $I = \frac{3}{2}$ , а  $I_z$  принимает значения  $\pm \frac{1}{2}$ ,  $\pm \frac{3}{2}$ ; эти функции имеют следующий вид <sup>21, 23 \*</sup>:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{1/2}^{1/2} &= -\sqrt{1/3} \varphi_0 \psi_p + \sqrt{2/3} \varphi_+ \psi_n, \\ \Phi_{1/2}^{-1/2} &= -\sqrt{2/3} \varphi_- \psi_p + \sqrt{1/3} \varphi_0 \psi_n. \end{aligned} \right\} \quad (2.14a)$$

\*) Под  $\pi$ -мезоном мы здесь подразумеваем, как и выше, частицу, могущую находиться в трёх зарядовых состояниях.

\*\*) В том, что  $(I)^2 \Phi_{I_z}^{3/2} = \frac{3}{2}(\frac{3}{2} + 1) \Phi_{I_z}^{3/2}$  (соответственно для  $\Phi_{I_z}^{1/2}$ ), можно убедиться непосредственной проверкой.

для состояний, в которых  $I = 1/2$ , и

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{1/2}^{3/2} &= \varphi_+ \psi_p; & \Phi_{1/2}^{1/2} &= \sqrt{2/3} \varphi_0 \psi_p + \sqrt{1/3} \varphi_+ \psi_N, \\ \Phi_{-1/2}^{3/2} &= \varphi_- \psi_N; & \Phi_{-1/2}^{1/2} &= \sqrt{1/3} \varphi_- \psi_p + \sqrt{2/3} \varphi_0 \psi_N \end{aligned} \right\} \quad (2.14б)$$

для состояний с  $I = 3/2$ . Верхний индекс в этих формулах указывает значение  $I$ , а нижний — значение  $I_z$ . Все функции  $\Phi_{I_z}^I$  ортогональны между собой и нормированы на единицу. Из формул (2.14), в частности, вытекает, что в системе, состоящей из положительного  $\pi$ -мезона и протона или из отрицательного  $\pi$ -мезона и нейтрона как полный изотопический момент  $I$ , так и его проекция  $I_z$  имеют определённые значения.

Функции (2.13) в свою очередь могут быть представлены с помощью формул (2.14а) и (2.14б) в виде суперпозиции состояний с определёнными  $I$  и  $I_z$

$$\left. \begin{aligned} (p^+) &= \Phi_{1/2}^{3/2}; & (p^-) &= \sqrt{1/3} \Phi_{-1/2}^{3/2} - \sqrt{2/3} \Phi_{-1/2}^{1/2}; \\ (p^0) &= \sqrt{2/3} \Phi_{+1/2}^{3/2} - \sqrt{1/3} \Phi_{1/2}^{1/2}; & (n^+) &= \sqrt{1/3} \Phi_{1/2}^{3/2} + \sqrt{2/3} \Phi_{1/2}^{1/2}; \\ (n^-) &= \Phi_{-1/2}^{3/2}; & (n^0) &= \sqrt{2/3} \Phi_{-1/2}^{3/2} + \sqrt{1/3} \Phi_{-1/2}^{1/2}. \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

В общем случае при произвольном взаимодействии  $\pi$ -мезона с нуклоном полученные выше соотношения (2.14) и (2.15) приносят малую пользу. Напротив, в случае так называемого симметричного взаимодействия<sup>24</sup>, приводящего, в частности, к зарядовой независимости ядерных сил\*), из формул (2.14) и (2.15) можно получить ряд интересных результатов. Специфическим для симметричной теории взаимодействия является предположение о том, что протон и нейтрон обладают одинаковыми константами взаимодействия с заряженными мезонами, а константы их взаимодействия с нейтральными мезонами имеют противоположные знаки. Отсюда следует, что гамильтониан взаимодействия в симметричной теории пропорционален скалярному произведению  $\tau\varphi$  оператора изотопического спина нуклона  $\tau$  и вектора  $\varphi$  и является инвариантом относительно вращений в изотопическом пространстве. Известно, однако, что инвариантность гамильтониана относительно некоторого преобразования означает, что в процессе взаимодействия сохраняется определённая физическая величина. В данном случае инвариантность гамильтониана относительно поворотов в изотопическом

\*) Под зарядовой независимостью здесь подразумевается равенство сил между нуклонами, находящимися в различных зарядовых состояниях<sup>25</sup>. Зарядовая независимость ядерных сил, повидимому, подтверждается на опыте.

пространстве связана с сохранением полного изотопического момента системы, образованной из  $\pi$ -мезона и нуклеона. Заметим, что сохранение полного изотопического момента означает нечто большее, чем просто сохранение полного заряда системы. Последний сохраняется при любых взаимодействиях, в то время как для сохранения  $I$  требуется инвариантность гамильтониана относительно вращений в изотопическом пространстве \*).

Имеются основания полагать, что сохранение полного изотопического момента при ядерных взаимодействиях фактически имеет место в природе \*\*). Поэтому естественно положить в основу дальнейшего рассмотрения не конкретный вид гамильтониана взаимодействия, свойственного симметричной теории, а именно предположение о сохранении полного изотопического момента  $I$  в любых процессах ядерного взаимодействия  $\pi$ -мезонов с нуклеонами \*\*\*).

Применим это положение к рассеянию  $\pi$ -мезонов нуклеонами. Обозначим матричные элементы перехода из начального состояния в конечное через:  $(p^+, p^+)$  — для рассеяния положительного  $\pi$ -мезона на протоне;  $(p^-, p^-)$  — для рассеяния отрицательного  $\pi$ -мезона на протоне;  $(p^0, p^-)$  — для рассеяния отрицательного  $\pi$ -мезона с перезарядкой, и аналогично для рассеяния на нейтроне. Используя закон сохранения полного изотопического момента (который проявится в том, что матричные элементы перехода между состояниями с различными  $I$  и  $I_z$  должны исчезать), с помощью волновых функций (2.14) находим:

$$\left. \begin{aligned} (p^+, p^+) &= (\Phi^{3/2} | \Phi^{3/2}), \\ (p^-, p^-) &= \frac{1}{3} \{ (\Phi^{3/2} | \Phi^{3/2}) + 2(\Phi^{1/2} | \Phi^{1/2}) \}, \\ (p^0, p^-) &= \frac{\sqrt{2}}{3} \{ (\Phi^{3/2} | \Phi^{3/2}) - (\Phi^{1/2} | \Phi^{1/2}) \} \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

и аналогичные формулы для рассеяния на нейтроне. Проекция изотопического спина не выписывается, так как взаимодействие не зависит от  $I_z$  при заданном  $I$ .

\*) В первом исчезающем приближении теории возмущений симметричная теория приводит к потенциалу взаимодействия двух нуклеонов, в который входят только инвариантные комбинации типа  $(\tau_1 \tau_2)$  где  $\tau_i$  — оператор изотопического спина  $i$ -го нуклеона ( $i = 1, 2$ ).

\*\*) Заметим, что в случае взаимодействия с электромагнитным полем закон сохранения полного изотопического момента нарушается. Например, два протона в  $S$  состоянии взаимодействуют иначе, чем два нейтрона в том же состоянии, благодаря наличию кулоновских сил между протонами.

\*\*\*) Единственное требование, налагаемое при этом на гамильтонианы взаимодействия, — инвариантность относительно поворотов в изотопическом пространстве. Такое взаимодействие мы в общем случае будем называть зарядово-независимым.

Для сечений, которые пропорциональны квадратам матричных элементов, получается<sup>21, 26</sup>

$$\left. \begin{aligned} d\sigma(p^+, p^+) &= d\sigma^{3/2}, \\ d\sigma(p^-, p^-) &= \frac{1}{9} [d\sigma^{3/2} + 4d\sigma^{1/2} + 4(d\sigma^{3/2} d\sigma^{1/2})^{1/2} \cos \varphi], \\ d\sigma(p^0, p^-) &= \frac{2}{9} [d\sigma^{3/2} + d\sigma^{1/2} - 2(d\sigma^{3/2} d\sigma^{1/2})^{1/2} \cos \varphi], \end{aligned} \right\} (2.17)$$

где:

$$d\sigma^{3/2} = |(\Phi^{3/2} | \Phi^{3/2})|^2, \quad d\sigma^{1/2} = |(\Phi^{1/2} | \Phi^{1/2})|^2,$$

$$\begin{aligned} 2(d\sigma^{1/2} d\sigma^{3/2})^{1/2} \cos \varphi &= \\ &= (\Phi^{3/2} | \Phi^{3/2})^* (\Phi^{1/2} | \Phi^{1/2}) (\Phi^{1/2} | \Phi^{1/2}) (\Phi^{3/2} | \Phi^{3/2}), \end{aligned}$$

$\cos \varphi$  — неопределённый фазовый множитель, зависящий от энергии и углов.

Отметим, что члены, пропорциональные  $\cos \varphi$ , появляются вследствие интерференции при рассеянии  $\Phi$ -волн, отвечающих значениям полного изотопического момента  $I = 3/2$  и  $1/2$ . Полное сечение для отрицательных  $\pi$ -мезонов, однако, не зависит от  $\varphi$ .

Из формул (2.17) очевидно, что, вообще говоря,  $d\sigma(p^+, p^+) \neq d\sigma(p^-, p^-)$  для произвольного взаимодействия, инвариантного относительно поворотов в изотопическом пространстве. Отношение сечений для  $\pi^-$ - и  $\pi^+$ -мезонов на протоне согласно (2.17) равно

$$\frac{d\sigma(p^-, p^-) + d\sigma(p^0, p^-)}{d\sigma(p^+, p^+)} = 1/3 + 2/3 (d\sigma^{1/2} / d\sigma^{3/2}) \quad (2.18)$$

и может меняться в широких пределах от  $1/3$  до произвольно большой величины, в зависимости от величины взаимодействия в состоянии с  $I = 1/2$ .

Экспериментальные данные (см. § 1) указывают на то, что это отношение близко к  $1/3$ . Отсюда следует, что основной вклад в рассеяние  $\pi$ -мезонов на нуклеонах дают состояния с полным изотопическим моментом  $I = 3/2$ , в то время как в состоянии с  $I = 1/2$  рассеяние повидимому, заметно слабее.

Если предположить, что  $d\sigma^{1/2} = 0$  (взаимодействие в состояниях с  $I = 1/2$  полностью отсутствует), то из (2.17) вытекает

$$d\sigma(p^+, p^+) : d\sigma(p^-, p^-) : d\sigma(p^0, p^-) = 9:1:2. \quad (2.19)$$

Соотношение (2.19), по всей вероятности, подтверждается на опыте, что свидетельствует в пользу зарядово-независимого (и в частности симметричного) взаимодействия.

Для сечений рассеяния  $\pi$ -мезонов на нейтроне можно получить формулы, совершенно аналогичные формулам (2.17), причём оказы-

вается, что

$$\left. \begin{aligned} d\sigma(p^-, p^-) &= d\sigma(p^+, p^+); \\ d\sigma(p^+, p^+) &= d\sigma(p^-, p^-); \\ d\sigma(p^0, p^+) &= d\sigma(p^0, p^-). \end{aligned} \right\} \quad (2.20)$$

Следовательно, между этими сечениями имеют место соотношения (2.18) и (2.19) с заменой в них  $\pi^+$  на  $\pi^-$ .

Формулы (2.20) могут быть проверены в опытах по рассеянию  $\pi$ -мезонов на дейтеронах. Если принять, что частицы дейтерона рассеивают мезоны независимо, то полное сечение рассеяния на дейтероне будет равно сумме сечений на протоне и нейтроне\*)

$$\left. \begin{aligned} d\sigma(d^+, d^+) &= d\sigma(p^+, p^+) + d\sigma(n^+, n^+), \\ d\sigma(pp^0, d^+) &= d\sigma(p^0, p^+), \\ d\sigma(d^-, d^-) &= d\sigma(p^-, p^-) + d\sigma(n^-, n^-), \\ d\sigma(nn^0, d^-) &= d\sigma(n^0, p^-). \end{aligned} \right\} \quad (2.21)$$

С силу (2.20) из (2.21) следует, что

$$d\sigma(d^+, d^+) + d\sigma(pp^0, d^+) = d\sigma(d^-, d^-) + d\sigma(nn^0, d^-). \quad (2.22)$$

Таким образом в предположении независимого рассеяния  $\pi$ -мезонов нуклеонами дейтерона зарядсво-независимая и, в частности, симметричная теория приводят к равенству полных сечений рассеяния положительных и отрицательных  $\pi$ -мезонов на дейтероне. Такое равенство, повидимому, подтверждается опытом (§ 1).

С помощью формул (2.17), (2.20) и (2.22) полное сечение рассеяния заряженных  $\pi$ -мезонов дейтроном можно представить в виде

$$d\sigma(d^+) = d\sigma(d^-) = \frac{4}{3} d\sigma^{3/2} + \frac{2}{3} d\sigma^{1/2}. \quad (2.23)$$

В предположении, что взаимодействие в состояниях с  $I = \frac{1}{2}$  слабо, можно пренебречь вторым слагаемым в (2.23). Тогда получится, что

$$d\sigma(d^+) : d\sigma(p^+, p^+) : [d\sigma(p^-, p^-) + d\sigma(n^0, p^-)] = 4:3:1. \quad (2.24)$$

Отметим, что точность имеющихся в настоящее время экспериментальных данных ещё недостаточна, чтобы однозначно заключить о роли в рассеянии состояний с полным изотопическим моментом  $I = \frac{1}{2}$ .

Всё сделанное выше может быть обобщено на случай систем, состоящих из произвольного числа мезонов и нуклеонов.

\*) Здесь и ниже не принимаются во внимание реакции типа  $(2p, d^+)$  и  $(2p, d^-)$ , идущие с относительно малым сечением при энергиях  $\sim \mu c^2$ .



### § 3. ОБЩАЯ ТЕОРИЯ РАССЕЯНИЯ $\pi$ -МЕЗОНОВ НУКЛЕОНАМИ И ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ОПЫТНЫХ ДАННЫХ

Для того чтобы получить возможность интерпретировать результаты экспериментов по рассеянию  $\pi$ -мезонов нуклеонами, необходимо располагать некоторыми основными формулами теории рассеяния. Прежде всего мы получим формулы для эффективных сечений рассеяния  $\pi$ -мезонов нуклеонами, выраженные через фазы. Зависимость фаз от энергии может быть получена из сравнительно простых качественных предположений. Ниже также будут получены выражения для эффективных сечений рассеяния  $\pi$ -мезонов как функции энергии сталкивающихся частиц.

Задача о рассеянии  $\pi$ -мезонов нуклеонами сводится к задаче движения одного тела с помощью обычного перехода к системе координат, в которой покоится центр инерции сталкивающихся частиц. Импульс и полную энергию мезона в этой системе координат обозначим посредством  $k$  и  $\mathcal{E}$ , а угол рассеяния посредством  $\vartheta$ . Для величин в лабораторной системе координат, в которой нуклеон покоится, используем следующие обозначения:  $x$  — импульс падающего мезона,  $E = \sqrt{x^2 + \mu^2}$  —  $\mu$  — кинетическая энергия мезона,  $\mu$  — масса мезона (везде принимаем систему единиц  $\hbar = c = 1$ ),  $\theta_1$  — угол рассеяния  $\pi$ -мезона,  $\theta_2$  — угол между направлением движения нуклеона отдачи и импульсом падающего  $\pi$ -мезона.

$\vartheta$  и  $k$  следующим образом связаны с энергией и углами отклонения частиц в лабораторной системе координат \*):

$$k = E^{1/2} (E + 2\mu)^{1/2} \left[ 1 + 2 \frac{E}{M} + 2 \frac{\mu}{M} + \left( \frac{\mu}{M} \right)^2 \right]^{-1/2}, \quad (3.1)$$

$$\cos \theta_1 = \frac{\mathcal{E}_1 (E + \mu + M) - (E + \mu) M - \mu^2}{E^{1/2} (E + 2\mu)^{1/2} k}, \quad (3.2)$$

$$\cos \theta_2 = \frac{(E + \mu + M) (\mathcal{E}_2 - M)}{E^{1/2} (E + 2\mu)^{1/2} k}, \quad (3.3)$$

где

$$\mathcal{E}_1 = E + \mu - \frac{ME(E + 2\mu)}{\mu^2 + M^2 + 2ME + 2M\mu} (1 - \cos \vartheta), \quad (3.4)$$

$$\mathcal{E}_2 = M + E + \mu - \mathcal{E}_1. \quad (3.5)$$

Ниже мы везде будем пользоваться системой координат, в которой покоится центр инерции, а формулы (3.1)—(3.5) следует использовать для пересчета при переходе от лабораторной системы координат.

Волновая функция системы, состоящей из  $\pi$ -мезона и нуклеона, представляет собой многокомпонентную функцию. При этом, как мы

\*) В связи с этими формулами см. 27.

уже видели в предыдущем параграфе, она может быть представлена в виде суперпозиции шести функций, соответствующих шести возможным зарядовым состояниям. Далее, каждое состояние с определёнными значениями изотопических квантовых чисел (полного изотопического момента и его проекции на ось  $z$ ), кроме того, должно характеризоваться направлением спина нуклона и знаком его энергии. Поэтому каждая из зарядовых функций сама по себе должна представлять собой биспинор Дирака. Простоты ради мы сначала ограничимся рассмотрением одного зарядового состояния. Тогда волновая функция, описывающая рассеяние в таком зарядовом состоянии, имеет четыре компоненты  $\psi_1^{I, I_z}$ ,  $\psi_2^{I, I_z}$ ,  $\psi_3^{I, I_z}$ ,  $\psi_4^{I, I_z}$ , асимптотическое поведение которых на больших расстояниях определяется формулой<sup>28</sup>

$$\psi_\mu^{I, I_z} \simeq a_\mu^{I, I_z} e^{ikz} + \frac{f_\mu^{I, I_z}(\vartheta, \varphi) e^{ikr}}{r} \quad (\mu = 1, 2, 3, 4). \quad (3.6)$$

Если рассматривать нуклоны нерелятивистски, то можно ограничиться двухкомпонентными функциями, соответствующими спинорам Паули. Однако и при релятивистском рассмотрении нуклонов в задаче рассеяния можно ограничиться лишь двухкомпонентными функциями. Это обусловлено тем, что четыре величины  $a_\mu$ , а в свою очередь и четыре величины  $f_\mu$  не являются взаимно независимыми, причём независимыми являются лишь две компоненты соответственно двум возможным ориентациям спина нуклона\*). Учтя это, получаем следующее выражение для дифференциального сечения рассеяния

$$d\sigma^{I, I_z} = \frac{|f_1^{I, I_z}|^2 + |f_2^{I, I_z}|^2}{|a_1|^2 + |a_2|^2} d\Omega. \quad (3.7)$$

Волновая функция системы из  $\pi$ -мезона и нуклона может быть представлена в виде разложения в ряд по собственным функциям полного момента. Для двухкомпонентных спинорных функций такое разложение имеет следующий вид<sup>29</sup>:

$$\begin{aligned} \psi^{I, I_z} = & \sum_{m; l=0}^{\infty} a_{l+, m}^{I, I_z} \left( \begin{array}{c} \sqrt{l+m+\frac{1}{2}} Y_{l, m-\frac{1}{2}}(\vartheta, \varphi) \\ -\sqrt{l-m+\frac{1}{2}} Y_{l, m+\frac{1}{2}}(\vartheta, \varphi) \end{array} \right) R_{l+}^{I, I_z}(r) + \\ & + \sum_{m; l=1}^{\infty} a_{l-, m}^{I, I_z} \left( \begin{array}{c} \sqrt{l-m+\frac{1}{2}} Y_{l, m-\frac{1}{2}}(\vartheta, \varphi) \\ \sqrt{l+m+\frac{1}{2}} Y_{l, m+\frac{1}{2}}(\vartheta, \varphi) \end{array} \right) R_{l-}^{I, I_z}(r). \quad (3.8) \end{aligned}$$

\*) В системе координат, где мезон покоится, функция падающей частицы может быть представлена как решение уравнения Дирака для плоской волны. Тогда  $|a_1/a_3| = |a_2/a_4|$ . Аналогичное соотношение может быть написано и для величин  $\psi_\mu$ <sup>23, 28</sup>.

Здесь  $a_{l\pm, m}^{I, I_z}$  — коэффициенты, являющиеся функциями энергии и собственных значений момента ( $j$ ) и его проекции на ось  $z$  ( $m$ ), а также изотопических квантовых чисел  $I$  и  $I_z$ ;  $l$  — орбитальный момент, связанный с полным моментом  $j$  с помощью соотношения  $l = j \mp 1/2$ , в соответствии с двумя возможными взаимными ориентациями спина нуклона и относительного орбитального момента нуклона и  $\pi$ -мезона. Радиальные функции  $R_{l\pm}^{I, I_z}(r)$  должны быть определены из соответствующего волнового уравнения. Проблема установления такого уравнения для системы нуклона и  $\pi$ -мезона при строгой постановке вопроса не может считаться решённой. Если же рассматривать нуклоны нерелятивистски, то, исходя из существующей квантовой теории волновых полей, можно прийти к уравнению вида \*)

$$\left[ E^2 - \mu^2 + \left( 1 + \frac{E}{M} \right) \Delta + V \right] \psi = 0, \quad (3.9)$$

где  $V$  — сложный интегральный оператор, действующий как на координатные, так и спинные переменные волновой функции и характеризующий взаимодействие  $\pi$ -мезона и нуклона.

Из (3.9) для  $R_{l\pm}^{I, I_z}(r)$  получается уравнение

$$\frac{d^2 R_{l\pm}^{I, I_z}}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR_{l\pm}^{I, I_z}}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2} R_{l\pm}^{I, I_z} + k^2 R_{l\pm}^{I, I_z} = V_{l\pm}^{I, I_z} R_{l\pm}^{I, I_z}, \quad (3.10)$$

где

$$k^2 = (E^2 - \mu^2) \left( 1 + \frac{E}{M} \right)^{-1}. \quad (3.11)$$

Силы, действующие между  $\pi$ -мезоном и нуклоном, имеют некоторый конечный радиус действия, по порядку величины, повидимому, равный  $\hbar/\mu c$  (для  $\pi$ -мезона с массой 277 электронных масс  $\hbar/\mu c \cong 1,4 \cdot 10^{-13}$  см). Электрическим кулоновым взаимодействием мы пренебрегаем, поскольку в экспериментально исследованной области энергий  $\pi$ -мезонов кулоновы силы существуют лишь для рассеяния на небольшие углы. Учёт электрического взаимодействия может быть проведён совершенно аналогично тому, как это делается при рассмотрении рассеяния протонов протонами<sup>25</sup>. Конечный радиус действия сил приводит к следующему асимптотическому виду радиальных функций:

$$R_{l\pm}^{I, I_z} \cong \frac{\sin \left( kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_{l\pm}^{I, I_z} \right)}{kr}. \quad (3.12)$$

\*) Уравнение (3.9) при  $V = 0$  и  $M \rightarrow \infty$  переходит в уравнение свободной частицы со спином нуль.

Фазы  $\delta_{l\pm}^{I, I_z}$  являются функциями энергии, вообще говоря, различными для состояний с различными  $I, I_z$  и  $j = l \pm 1/2$ .

Далее, асимптотический вид волновой функции свободных нуклона и  $\pi$ -мезона может быть представлен следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1^{I, I_z} \\ \alpha_2^{I, I_z} \end{pmatrix} e^{ikz} \cong \begin{pmatrix} \alpha_1^{I, I_z} \\ \alpha_2^{I, I_z} \end{pmatrix} \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) P_l(\cos \vartheta) \frac{\sin\left(kr - \frac{\pi l}{2}\right)}{kr}. \quad (3.13)$$

Согласно формуле (3.6) разность волновой функции, описывающей рассеяние  $\pi$ -мезона нуклоном, и (3.13) на больших расстояниях должна представлять собой расходящуюся волну. Из этого условия следует\*), что коэффициенты  $\alpha_{l\pm, m}^{I, I_z}$  в разложении (3.8) функции, описывающей рассеяние, отличны от нуля лишь для  $m = \pm 1/2$  и имеют следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{l-, 1/2}^{I, I_z} &= \sqrt{2\pi} \alpha_1^{I, I_z} \sqrt{l} \exp\left(i\delta_{l-}^{I, I_z} + i\frac{\pi l}{2}\right), \\ \alpha_{l-, -1/2}^{I, I_z} &= \sqrt{2\pi} \alpha_2^{I, I_z} \sqrt{l} \exp\left(i\delta_{l-}^{I, I_z} + i\frac{\pi l}{2}\right), \\ \alpha_{l+, 1/2}^{I, I_z} &= \sqrt{2\pi} \alpha_1^{I, I_z} \sqrt{l+1} \exp\left(i\delta_{l+}^{I, I_z} + i\frac{\pi l}{2}\right), \\ \alpha_{l+, -1/2}^{I, I_z} &= -\sqrt{2\pi} \alpha_2^{I, I_z} \sqrt{l+1} \exp\left(i\delta_{l+}^{I, I_z} + i\frac{\pi l}{2}\right). \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

Амплитуда рассеяния оказывается равной (см. также<sup>30</sup>)

$$\begin{aligned} f^{I, I_z}(\vartheta, \varphi) &= \frac{\sqrt{2\pi}}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_1^{I, I_z} \\ \alpha_2^{I, I_z} \end{pmatrix} \left[ (l+1) \exp\left(i2\delta_{l+}^{I, I_z}\right) + \right. \right. \\ &+ l \exp\left(i2\delta_{l-}^{I, I_z}\right) - 2l - 1 \Big] Y_{l, 0}(\vartheta, \varphi) + \sqrt{l(l+1)} \left[ \exp\left(i2\delta_{l-}^{I, I_z}\right) - \right. \\ &\left. \left. - \exp\left(i2\delta_{l+}^{I, I_z}\right) \right] \begin{pmatrix} \alpha_2^{I, I_z} Y_{l, -1}(\vartheta, \varphi) \\ \alpha_1^{I, I_z} Y_{l, 1}(\vartheta, \varphi) \end{pmatrix} \right\}. \quad (3.15) \end{aligned}$$

\*) Используемые при этом выводе соображения вполне подобны применяемым при получении амплитуды рассеяния, выраженной через фазы, в случае движения нерелятивистской частицы в центральном поле<sup>15, 16</sup>.

Нас ниже будет интересовать рассеяние  $\pi$ -мезонов на неполяризованных нуклеонах, поэтому при вычислении сечения его можно усреднить по спиновым состояниям нуклеона. Получаемое [см. (3.7)] при этом сечение имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
 d\sigma^{I, I_z} = \frac{1}{k^2} \sum_{l, l'} & \left\{ \left[ (l' + 1) \exp(-i\delta_{l'+}^{I, I_z}) \sin \delta_{l'+}^{I, I_z} + \right. \right. \\
 & + l' \exp(-i\delta_{l'-}^{I, I_z}) \sin \delta_{l'-}^{I, I_z} \left. \right] \left[ (l + 1) \exp(i\delta_{l+}^{I, I_z}) \sin \delta_{l+}^{I, I_z} + \right. \\
 & + l \exp(i\delta_{l-}^{I, I_z}) \sin \delta_{l-}^{I, I_z} \left. \right] P_{l', 0}(\cos \vartheta) P_{l, 0}(\cos \vartheta) + \\
 & + \sqrt{l'l} (l' + 1) (l + 1) \left[ \exp(-i\delta_{l'+}^{I, I_z}) \sin \delta_{l'+}^{I, I_z} - \right. \\
 & - \exp(-i\delta_{l'+}^{I, I_z}) \sin \delta_{l'+}^{I, I_z} \left. \right] \left[ \exp(i\delta_{l-}^{I, I_z}) \sin \delta_{l-}^{I, I_z} - \right. \\
 & - \exp(i\delta_{l-}^{I, I_z}) \sin \delta_{l-}^{I, I_z} \left. \right] P_{l', 1}(\cos \vartheta) P_{l, 1}(\cos \vartheta) \left. \right\} d\Omega. \quad (3.16)
 \end{aligned}$$

Интегрируя (3.16) по углам, получаем следующее выражение для полного сечения рассеяния:

$$\sigma^{I, I_z} = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} \left\{ (l + 1) \sin^2 \delta_{l+}^{I, I_z} + l \sin^2 \delta_{l-}^{I, I_z} \right\}. \quad (3.17)$$

При  $\delta_{+} = \delta_{-}$  формула (3.17) переходит в хорошо известное выражение для сечения рассеяния частицы без спина<sup>15, 16</sup>

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l + 1) \sin^2 \delta_l.$$

Формулы (3.16) — (3.17), полученные в предположении о наличии только одного зарядового состояния, применимы для описания рассеяния положительных  $\pi$ -мезонов на протонах, поскольку этот случай соответствует собственному состоянию изотопического момента ( $I = I_z = 3/2$ ). Для рассеяния отрицательных  $\pi$ -мезонов протонами, когда состояние системы является суперпозицией состояний с полными изотопическими моментами  $3/2$  и  $1/2$ , формулы оказываются несколько более сложными. Функция произвольного зарядового состояния системы из  $\pi$ -мезона и нуклеона может быть представлена в виде суперпозиции функций состояний с определёнными значениями изотопического момента

$$\psi = \sum_{I, I_z} C_{I, I_z} \Phi_{I_z}^I. \quad (3.18)$$

Амплитуда рассеяния также имеет подобный вид

$$f(\vartheta, \varphi) = \sum_{I, I_z} C_{I, I_z} f^{I, I_z}(\vartheta, \varphi), \quad (3.19)$$

где  $f^{I, I_z}(\vartheta, \varphi)$  определяется формулой (3.15), причём в последней величинами, зависящими от  $I$  и  $I_z$ , являются фазы  $\delta$ . Особенностью зарядово-независимого взаимодействия является то, что фазы с одинаковыми  $I$  и разными  $I_z$  оказываются равными (подобно тому, как фазы зависят лишь от величины полного момента  $j = I \pm 1/2$  и не зависят от значений его проекции  $m$ ). Ниже мы будем предполагать, что взаимодействие является зарядово-независимым.

Рассмотрим случай рассеяния отрицательных  $\pi$ -мезонов на протонах. Асимптотическое поведение волновой функции определяется формулой

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{3}} [\Phi_{-1/2}^{3/2} + \sqrt{2} \Phi_{-1/2}^{1/2}] \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} e^{ikz} + \\ & + \frac{e^{ikr}}{r} \frac{1}{\sqrt{3}} [\Phi_{-1/2}^{3/2} f^{1/2, -1/2}(\vartheta, \varphi) + \sqrt{2} \Phi_{-1/2}^{1/2} f^{1/2, -1/2}(\vartheta, \varphi)]. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Второе слагаемое в (3.20) представляет собой расходящуюся волну. Она может быть представлена в виде суперпозиции волн, соответствующих зарядовым состояниям ( $\pi^-$ ,  $p$ ) и ( $\pi^0$ ,  $n$ ). Учтя вид зарядовых функций этих состояний [см. (2.15)], получаем следующие выражения для соответствующих амплитуд рассеяния \*):

$$\begin{aligned} f(\pi^-, p) = \frac{1}{3\sqrt{3}} [\Phi_{-1/2}^{3/2} + \sqrt{2} \Phi_{-1/2}^{1/2}] [f^{3/2, -1/2}(\vartheta, \varphi) + \\ + 2f^{1/2, -1/2}(\vartheta, \varphi)], \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} f(\pi^0, n) = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} [\sqrt{2} \Phi_{-1/2}^{3/2} - \Phi_{-1/2}^{1/2}] [f^{3/2, -1/2}(\vartheta, \varphi) - \\ - f^{1/2, -1/2}(\vartheta, \varphi)]. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Разумеется,

$$\begin{aligned} f(\pi^-, p) + f(\pi^0, n) = \frac{1}{\sqrt{3}} [\Phi_{-1/2}^{3/2} f^{3/2, -1/2} + \\ + \sqrt{2} \Phi_{-1/2}^{1/2} f^{1/2, -1/2}]. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Из (3.22), в частности, следует, что если в изотопических состояниях  $I = 3/2$  и  $I = 1/2$  операторы взаимодействия  $\pi$ -мезона и нуклона оказываются одинаковыми, то при рассеянии отрицательных  $\pi$ -мезонов протонами не будет происходить перезарядка. Квадраты

\*) Пренебрегая процессом  $\pi^- + p \rightarrow n + \gamma$ .

абсолютных величин (3.21) и (3.22) дают дифференциальные сечения упругого рассеяния отрицательных  $\pi^-$ -мезонов и рассеяния с перезарядкой. Соответствующие формулы довольно громоздки, но, вообще говоря, легко могут быть получены на основании (3.15), (3.21) и (3.22). Выражения для полных сечений рассеяния несколько проще:

$$\begin{aligned} \sigma(p^-, p^-) = & \\ = \frac{4\pi}{3k^2} \sum_{l=0}^{\infty} \left\{ (l+1) \left[ \sin^2 \delta_{l+}^{3/2} + 2 \sin^2 \delta_{l+}^{1/2} - \frac{2}{3} \sin^2 \left( \delta_{l+}^{3/2} - \delta_{l+}^{1/2} \right) \right] + \right. & \\ \left. + l \left[ \sin^2 \delta_{l-}^{3/2} + 2 \sin^2 \delta_{l-}^{1/2} - \frac{2}{3} \sin^2 \left( \delta_{l-}^{3/2} - \delta_{l-}^{1/2} \right) \right] \right\}. \quad (3.24) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma(p^-, n^0) = & \\ = \frac{8\pi}{9k^2} \sum_{l=0}^{\infty} \left\{ (l+1) \sin^2 \left( \delta_{l+}^{3/2} - \delta_{l+}^{1/2} \right) + l \sin^2 \left( \delta_{l-}^{3/2} - \delta_{l-}^{1/2} \right) \right\}. \quad (3.25) \end{aligned}$$

Полное сечение рассеяния отрицательных  $\pi^-$ -мезонов на протонах представляет собой сумму сечений (3.24) и (3.25) и равно:

$$\begin{aligned} \sigma(p^-) = \sigma(p^-, p^-) + \sigma(p^-, n^0) = & \\ = \frac{4\pi}{3k^2} \sum_{l=0}^{\infty} \left\{ (l+1) \left( \sin^2 \delta_{l+}^{3/2} + 2 \sin^2 \delta_{l+}^{1/2} \right) + \right. & \\ \left. + l \left( \sin^2 \delta_{l-}^{3/2} + 2 \sin^2 \delta_{l-}^{1/2} \right) \right\}. \quad (3.26) \end{aligned}$$

Сравнивая (3.26) и (3.17), получаем:

$$\sigma(p^-) = \frac{1}{3} \sigma^{3/2} + \frac{2}{3} \sigma^{1/2}, \quad (3.27)$$

что является проявлением общей теоремы, основанной на предположении о зарядовой независимости взаимодействия [см. (2.18)].

В области небольших энергий, когда длина волны мезона значительно превышает радиус действия сил между мезоном и нуклеоном, незлектромагнитное взаимодействие приводит к заметному рассеянию лишь в  $S_{1/2}$ -состоянии, т. е. лишь при лобовых столкновениях, поскольку прицельные параметры частиц, сталкивающихся с моментом, отличным от нуля, значительно превышают радиус действия сил. С ростом энергии становится заметным также и рассеяние в  $P$ -состояниях.

Экспериментальные данные могут быть удовлетворительно интерпретированы с помощью учёта лишь состояний с  $l \leq 1$ . Поэтому далее

мы ограничимся учётом  $S_{1/2}$ -,  $P_{1/2}$ - и  $P_{3/2}$ -состояний. Выражения для дифференциальных сечений рассеяния приобретают тогда вид:

$$\frac{k^2 d\sigma}{d\Omega} = A + B \cos \vartheta + C \cos^2 \vartheta, \quad (3.28)$$

где коэффициенты  $A$ ,  $B$ ,  $C$  являются функциями фаз. В случае рассеяния положительных  $\pi$ -мезонов на протонах они имеют следующий вид:

$$A(p^+, p^+) = \sin^2 \delta_0^{3/2} + \sin^2 (\delta_{1+}^{3/2} - \delta_{1-}^{3/2}), \quad (3.29a)$$

$$B(p^+, p^+) = 3 \sin^2 \delta_0^{3/2} + \sin^2 \delta_{1-}^{3/2} + 2 \sin^2 \delta_{1+}^{3/2} - \\ - \sin^2 (\delta_{1-}^{3/2} - \delta_0^{3/2}) - 2 \sin^2 (\delta_{1+}^{3/2} - \delta_0^{3/2}), \quad (3.29b)$$

$$\frac{1}{3} C(p^+, p^+) = \sin^2 \delta_{1-}^{3/2} + 2 \sin^2 \delta_{1+}^{3/2} - \sin^2 (\delta_{1+}^{3/2} - \delta_{1-}^{3/2}). \quad (3.29v)$$

Если при этом  $\delta_0^{3/2}$  принять равной нулю, то  $B$  также обратится в нуль. Поэтому наиболее ярким проявлением  $S$ -рассеяния является наличие в угловом распределении члена, пропорционального  $\cos \vartheta$ , приводящего к асимметрии рассеяния вперёд и назад. Это относится и к процессам рассеяния отрицательных  $\pi$ -мезонов. Для упругого рассеяния  $\pi^-$ -мезонов  $A$ ,  $B$  и  $C$  определяются следующим образом:

$$A(p^-, p^-) = \frac{1}{3} \sin^2 \delta_0^{3/2} + \frac{2}{3} \sin^2 \delta_0^{1/2} - \frac{2}{9} \sin^2 (\delta_0^{3/2} - \delta_0^{1/2}) + \\ + \frac{1}{9} \sin^2 (\delta_{1+}^{3/2} - \delta_{1-}^{3/2}) - \frac{2}{9} \sin^2 (\delta_{1-}^{3/2} - \delta_{1-}^{1/2}) + \\ + \frac{2}{9} \sin^2 (\delta_{1-}^{3/2} - \delta_{1+}^{1/2}) + \frac{2}{9} \sin^2 (\delta_{1+}^{3/2} - \delta_{1+}^{1/2}) - \\ - \frac{2}{9} \sin^2 (\delta_{1+}^{3/2} - \delta_{1-}^{1/2}) + \frac{4}{9} \sin^2 (\delta_{1-}^{1/2} - \delta_{1+}^{1/2}), \quad (3.30a)$$

$$B(p^-, p^-) = \sin^2 \delta_0^{3/2} + \frac{1}{3} \sin^2 \delta_{1-}^{3/2} + \frac{2}{3} \sin^2 \delta_{1-}^{1/2} + \frac{2}{3} \sin^2 \delta_{1+}^{3/2} + \\ + \frac{4}{3} \sin^2 \delta_{1+}^{1/2} + 2 \sin^2 \delta_0^{1/2} - \frac{1}{9} \sin^2 (\delta_0^{3/2} - \delta_{1-}^{3/2}) - \\ - \frac{2}{9} \sin^2 (\delta_0^{3/2} - \delta_{1-}^{1/2}) - \frac{2}{9} \sin^2 (\delta_0^{3/2} - \delta_{1+}^{3/2}) - \\ - \frac{4}{9} \sin^2 (\delta_0^{3/2} - \delta_{1+}^{1/2}) - \frac{2}{9} \sin^2 (\delta_0^{1/2} - \delta_{1-}^{3/2}) - \\ - \frac{4}{9} \sin^2 (\delta_0^{1/2} - \delta_{1-}^{1/2}) - \frac{4}{9} \sin^2 (\delta_0^{1/2} - \delta_{1+}^{3/2}) - \\ - \frac{8}{9} \sin^2 (\delta_0^{1/2} - \delta_{1+}^{1/2}), \quad (3.30b)$$



$$\begin{aligned}
 C(p^-, p^-) = & \sin^2 \delta_{1-}^{3/2} + 2 \sin^2 \delta_{1-}^{1/2} + 2 \sin^2 \delta_{1+}^{3/2} + 4 \sin^2 \delta_{1+}^{1/2} - \\
 & - \frac{1}{3} \sin^2 (\delta_{1+}^{3/2} - \delta_{1-}^{3/2}) - \frac{2}{3} \sin^2 (\delta_{1-}^{3/2} - \delta_{1+}^{1/2}) - \\
 & - \frac{2}{3} \sin^2 (\delta_{1+}^{3/2} - \delta_{1-}^{1/2}) - \frac{2}{3} \sin^2 (\delta_{1+}^{1/2} - \delta_{1-}^{1/2}) - \\
 & - \frac{2}{3} \sin^2 (\delta_{1+}^{3/2} - \delta_{1+}^{1/2}). \quad (3.30в)
 \end{aligned}$$

В случае же рассеяния с перезарядкой соответствующие формулы оказываются следующими:

$$\begin{aligned}
 \frac{9}{2} A(n^0, p^-) = & \sin^2 (\delta_0^{3/2} - \delta_0^{1/2}) + \sin^2 (\delta_{1-}^{3/2} - \delta_{1-}^{1/2}) + \\
 & + \sin^2 (\delta_{1-}^{3/2} - \delta_{1+}^{1/2}) - \sin^2 (\delta_{1-}^{3/2} - \delta_{1+}^{3/2}) - \sin^2 (\delta_{1-}^{1/2} - \delta_{1+}^{3/2}) + \\
 & + \sin^2 (\delta_{1-}^{1/2} - \delta_{1+}^{1/2}) + \sin^2 (\delta_{1+}^{3/2} - \delta_{1+}^{1/2}), \quad (3.31a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{9}{2} B(n^0, p^-) = & \sin^2 (\delta_0^{3/2} - \delta_{1-}^{1/2}) - \sin^2 (\delta_0^{3/2} - \delta_{1-}^{3/2}) - \\
 & - 2 \sin^2 (\delta_0^{3/2} - \delta_{1+}^{3/2}) + 2 \sin^2 (\delta_0^{3/2} - \delta_{1+}^{1/2}) + \sin^2 (\delta_0^{1/2} - \delta_{1-}^{3/2}) - \\
 & - \sin^2 (\delta_0^{1/2} - \delta_{1-}^{1/2}) + 2 \sin^2 (\delta_0^{1/2} - \delta_{1+}^{3/2}) - 2 \sin^2 (\delta_0^{1/2} - \delta_{1+}^{1/2}), \quad (3.31б)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -\frac{3}{2} C(n^0, p^-) = & \sin^2 (\delta_{1+}^{3/2} - \delta_{1-}^{3/2}) - \sin^2 (\delta_{1+}^{3/2} - \delta_{1-}^{1/2}) - \\
 & - \sin^2 (\delta_{1+}^{1/2} - \delta_{1-}^{1/2}) - \sin^2 (\delta_{1+}^{1/2} - \delta_{1-}^{3/2}) + \sin^2 (\delta_{1+}^{3/2} - \delta_{1+}^{1/2}). \quad (3.31в)
 \end{aligned}$$

Если взаимодействие  $\pi$ -мезона и нуклона не является зарядово-независимым, то фазы состояний с изотопическим спином  $3/2$ , входящие в сечение рассеяния  $\pi^+$ -мезонов и в сечение  $\pi^-$ -мезонов, могут оказаться различными. Это соответствует тому, что первые относятся к состояниям с  $I_z = 3/2$ , а вторые — к состояниям с  $I_z = 1/2$ . Как уже говорилось выше, мы принимаем фазы не зависящими от проекции изотопического момента. Ниже мы увидим, что это предположение не противоречит экспериментальным данным, а следовательно, подтверждает гипотезу о зарядовой независимости взаимодействия  $\pi$ -мезонов и нуклонов.

Значения фаз могут быть без особого труда получены на основании измеренного углового распределения рассеянных  $\pi$ -мезонов. Из сравнения формул (3.28) и (1.4) следует, что коэффициенты  $A, B, C$  в (3.28) связаны с  $a, b, c$  в табл. IV с помощью соотношений  $A = k^2 a, B = k^2 b, C = k^2 c$ . Разрешая уравнения (3.29), при определенных таким образом  $A, B$  и  $C$  относительно фаз получаем в случае рассеяния  $\pi^+$ -мезонов с энергией 110 Мэв протонами два решения. Первое решение (обозначаемое ниже I) приводит к следующим фазам<sup>8</sup>:

$$\delta_0^{3/2} = \pm 15^\circ, \quad \delta_{1-}^{3/2} = 0^\circ, \quad \delta_{1+}^{3/2} = \mp 24^\circ.$$

Второе решение (II) даёт такое же значение фазы  $S$ -рассеяния, но иные фазы  $P$ -волн:

$$\delta_0^{3/2} = \pm 15^\circ, \quad \delta_{1-}^{3/2} = \mp 34^\circ, \quad \delta_{1+}^{3/2} = \mp 9^\circ.$$

Для  $\pi$ -мезонов с энергией 135 Мэв измерено угловое распределение трёх процессов: рассеяния  $\pi^+$ -мезонов на протонах, упругого рассеяния отрицательных  $\pi$ -мезонов на протонах и их рассеяния с перезарядкой. Соответствующие девять коэффициентов  $a$ ,  $b$  и  $c$  приведены в таблице IV. Для интерпретации этих девяти экспериментальных величин теория, ограничивающаяся учётом рассеяния лишь в состояниях с  $l \leq 1$  и предполагающая зарядовую независимость взаимодействий, имеет в своём распоряжении шесть параметров — шесть фаз ( $\delta_0^{3/2}$ ,  $\delta_{1-}^{3/2}$ ,  $\delta_{1+}^{3/2}$ ,  $\delta_0^{1/2}$ ,  $\delta_{1-}^{1/2}$ ,  $\delta_{1+}^{1/2}$ ). Эти шесть фаз связаны с экспериментальными данными с помощью девяти уравнений (3.29), (3.30) и (3.31).

Несмотря на то, что получаемая таким образом система уравнений является переопределённой, все девять уравнений оказываются совместными. Этот результат следует рассматривать как хорошее подтверждение гипотезы зарядовой независимости. Значения фаз для энергии 135 Мэв приведены в таблице V.

Таблица V

	$E$ (Мэв)	$S_{1/2}$		$P_{1/2}$		$P_{3/2}$	
		I	II	I	II	I	II
$I = 3/2$	135	$\pm 25^\circ$	$26^\circ$	$\mp 10^\circ$	$-46^\circ$	$\mp 35^\circ$	$-20^\circ$
	110	$\pm 15^\circ$	$\pm 15^\circ$	$0^\circ$	$\mp 34^\circ$	$\mp 24^\circ$	$\mp 9^\circ$
$I = 1/2$	135	$\pm 1^\circ$	$-1^\circ$	$\pm 19^\circ$	$-3^\circ$	$\pm 1^\circ$	$-15^\circ$

Вычисление фаз представляет собой первый шаг на пути теоретического истолкования экспериментов по рассеянию  $\pi$ -мезонов. Кроме подтверждения гипотезы зарядовой независимости, на основании найденных значений фаз можно получить сведения о величине взаимодействий в различных состояниях. Правда, в отношении рассеяния в  $P$ -состояниях возникает двусмысленность. Что же касается  $S$ -рассеяния, то соответствующие фазы вычисляются однозначным образом. При этом в состоянии с изотопическим спином  $3/2$   $S$ -фаза оказывается сравнимой с фазами  $P$ -волн (см. табл. V). Столь большая величина  $S$ -фазы не находит себе истолкования в существующих на сегодняшний день теоретических исследованиях по взаимодействию мезонов и нуклеонов. Для  $P$ -фаз в силу указанной выше неоднозначности ситуация несколько сложнее, поскольку неясно, какие из

получаемых при вычислениях фазы следует принять за истинные. Однако и в этом случае можно сказать, что  $P$ -рассеяние также не согласуется с предсказаниями мезонной теории поля. Подробно мы на этом остановимся в следующем параграфе, где будет показано, что пока всё ещё нет единой теоретической схемы, в какой-либо мере полно объясняющей опыты по рассеянию  $\pi$ -мезонов. В этом отношении ситуация несколько сходна с создавшейся в области исследования взаимодействия нуклеонов.

Для дальнейшего понимания данных по рассеянию  $\pi$ -мезонов необходимо выяснить возможную зависимость фаз от энергии. Поскольку наши сведения о характере взаимодействия  $\pi$ -мезона и нуклеона весьма ограничены, то желательно пойти по пути, использующему наименьшее число конкретных предположений о законе сил, действующих между  $\pi$ -мезоном и нуклеоном.

При этом можно исходить из представлений, используемых при объяснении рассеяния нуклеонов<sup>25, 31</sup>.

Дело в том, что уравнение (3.10) для радиальных функций системы из  $\pi$ -мезона и нуклеона сходно с соответствующим уравнением, встречающимся в нерелятивистской квантовой механике для частиц без спина. Отличие заключается в зависимости  $V_l^\pm$  от  $k$ . Если же в области малых энергий  $V_l^\pm$  остаётся конечным при  $k \rightarrow 0$ , то при достаточно малых  $k$  этой зависимостью можно пренебречь. Есть основания полагать, что для  $S$ - и  $P$ -состояний при  $k = 0$   $V$  отлично от нуля. Тогда в области малых энергий

$$\operatorname{tg} \delta_l \sim k^{2l+1} \quad (3.32)$$

( $l$  — орбитальный момент). Таким образом, для рассматриваемых нами  $S$ - и  $P$ -волн в области малых энергий, а следовательно, больших длин волн (много больших радиуса действия сил) имеют место соотношения

$$k \operatorname{ctg} \delta_0 = a_0^{-1}, \quad k^3 \operatorname{ctg} \delta_{1+} = a_{1+}^{-3}, \quad k^3 \operatorname{ctg} \delta_{1-} = a_{1-}^{-3}. \quad (3.33)$$

Эти соотношения справедливы как для  $I = 3/2$ , так и  $I = 1/2$ . Здесь  $a$  — эффективные длины рассеяния, вообще говоря, зависящие от изотопического числа \*).

В области энергий, где измерено эффективное сечение рассеяния  $\pi$ -мезонов, длина волны становится сравнимой с радиусом сил, действующих между  $\pi$ -мезоном и нуклеоном ( $\lambda \equiv k^{-1} = \frac{\hbar}{\mu c}$  при  $E = 0,41 \mu c^2$ ). Поэтому формулы (3.33) в названной области уже не являются точными. Правые части соотношений (3.33) при этом не могут приниматься постоянными, а должны рассматриваться как

\*) Согласно <sup>8a</sup>  $a_0(3/2) = (3,8 \pm 0,7) 10^{-14}$  см и  $a_0(1/2) = (0 \pm 1) 10^{-14}$  см.

некоторые функции  $k$ . Приближённо эту зависимость можно учесть, разложив правые части по степеням  $k^2$  и ограничившись первыми двумя членами разложения. Тогда вместо (3.33) получаем:

$$k \operatorname{ctg} \delta_0^{3/2} = a_0^{-1} (3/2) + k^2 r_0 (3/2), \quad (3.34a)$$

$$k^3 \operatorname{ctg} \delta_{1-}^{3/2} = a_{1-}^{-3} (3/2) + \frac{k^2}{r_{1-} (3/2)}, \quad (3.34б)$$

$$k^3 \operatorname{ctg} \delta_{1+}^{3/2} = a_{1+}^{-3} (3/2) + \frac{k^2}{r_{1+} (3/2)}, \quad (3.34в)$$

$$k \operatorname{ctg} \delta_0^{1/2} = a_0^{-1} (1/2) + k^2 r_0 (1/2), \quad (3.34г)$$

$$k^3 \operatorname{ctg} \delta_{1-}^{1/2} = a_{1-}^{-3} (1/2) + \frac{k^2}{r_{1-} (1/2)}, \quad (3.34д)$$

$$k^3 \operatorname{ctg} \delta_{1+}^{1/2} = a_{1+}^{-3} (1/2) + \frac{k^2}{r_{1+} (1/2)}. \quad (3.34е)$$

Зная угловое распределение, а следовательно, и фазы для процессов рассеяния при двух энергиях можно вычислить эффективные длины рассеяния  $a$  и эффективные радиусы действия сил  $r$ . Для процессов рассеяния  $\pi$ -мезонов угловое распределение измерено при двух энергиях только для случая рассеяния положительных  $\pi$ -мезонов протонами. Поэтому из опыта можно определить лишь константы, соответствующие рассеянию в состоянии с изотопическим спином  $3/2$ . Следует также отметить, что измерения проведены при сравнительно близких энергиях и со значительными ошибками. Поэтому экстраполяция энергетического хода фаз с помощью формул (3.34) вряд ли может оказаться точной\*). Однако в качестве примера применения формул (3.34) мы рассмотрим, к каким заключениям об энергетическом ходе они приводят для сечения ( $p^+$ ,  $p^+$ ). Из формул (3.17) и (3.24) следует:

$$\begin{aligned} \sigma(p^+, p^+) = & \frac{4\pi}{k^2 + [a_0^{-1} (3/2) + k^2 r_0 (3/2)]^2} + \\ & + \frac{4\pi k^4}{k^6 + \left[ a_{1-}^{-3} (3/2) + \frac{k^2}{r_{1-} (3/2)} \right]^2} + \\ & + \frac{8\pi k^4}{k^6 + \left[ a_{1+}^{-3} (3/2) + \frac{k^2}{r_{1+} (3/2)} \right]^2}. \quad (3.35) \end{aligned}$$

\*) Можно было бы ограничиться рассмотрением рассеяния лишь в одном состоянии, например в состоянии  $P_{3/2}$  для  $I = 3/2$ . Такого рода исследование<sup>32</sup> позволяет определить эффективную длину и эффективный радиус на основании энергетического хода. Однако при этом не учитывается вклад в рассеяние от иных состояний, который, как это следует из приведённых выше значений фаз, не мал.

Указанная выше неоднозначность в определении фаз рассеяния приводит также к неоднозначности в определении констант, входящих в (3.35). Таким образом, используя два решения уравнений (3.29), мы получим две различные энергетические зависимости сечения рассеяния положительных  $\pi$ -мезонов протонами. В качестве значений фаз мы примем приведённые выше, хотя они и определены с большой ошибкой ( $\pm 5^\circ$ ).

Получающиеся при этом сечения приведены на рис. 5; там же для сравнения нанесены экспериментальные точки. Следует указать, что энергетический ход сечения сильно зависит от изменения значений фаз, по которым вычисляются параметры, входящие в формулу (3.35). Так, например, изменение  $S$ -фазы от  $15$  до  $20^\circ$  приводит к смещению максимума сечения  $\sigma(p^+)$  на  $60$  Мэв. Ясно поэтому, что приведённые на рис. 5 кривые носят в основном качественный характер.

Для рассеяния положительных  $\pi$ -мезонов оба решения дают не противоречащие опыту предсказания. Несколько иначе дело обстоит с рассеянием отрицательных  $\pi$ -мезонов на протонах. Вклад от состояний с изотопическим спином  $3/2$  в полное сечение рассеяния  $\pi^-$ -мезонов составляет одну треть выражения (3.35) [см. (3.26)]. Поскольку из таблицы V, а также из отношения сечений рассеяния  $\pi^+$ - и  $\pi^-$ -мезонов следует, что в состояниях с  $I = 1/2$  взаимодействие слабо, то при первоначальном грубом подходе можно этими состояниями вообще пренебречь.

На рис. 6 приведено сравнение экспериментальных значений полного сечения ( $\pi^-$ ,  $p$ ) с вкладом в это сечение от состояний с  $I = 3/2$ . Как видно из рисунка, первое решение (I) даёт хорошее согласие с опытом. Напротив, второе решение (II) приводит к сильному расхождению с опытными данными и, например, при энергии  $176$  Мэв даёт величину сечения, почти в два раза превышающую наблюдаемое.

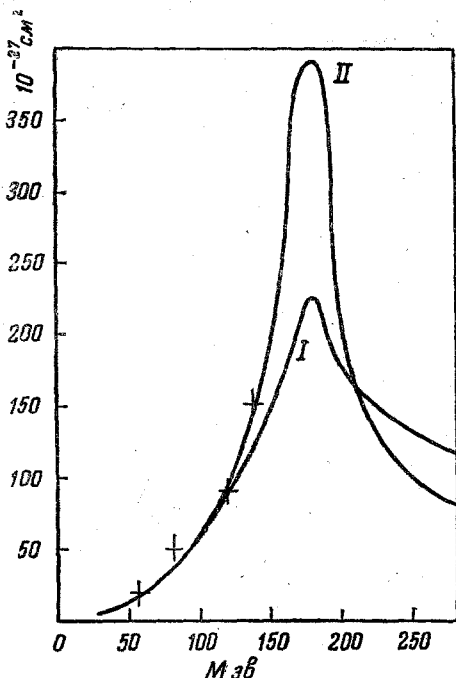


Рис. 5. Зависимость полного сечения от энергии согласно экстраполяционным формулам (3.35) для положительных и  $\pi$ -мезонов для первого (I) и второго (II) решения фазовых уравнений (см. табл. V § 3).

В связи с этим можно думать, что в действительности осуществляется решение I уравнения (3.29), т. е. основной вклад в рассеяние вносит состояние  $P_{3/2}$  с  $I = 3/2$ . Однако следует сказать, что плохой ход сечения с энергией, предсказываемый в случае решения II, может быть обусловлен и неточностью формул (3.34). Уточнение этих результатов можно будет, повидимому, получить в недалёком

будущем, когда в нашем распоряжении окажется большее число опытных данных.

В заключение этого параграфа остановимся на интересной модели, предложенной в <sup>49</sup> для интерпретации  $S$ -рассеяния в состоянии с изотопическим спином  $3/2$ . В этой работе приведены следующие экспериментальные значения фазы  $\delta_0(3/2)$ :

при 135 Мэв  $\pm 21^\circ$ ,

при 113 Мэв  $\pm 13^\circ$ ,

при 78 Мэв  $\pm 6^\circ$ .

Сравнение столь быстрого роста  $S$ -фазы с полученным из опытов по захвату  $\pi$ -мезонов в водороде значением  $a_0(3/2) = k^{-1} \operatorname{tg} \delta_0(3/2) |_{k=0}$

приводит к мысли о том, что в области энергий мезонов  $E_0 \cong 30 - 50$  Мэв  $\delta_0(3/2)$  меняет знак. Такая энергетическая зависимость фазы

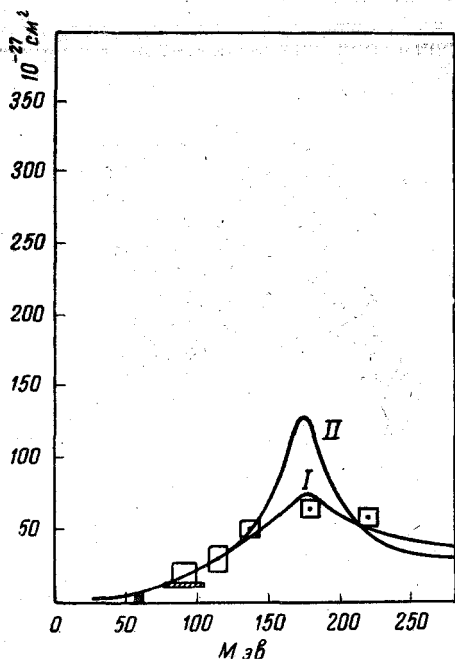


Рис. 6. То же, что и рис. 5 для отрицательных  $\pi$ -мезонов.

$S$ -рассеяния  $\pi$ -мезонов нуклеонами сходна с энергетической зависимостью  $S$ -фазы рассеяния нуклеонов нуклеонами <sup>50</sup>. Это сходство позволяет предположить, что на больших расстояниях силы, действующие между  $\pi$ -мезоном и нуклеоном, являются силами притяжения, а на малых расстояниях имеют место силы отталкивания (ср. <sup>50</sup>). В <sup>49</sup> проведены вычисления фаз  $S$ -рассеяния  $\pi$ -мезонов нуклеонами при различных предположениях о законе сил, действующих между  $\pi$ -мезоном и нуклеоном. Если, кроме того, эффективный потенциал с отталкиванием на малых расстояниях имеет место и для  $P$ -состояний с  $I = 3/2$ , можно думать, что соответствующие фазы  $P$ -рассеяния будут обращаться в нуль при энергиях, больших  $E_0$ . Тогда при  $E < E_0$  угловое распределение будет характеризоваться максимумом рассеяния вперед.

В области энергий, превышающих  $E_0$ , но всё же меньших той энергии, при которой  $P$ -фазы обращаются в нуль, максимум углового распределения рассеяния мезонов окажется обращённым. Эта картина может быть непосредственно проверена на опыте.

#### § 4. ТЕОРИЯ СЛАБОЙ И СИЛЬНОЙ СВЯЗИ

До сих пор мы рассматривали рассеяние  $\pi$ -мезонов нуклеонами исключительно с феноменологической точки зрения, не задаваясь каким-нибудь конкретным видом взаимодействия этих частиц между собой. Это не является случайным обстоятельством, поскольку в настоящее время не существует законченной теории взаимодействия нуклеонов с  $\pi$ -мезонами. Создание такой теории сталкивается с серьёзными трудностями, причём в отличие от электродинамики эти затруднения, повидимому, имеют более глубокую природу. Известно, что в электродинамике взаимодействие является слабым. Это проявляется, в частности, в том, что в ряде случаев для процессов рассеяния все физические результаты могут быть представлены в виде ряда по степеням константы тонкой структуры  $\alpha$ , причём существенно, что  $\alpha = 1/137 \ll 1$  (теория возмущений;  $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = e^2$  в наших единицах). Слабость взаимодействия обусловлена специфическим видом гамильтониана взаимодействия

$$H = -\hat{j} \hat{A}, \quad (I)$$

который представляет собой скалярное произведение 4-вектора тока  $\hat{j}$  на 4-вектор-потенциал электромагнитного поля  $\hat{A}$ . Выражения для сечений различных процессов, рассчитанные в первом неисчезающем приближении теории возмущений (комpton-эффект, тормозное излучение и др.), находятся в блестящем согласии с опытом в достигнутой сейчас области энергии.

Трудности, присущие современной электродинамике, связаны главным образом с проблемой бесконечной собственной энергии электрона. В преодолении этих трудностей за последние годы достигнут определённый прогресс. С помощью ковариантного метода записи уравнений электродинамики удалось произвести однозначное устранение возникающих в теории бесконечных выражений в высших приближениях теории возмущений и интерпретировать такое вычитание как перенормировку (переопределение) известных физических констант — массы и заряда электрона. Наибольшим успехом теории в этом направлении следует считать вычисление сверхтонкого смещения в атоме водорода и аномального магнитного момента электрона<sup>33, 34</sup>.

Применимость теории возмущений существенно связана с видом гамильтониана взаимодействия (I). Если бы в электродинамике в

гамильтониан взаимодействия входили члены вида  $F_{ik}\gamma_i\gamma_k^*$ ), где  $F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_k}$  — тензор электромагнитного поля, то теория возмущения в этом случае была бы неприменима, поскольку, например, для сечения рассеяния света на электроне получались бы выражения, неограниченно растущие с энергией независимо от величины константы взаимодействия<sup>35, 36</sup>. Специфические трудности мезодинамики связаны с тем, что в гамильтониан взаимодействия входят выражения, содержащие производные от волновых функций мезонного поля<sup>35</sup>.

Например, гамильтониан взаимодействия в симметричной псевдоскалярной теории с псевдовекторной (градиентной) связью имеет следующий вид:

$$g\tau_\alpha \left\{ \sigma \cdot \nabla \varphi_\alpha + \rho_1 \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial t} \right\}, \quad (II)$$

где  $g$  — константа взаимодействия, а  $\sigma$  и  $\rho_1$  — известные четырёхрядные матрицы. Сечения рассеяния мезонов на нуклоне, вычисленные с таким гамильтонианом, в первом неисчезающем приближении теории возмущений будут неограниченно расти с ростом энергии, что физически недопустимо. В отличие от электродинамики здесь не удаётся также произвести однозначно устранение бесконечностей, появляющихся в высших приближениях теории возмущений.

Всё это указывает на то, что в мезодинамике в случае градиентной связи взаимодействие нельзя считать слабым\*\*), и для правильного решения уравнений надо искать другие методы, отличные от обычной теории возмущений (неприменима теория «слабой связи»). Такие попытки были сделаны в двух направлениях: во-первых, в теории затухания, в которой, не нарушая релятивистской инвариантности теории, пытаются учесть эффекты, обусловленные реакцией излучённого поля на движение нуклона, но произвольно отбрасываются все инерционные эффекты, связанные с реакцией собственного поля нуклона\*\*\*); во-вторых, в теории протяжённых источников (включающей в себя случай так называемой «сильной связи»), в которой нуклонам приписываются конечные размеры; в такой теории, помимо реакции излучённого поля, удаётся учесть эффекты, обусловленные инерцией спина; однако предположение о конечных размерах нуклона нарушает релятивистскую инвариантность теории.

\*) Это имело бы место в том случае, если бы электрон обладал собственным аномальным магнитным моментом.

\*\*) Сила взаимодействия в случае связи с производными определяется не столько величиной константы  $g$ , сколько тем фактом, что взаимодействие растёт с ростом энергии.

\*\*\*)) Если взаимодействие мезона с нуклоном зависит от спинов, то в собственной энергии появляются дополнительные члены, связанные с инерцией спина нуклона.



Ниже мы остановимся на результатах, которые получаются в указанных выше методах (включая слабую связь) применительно к процессам рассеяния  $\pi$ -мезонов на нуклоне. При этом мы ограничимся разбором только псевдоскалярной симметричной теории с градиентной связью, поскольку, как отмечалось во введении, есть основания полагать, что поле  $\pi$ -мезонов является псевдоскалярным (п.-с.), а их связь с нуклеонами — псевдовекторной (п.-в.)\*). В теории слабой связи рассеяние п.-с. мезонов с п.-в. связью исследовалось различными авторами<sup>37-40</sup>. Всюду в этих расчётах приходилось ограничиваться первым исчезающим приближением теории возмущений, поскольку попытки учесть следующие приближения в теории с градиентной связью, как уже отмечалось, приводят к неперенормируемым расходящимся выражениям.

В первом исчезающем приближении теории возмущений сечения рассеяния оказываются безгранично растущими с увеличением энергии падающих мезонов. Поэтому полученные здесь результаты могут быть справедливы лишь в области малых энергий ( $\leq \mu$ ). Для таких энергий симметричная теория даёт следующие выражения для дифференциального сечения обычного и обменного рассеяния  $\pi$ -мезонов нуклеонами<sup>38-39 \*\*</sup> (в системе центра инерции)

$$\frac{d\sigma(p^+, p^+)}{d\Omega} = \left(\frac{g}{\mu}\right)^4 \frac{k^4}{\omega^2}, \quad (4.1a)$$

$$\frac{d\sigma(p^-, p^-)}{d\Omega} = \left(\frac{g}{\mu}\right)^4 \frac{k^4}{\omega^2}, \quad (4.1b)$$

$$\frac{d\sigma(p^0, p^-)}{d\Omega} = 2 \left(\frac{g}{\mu}\right)^4 \frac{k^4}{\omega^2} \cos^2\theta. \quad (4.1b)$$

(Здесь и дальше используются обозначения предыдущих параграфов; в обычных единицах  $g^2 = g^2/\hbar c$ .) В этих выражениях опущены все члены  $\sim \omega/M$  и более высокого порядка малости. Аналогичные формулы имеют место для  $\frac{d\sigma(p^\pm, p^\pm)}{d\Omega}$  и  $\frac{d\sigma(p^0, p^\pm)}{d\Omega}$ .

Отметим, что при достаточно низких энергиях отбрасывать члены  $\sim (\omega/M)^3$  уже нельзя, так как они остаются конечными при  $k \rightarrow 0$ , в то время как члены  $\sim k^4$  исчезают. Тем не менее их учёт является излишним, поскольку в той области малых энергий, где они дают заметный вклад в сравнении с членами  $\sim k^4$ , главную роль начинает играть кулоновское взаимодействие  $\pi$ -мезонов с нуклеонами.

\*) Не исключено, что внутренняя чётность нуклонов различна. Однако в этом случае взаимодействие будет иметь вид (II). Говоря о псевдоскалярных мезонах с псевдовекторной связью, мы будем иметь в виду именно такой вид взаимодействия.

\*\*) В этих работах также рассчитаны сечения рассеяния  $\pi$ -мезонов на нуклеонах с учётом псевдоскалярной связи и кулоновского взаимодействия  $\pi$ -мезонов с нуклеонами.

Из формул (4.1а, б, в) видно, что при нерелятивистских энергиях дифференциальные сечения  $d\sigma(p^+, p^+)$  и  $d\sigma(p^-, p^-)$  не зависят от углов, т. е. рассеяние является изотропным. Изотропия получается в результате наложения  $P_{1/2}$ - и  $P_{3/2}$ -волн. В том, что изотропия сечения не связана с  $S$ -волной, можно убедиться хотя бы из того факта, что сечения (4.1а и б) пропорциональны  $k^4$  (в предыдущем параграфе было показано, что подобная зависимость как раз характерна именно для  $P_{1/2}$ - и  $P_{3/2}$ -волн).

Сечение перезарядки (4.1в) пропорционально  $\cos^2 \theta$ . Сравнение с экспериментом (см. §§ 1 и 3) показывает, что угловое распределение в теории слабой связи не согласуется с опытом.

Наиболее существенное расхождение связано с отсутствием в предсказаниях теории заметного вклада в сечение от  $S$ -волны. По теории слабой связи этот вклад  $\sim (\omega/M)^2$ ; он имеет релятивистскую природу и приводит к слишком малой длине  $S$ -рассеяния<sup>8а</sup>.

Полное сечение для всех трёх процессов легко получить, интегрируя (4.1а, б, в) по углам:

$$\sigma(p^+, p^+) = 4\pi \left(\frac{g_-}{\mu}\right)^4 \frac{k^4}{\omega^2}, \quad (4.2a)$$

$$\sigma(p^-, p^-) = 4\pi \left(\frac{g_-}{\mu}\right)^4 \frac{k^4}{\omega^2}, \quad (4.2б)$$

$$\sigma(p^0, p^-) = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{g_-}{\mu}\right)^4 \frac{k^4}{\omega^2}. \quad (4.2в)$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\sigma(p^+, p^+)}{\sigma(p^0, p^-) + \sigma(p^-, p^-)} = \frac{3}{5}, \quad (4.3)$$

что находится в разительном противоречии с экспериментом.

На опыте (см. рис. 2) уже при энергиях  $\sim 60$  Мэв это отношение становится заметно больше единицы, а в районе 150 Мэв оно достигает примерно 3.

Равенство сечений  $\sigma(p^+, p^+)$  и  $\sigma(p^-, p^-)$  по теории слабой связи говорит о том, что в этой теории  $d\sigma^{1/2}$  не мало по сравнению с  $d\sigma^{3/2}$  (см. формулу (2.18), § 2).

Энергетическая зависимость полного сечения по теории слабой связи, повидимому, не противоречит опытным данным при малых энергиях. Однако при малых энергиях интенсивность  $\pi$ -мезонов столь мала, а ошибки измерения столь велики, что трудно сделать однозначные заключения на этот счёт. Кроме того, надо отметить, что аналогичное поведение сечения с энергией при малых энергиях будет иметь место в любой теории с градиентной связью мезонного поля с нуклеонами, так как в этом случае следует ожидать сильного взаимодействия в  $P$ -состоянии.

Таким образом, результаты теории возмущений в п.-с. симметричной теории с п.-в. связью в отношении рассеяния  $\pi$ -мезонов

на нуклеонах не согласуются с большинством экспериментальных данных и заведомо противоречат опыту при энергиях  $\gg \mu$ .

Попытки устранить неограниченный рост сечения с энергией в теории слабой связи (см. формулы (4.1) и (4.2)) основаны на предположении, что взаимодействие на самом деле нельзя считать слабым и надо учитывать затухание начального состояния за счёт обратного воздействия излучаемого мезонного поля на движение нуклеона (теория затухания<sup>41-44</sup>). Учёт членов, обусловленных действием на движение нуклеона собственного мезонного поля (инерция спина), которые, вообще говоря, существенны<sup>35</sup>, в рамках релятивистской схемы последовательно сделать не удаётся, так как все высшие приближения теории возмущений, включающие инерционные эффекты, приводят к бесконечным выражениям. Поэтому в теории затухания не учитываются эффекты, связанные с инерцией спина нуклеона.

В статическом приближении (нуклеоны покоятся) теория затухания приводит к следующему выражению для полного сечения рассеяния  $\pi^+$ -мезонов на протоне в симметричном варианте<sup>\*</sup>):

$$\sigma(p^+, p^+) = 4\pi \left(\frac{g}{\mu}\right)^4 \frac{k^4}{\omega^2} \left[ \frac{1 + \frac{4}{3} \left(\frac{g}{\mu}\right)^4 \frac{k^6}{\omega^2}}{\left(1 + 4 \left(\frac{g}{\mu}\right)^4 \frac{k^6}{\omega^2}\right) \left(1 + \left(\frac{g}{\mu}\right)^4 \frac{k^6}{\omega^2}\right)} \right]. \quad (4.4)$$

Характерным отличием этого выражения от формулы (4.2) является наличие в нём дополнительного члена в квадратных скобках, обязанного своим появлением учёту затухания ( $g^2$  в знаменателе).

При больших значениях  $k$  ( $k \gg \frac{\mu}{g}$ ) сечение (4.3) убывает пропорционально  $k^{-2}$ ; в области малых  $k$  оно переходит в формулу (4.2а).

Для  $\sigma(p^-, p^-)$  и  $\sigma(p^0, p^-)$  в симметричной теории получаются довольно сходные выражения, которые мы не будем здесь выписывать. Отметим только, что они, так же как  $\sigma(p^+, p^+)$ , при малых  $k$  переходят в соответствующие формулы теории слабой связи (4.2б и в). Ход зависимости сечения от энергии в теории затухания качественно напоминает картину, полученную на опыте. Сечение достигает максимума при энергиях порядка нескольких  $\mu$  и затем падает с ростом энергии.

Тем не менее учёт членов, ответственных за затухание, не делает согласие теории с экспериментом полным. Действительно, отношение (4.3) в симметричной теории с затуханием почти не отличается от соответствующего отношения в теории слабой связи в области энергии  $< \mu$ . При  $g^2 \cong 0,3$  и при  $k \sim \mu$  оно приближается к единице.

<sup>\*</sup>) Эти результаты сообщил нам В. Михайлов. В работе<sup>45</sup> эти расчёты не проделаны до конца в интересующей нас области энергий.

С дальнейшим ростом энергии это отношение становится несколько больше единицы, однако сами формулы оказываются при этом уже не применимыми (не учитывается отдача нуклеонов и совершенно не ясна роль высших приближений).

Угловое распределение, рассчитанное с учётом затухания, также не согласуется с опытом, поскольку, как и в теории слабой связи, вклад от  $S$ -состояний в рассеяние носит чисто релятивистский характер.

Отметим, что поскольку взаимодействие в теории затухания не предполагается слабым, существенный вклад в физические результаты могут внести инерционные члены, которые произвольно отбрасываются в этой теории.

Поэтому именно в той области энергий ( $> \mu$ ), где эффекты затухания начинают играть заметную роль, правильные выражения для сечения рассеяния  $\pi$ -мезонов на нуклеонах могут иметь мало общего с формулой (4.4) и аналогичными формулами для  $\sigma(p^+, p^-)$  и  $\sigma(p^0, p^-)$ .

Остановимся теперь кратко на результатах, к которым приводит теория, основанная на предположении, что тяжёлые частицы обладают конечными размерами<sup>17</sup> (вводится новая физическая константа  $a$  — радиус нуклеона). В такой теории оказывается возможным учесть эффекты, связанные как с реакцией излученного мезонного поля, так и с инерцией спина нуклеона. В этой теории нуклоны предполагаются покоящимися. Мезоны могут трактоваться релятивистски (однако их энергия должна оставаться  $\ll M$ ).

Если рассматривать операторы спина  $\sigma$  и изотопического спина  $\tau$  нуклеона как классические векторы, то уравнения движения в теории протяжённых источников могут быть решены классическим способом.

Выражения для сечений рассеяния  $\pi$ -мезонов нуклеонами в симметричной псевдоскалярной теории с псевдовекторной связью были вычислены в работах<sup>20, 46 \*</sup>). В общем случае произвольного радиуса нуклеона сечения имеют довольно громоздкий вид. Поскольку, однако, характерные черты выражения для сечения рассеяния мезонов в теории протяжённых источников являются общими для всех вариантов псевдоскалярной теории с градиентной связью, мы ограничимся анализом наиболее простого случая. Рассмотрим рассеяние нейтрального псевдоскалярного мезона с градиентной связью. Полное сечение рассеяния для произвольного  $a$  в этом случае будет

$$\sigma = 4\pi \cdot (s/g) \left( \frac{g}{\mu} \right)^4 \frac{k^4}{\omega^2} \frac{1 + \xi^2 + \eta^2}{(1 - \xi^2 - \eta^2)^2 + 4\eta^2} [G(k)]^2; \quad (4.4a)$$

\*) В работах<sup>46</sup> рассеяние  $\pi$ -мезонов в симметричной теории было рассчитано классическим способом. Полученные там результаты качественно согласуются с результатами квантово-механического рассмотрения, приведённого в<sup>20, 47</sup>.

здесь

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{2}{3} \frac{g^2}{\omega} \left( \frac{\omega^2}{a} - \mu^2 \right), \\ \eta &= \frac{2}{3} g^2 \frac{k^2}{\omega}, \end{aligned} \right\} \quad (4.46)$$

а  $G(k)$  — форм-фактор нуклона — функция, зависящая от конкретных предположений о форме нуклона. Константа  $a$  следующим образом связана с  $G(k)$ :

$$\frac{1}{a} = \frac{2}{\pi} \int G(k) dk.$$

В формуле (4.4а) члены  $\eta^2$  обязаны своим происхождением учёту реакции излучаемого мезонного поля на движение нуклона; члены  $\xi^2$  связаны с инерцией спина при рассеянии мезонов на нуклонах. Для точечного источника ( $a \rightarrow 0$ ) члены  $\xi^2$  становятся бесконечными.

В предельном случае, когда  $\frac{1}{a} \gg \mu$  (радиус нуклона гораздо меньше комптоновской длины волны мезона; случай сильной связи), а на энергию наложено ограничение  $\omega \ll \frac{1}{a}$ ,  $G(k)$  в (4.4а) можно заменить единицей и пренебречь по сравнению с  $\xi$ . Тогда получится

$$\sigma = 4\pi \frac{8}{9} \left( \frac{g}{\mu} \right)^4 \frac{k^4}{\omega^2} \left\{ \frac{1 + \left( \frac{2}{3} g^2 \frac{\omega}{a\mu^2} \right)^2}{\left[ 1 - \left( \frac{2}{3} g^2 \frac{\omega}{a\mu^2} \right)^2 \right]^3} \right\}. \quad (4.5а)$$

Если при этом константа связи столь велика, что  $\frac{g^2\omega}{\mu^2a} \gg 1$ , то можно пренебречь единицей по сравнению с  $\left( \frac{2}{3} g^2 \frac{\omega}{\mu^2a} \right)$ . Полное сечение оказывается в этом случае не зависящим от  $g^2$  и равным

$$\sigma = 8\pi \frac{k^4}{\omega^4} a^2. \quad (4.5б)$$

Так как  $(k^4/\omega^4)$  в (4.5б) всегда меньше единицы, а  $a$  по предположению  $\ll \frac{1}{\mu}$ , то мы приходим к выводу, что в теории сильной связи сечение рассеяния  $\pi$ -мезонов на нуклонах намного меньше геометрического. Для промежуточных значений величины  $g^2\omega/a\mu^2$  формула (4.5а) приводит к типично резонансной зависимости сечения рассеяния от энергии падающих мезонов, причём ширина резонансной кривой определяется соотношением величин  $\eta$  и  $\xi$  и при  $\eta \sim \xi$  становится близкой к наблюдаемой в опытах по рассеянию  $\pi$ -мезонов на нуклонах. Отношение сечений рассеяния положительных и отрицательных  $\pi$ -мезонов в теории протяжённых источников, повидимому,

можно согласовать с экспериментом как при квантовом<sup>47</sup>, так и при классическом<sup>46</sup> решении задачи.

Однако получающееся при этом угловое распределение не содержит членов  $\sim \cos \theta$ , которые возникают благодаря интерференции  $S$ - и  $P$ -волн при рассеянии.

В принципе, учитывая отдачу,  $S$ -волна может быть получена в теории протяжённых источников. Однако она будет иметь релятивистское происхождение и давать в сечение пренебрежимо малый вклад в области энергий  $\leq \mu$ , что не согласуется с экспериментальными данными (см. §§ 1 и 3).

В другом предельном случае  $\frac{1}{a} \leq \mu$  (включая случай  $\frac{1}{a} = 0$ , когда все инерционные эффекты исчезают) в формуле (4.4а) можно пренебречь  $\xi$  по сравнению с  $\eta$ . Теперь главную роль играют члены, ответственные за затухание. В этом случае выражения, полученные в теории протяжённых источников, при  $\eta^2 \gg 1$  совпадают с точностью до числового множителя с соответствующими формулами теории затухания.

Подводя краткий итог результатам, изложенным в этом параграфе, можно сказать, что существующие исследования, основанные на теории мезонного поля, не в состоянии дать полного объяснения опытов по рассеянию  $\pi$ -мезонов нуклеонами. В предпринятых в последнее время теоретических попытках такого объяснения<sup>26, 46, 47</sup> используются представления об изобарах. Следует подчеркнуть, что вводящиеся при этом изобары отличаются от изобар, обычно рассматриваемых теорией сильной связи<sup>20, 35</sup> своей неустойчивостью, связанной с тем, что их энергия больше  $M\pi^2 + \mu\pi^2$ . Ширина энергетических уровней таких изобарных состояний оказывается большой.

Отметим, что из опытов по рассеянию  $\pi$ -мезонов на нуклонах пока нельзя сделать окончательного вывода о существовании максимума (см. рис. 2) в энергетической зависимости полного сечения от энергии. Однако наличие такого максимума следует ожидать, так как при энергии  $\geq 10^{10}$  Мэв сечение взаимодействия  $\pi$ -мезонов с нуклонами близко к геометрическому, в то время как при  $E \sim 150$  Мэв  $\sigma(p^+, p^+)$  примерно в три раза больше геометрического. Если ширина такого максимума окажется достаточно узкой\*), то можно будет говорить об изобарном состоянии. Такие изобары, повидимому, могут быть получены в так называемой теории промежуточной связи<sup>48</sup>.

Можно думать, что с помощью теории промежуточной связи можно будет достичь согласия теории с опытом. Правда для псевдовекторного взаимодействия, во всяком случае в современной формулировке теории промежуточной связи, вряд ли можно получить

\*) Т. е. ширина изобарного уровня окажется много меньше его высоты над основным состоянием.

значительную  $S$ -волну. Поэтому может оказаться полезным привлечение псевдоскалярной связи, приводящей к немалому  $S$ -рассеянию<sup>38, 39</sup>.

Значительный интерес представляет решение задачи о рассеянии  $\pi$ -мезонов нуклеонами с помощью метода И. Е. Тамма<sup>51</sup>, предложенного им в своё время для релятивистского исследования проблемы взаимодействия двух частиц. В настоящее время предпринимаются различные попытки использовать этот метод для теоретического изучения рассеяния  $\pi$ -мезонов нуклеонами<sup>52, 53</sup>. Однако полное исследование проблемы в этом направлении ещё далеко от своего завершения. Другим возможным путём для теоретической интерпретации опыта может явиться феноменологическое описание изобарных состояний с помощью теории частиц с несколькими спиновыми и зарядовыми состояниями.

В заключение следует, однако, подчеркнуть, что для построения законченной теории рассеяния  $\pi$ -мезонов нуклеонами необходимо значительное уточнение имеющихся опытных данных, а также получение экспериментальных результатов в области больших энергий  $\pi$ -мезонов.

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. А. М. Балдин и В. В. Михайлов, УФН **44**, 200 (1951).
2. Е. Л. Фейнберг, Journ. of Phys. **5**, 177 (1941); Б. Л. Иоффе, А. П. Рудик и И. М. Шмушкевич, ЖЭТФ **22**, 11, 21 (1952); K. Brueckner, R. Serber, K. Watson, Phys. Rev. **81**, 575 (1951).
- 2a. R. Durbin, H. Loar, J. Steinberger, Phys. Rev. **83**, 646 (1951); D. Clark, A. Roberts a. R. R. Wilson, Phys. Rev., **83**, 649 (1951); W. Cheston, Phys. Rev. **83**, 1118 (1951).
3. Б. Л. Иоффе и А. П. Рудик, ЖЭТФ **22**, 127 (1952).
4. H. L. Anderson, E. Fermi, E. A. Long, R. Martin a. D. E. Nagle, Phys. Rev. **85**, 934 (1952).
5. H. L. Anderson, E. Fermi, E. A. Long a. D. E. Nagle, Phys. Rev. **85**, 936 (1952).
6. H. L. Anderson, E. Fermi, D. E. Nagle a. G. B. Jodh, Phys. Rev. **86**, 413 (1952).
7. E. Fermi, H. L. Anderson, A. Lundby, D. E. Nagle a. G. B. Jodh, Phys. Rev. **85**, 935 (1952).
8. H. L. Anderson, E. Fermi, D. E. Nagle a. G. B. Jodh, Phys. Rev. **86**, 793 (1952).
- 8a. H. L. Anderson a. E. Fermi, Phys. Rev. **86**, 794 (1952).
9. C. Chedester, P. Isaacs, A. Sachs a. J. Steinberger Phys. Rev. **82**, 958 (1951).
10. P. Isaacs, M. A. Sachs a. J. Steinberger, Phys. Rev. **85**, 803 (1952).
11. S. W. Barnes, D. L. Clark, J. P. Perry a. C. E. Angell, Phys. Rev. **87**, 669 (1952).
12. R. P. Shutt, E. C. Fowler, D. H. Miller, A. M. Thorndike a. W. B. Fowler, Phys. Rev. **84**, 1247 (1951).
13. E. C. Fowler, W. B. Fowler, R. P. Shutt, A. M. Thorndike a. W. L. Wittemore, Phys. Rev. **86**, 1053 (1952).
14. W. Heisenberg, Zeits. f. Phys. **77**, 1 (1932).
15. Д. И. Блохинцев, Основы квантовой механики, Гостехиздат, 1949.

16. Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Квантовая механика, ч. I, Гостехиздат, 1948.
17. В. Паули, Мезонная теория ядерных сил, ИЛ, 1947.
18. Г. Вентцель, Введение в квантовую теорию волновых полей, Гостехиздат, 1947.
19. Ван-дер-Варден, Теория групп в квантовой механике, Гостехиздат.
20. W. Pauli a. S. Dancoff, Phys. Rev. **62**, 85 (1942).
21. W. Heitler, Proc. Roy. Irish. Acad. **51 A**, № 3, 33 (1946).
22. K. Watson, Phys. Rev. **85**, 852 (1952).
23. И. М. Гельфанд и З. Я. Шапиро, УМН **7**, 3 (1952).
24. N. Kemmer, Proc. Cambr. Phil. Soc. **34**, 354 (1938).
25. А. Ахизер и И. Померанчук, Некоторые вопросы теории ядра, Гостехиздат, 1950.
26. К. Вгюесклер, Phys. Rev. **86**, 106 (1952).
27. Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Теория поля, Гостехиздат, 1948.
28. Н. Ф. Мотт и Т. С. Мессп, Теория атомных столкновений.
29. Г. Бете, Квантовая механика простейших систем.
30. C. L. Critchfield a. D. C. Dodder, Phys. Rev. **76**, 602 (1949).
31. Л. Д. Ландау и Я. А. Смородинский, ЖЭТФ **14**, 269 (1944).
32. К. Вгюесклер, Phys. Rev. **87**, 1026 (1952).
33. Я. А. Смородинский, УФН **39**, 325 (1949).
34. Сборник «Сдвиг уровней атомных электронов», ИЛ, Москва, 1950.
35. В. Л. Гинзбург, Теория мезона и ядерные силы, Сборник «Мезон» под ред. И. Е. Тамма, Гостехиздат, 1947.
36. В. Паули, Релятивистская теория элементарных частиц.
37. В. Л. Гинзбург, ЖЭТФ **12**, 449 (1942).
38. И. Я. Померанчук и В. Б. Берестецкий, ЖЭТФ **21**, 1313 (1951).
39. В. Б. Берестецкий и И. М. Шмушкевич, ЖЭТФ **21**, 1321 (1951).
40. I. Ashkin, A. Simon a. M. Marshak, Progr. Theor. Phys. **5**, 634 (1950).
41. А. А. Соколов, Journ. of Phys. **5**, 231 (1941).
42. A. H. Wilson, Proc. Cambr. Phil. Soc. **37**, 301 (1941).
43. W. Heitler a. H. W. Peng, Proc. Cambr. Phil. Soc. **38**, 296 (1942).
44. E. Gora, Zeits. f. Phys. **120**, 121 (1943).
45. W. Heitler a. H. W. Peng, Proc. Roy. Irish. Acad. **49A**, 101 (1943).
46. a) D. Feldman, Phys. Rev. **88**, 725 (1952).  
b) W. W. Wada, Phys. Rev. **88**, 1032 (1952).
47. G. Wentzel, Phys. Rev. **86**, 437 (1952).
48. S. Tomonaga, Progr. Theor. Phys. **2**, 6 (1947).
49. R. E. Marshak, Phys. Rev. **88**, 1208 (1952).
50. R. Jastrow, Phys. Rev. **81**, 165 (1951).
51. И. Е. Тамм, Journ. of Phys., **9**, 445 (1945).
52. G. Chew, Phys. Rev., **89**, 591 (1953).
53. F. J. Dyson, S. S. Schweber, W. M. Visscher, Bull. Am. Phys. Soc., **28** № 1, 43 (1953); M. K. Sandaresan, E. E. Salpeter, M. Rose, то же, **28**, 43 (1953); H. A. Bethe a. F. J. Dyson, то же, **28**, 43 (1953).