1953 г. Июнь *Т. L, вып. 2*

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

О МАГНЕТООПТИЧЕСКИХ ЯВЛЕНИЯХ В ФЕРРОМАГНЕТИКАХ

(Макроскопическая теория)

А. В. Соколов

Теория магнетооптических явлений развивалась в своё время Гольдгаммером, Друде, Фохтом [1] и др.

Недостатком этих старых работ является то, что их авторы недостаточно резко проводили различие между феноменологической теорией и модельными классическими теориями, которые давно устарели. Поэтому вполне целесообразно очистить феноменологическую теорию магнетооптических явлений от модельных представлений и изложить ее чётко и доступно для широкого круга физиков. В этой работе проводится самое общее формальное макроскопическое описание магнетооптических явлений без привлечения каких бы то ни было микроскопических моделей.

1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О ЯВЛЕНИЯХ ФАРАДЕЯ И КЕРРА В ФЕРРОМАГНЕТИКАХ

Магнетооптические явления в ферромагнитных металлах по способу наблюдения можно разбить на две главные группы: 1) эффект Фарадея и 2) эффект Керра.

Под эффектом Фарадея понимают вращение плоскости поляризации и одновременное возникновение эллиптичности при прохождении первоначально линейно поляризованного света через тонкие намагниченные плёнки ферромагнитного металла.

Под эффектом Керра понимают влияние намагниченности ферромагнитного зеркала на состояние поляризации отражённого от его поверхности света. Влияние намагниченности на отражённый свет существенно зависит от геометрического расположения поверхности зеркала, плоскости падения и направления вектора намагничения **I**. Общий случай сводится к трём основным, отличающимся расположением вектора намагничения, а именно: 1) *полярное намагничение*, при котором вектор намагничения перпендикулярен к плоскости зеркала, но параллелен плоскости падения; 2) меридиональное намагничение, при котором вектор

намагничения параллелен как поверхности зеркала, так и плоскости падения; 3) экваториальное намагничение, при котором вектор намагничения параллелен поверхности зеркала, но перпендикулярен к плоскости падения (рис. 1).

Соответственно этому различают полярный, меридиональный и экваториальный эффекты Керра. С целью уяснения существенной разницы расположений *I* и *II* целесообразно рассмотреть случай, при котором в падающем луче колебания электрического вектора совершаются параллельно или перпендикулярно к плоскости падения. Тогда по законам

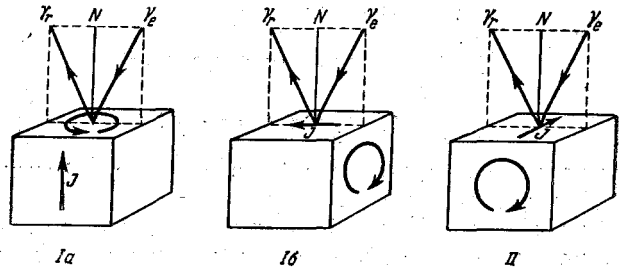

Рис. 1.

обычной металлооптики (без намагничения) это состояние колебаний остаётся при отражении неизменным.

Если намагничение направлено как в *I*, то кроме прямолинейного колебания электронов в металле, вызываемого электрическим вектором падающего света, благодаря лоренцевой силе возникает ещё перпендикулярное к нему колебание.

Соответственно этому во вторичной волне также возникает нормальная компонента, называемая компонентой Керра, которая по законам сложения колебаний вызывает эллиптическое колебание отражённого света (которое без намагничения должно быть линейным). При меридиональном намагничении и при перпендикулярном падении не существует никакого эффекта, так как магнитное поле обладает вращательной симметрией. При косом падении света этот эффект существует. При экваториальном намагничении, также на основе симметрии, никакой эффект не имеет места, если в падающем свете колебания электрического вектора совершаются параллельно или перпендикулярно плоскости падения. При других углах плоскости колебаний падающего света относительно плоскостей *P* и *S* (*P* и *S* — плоскости соответственно параллельная и перпендикулярная к плоскости падения) имеют место изменения амплитуды и фазы отражённого света благодаря намагничению, и соответственно этому наблюдается эффект. На описании экспериментальных установок, употребляемых для обнаружения рассматриваемых эффектов, мы останавливаться не будем и отсылаем интересующихся к обзорам по этому вопросу [2] и оригинальным статьям.

Опытное изучение рассматриваемых явлений показало, что величина угла вращения α и степень эллиптичности (B/A) в обоих случаях при заданных внешних условиях (температура, частота света и т. п.) пропорциональны технической намагниченности I ферромагнитного образца, а не величине внешнего магнитного поля. Так, например, для угла вращения при прохождении света имеем:

$$\alpha_{\Phi} = K_{\Phi}\, lI, \tag{1,1}$$

а в случае полярного эффекта при нормальном отражении

$$\alpha_{\text{к}} = K_{\text{к}}\, I, \tag{1,2}$$

где l — толщина просвечиваемого образца, K_{Φ} — постоянная Щегляева-Кундта и $K_{\text{к}}$ — постоянная Керра. Эти постоянные, как показывает опыт, зависят от частоты света (дисперсия) и от температуры.

Магнетооптический эффект Керра обнаружен только в ферромагнетиках, и установлено, что, кроме особых магнитных свойств, необходимым условием его существования является наличие поглощения света, т. е. комплексность показателя преломления вещества. Как правило, у данного материала в обоих эффектах наблюдаются разные знаки вращения. Несмотря на это, дисперсионные кривые в обоих эффектах, особенно в чистых металлах, обнаруживают вполне аналогичный ход. Кривые вращательной дисперсии, измеренные Дю-Буа[3] и в инфракрасной области спектра Ингерсоллом[4,5], показывают для стали и кобальта

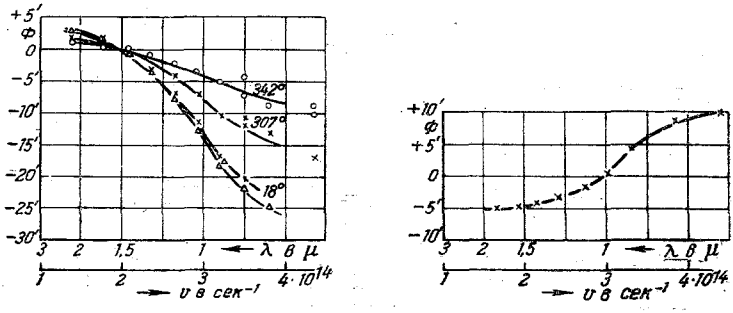

Рис. 2.

достаточно равномерный ход без резких максимумов и минимумов. Напротив, никель, а также многие ферромагнитные соединения и сплавы[6] показывают резко выраженные максимумы и минимумы на кривых зависимости вращения от частоты и даже изменение знака вращения. В частности, Ингерсолл, а несколько позже Клитцинг нашли, что эффект Керра на никеле в области инфракрасного света даёт положительное вращение, тогда как в видимой области спектра вращение отрицательно (как для стали и кобальта). Положение нулевой точки находится для эффекта Керра при $\lambda_1 = 1{,}5\,\mu$ ($\nu_1 = 2\cdot 10^{-14}$ *сек*$^{-1}$), а для эффекта Фарадея при $\lambda_1 = 1\,\mu$ ($\nu_1 = 3\cdot 10^{14}$ *сек*$^{-1}$) (рис. 2). Клитцингом также

установлено, что положение нулевой точки в пределах точности измерений не зависит от температуры и силы поля. Дю-Буа, исследуя эффект Керра на нагреваемом никелевом зеркале, нашёл, что вращение исчезает в точке Кюри. Измерения этого явления на никеле также были произведены Хиршем[7]. М. М. Носковым[12] опыты на никеле были проведены в атмосфере водорода и показано, что данные указанных авторов неточны, а именно: вращение сохраняется и при температурах на несколько градусов выше точки Кюри, вместе с так называемым «истинным намагничением». Мартин[6] исследовал температурную зависимость вращения Керра на многих ферромагнитных соединениях и в каждом случае, при котором зеркало допускало нагревание вплоть до точки Кюри, установил, что вращение с ростом температуры убывает и исчезает в точке Кюри. Однозначная связь с намагниченностью была установлена М. М. Носковым[12] экспериментально на сплавах никеля с медью различной концентрации. На пропорциональности вращения Керра намагничению основано применение магнетооптических методов к исследованию магнитного поведения ферромагнитных веществ. Эти методы заслуживают внимания также потому, что они дают возможность определять абсолютное намагничение из оптических измерений. Из тонкой пластины исследуемого материала изготовляют зеркало, намагничивают его и измеряют полярное вращение Керра в зависимости от силы поля. Между намагничением I пластины, размагничивающий фактор которой равен $N = 4\pi$, и силой поля H_e существует соотношение

$$I = \frac{\varkappa}{1 + 4\pi\varkappa} H_e. \qquad (1,3)$$

В области малых полей восприимчивость $\varkappa$ значительно больше единицы; вследствие этого I, а также и вращение Керра $\alpha_к$ пропорциональны внешнему полю H_e:

$$I = \frac{1}{4\pi} H_e \quad \text{и} \quad \alpha_к = K_к I = \frac{1}{4\pi} K_к H_e. \qquad (1,4)$$

По измеренным значениям вращения $\alpha_к$ при определённых силах поля в этой области получают постоянную Керра для материала зеркала. По вращению при насыщении α_∞ получают затем намагничение насыщения I_∞ путём деления первой величины на постоянную Керра, определённую ранее. Дю-Буа этим способом определил кривую намагничения и намагничение насыщения магнетита. Намагничение насыщения по Дю-Буа можно получить также непосредственно из графического представления вращения Керра в зависимости от силы поля. Абсцисса точки пересечения прямой $\alpha = \frac{K_к}{4\pi} H_e$ с асимптотой $\alpha_\infty = K_к I_\infty = \text{const}$ равна $H_B = 4\pi I_\infty$. Рис. 3 наглядно поясняет изложенное.

Таким способом Баркеру[8] и Лориа[8] удалось показать, что магнетооптическое определение намагничения насыщения весьма хорошо соответствует магнитно измеренным значениям I_∞. Эти результаты оправ-

дывают применение изложенного метода к зеркалам из других материалов, магнитное насыщение которых неизвестно. При сравнении магнетооптических методов с магнитными нужно помнить, что магнитные измерения дают среднее намагничение определённого объёма вещества, в то время как магнетооптические измерения дают заключения о состоянии вещества в тонком поверхностном слое, от которого происходит отражение света. Помимо общих экспериментальных трудностей измерения весьма малого вращения плоскости поляризации имеются ещё

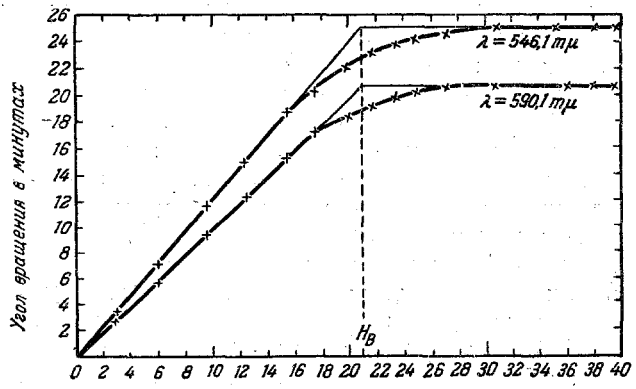

Рис. 3.

и принципиальные трудности, которые имеют своё основание в несовершенстве поверхности зеркала.

Вследствие наличия трещин и пор в материале поверхность зеркала разбивается на маленькие площадки, размагничивающий фактор которых меньше 4π. Предположение расчёта тогда более не выполняется и потому получается меньшее значение для намагничения насыщения. Вышеописанная особенность эффекта Керра, позволяющая получать сведения о состоянии поверхности тела, наводит на мысль о том, что измерения эффекта Керра могут быть полезными при решении металлографических вопросов, касающихся поверхности обрабатываемой детали.

Интересно в связи с этим отметить совсем недавнюю работу [13], в которой осуществлено наблюдение ферромагнитных областей при помощи эффекта Керра на поверхностях, перпендикулярных и наклонных к гексагональной оси кобальта. Если поверхность пересекает гексагональную ось, то всякий домен, простирающийся до поверхности, образует северный или южный магнитный полюс. Линейно поляризованный свет, падающий перпендикулярно к поверхности (0001), испытывает вращение приблизительно на $^1/_2{}^\circ$ при отражении; вращение является положительным или отрицательным в зависимости от полярности отражающей области.

Используя оптическую установку, состоящую из поляризатора, анализатора и компенсатора, можно получить группу доменов некото-

рой полярности, дающих темноту, тогда как другая группа освещена, следовательно, допускает наблюдение доменов. Следует отметить, что, хотя сравнительно легко получить фотографии картин поляризованного света, визуальное наблюдение невозможно из-за весьма малой интенсивности света и недостаточного контраста.

Состояние поверхности исследуемого образца оказывает существенное влияние на величину эффекта Керра.

Вращение плоскости поляризации при отражении света от ферромагнитного зеркала, намагниченного вдоль нормали, может заметно менять свою величину, если металл граничит со средой, оптически более плотной, чем воздух или вакуум.

М. М. Носковым [9] экспериментально было показано, что диэлектрик, нанесённый на поверхность стального зеркала в виде плёнки толщиной порядка длины волны видимого света, вызывает возрастание угла поворота плоскости поляризации в несколько раз, причём α/α_0 — относительное увеличение этого угла — зависит от толщины плёнки и имеет первый резкий максимум при толщине порядка четверти длины волны.

Я. И. Френкелем [10] была предложена теория этого явления, согласно которой изменение α/α_0 с толщиной плёнки должно иметь строго периодический характер, без затухания, с максимумами при толщинах $a_m=(2s+1)\,\lambda/4$. Максимальное значение α/α_0 должно быть равным квадрату показателя преломления вещества плёнки.

Дальнейшие исследования М. М. Носкова [11] показали, что поглощающие плёнки (окись железа, иодистое серебро и др.) в значительной мере отступают от теории Я. И. Френкеля. Для поглощающих плёнок значения α/α_0 в первых максимумах оказываются значительно большими, чем это следует по формуле Я. И. Френкеля ($\alpha_m/\alpha_0=n^2$). Что же касается дальнейшего хода кривых зависимости угла вращения от толщины плёнки, то, кроме затухания, наблюдаются резкие нарушения закона простой периодичности: перемена знака эффекта в случае иодистого серебра и, в особенности, — громадные вращения обратного знака для образцов с плёнками окиси железа. Более общая теория зависимости магнетооптического эффекта Керра от толщины и оптических констант тонких плёнок была построена М. М. Носковым и автором [12].

2. СООТНОШЕНИЕ МЕЖДУ АМПЛИТУДАМИ ПАДАЮЩЕЙ И ОТРАЖЁННОЙ ВОЛНЫ В СЛУЧАЕ НАМАГНИЧЕННОГО ФЕРРОМАГНЕТИКА. МИНИМУМ- И НУЛЬ-ВРАЩЕНИЕ АНАЛИЗАТОРА И ПОЛЯРИЗАТОРА И ЗАКОН ВЗАИМНОЙ ОБРАТИМОСТИ

Между комплексными амплитудами электрического вектора A_p и A_s падающей волны и комплексными амплитудами R_p и R_s волны, отражённой от намагниченного ферромагнетика, существуют соотношения [1]:

$$\left.\begin{aligned} R_s &= r_{11}A_s + r_{12}A_p, \\ R_p &= r_{21}A_s + r_{22}A_p. \end{aligned}\right\} \qquad (2,1)$$

Здесь p и s — два взаимно перпендикулярных направления, а именно: параллельное и перпендикулярное плоскости падения. Параметры r_{ik}, вообще говоря, комплексные величины. Соотношения (2,1) не зависят от специального вида теории и допустимы во всех случаях, когда внутри каждой из сред, а также на границе между ними справедливы линейные условия для компонент колебаний в световой волне. Так как линейность этих уравнений основывается на опытном факте суперпозиции волн, то можно вышеуказанные соотношения рассматривать как требования, вытекающие из опыта. На уравнения (2,1) следует смотреть как на обобщение хорошо известных формул Френеля. Обычные формулы отражения Френеля (без влияния намагниченности) можно записать в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} R_s \\ R_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11} & 0 \\ 0 & r_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_s \\ A_p \end{pmatrix}. \tag{2,2}$$

Обобщённые формулы отражения (с учётом влияния намагниченности) можно в соответствии с (2,1) записать следующим образом:

$$\begin{pmatrix} R_s \\ R_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_s \\ A_p \end{pmatrix}. \tag{2,3}$$

Из сопоставления (2,2) и (2,3) непосредственно следует, что от намагниченности зависят лишь составляющие матрицы отражения, имеющие различные значки*), тогда как составляющие с одинаковыми значками должны быть независимы от поля. При намагниченности, равной нулю, r_{12} и r_{21} обращаются в нуль, и, следовательно, обобщённые формулы отражения (2,3) переходят в формулы отражения Френеля (2,2). Таким образом, мы можем сказать, что вместе с появлением намагниченности тела возникают в отражённом свете керровские компоненты $r_{12}A_p$ и $r_{21}A_s$. Абсолютные значения $|r_{12}|$ и $|r_{21}|$ являются мерой отношения амплитуд колебаний какой-либо из двух керровских компонент к амплитуде вызвавшей её падающей волны. Величины $\left|\frac{r_{12}}{r_{11}}\right|$ и $\left|\frac{r_{21}}{r_{22}}\right|$ аналогично являются мерой их отношения к соответствующей амплитуде обычным образом отражённой компоненты. Тангенсы угла фазового смещения керровской компоненты по отношению к вызвавшей ее компоненте колебания определяются выражениями:

$$-\frac{\operatorname{Im}(r_{12})}{\operatorname{Re}(r_{12})} \quad \text{и} \quad -\frac{\operatorname{Im}(r_{21})}{\operatorname{Re}(r_{21})}, \tag{2,4}$$

где Im обозначает мнимую часть, а Re — вещественную часть r_{ik}.

*) Строго говоря, от намагниченности зависят и диагональные элементы матрицы отражения, однако эта зависимость так мала, что ею можно пренебречь.

Тангенсы угла фазового смещения керровской компоненты по отношению к обычным образом отражённой компоненте определяются выражениями:

$$-\frac{\operatorname{Im}\left(\frac{r_{12}}{r_{11}}\right)}{\operatorname{Re}\left(\frac{r_{12}}{r_{11}}\right)} \quad \text{и} \quad -\frac{\operatorname{Im}\left(\frac{r_{21}}{r_{22}}\right)}{\operatorname{Re}\left(\frac{r_{21}}{r_{22}}\right)}. \tag{2,5}$$

а) Минимум-вращение анализатора и эллиптичность

Среди непосредственно наблюдаемых величин при измерении эффекта Керра минимум-вращения анализатора и поляризатора играют особую роль. Если отражённый свет, как это рассматривается в общем случае, является эллиптически поляризованным, то направление колебаний, пропускаемых анализатором, дающее наименьшую интенсивность, очевидно, расположено параллельно меньшей оси эллипса колебаний, тогда как большая ось эллипса расположена перпендикулярно к направлению колебаний, пропускаемых анализатором A. Если представить отражённые колебания в виде

$$R_p = Fe^{if}, \qquad R_s = Ge^{ig}, \tag{2,6}$$

где F и G — вещественные амплитуды, f и g — фазовые постоянные, то ось эллипса колебаний образует с p-направлением угол φ, определяемый соотношением [14]

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2FG}{F^2 - G^2} \cos(f - g), \tag{2,7}$$

причём два значения этого угла соответствуют направлениям большой и малой оси эллипса колебаний. Если колебания падающего света совершаются в плоскости падения ($A_s = 0$), то в отражённом свете большая ось образует малый угол χ_p с p-направлением и, так как при этом F велико по сравнению с G, то из (2,6) и (2,7) следует

$$\chi_p = \frac{G}{F} \cos(f - g) = \operatorname{Re}\left(\frac{R_s}{R_p}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{r_{12}}{r_{22}}\right). \tag{2,8}$$

На тот же самый угол следует повернуть анализатор от s-направления, для того чтобы пропустить лишь линейные колебания, соответствующие малой оси, т. е. установить минимум интенсивности отражённого света. Наоборот, если в падающем свете направление колебаний параллельно s-направлению ($A_p = 0$), то G велико по сравнению с F и большая ось отражённых колебаний образует с s-направлением малый угол χ_s, равный

$$\chi_s = -\frac{F}{G} \cos(f - g) = -\operatorname{Re}\left(\frac{R_p}{R_s}\right) = -\operatorname{Re}\left(\frac{r_{21}}{r_{11}}\right). \tag{2,9}$$

Чтобы получить минимум интенсивности, следует анализатор из положения, параллельного к p-направлению, повернуть на тот же самый угол. Формулы (2,8) и (2,9) определяют, таким образом, минимум-вращение анализатора, ибо они определяют углы, на которые следует повернуть анализатор от положения, перпендикулярного к p-направлению (соответственно перпендикулярного к s-направлению), чтобы получить минимальную интенсивность отражённого света. Для определения эллиптичности $\frac{B}{A} = \operatorname{tg}\vartheta$ будем исходить из хорошо известной формулы[14]

$$\sin 2\vartheta = \pm \frac{2FG}{F^2 + G^2} \sin(f - g) = \pm \frac{2\frac{G}{F}}{1 + \frac{G^2}{F^2}} \sin(f - g). \quad (2,10)$$

В первом случае ($A_s = 0$) мы считаем $G \ll F$ и, следовательно, величиной $\frac{G^2}{F^2}$ по сравнению с единицей можно пренебречь; тогда будем иметь:

$$\frac{B}{A} = \operatorname{tg}\vartheta \approx \sin\vartheta = \pm \frac{G}{F} \sin(f - g) = \pm \operatorname{Im}\left(\frac{R_s}{R_p}\right) =$$
$$= \pm \operatorname{Im}\left(\frac{r_{12}}{r_{22}}\right). \quad (2,11)$$

Аналогично, для второго случая ($A_p = 0$) получаем:

$$\frac{B}{A} = \mp \operatorname{Im}\left(\frac{r_{21}}{r_{11}}\right). \quad (2,12)$$

б) Минимум-вращение поляризатора и закон взаимной обратимости

Рассмотрим теперь случай, при котором линейно поляризованный свет падает под углом χ^0 к p-оси, и определим χ^0 так, чтобы абсолютные значения R_s или R_p принимали наименьшее значение. Эти оба значения χ^0 представляют минимум-вращение поляризатора. Если

$$A_p = A\cos\chi^0, \qquad A_s = A\sin\chi^0, \quad (2,13)$$

где A — вещественная амплитуда падающего колебания, то колебания отражённого света можно записать в следующем виде:

$$R = A(r\sin\chi^0 + r'\cos\chi^0). \quad (2,14)$$

Полагая, далее, $r = \mathfrak{r}e^{i\rho}$ и $r' = \mathfrak{r}'e^{i\rho'}$, получим:

$$R = Ae^{i\rho}(\mathfrak{r}\sin\chi^0 + \mathfrak{r}'e^{i(\rho'-\rho)}\cos\chi^0). \quad (2,15)$$

Минимум R определяется минимумом величины

$$|\mathfrak{r}\sin\chi^0 + \mathfrak{r}'e^{i(\rho'-\rho)}\cos\chi^0|.$$

Так как это выражение в развёрнутом виде имеет вид:

$$\mathfrak{r}^2 \sin^2 \chi^0 + \mathfrak{r}'^2 \cos^2 \chi^0 + 2\,\mathfrak{r}\mathfrak{r}' \cos(\rho' - \rho) \sin \chi^0 \cos \chi^0,$$

то величина $|R|$ принимает минимальное значение при значении χ^0, удовлетворяющем условию

$$\operatorname{tg} 2\chi^0 = \frac{2\,\mathfrak{r}\mathfrak{r}'}{\mathfrak{r}'^2 - \mathfrak{r}^2} \cos(\rho' - \rho). \tag{2,16}$$

Эта формула подобна формуле (2,7) и должна исследоваться таким же способом. При этом R следует считать один раз как R_s, второй раз как R_p. Если потребовать чтобы $|R_s|$ обладало минимумом, то угол χ^0 должен быть малым и равным $\overset{0}{\chi_p}$. Одновременно следует полагать $r = r_{11}$, $r' = r_{12}$, откуда следует, что $\mathfrak{r}'$ мало сравнительно с $\mathfrak{r}$. Формула (2,16) при этом даёт

$$\overset{0}{\chi_p} = -\frac{\mathfrak{r}'}{\mathfrak{r}} \cos(\rho' - \rho) = -\operatorname{Re}\left(\frac{r_{12}}{r_{11}}\right). \tag{2,17}$$

Если потребовать, чтобы $|R_p|$ обладало минимумом, то должно быть

$$\chi^0 = \frac{\pi}{2} + \overset{0}{\chi_s}$$

(где $\overset{0}{\chi_s}$ — малый угол) и одновременно следует считать $r = r_{21}$, $r' = r_{22}$ и поэтому $\mathfrak{r}$ мало сравнительно с $\mathfrak{r}'$. В этом случае формула (2,16) даёт

$$\overset{0}{\chi_s} = \frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{r}'} \cos(\rho - \rho') = \operatorname{Re}\left(\frac{r_{21}}{r_{22}}\right). \tag{2,18}$$

Полагая $r_{12} = r_{21}$ (полярный эффект) и сравнивая (2,8) и (2,18) и, соответственно, (2,9) и (2,17), получим закон взаимной обратимости при полярном эффекте, а именно:

$$\chi_s = \overset{0}{\chi_p} \quad \text{и} \quad \chi_p = \overset{0}{\chi_s}. \tag{2,19}$$

Полагая $r_{12} = -r_{21}$ (меридиональный эффект) и производя сравнение тех же формул, получим закон взаимной обратимости при меридиональном эффекте, а именно:

$$\overset{0}{\chi_p} = -\chi_s \quad \text{и} \quad \overset{0}{\chi_s} = -\chi_p. \tag{2,20}$$

в) Формулы для нуль-вращения анализатора и поляризатора

Всегда можно выбрать такое положение поляризатора около s- или p-направления, при котором отражённый свет, являющийся, вообще говоря, эллиптически поляризованным, будет линейно поляризованным и, следовательно, может быть полностью потушен анализатором. Это — так называемое нуль-вращение, требующее как вращения

анализатора, так и поляризатора. На опыте нулевые установки возможны только при очень малых углах вращения, поэтому одновременно величины $\left(\frac{R_s}{R_p}\right)$ и $\left(\frac{A_s}{A_p}\right)$ или $\left(\frac{R_p}{R_s}\right)$ и $\left(\frac{A_p}{A_s}\right)$ — малые числа. В первом случае соотношения (2,1) при пренебрежении величинами второго порядка можно записать:

$$R_s = A_s r_{11} + A_p r_{12} \quad \text{и} \quad R_p = r_{22} A_p$$

или

$$r_{22} \frac{R_s}{R_p} = \left(r_{11} \frac{A_s}{A_p} + r_{12}\right). \tag{2,21}$$

Пусть падающий свет линейно поляризован и составляет угол ψ_p^0 с p-направлением, тогда $\frac{A_s}{A_p} = \psi_p^0$. Так как отражённый свет полностью тушится анализатором, то он должен быть также линейно поляризованным, и соответственно этому мы можем полагать $\frac{R_s}{R_p} = \psi_p$, где ψ_p есть угол, определяющий положение плоскости колебаний отражённого света относительно p-направления. С учётом этих соображений формула (2,21) может быть записана в следующем виде:

$$r_{22} \psi_p = r_{11} \psi_p^0 + r_{12}; \tag{2,22}$$

в силу комплексной природы r_{ik} (2,22) представляет два уравнения для определения ψ_p и ψ_p^0. Во втором случае соотношения (2,1) принимают вид:

$$R_s = A_s r_{11} \quad \text{и} \quad R_p = r_{21} A_s + r_{22} A_p$$

или

$$r_{11} \frac{R_p}{R_s} = \left(r_{21} + r_{22} \frac{A_p}{A_s}\right). \tag{2,23}$$

Полагая, как и ранее, $\frac{A_p}{A_s} = -\psi_s^0$ и $\frac{R_p}{R_s} = -\psi_s$, получим из (2,23):

$$r_{11} \psi_s = r_{22} \psi_s^0 - r_{21}. \tag{2,24}$$

Если $r_{12} = \pm r_{21}$, формулы (2,22) и (2,24) снова приводят к закону взаимной обратимости для нуль-вращения. Взяв уравнение (2,22) и ему комплексно-сопряжённое

$$r_{22}^* \psi_p = r_{11}^* \psi_p^0 + r_{12}^*$$

и решая их совместно, получим:

$$\psi_p = \frac{r_{11}^* r_{12} - r_{11} r_{12}^*}{r_{11}^* r_{22} - r_{11} r_{22}^*} = \frac{\operatorname{Im}\left(\frac{r_{12}}{r_{11}}\right)}{\operatorname{Im}\left(\frac{r_{22}}{r_{11}}\right)}, \tag{2,25}$$

$$\psi_p^0 = \frac{r_{12} r_{12}^* - r_{12}^* r_{22}}{r_{11}^* r_{22} - r_{11} r_{22}^*} = -\frac{\operatorname{Im}\left(\frac{r_{12}}{r_{22}}\right)}{\operatorname{Im}\left(\frac{r_{11}}{r_{22}}\right)}. \tag{2,26}$$

Выполняя аналогичные вычисления с уравнением (2,24) и ему сопряжённым, получим:

$$\psi_s = -\frac{\operatorname{Im}\left(\frac{r_{21}}{r_{22}}\right)}{\operatorname{Im}\left(\frac{r_{11}}{r_{22}}\right)}, \tag{2,27}$$

$$\psi_s^0 = \frac{\operatorname{Im}\left(\frac{r_{21}}{r_{11}}\right)}{\operatorname{Im}\left(\frac{r_{22}}{r_{11}}\right)}. \tag{2,28}$$

3. ОСНОВЫ МАКРОСКОПИЧЕСКОГО ОПИСАНИЯ МАГНЕТООПТИЧЕСКИХ ЯВЛЕНИЙ В ФЕРРОМАГНЕТИКАХ [15]

С момента открытия Керром вращения плоскости поляризации света при его отражении от намагниченного ферромагнитного зеркала был предложен ряд теорий, объясняющих этот эффект [1]. Во всех этих теориях явно использовались определённые классические микроскопические модели, на основе которых и выводились соотношения для магнетооптических явлений, в частности и для описания эффекта Керра. Однако именно в случае ферромагнетиков классическая электронная теория несостоятельна даже с иллюстративной точки зрения, так как само явление ферромагнетизма есть чисто квантовый эффект. Как было недавно показано [16], только квантовомеханическая теория даёт возможность получить правильное микроскопическое описание магнетооптического явления Керра. Однако можно показать, что самое общее формальное макроскопическое описание магнетооптических явлений не требует привлечения никаких микроскопических моделей. Попытка освободиться от привлечения классической электронной теории при установлении основных феноменологических соотношений магнетооптики была сделана Дарвином [17]. Однако работа Дарвина не может считаться окончательным и полным решением этого вопроса уже хотя бы потому, что он ограничивается рассмотрением только нормального падения света при полярном намагничивании ферромагнитного зеркала. В этом параграфе указан путь общего феноменологического описания магнетооптических явлений без привлечения микро-

скопических моделей. Для макроскопического описания магнетооптических эффектов в ферромагнетиках следует исходить из общих дифференциальных уравнений электромагнитного поля

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\operatorname{rot}\mathbf{E}, \tag{3,1}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \operatorname{rot}\mathbf{H}, \tag{3,2}$$

и тензорного уравнения

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}, \tag{3,3}$$

где ε — диэлектрический тензор намагниченного ферромагнетика. Следует заметить, что в макроскопической кристаллооптике для описания световых явлений, происходящих в кристаллах, используется та же система уравнений (3,1), (3,2) и (3,3). Диэлектрический тензор для прозрачных веществ является эрмитовским, что можно легко показать, используя закон сохранения энергии. Компоненты тензора ε для прозрачных кристаллов суть вещественные величины, тогда как для поглощающих сред они, вообще говоря, комплексные, причём мнимая часть их должна быть отрицательной.

Диэлектрический тензор намагниченного ферромагнетика строится на основе теории вынужденной анизотропии. Изотропную намагниченную среду можно рассматривать в оптическом отношении как двоякопреломляющий кристалл, оптические свойства которого определяются диэлектрическим тензором. Без ограничения общности можно считать, что вектор намагниченности (остаточная намагниченность или намагниченность, «вызванная» внешним полем) направлен вдоль оси z. Все плоскости, проходящие через это выделенное направление z, равноценны между собой. Отсюда следует, что диэлектрический тензор намагниченного ферромагнетика должен обладать цилиндрической симметрией, т. е.

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon, \\ &\varepsilon_{xy} = -\varepsilon_{yx} = -i\varepsilon Q, \\ &\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zx} = \varepsilon_{zy} = 0, \\ &\varepsilon_{zz} = \varepsilon_0, \end{aligned}\right\} \tag{3,4}$$

где Q — магнетооптический параметр, вообще говоря, комплексная величина, зависящая от намагниченности тела. При намагниченности, равной нулю, недиагональные элементы тензора обращаются в нуль, а диагональные элементы становятся одинаковыми $\varepsilon = \varepsilon_0$, т. е. тело становится оптически вполне изотропным. Подставляя (3,4) в (3,3), будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} &D_x = \varepsilon E_x - i\varepsilon Q E_y, \\ &D_y = i\varepsilon Q E_x + \varepsilon E_y, \\ &D_z = \varepsilon_0 E_z. \end{aligned}\right\} \tag{3,5}$$

Совместное решение (3,1), (3,2) и (3,5) с использованием граничных условий даёт описание всех магнетооптических эффектов и, в частности, эффектов Керра и Фарадея в ферромагнетиках. Диагональные компоненты диэлектрического тензора ферромагнетика $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon$ являются функциями магнетооптического параметра Q. Опыт показывает, что этот параметр мал ($Q \ll 1$), поэтому функцию $\varepsilon(Q)$ можно разложить в степенной ряд по Q и ограничиться первыми членами разложения, т. е.:

$$\varepsilon(Q) = \varepsilon_0 + \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial Q}\right)_{Q=0} Q + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial Q^2}\right)_{Q=0} Q^2. \tag{3,6}$$

При изменении направления намагниченности на обратное выражение (3,6) примет вид:

$$\varepsilon(-Q) = \varepsilon_0 - \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial Q}\right)_{Q=0} Q + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial Q^2}\right)_{Q=0} Q^2. \tag{3,7}$$

Далее имеем $\varepsilon(Q) = \varepsilon(-Q)$, ибо физические свойства тела не должны меняться при изменении направления намагниченности на обратное. Сравнивая (3,6) и (3,7), получаем:

$$\varepsilon(Q) = \varepsilon_0 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial Q^2}\right)_{Q=0} Q^2. \tag{3,8}$$

Введём такой множитель f, чтобы произведение его на ε_0 давало нам значение коэффициента перед Q^2 в (3,8), т. е.

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial Q^2}\right)_{Q=0} = \varepsilon_0 f. \tag{3,9}$$

Тогда

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_0 f Q^2. \tag{3,10}$$

Описание полярного эффекта Керра при нормальном падении можно получить при помощи уравнений (3,1), (3,2) и (3,5), тогда как для описания полярного эффекта при косом падении, а также для меридионального и экваториального эффектов следует использовать ещё дополнительное условие (3,10), которое получено здесь в противоположность Фохту, без всяких ссылок на классическую электронную теорию.

4. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПЛОСКОЙ НЕОДНОРОДНОЙ ВОЛНЫ ВНУТРИ ФЕРРОМАГНИТНОГО МЕТАЛЛА

Известно, что под плоской однородной волной понимают такую волну, амплитуда которой имеет постоянное значение в волновой плоскости и изменяется в направлении распространения. Такая волна аналитически записывается в виде $Fe^{i\omega\tau}$, где ω — циклическая частота, $\tau = t - \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{v}$ и $v = \frac{V}{1 - i\varkappa}$ — комплексная ско-

рость распространения, V — вещественная скорость, $\varkappa$ — величина, связанная с показателем поглощения соотношением $\varkappa n = k$, α, β, γ — направляющие косинусы волновой нормали. В дальнейшем нам придётся пользоваться неоднородной волной, амплитуда которой изменяется в волновой плоскости, а плоскость равных фаз составляет с плоскостью равных амплитуд некоторый угол, являющийся вещественным углом преломления. Фазу такой неоднородной волны мы можем записать в виде

$$\omega\tau = \omega\left(t - \frac{\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z - i\varkappa(\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z)}{V}\right), \tag{4,1}$$

где α_1, β_1, γ_1 — направляющие косинусы нормали к плоскости постоянных фаз и α_2, β_2, γ_2 — направляющие косинусы нормали к плоскости постоянных амплитуд. Таким образом, неоднородная плоская волна будет иметь вид:

$$Fe^{i\omega\tau} = Fe^{-\frac{\omega\varkappa}{V}(\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z)} e^{i\omega\left(t - \frac{\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z}{V}\right)}. \tag{4,2}$$

Такое написание неоднородной плоской волны ясно показывает, что плоскость равных фаз

$$\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z = \text{const}$$

и плоскость равных амплитуд

$$\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z = \text{const},$$

вообще говоря, между собой не совпадают. Если ввести сокращённые обозначения

$$(\alpha_1 - i\varkappa\alpha_2)^2 + (\beta_1 - i\varkappa\beta_2)^2 + (\gamma_1 - i\varkappa\gamma_2)^2 =$$
$$= 1 - \varkappa^2 - 2i\varkappa(\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2) = R,$$

$$\frac{\alpha_1 - i\varkappa\alpha_2}{R} = \alpha^*, \quad \frac{\beta_1 - i\varkappa\beta_2}{R} = \beta^*, \quad \frac{\gamma_1 - i\varkappa\gamma_2}{R} = \gamma^* \text{ и } \frac{V}{R} = v^*,$$

то $\alpha^{*2} + \beta^{*2} + \gamma^{*2} = 1$ и фазу плоской неоднородной волны можно представить в виде

$$\omega\tau^* = \omega\left(t - \frac{\alpha^* x + \beta^* y + \gamma^* z}{v^*}\right). \tag{4,3}$$

В предыдущем параграфе мы установили, что для описания магнетооптических эффектов в ферромагнетиках следует исходить из общих дифференциальных уравнений электромагнитного поля (3,1), (3,2) и (3,5). Взяв rot от (3,1) и использовав (3,2), получим:

$$c^2(\Delta E - \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{E}) = \frac{\partial^2 D}{\partial t^2}. \tag{4,4}$$

Подставив (3,5) в (4,4), будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} c^2(\Delta E_x - \mathrm{grad}_x \operatorname{div}\mathbf{E}) &= \varepsilon\ddot{E}_x - i\varepsilon Q\ddot{E}_y, \\ c^2(\Delta E_y - \mathrm{grad}_y \operatorname{div}\mathbf{E}) &= \varepsilon\ddot{E}_y + i\varepsilon Q\ddot{E}_x, \\ c^2(\Delta\ddot{E}_z - \mathrm{grad}_z \operatorname{div}\mathbf{E}) &= \varepsilon_0\ddot{E}_z. \end{aligned}\right\} \qquad (4,5)$$

Принимая решение в общей форме $E = E_0 e^{i\omega\tau^*}$ и полагая $\frac{c}{v^*} = \mathfrak{n}^*$, где $\mathfrak{n}^*$ — комплексный показатель преломления намагниченного ферромагнетика, получим:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon E_x - i\varepsilon Q E_y &= \mathfrak{n}^*[E_x - \alpha^*(\alpha^* E_x + \beta^* E_y + \gamma^* E_z)], \\ i\varepsilon Q E_x + \varepsilon E_y &= \mathfrak{n}^*[E_y - \beta^*(\alpha^* E_x + \beta^* E_y + \gamma^* E_z)], \\ \varepsilon_0 E_z &= \mathfrak{n}^*[E_z - \gamma^*(\alpha^* E_x + \beta^* E_y + \gamma^* E_z)]. \end{aligned}\right\} \qquad (4,6)$$

Исключая E_x, E_y и E_z, получим уравнение для $\mathfrak{n}^*$:

$$[\varepsilon(\alpha^{*2} + \beta^{*2}) + \varepsilon_0\gamma^{*2}]\,\mathfrak{n}^{*4} - [\varepsilon^2(1 - Q^2)(\alpha^{*2} + \beta^{*2}) + \varepsilon\varepsilon_0(1 + \gamma^{*2})]\,\mathfrak{n}^{*2} + \varepsilon_0\varepsilon^2(1 - Q^2) = 0. \qquad (4,7)$$

Это уравнение квадратично относительно $\mathfrak{n}^{*2}$ и поэтому в любых двух взаимно противоположных направлениях распространяются две волны с попарно равными скоростями. Умножив уравнения (4,6) соответственно на α^*, β^*, γ^* и сложив, получим:

$$(\varepsilon\alpha^* + i\varepsilon Q\beta^*)E_x + (\varepsilon\beta^* - i\varepsilon Q\alpha^*)E_y + \varepsilon_0\gamma^* E_z = 0. \qquad (4,8)$$

Из этого уравнения видно, что комплексное направление колебаний электрического поля $\mathbf{E}$ и волновая нормаль $\mathbf{S}^*(\alpha^*, \beta^*, \gamma^*)$ не перпендикулярны друг к другу. Если волна однородна, то α^*, β^*, γ_* реальны и равны α, β, γ. Соотношение $(\mathbf{E}\cdot\mathbf{S}) = 0$ должно также представлять поперечность колебаний при комплексном решении E_x, E_y, E_z. Так как оно не выполняется, то колебания электрического поля даже в однородной волне не поперечны. Магнитное поле световой волны ведёт себя иначе. Из уравнений (3,2) следует для плоской неоднородной волны соотношение $H_x\alpha^* + H_y\beta^* + H_z\gamma^* = 0$, выражающее «комплексную поперечность». Переходя к однородной волне, т. е. заменяя α^*, β^*, γ^* на α, β, γ, получаем действительную поперечность.

5. МАГНИТНОЕ ВРАЩЕНИЕ И ЭЛЛИПТИЧНОСТЬ ПРИ ПРОХОЖДЕНИИ СВЕТА ЧЕРЕЗ ТОНКИЕ СЛОИ ФЕРРОМАГНЕТИКА (ЭФФЕКТ ФАРАДЕЯ)

При продольном распространении света следует положить $\alpha^* = \beta^* = 0$ и $\gamma^* = 1$, и тогда уравнения (4,6) дают:

$$D^{\pm} = D_x \pm iD_y = \varepsilon(1 \mp Q)(E_x \pm iE_y) = \mathfrak{n}^{*2}(E_x \pm iE_y), \qquad (5,1)$$
$$D_z = \varepsilon_0 E_z = 0.$$

Отсюда получаем два решения:

$$\left.\begin{aligned} n_+^{*2} &= \varepsilon(1-Q) \quad \text{при} \quad E_x = +iE_y \\ \text{и} \qquad n_-^{*2} &= \varepsilon(1+Q) \quad \text{при} \quad E_x = -iE_y. \end{aligned}\right\} \tag{5,2}$$

Параллельно силовым линиям распространяются две поперечные циркулярно поляризованные волны; показатель преломления n_-^* соответствует право-поляризованной, а n_+^* — лево-поляризованной волнам. Если принять во внимание, что показатели преломления n_+^* и n_-^* отличаются друг от друга, а также от показателя преломления n в отсутствии намагничения лишь на малую величину и что магнетооптический параметр Q значительно меньше единицы, то из (5,2) при пренебрежении малыми величинами второго порядка следует соотношение

$$n_- - n_+^* = nQ, \tag{5,3}$$

которое в соединении с соотношением $n_+^* + n_-^* = 2n$ даёт

$$n_\pm^* = n\left(1 \mp \frac{1}{2}Q\right). \tag{5,4}$$

Из (5,4) также следует:

$$\left.\begin{aligned} n - n_+^* &= \frac{nQ}{2} = G, \\ n - n_-^* &= -\frac{nQ}{2} = -G. \end{aligned}\right\} \tag{5,5}$$

При поперечном распространении света (например, параллельно оси x) $\alpha^* = 1$, $\beta^* = \gamma^* = 0$ и тогда (4,7) даёт

$$(n^{*2} - \varepsilon_0)\,[n^{*2} - \varepsilon(1-Q^2)] = 0,$$

или

$$n_z^{*2} = \varepsilon_0, \quad n_\perp^{*2} = \varepsilon(1-Q^2). \tag{5,5'}$$

Первое соотношение (5,5′) представляет показатель преломления световой волны, колебания электрического вектора в которой совершаются параллельно силовым линиям, тогда как второе соответствует волне с колебаниями, перпендикулярными к ним.

Рассмотрим теперь плоскопараллельный слой ферромагнитного металла толщиною l и положим, что ось z и направление намагничения перпендикулярны к пластинке. Если линейно поляризованный свет падает в направлении намагничения, а ось x параллельна направлению колебания и лежит в плоскости пластины, то амплитуды световых колебаний в этой плоскости равны:

$$D_x = 1, \; D_y = 0, \text{ т. е. } D^+ = 1, \; D^- = 1. \tag{5,6}$$

По выходе из пластины амплитуды будут равны:

$$\left.\begin{aligned} D^+ &= e^{-ik\mathfrak{n}_+^* l} \\ D^- &= e^{-ik\mathfrak{n}_-^* l}, \end{aligned}\right\} \tag{5,7}$$

и

где $k = \frac{2\pi}{\lambda}$.

Так как $D_x = \frac{D^+ + D^-}{2}$ и $D_y = \frac{D^+ - D^-}{2i}$, то, учитывая (5,5), будем иметь:

$$\begin{aligned} D_x &= \frac{1}{2}\left(e^{-ik\mathfrak{n}_+^* l} + e^{-ik\mathfrak{n}_-^* l}\right) = \\ &= \frac{1}{2} e^{-ik\mathfrak{n}l}\left[e^{ik(-\mathfrak{n}_+^*)l} + e^{+ik(\mathfrak{n}-\mathfrak{n}_-^*)l}\right] = \\ &= \frac{1}{2} e^{-ik\mathfrak{n}l}\left(e^{ikGl} + e^{-ikGl}\right) = \\ &= \frac{1}{2} e^{-ik\mathfrak{n}l}\left[e^{ik(G_1 - iG_2)l} + e^{-ik(G_1 - iG_2)l}\right] = \\ &= \frac{1}{2} e^{-ik\mathfrak{n}l}\left[e^{ikG_1 l} e^{kG_2 l} + e^{-ikG_1 l} e^{-kG_2 l}\right]. \end{aligned} \tag{5,8}$$

Вводя сокращённые обозначения

$$\left.\begin{aligned} v &= kG_1 l \\ u &= kG_2 l, \end{aligned}\right\} \tag{5,9}$$

и

мы можем выразить D_x и D_y в следующем виде:

$$D_x = e^{-ik\mathfrak{n}l}\,\mathrm{ch}(u + iv), \qquad D_y = -ie^{-ik\mathfrak{n}l}\,\mathrm{sh}(u + iv). \tag{5,10}$$

Отношение амплитуд

$$\frac{D_y}{D_x} = -i\,\mathrm{th}(u + iv) \tag{5,11}$$

оказывается, таким образом, комплексной величиной, и линейно поляризованная световая волна, прошедшая через слой ферромагнитного металла, становится эллиптически поляризованной. Тот факт, что свет становится эллиптически поляризованным, можно показать непосредственными выкладками, пользуясь следующими формулами теории гиперболических функций:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{sh}(u + iv) &= a_2 e^{i\delta_2}, \\ \mathrm{ch}(u + iv) &= a_1 e^{i\delta_1}, \\ \mathrm{th}(u + iv) &= \frac{a_2}{a_1} e^{i\delta}, \end{aligned}\right\} \tag{5,12}$$

где:

$$\left.\begin{aligned} a_2 &= \sqrt{-\frac{1}{2}(\operatorname{ch}2u-\cos 2v)}, & \operatorname{tg}\delta_1 &= \frac{\operatorname{tg}v}{\operatorname{th}u},\\ a_1 &= \sqrt{\frac{1}{2}(\operatorname{ch}2u+\cos 2v)}, & \operatorname{tg}\delta_2 &= \operatorname{th}u\operatorname{tg}v,\\ \delta &= \delta_2-\delta_1, & \operatorname{tg}\delta &= \frac{\sin 2v}{\operatorname{sh}2u}. \end{aligned}\right\} \tag{5,13}$$

Учитывая (5,12) и вводя временный фактор $e^{i\omega t}$, получим:

$$D_x = a_1 e^{i(\omega t - k\mathfrak{n}z+\delta_1)},\quad D_y = a_2 e^{i\left(\omega t - k\mathfrak{n}z+\delta_2-\frac{\pi}{2}\right)}. \tag{5,14}$$

Стандартным способом можно показать, что компоненты D_x и D_y удовлетворяют уравнению

$$\frac{D_x^2}{a_1^2}+\frac{D_y^2}{a_2^2}-2\frac{D_xD_y}{a_1a_2}\sin\delta = \cos^2\delta, \tag{5,15}$$

где

$$\delta = \delta_2-\delta_1-\frac{\pi}{2}.$$

Но это — уравнение эллипса, лежащего в плоскости xy, центр которого совпадает с началом координат, но оси не совпадают с координатными осями. Угол ψ, на который поворачивается большая ось эллипса относительно первоначального направления колебаний (ось x-ов), можно найти, пользуясь формулой

$$\operatorname{tg}2\psi = \frac{2a_1a_2}{a_1^2-a_2^2}\sin\delta. \tag{5,16}$$

Подставляя из (5,13) a_1, a_2 и $\sin\delta$ в (5,16) $\left(\text{так как } \operatorname{tg}\delta=\frac{\sin 2v}{\operatorname{sh}2u},\right.$ то $\sin\delta = \frac{\sin 2v}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 2u+\sin^2 2v}}$ и $\left.\cos\delta = \frac{\operatorname{sh}2u}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 2u+\sin^2 2v}}\right)$, получим:

$$\operatorname{tg}2\psi = \sqrt{\frac{\operatorname{ch}^2 2u-\cos^2 2v}{\operatorname{sh}^2 2u+\sin^2 2v}}\operatorname{tg}2v.$$

Так как корень равен единице, то получаем:

$$\operatorname{tg}2\psi = \operatorname{tg}2v$$

или

$$\psi = v = \varkappa G_1 l.$$

Таким образом, угол вращения большой оси эллипса относительно первоначального направления колебаний будет

$$\alpha_\Phi = \psi = v = \operatorname{Re}(kGl) = \operatorname{Re}\frac{\pi}{\lambda}(\mathfrak{n}_-^*-\mathfrak{n}_+^*)\,l. \tag{5,17}$$

Перейдём к определению эллиптичности. Как известно, эллиптичность определяется соотношением $\frac{B}{A} = \operatorname{tg} \vartheta$.

Исходя из формулы $\sin 2\vartheta = \pm \sin 2\alpha \cdot \cos \delta$ $\left(\text{ибо } \delta_2 - \delta_1 - \frac{\pi}{2} = \delta\right)$, можно показать, что

$$\sin 2\vartheta = \pm \operatorname{th} 2u. \tag{5,18}$$

В самом деле, это видно из следующих преобразований:

$$\sin 2\vartheta = \pm 2 \sin \alpha \cos \alpha \frac{\operatorname{sh} 2u}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 2u + \sin^2 2v}} =$$

$$= \pm \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} \cdot \frac{\operatorname{sh} 2u}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 2u + \sin^2 2v}} =$$

$$= \pm \frac{2a_2}{a_1\left(1 + \frac{a_2^2}{a_1^2}\right)} \frac{\operatorname{sh} 2u}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 2u + \sin^2 2v}} =$$

$$= \pm \frac{2a_1 a_2}{a_1^2 + a_2^2} \cdot \frac{\operatorname{sh} 2u}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 2u + \sin^2 2v}} =$$

$$= \pm \frac{\sqrt{\operatorname{ch}^2 2u - \cos^2 2v}}{\operatorname{ch} 2u} \frac{\operatorname{sh} 2u}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 2u + \sin^2 2v}} =$$

$$= \pm \sqrt{\frac{\operatorname{ch}^2 2u - \cos^2 2v}{\operatorname{sh}^2 2u + \sin^2 2v}} = \pm \operatorname{th} 2u.$$

Соотношение (5,18) легко приводится к виду

$$\frac{2 \operatorname{tg} \vartheta}{1 + \operatorname{tg}^2 \vartheta} = \pm \frac{2 \operatorname{th} u}{1 + \operatorname{th}^2 u}. \tag{5,19}$$

Это соотношение является квадратным уравнением относительно $\operatorname{tg} \vartheta$, т. е. относительно эллиптичности. Если взять знак $+$, то получим два корня

$$\operatorname{tg} \vartheta_1 = \frac{1 - \operatorname{th}^4 u}{2 \operatorname{th} u} \quad \text{и} \quad \operatorname{tg} \vartheta_2 = \operatorname{th} u,$$

если же взять знак $-$, то получим:

$$\operatorname{tg} \vartheta_3 = -\operatorname{th} u \quad \text{и} \quad \operatorname{tg} \vartheta_4 = -\operatorname{cth} u.$$

Таким образом, эллиптичность равна

$$\left(\frac{B}{A}\right)_\Phi = \pm \operatorname{th} u = \pm \operatorname{th} \operatorname{Im} \frac{\pi}{\lambda} (\mathfrak{n}_-^* - \mathfrak{n}_+^*) l =$$

$$= \pm \operatorname{th} \frac{\pi}{\lambda} (n_- \varkappa_- - n_+ \varkappa_+) l. \qquad (5,20)$$

Эллиптичность при эффекте Фарадея есть, таким образом, результат изменения в магнитном поле прозрачности металла для противоположных циркулярно поляризованных компонент световой волны (циркулярный магнитный дихроизм). Полагая, как обычно, $\mathfrak{n} = n - ik$ и $Q = |Q| e^{-iq}$ и используя соотношение (5,3), можно вращение и эллиптичность при эффекте Фарадея написать в виде

$$\psi = \alpha_\Phi = \pm \frac{\pi l}{\lambda} |Q| (n \cos q - k \sin q), \qquad (5,21)$$

$$\left(\frac{B}{A}\right)_\Phi = \mp \frac{\pi l}{\lambda} Q (n \sin q + k \cos q). \qquad (5,22)$$

В заключение этого параграфа опишем краткий способ определения вращения и эллиптичности при эффекте Фарадея. Соотношение (5,11) можно представить в следующем виде:

$$\frac{D_y}{D_x} = -i \operatorname{th} (u + iv) = \frac{a_2}{a_1} e^{i\left(\delta - \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{a_2}{a_1} \sin \delta - i \frac{a_2}{a_1} \cos \delta. \qquad (5,23)$$

Вещественную и мнимую часть отношения амплитуд можно привести к виду:

$$\operatorname{Re}\left(\frac{D_y}{D_x}\right) = \operatorname{Re} (-\operatorname{th} (u + iv)) = \frac{a_2}{a_1} \sin \delta = \frac{\sin 2v}{\operatorname{ch} 2u + \cos 2v}, \qquad (5,24)$$

$$\operatorname{Im}\left(\frac{D_y}{D_x}\right) = \operatorname{Im} (-i \operatorname{th} (u + iv)) = -\frac{a_2}{a_1} \cos \delta =$$

$$= -\frac{\operatorname{sh} 2u}{\operatorname{ch} 2u + \cos 2v}. \qquad (5,25)$$

Заметим, что вращение связано с вариацией вещественной части показателя преломления, т. е. с величиной $v = k \frac{n_- - n_+}{2} l$. Эллиптичность же вызывается поглощением, т. е. величиной

$$u = kG_2 l = \frac{\pi l}{\lambda} (n_- \varkappa_- - n_+ \varkappa_+).$$

Поэтому, полагая в (5,24) $u = 0$, получим:

$$\operatorname{Re}\left(\frac{D_y}{D_x}\right)_{u=0} = \frac{\sin 2v}{1 + \cos 2v} = \operatorname{tg} v = \operatorname{tg} \operatorname{Re} \frac{\pi l}{\lambda} (\mathfrak{n}_-^* - \mathfrak{n}_+^*).$$

Отсюда непосредственно следует формула (5,17). Положив в (5,25)

$v=0$, получим эллиптичность

$$\frac{B}{A}=\operatorname{Im}\left(\frac{D_y}{D_x}\right)_{v=0}=-\frac{\operatorname{sh}2u}{\operatorname{ch}2u+1}=-\operatorname{th}u.$$

6. ПОЛЯРНЫЙ ЭФФЕКТ КЕРРА ПРИ НОРМАЛЬНОМ ПАДЕНИИ СВЕТА

В важном случае перпендикулярного падения света и полярного намагничения (в этом случае измерения наиболее надёжны, так как нарушающее влияние поверхностной плёнки минимально) формулы для минимум-вращения и эллиптичности можно получить весьма просто[17]. В этом случае обычная формула для нормального отражения применима для каждой круговой слагающей, так что отражённый свет является суперпозицией круговых волн с амплитудами

$$\frac{n_- - 1}{n_- + 1} \quad \text{и} \quad \frac{n_+ - 1}{n_+ + 1}.$$

Циркулярные амплитуды отражённого света можно представить в виде

$$\left.\begin{aligned} E^- &= E_x + iE_y, \\ E^+ &= E_x - iE_y. \end{aligned}\right\} \tag{6,1}$$

Из (6,1) непосредственно следует:

$$\frac{E_y}{E_x}=\frac{1}{i}\,\frac{E^- - E^+}{E^- + E^+}=\frac{1}{i}\,\frac{\dfrac{n_- - 1}{n_- + 1}-\dfrac{n_+ - 1}{n_+ + 1}}{\dfrac{n_- - 1}{n_- + 1}+\dfrac{n_+ - 1}{n_+ + 1}}. \tag{6,2}$$

После простых преобразований получим:

$$\operatorname{tg}\alpha'_{\text{к}}=\frac{E_y}{E_x}=-i\,\frac{n_- - n_+}{n_+ n_- - 1}. \tag{6,3}$$

Так как отношение амплитуд является комплексной величиной, то колебание после отражения от намагниченного ферромагнетика превращается из линейного в эллиптическое, и большая ось поворачивается на некоторый угол относительно первоначального направления колебаний линейно поляризованного света. Без ограничения общности $\alpha'_{\text{к}}$ можно считать малой величиной и (6,3) представить в виде

$$\alpha'_{\text{к}}=-i\,\frac{n_- - n_+}{n_+ n_- - 1}. \tag{6,4}$$

Вещественный угол вращения $\alpha'_{\text{к}}$ большой оси эллипса колебаний

следует отсюда, как результат вариации мнимой части показателя преломления намагниченного ферромагнетика, отличный от нуля только в поглощающих телах

$$\alpha_{\text{к}} = \operatorname{Re}(\alpha'_{\text{к}}) = -\operatorname{Im}\frac{\mathfrak{n}_- - \mathfrak{n}_+}{\mathfrak{n}_+\mathfrak{n}_- - 1}. \tag{6,5}$$

Эллиптичность, являющаяся результатом вариации действительной части показателя преломления, будет

$$\left(\frac{B}{A}\right)_{\text{к}} = \operatorname{Im}(\alpha'_{\text{г}}) = -\operatorname{Re}\frac{\mathfrak{n}_- - \mathfrak{n}_+}{\mathfrak{n}_+\mathfrak{n}_- - 1}. \tag{6,6}$$

Весьма интересный вывод получается при применении этих формул к прозрачной среде (диэлектрик). В этом случае $\mathfrak{n}_-$ и $\mathfrak{n}_+$ вещественны и из (6,5) и (6,6) следует, что $\alpha_{\text{к}} = 0$, но $\left(\frac{B}{A}\right)_{\text{к}} \neq 0$. Тогда отражённый свет не испытывает вовсе вращения плоскости поляризации, но получает эллиптичность с главной осью вдоль направления плоскости поляризации падающего луча. Эффект такого рода ещё не наблюдён, так как он исчезающе мал. Действительно, для тяжёлого флинта в поле $H = 10^4$ эрстед $\frac{B}{A} \sim 10^{-6}$.

Для того чтобы выразить вращение и эллиптичность через магнетооптический параметр Q, мы могли бы использовать формулу (6,4). Однако для целей последующего рассмотрения мы пойдём по иному пути[2,18]. Будем снова исходить из циркулярных колебаний, которые в комплексном написании представляются в виде соотношения

$$A_p = \pm i A_s. \tag{6,7}$$

Отражённые $\pm$ циркулярные волны будут иметь тогда амплитуды

$$\left.\begin{aligned} R_{s\pm} &= A_s(r_{11} \pm i r_{12}), \\ R_{p\pm} &= A_p(r_{22} \mp i r_{21}), \end{aligned}\right\} \tag{6,8}$$

в чём легко убедиться, подставляя (6,7) в (2,1). Далее имеем:

$$\left(\frac{R_s}{A_s}\right)_{\pm} = r_{11} \pm i r_{12}. \tag{6,9}$$

В отсутствии намагничения действует обычный закон металлического отражения

$$\left(\frac{R_s}{A_s}\right)_0 = r_{11} = -r_{22} = \frac{1-\mathfrak{n}}{1+\mathfrak{n}}. \tag{6,10}$$

Если же ферромагнетик намагничен, то следует положить

$$\left(\frac{R_s}{A_s}\right)_{\pm} = \frac{1-\mathfrak{n}_{\pm}}{1+\mathfrak{n}_{\pm}}. \tag{6,11}$$

Подставляя (5,4) в (6,11), будем иметь:

$$r_{11} \pm i r_{12} = \frac{1 - n(1 \mp Q/2)}{1 + n(1 \mp Q/2)} = \frac{1 - n}{1 + n} \pm \frac{nQ}{(1 + n)^2} \tag{6,12}$$

и, следовательно,

$$r_{12} = r_{21} = -\frac{inQ}{(1 + n)^2}. \tag{6,13}$$

Далее, с помощью (6,13) и (6,10), находим:

$$\frac{r_{12}}{r_{22}} = -\frac{r_{12}}{r_{11}} = \frac{inQ}{1 - n^2} \tag{6,14}$$

и, пренебрегая единицей по сравнению с n^2,

$$\frac{r_{12}}{r_{22}} = \frac{Q(\varkappa - i)}{n(1 + \varkappa^2)}. \tag{6,15}$$

В том же приближении $[n^2(1 + \varkappa^2) \gg 1]$ справедливы формулы обычной металлооптики для главного азимута Θ и главного угла падения Φ:

$$\varkappa = \operatorname{tg} \Theta \quad \text{и} \quad \sin \Phi \operatorname{tg} \Phi = n \sqrt{1 + \varkappa^2}. \tag{6,16}$$

Из уравнений (6,16) и $Q = |Q| e^{-iq}$ следует тогда

$$\frac{r_{12}}{r_{22}} = \frac{|Q| e^{-i\left(q + \frac{\pi}{2} - 2\Theta\right)}}{\sin \Phi \operatorname{tg} \Phi} = \zeta e^{-i\delta}. \tag{6,17}$$

Отношение ζ вещественной амплитуды компоненты Керра к амплитуде обычным образом отражённого света поэтому будет

$$\zeta = \frac{|Q|}{\sin \Phi \operatorname{tg} \Phi} \tag{6,18}$$

и отставание по фазе δ первой относительно второй

$$\delta = q + \frac{\pi}{2} - 2\Theta. \tag{6,19}$$

Далее, минимум-вращение и отношение полуосей эллипса колебаний отражённого света будут

$$\alpha_к = \operatorname{Re}\left(\frac{r_{12}}{r_{22}}\right) = \zeta \cos \delta = \frac{|Q| \cos\left(q + \frac{\pi}{2} - 2\Theta\right)}{\sin \Phi \operatorname{tg} \Phi}, \tag{6,20}$$

$$\left(\frac{B}{A}\right)_к = \pm \operatorname{Im}\left(\frac{r_{12}}{r_{22}}\right) = \mp \zeta \sin \delta = \mp \frac{|Q| \sin\left(q + \frac{\pi}{2} - 2\Theta\right)}{\sin \Phi \operatorname{tg} \Phi}. \tag{6,21}$$

7. ПОЛЯРНЫЙ ЭФФЕКТ КЕРРА ПРИ НАКЛОННОМ ПАДЕНИИ СВЕТА

Чтобы рассмотреть общий случай проблемы магнетооптических явлений, нам следовало бы решить уравнение (4,7). Однако общий очень сложный результат становится относительно простым, если ограничиться членами первой степени относительно магнетооптического параметра Q. Подставляя (3,10) в (4,7) после простых, но довольно громоздких преобразований, получим:

$$\mathfrak{n}^{*2} = \varepsilon_0 \left[1 \mp \gamma^* Q + \left(f - \frac{1}{2}(1+f)(1-\gamma^{*2})\right) Q^2\right] \qquad (7,1)$$

и также

$$\mathfrak{n}^{*2} = \varepsilon \left[1 \mp \gamma^* Q - \frac{1}{2}(1+f)(1-\gamma^{*2}) Q^2\right]. \qquad (7,2)$$

Двойной знак относится, как и прежде, к $\pm$ циркулярным волнам. Пренебрегая членами второго порядка относительно Q, а также принимая $\varepsilon = \varepsilon_0 = \mathfrak{n}^2$ — квадрату показателя преломления в отсутствии намагничения, получим:

$$\mathfrak{n}^{*2} \approx \mathfrak{n}^2 (1 \mp \gamma^* Q). \qquad (7,3)$$

Сравнивая эту формулу с (5,2), мы видим, что в общем случае (при введённом ограничении) законы для комплексного показателя преломления такие же, как если бы волна распространялась параллельно силовым линиям поля и только входящая в Q сила поля была бы ослаблена на величину комплексного направляющего косинуса γ^* волновой нормали относительно силовых линий. Легко показать, что соотношение (7,3) приводит к формуле, аналогичной (5,4), а именно:

$$\mathfrak{n}^*_{\pm} = \mathfrak{n}\left(1 \mp \frac{Q'}{2}\right), \qquad (7,4)$$

где $Q' = Q\gamma^*$.

Для рассмотрения общего случая проблемы отражения установленные в § 4 результаты о распространении неоднородной волны в любом направлении к магнитным силовым линиям следует объединить с общими граничными условиями электродинамики для перехода электромагнитных волн через границу двух сред. Для простоты будем рассматривать только случаи, при которых граница раздела двух сред и плоскость падения волны расположены параллельно или перпендикулярно силовым линиям. Геометрические законы отражения и преломления следуют без введения точного вида граничных условий уже из того факта, что эти условия однородны и линейны относительно составляющих напряжённости электромагнитного поля. Отсюда следует, что если оперировать с решением вида

$$Fe^{i\omega\left(t - \frac{\alpha^* x + \beta^* y + \gamma^* z}{v^*}\right)}, \text{ то величина } \frac{\alpha^* x + \beta^* y + \gamma^* z}{v^*}$$

должна принимать одинаковое значение на границе для падающей, отражённой и преломлённой волн. В частности, если границей будет XY-плоскость, а плоскость XZ — плоскостью падения как для плоскости постоянных фаз, так и для плоскости постоянных амплитуд, то $\frac{\alpha^*}{v^*}$ должно иметь одинаковое значение для всех трёх волн, а β^* для них равно нулю и $\alpha^{*2}+\gamma^{*2}=1$. Будем рассматривать только случай, когда свет падает из изотропной прозрачной среды, в частности вакуума (или воздуха) и что падающая волна однородна. При этом в падающей и в отражённой волнах α^* и v^* вещественны, и к тому же v^* имеет для обеих волн одинаковое значение c. В силу постоянства отношения α^*/v^* для обеих волн α^* (т. е. синусы действительных углов падения и отражения) должны быть равны; соответствующие значения будем обозначать через α. Угол γ^* должен тогда для обеих волн обладать противоположными знаками, так как волны в противном случае становятся идентичными. Вообще комплексная волновая нормаль $\mathbf{s}^*$ приводится, таким образом, для падающей и отражённой волн к виду

$$s_e=\alpha x+\gamma z \quad \text{и} \quad s_r=\alpha x-\gamma z.$$

При сделанных предположениях в падающей и отражённой волнах колебания поперечны. Для каждой из двух проникающих в намагниченную среду волн имеет место

$$r_d=\alpha_d^* x+\gamma_d^* z,$$

где $\alpha=\alpha_d^* \mathfrak{n}_d^*$, $\mathfrak{n}_d^*=\frac{c}{v_d^*}$ и $d=1,2$. Аналогичные соотношения имеют место, если вместо граничной плоскости XY взять плоскость YZ или ZX. Для получения общих формул отражения при полярном намагничении следовало бы использовать конкретные граничные условия, требующие непрерывности соответствующих тангенциальных компонент напряжённости электрического и магнитного векторов. Интересно, однако, что эти формулы могут быть получены также путём простых рассуждений. Пусть на перпендикулярно намагниченное ферромагнитное зеркало (XZ — плоскость падения, XY — граничная плоскость) под углом φ падает циркулярно поляризованная волна. Разложим круговое колебание на два, одно из которых — эллиптическое — расположим в плоскости, параллельной плоскости зеркала, а другое — линейное — расположим так, чтобы колебаняи в нём происходили вдоль магнитных силовых линий. Колебание, совершающееся вдоль магнитных силовых линий, вообще не меняется и, следовательно, не оказывает влияния на магнетооптический эффект Керра. Эллиптическое колебание будет проекцией кругового колебания на плоскость зеркала и приближённо может быть представлено в виде

$$A_p=\pm i\,\frac{\mathfrak{n}\cos\varphi+\cos\psi}{\mathfrak{n}\cos\psi+\cos\varphi}\,A_s, \tag{7,5}$$

где ψ — комплексный угол преломления (коэффициент перед A_s равен $\cos(\varphi - \psi) \approx \cos\varphi$). При нормальном падении $\varphi = 0$ и эллиптическое колебание, описываемое формулой (7,5), переходит в круговое. Отражённые волны будут иметь тогда амплитуды:

$$\left.\begin{aligned} R_{s\pm} &= A_s\left(r_{11} \pm i\,\frac{\mathfrak{n}\cos\varphi + \cos\psi}{\mathfrak{n}\cos\psi + \cos\varphi}\,r_{12}\right), \\ R_{p\pm} &= A_p\left(r_{22} \mp i\,\frac{\mathfrak{n}\cos\psi + \cos\varphi}{\mathfrak{n}\cos\varphi + \cos\psi}\,r_{21}\right), \end{aligned}\right\} \tag{7,6}$$

в чём легко убедиться, подставляя (7,5) в (2,1). Далее имеем:

$$\left(\frac{R_s}{A_s}\right)_{\pm} = r_{11} \pm i\,\frac{\mathfrak{n}\cos\varphi + \cos\psi}{\mathfrak{n}\cos\psi + \cos\varphi}\,r_{12}. \tag{7,7}$$

В отсутствии намагничения справедливы формулы Френеля

$$\left(\frac{R_s}{A_s}\right)_{Q=0} = r_{11} = \frac{\cos\varphi - \mathfrak{n}\cos\psi}{\cos\varphi + \mathfrak{n}\cos\psi}, \tag{7,8а}$$

$$\left(\frac{R_p}{A_p}\right)_{Q=0} = r_{22} = \frac{\mathfrak{n}\cos\varphi - \cos\psi}{\mathfrak{n}\cos\varphi + \cos\psi}. \tag{7,8б}$$

Если же ферромагнетик намагничен, то следует положить

$$\left(\frac{R_s}{A_s}\right)_{\pm} = \frac{\cos\varphi - \mathfrak{n}_{\pm}\cos\psi}{\cos\varphi + \mathfrak{n}_{\pm}\cos\psi}, \tag{7,9а}$$

$$\left(\frac{R_p}{A_p}\right)_{\pm} = \frac{\mathfrak{n}_{\pm}\cos\varphi - \cos\psi}{\mathfrak{n}_{\pm}\cos\varphi + \cos\psi}. \tag{7,9б}$$

Подставляя (7,4) в (7,9а) и (7,9б), получим:

$$r_{11} \pm i\,\frac{\mathfrak{n}\cos\varphi + \cos\psi}{\mathfrak{n}\cos\psi + \cos\varphi}\,r_{12} = \frac{\cos\varphi - \mathfrak{n}\left(1 \mp \frac{Q'}{2}\right)\cos\psi}{\cos\varphi + \mathfrak{n}\left(1 \mp \frac{Q'}{2}\right)\cos\psi} =$$

$$= \frac{\cos\varphi - \mathfrak{n}\cos\psi}{\cos\varphi + \mathfrak{n}\cos\psi} \pm \frac{\mathfrak{n}Q'\cos\varphi\cos\psi}{(\cos\varphi + \mathfrak{n}\cos\psi)^2}, \tag{7,10а}$$

$$r_{22} \mp i\,\frac{\mathfrak{n}\cos\psi + \cos\varphi}{\mathfrak{n}\cos\varphi + \cos\psi}\,r_{21} = \frac{\mathfrak{n}\left(1 \mp \frac{Q'}{2}\right)\cos\varphi - \cos\psi}{\mathfrak{n}\left(1 \mp \frac{Q'}{2}\right)\cos\varphi + \cos\psi} =$$

$$= \frac{\mathfrak{n}\cos\varphi - \cos\psi}{\mathfrak{n}\cos\varphi + \cos\psi} \mp \frac{\mathfrak{n}Q'\cos\varphi\cos\psi}{(\mathfrak{n}\cos\varphi + \cos\psi)^2}. \tag{7,10б}$$

Из этих формул непосредственно следует, что

$$r_{12} = r_{21} = \mp\frac{i\mathfrak{n}Q'\cos\varphi\cos\psi}{(\cos\varphi + \mathfrak{n}\cos\psi)(\mathfrak{n}\cos\varphi + \cos\psi)}. \tag{7,11}$$

Так как для большинства металлов, включая и ферромагнитные,

$$\mathfrak{n}^2 > 1, \text{ то } \gamma^* = \cos\psi = \sqrt{1-\alpha^{*2}} = \sqrt{1-\frac{\alpha^2}{\mathfrak{n}^2}} \approx 1.$$

Принимая во внимание это замечание, мы получим формулы отражения при полярном намагничении в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} &R_s = r_{11}A_s + r_{12}A_p, \quad R_p = r_{21}A_s + r_{22}A_p, \\ &r_{11} = \frac{\cos\varphi - \mathfrak{n}}{\cos\varphi + \mathfrak{n}}, \qquad r_{22} = \frac{\mathfrak{n}\cos\varphi - 1}{\mathfrak{n}\cos\varphi + 1}, \\ &r_{12} = r_{21} = -\frac{i\mathfrak{n}Q\cos\varphi}{(\cos\varphi + \mathfrak{n})(\mathfrak{n}\cos\varphi + 1)}. \end{aligned}\right\} \tag{7,12}$$

Для определения минимум- и нуль-вращения прежде всего необходимо знать отношения r_{12}/r_{11} и r_{12}/r_{22}. Пренебрегая единицей по сравнению с $n^2(1+\varkappa^2)$, получим:

$$\frac{r_{12}}{r_{11}} = \frac{Q\cos\varphi\,[-n\varkappa\cos\varphi + i(n\cos\varphi + \sin^2\varphi)]}{(\sin^2\varphi + n\cos\varphi)^2 + n^2\varkappa^2\cos^2\varphi}, \tag{7,13а}$$

$$\frac{r_{12}}{r_{22}} = \frac{Q\cos\varphi\,[n\varkappa\cos\varphi - i(n\cos\varphi - \sin^2\varphi)]}{(\sin^2\varphi - n\cos\varphi)^2 + n^2\varkappa^2\cos^2\varphi}. \tag{7,13б}$$

Параметр Q, вообще говоря, является комплексной величиной, однако по опытным данным известно, что для железа (стали) мнимая часть Q в жёлтой и красной области спектра весьма мала, по сравнению с вещественной, для никеля и кобальта — по крайней мере не очень значительна. Поэтому для качественного обсуждения полученных результатов (в частности для рассмотрения знака минимум- и нуль-вращения) можно мнимой частью Q пренебречь. Параметр Q считается положительным, если силовые линии расположены параллельно положительному направлению оси z. Формулы (7,13а и б) дают тогда, в силу того, что знаменатель всегда положителен,

для $\mathrm{Re}\left(\frac{r_{12}}{r_{11}}\right)$ знак величины $-n\varkappa\cos\varphi$,

» $\mathrm{Im}\left(\frac{r_{12}}{r_{11}}\right)$ » » $+(n\cos\varphi + \sin^2\varphi)$,

» $\mathrm{Re}\left(\frac{r_{12}}{r_{22}}\right)$ » » $+n\varkappa\cos\varphi$,

» $\mathrm{Im}\left(\frac{r_{12}}{r_{22}}\right)$ » » $-(n\cos\varphi - \sin^2\varphi)$.

Поэтому знак первой величины всегда отрицателен, второй и третьей — всегда положителен, тогда как знак последней величины при малых углах падения отрицателен, при больших — положителен. Изменение знака последней величины имеет место при угле падения φ_1, определяемом равенством

$$\mathrm{tg}\,\varphi_1 \sin\varphi_1 = n. \tag{7,14}$$

Этот особый угол падения φ_1 совершенно не зависит от намагниченности (следовательно, и от магнетооптического параметра), а определяется вещественной частью показателя преломления. Учитывая приведённые выше замечания о знаках, мы видим, что минимум-вращение анализатора и поляризатора при $r_{12}=r_{21}$

$$\chi_p=\chi_s^0=\mathrm{Re}\left(\frac{r_{12}}{r_{22}}\right)$$

и

$$\chi_s=\chi_p^0=-\mathrm{Re}\left(\frac{r_{12}}{r_{11}}\right),$$

т. е. при положительном Q, должны быть положительны. Так как нуль-вращения анализатора и поляризатора при $r_{12}=r_{21}$ выражаются формулами (см. § 2)

$$\psi_p=\psi_s^0=\frac{\mathrm{Im}\left(\frac{r_{21}}{r_{11}}\right)}{\mathrm{Im}\left(\frac{r_{22}}{r_{11}}\right)}$$

и

$$\psi_s=\psi_p^0=-\frac{\mathrm{Im}\left(\frac{r_{12}}{r_{22}}\right)}{\mathrm{Im}\left(\frac{r_{11}}{r_{22}}\right)},$$

то при положительном Q, в силу того, что при всех углах падения $\mathrm{Im}\left(\frac{r_{11}}{r_{22}}\right)<0$, а $\mathrm{Im}\left(\frac{r_{22}}{r_{11}}\right)>0$, мы получим, что $\psi_p=\psi_s^0$ всегда положительно, а $\psi_s=\psi_p^0$ при углах падения, меньших критического угла φ_1, отрицательно, при углах падения, больших критического положительно.

8. ОБЩИЕ ФОРМУЛЫ ОТРАЖЕНИЯ ПРИ МЕРИДИОНАЛЬНОМ НАМАГНИЧЕНИИ

Мы не будем останавливаться на выводе формул отражения при меридиональном намагничении, а приведём лишь их окончательные выражения. В том же самом приближении, в каком рассматривался полярный эффект, получим:

$$\left.\begin{aligned}
&R_s=r_{11}A_s+r_{12}A_p,\quad R_p=r_{21}A_s+r_{22}A_p,\\
&r_{11}=\frac{\cos\varphi-n}{\cos\varphi+n},\qquad r_{22}=\frac{n\cos\varphi-1}{n\cos\varphi+1},\\
&r_{12}=-r_{21}=-\frac{iQ\sin\varphi\cos\varphi}{(\cos\varphi+n)(n\cos\varphi+1)}.
\end{aligned}\right\}\qquad(8,1)$$

Для определения минимум- и нуль-вращения выражения для $\frac{r_{21}}{r_{11}}$ и $\frac{r_{21}}{r_{22}}$ рассчитываются в прежнем приближении, при котором единицей

по сравнению с $n^2(1+\varkappa^2)$ пренебрегают:

$$\left.\begin{aligned}\frac{r_{21}}{r_{11}} &= \frac{Q\sin\varphi\cos\varphi\,[\varkappa(2n\cos\varphi+\sin^2\varphi)+i(n(\varkappa^2-1)\cos\varphi-\sin^2\varphi)]}{n(1+\varkappa^2)\,[(\sin^2\varphi+n\cos\varphi)^2+n^2\varkappa^2\cos^2\varphi]},\\ \frac{r_{21}}{r_{22}} &= \frac{Q\sin\varphi\cos\varphi\,[-\varkappa(2n\cos\varphi-\sin^2\varphi)-i(n(\varkappa^2-1)\cos\varphi+\sin^2\varphi)]}{n(1+\varkappa^2)\,[(\sin^2\varphi-n\cos\varphi)^2+n^2\varkappa^2\cos^2\varphi]}.\end{aligned}\right\}\quad(8,2)$$

Формулы (8,2) дают тогда, в силу того, что знаменатель всегда положителен:

для $\mathrm{Re}\left(\frac{r_{21}}{r_{11}}\right)$ знак величины $+(2n\cos\varphi+\sin^2\varphi)$,

» $\mathrm{Im}\left(\frac{r_{21}}{r_{11}}\right)$ » » $+(n(\varkappa^2-1)\cos\varphi-\sin^2\varphi)$,

» $\mathrm{Re}\left(\frac{r_{21}}{r_{22}}\right)$ » » $-(2n\cos\varphi-\sin^2\varphi)$,

» $\mathrm{Im}\left(\frac{r_{21}}{r_{22}}\right)$ » » $-(n(\varkappa^2-1)\cos\varphi+\sin^2\varphi)$.

Первое выражение всегда положительно, последнее всегда отрицательно, так как в нем $\varkappa>1$. Второе выражение при малых углах падения положительно и меняет свой знак при $\varphi=\varphi_2$, определяемом посредством равенства

$$\sin\varphi_2\,\mathrm{tg}\,\varphi_2=n(\varkappa^2-1).\quad(8,3)$$

Третье выражение при малых углах падения отрицательно и меняет свой знак при $\varphi=\varphi_3$, причём

$$\sin\varphi_3\,\mathrm{tg}\,\varphi_3=2n.\quad(8,4)$$

этими результатами связываем мы формулы (2,8), (2,9), (2,17) и (2,18), откуда при $r_{12}=-r_{21}$ для минимум-вращения анализатора χ и поляризатора χ^0 получим:

$$\left.\begin{aligned}-\chi_s=\chi_p^0&=\mathrm{Re}\left(\frac{r_{21}}{r_{11}}\right)\\ \text{и}\qquad -\chi_p=\chi_s^0&=\mathrm{Re}\left(\frac{r_{21}}{r_{22}}\right).\end{aligned}\right\}\quad(8,5)$$

Считая снова Q положительным, $+\chi_s$ и $-\chi_p^0$ будут для всех углов падения отрицательны, тогда как $+\chi_p$ и $-\chi_s^0$ для малых углов падения положительны, для тех же углов, которые превышают критический угол φ_s, должны быть отрицательны. Для нуль-вращения анализатора и поляризатора из (2,25), (2,26), (2,27) и (2,28) (при пред-

положении $r_{12} = -r_{21}$) следуют формулы

$$\left.\begin{aligned} -\psi_s = \psi_p^0 &= \frac{\operatorname{Im}\left(\frac{r_{21}}{r_{22}}\right)}{\operatorname{Im}\left(\frac{r_{11}}{r_{22}}\right)} \\ \text{и} \qquad -\psi_p = \psi_s &= \frac{\operatorname{Im}\left(\frac{r_{21}}{r_{11}}\right)}{\operatorname{Im}\left(\frac{r_{22}}{r_{11}}\right)}. \end{aligned}\right\} \tag{8,6}$$

Отсюда следует, что при всех углах падения $\psi_s = -\psi_p^0$ отрицательны, тогда как $\psi_p = -\psi_s^0$ при малых углах падения отрицательны, для тех же, которые превышают критический угол φ_2 — положительны. Для качественного обсуждения поведения знака минимум- и нуль-вращений мы пренебрегали мнимой частью магнетооптического параметра Q. Отбросив это ограничение, мы получим относительно просто уравнения, определяющие критические углы падения φ_1, φ_2 и φ_3. Мы видели, что при первых двух через нуль проходит нуль-вращение, при последнем — минимум-вращение. Представляя магнетооптический параметр в виде $Q = |Q| e^{-iq}$, мы получим из (7,13а и 13б) и (8,2) для φ_1, φ_2 и φ_3 следующие выражения:

$$\operatorname{tg}\varphi_1 \sin\varphi_1 = n(1 + \varkappa \operatorname{tg} q) \quad \text{полярный эффект,} \tag{8,7}$$

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\varphi_2 \sin\varphi_2 &= \frac{n(\varkappa^2 - 1) - 2n\varkappa \operatorname{tg} q}{1 + \varkappa \operatorname{tg} q}, \\ \operatorname{tg}\varphi_3 \sin\varphi_3 &= \frac{2n\varkappa + n(\varkappa^2 - 1)\operatorname{tg} q}{\varkappa - \operatorname{tg} q} \end{aligned}\right\} \text{меридиональный эффект.} \tag{8,8}$$

Эмпирически установлено, что критические углы падения φ_1, φ_2 и φ_3 не зависят от намагничения. Отсюда следует, что величина q в рассматриваемом приближении не зависит от намагничения, а определяется исключительно оптическими константами. Развёрнутых формул минимум- и нуль-вращений, а также эллиптичности в общем случае наклонного падения света при полярном и меридиональном намагничении из-за их громоздкости мы приводить не будем. По поводу сравнения с опытом строгих формул для минимум- и нуль-вращений, а также для фазы и отношения амплитуд при наклонном падении следует обратиться к работам Гольдгаммера и Зеемана[20]; согласие удовлетворительное.

9. ЭКВАТОРИАЛЬНЫЙ ЭФФЕКТ КЕРРА

Рассмотрим теперь случай, при котором вектор намагничения направлен вдоль граничной поверхности, но перпендикулярно к плоскости падения[19]. Если выбрать плоскость YZ в качестве граничной, YX — в качестве плоскости падения, то для всех углов падения

направляющий косинус γ^* равен нулю:

$$\alpha^{*2}+\beta^{*2}=1, \quad \beta_d^*=\beta/\mathfrak{n}_d^*,$$

причём индекс d относится к обеим преломлённым волнам. В этом случае из (4,6) получаем:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon E_x - i\varepsilon Q E_y &= \mathfrak{n}^{*2}\beta^*(\beta^* E_x - \alpha^* E_y),\\ i\varepsilon Q E_x + \varepsilon E_y &= \mathfrak{n}^{*2}\alpha^*(\alpha^* E_y - \beta^* E_x),\\ \varepsilon_0 E_z &= \mathfrak{n}^{*2} E_z. \end{aligned}\right\} \qquad (9,1)$$

Эти уравнения показывают, что колебания (внутри ферромагнетика), параллельные к силовым линиям, совершенно отделяются от колебаний, перпендикулярных к силовым линиям. Для показателей преломления справедливы строгие формулы (5,5′), которые при ограничении величинами первого порядка относительно Q принимают вид:

$$\mathfrak{n}_z^{*2}=\mathfrak{n}_\perp^{*2}=\varepsilon=\varepsilon_0=\mathfrak{n}^2. \qquad (9,2)$$

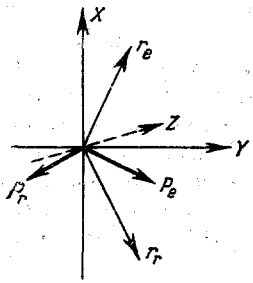

Рис. 4.

Обе преломлённые волны имеют, следовательно, одинаковые скорости и направления распространения и совпадают. Проблема отражения и преломления содержит теперь влияние намагниченности только через уравнение (4,8), которое при $\gamma^*=0$ будет иметь вид:

$$(\alpha^*+i\beta^* Q)\,E_x+(\beta^*-i\alpha^* Q)\,E_y=0. \qquad (9,3)$$

Отсюда видно, что компоненты колебаний в плоскости падения связаны между собой совсем иначе, чем в отсутствии намагниченности. Мы полагаем теперь в соответствии с рис. 4:

$$\left.\begin{aligned} &E_x^e=-\beta A_p e^{i\omega\tau_e},\quad E_y^e=\alpha A_p e^{i\omega\tau_e},\quad E_z^e=A_s e^{i\omega\tau_e},\\ &\tau_e=t-\frac{\beta y+\alpha x}{V},\\ &E_x^r=-\beta R_p e^{i\omega\tau_r},\quad E_y^r=-\alpha R_p e^{i\omega\tau_r},\quad E_z^r=R_s e^{i\omega\tau_r},\\ &\tau_r=t-\frac{\beta y-\alpha x}{V},\\ &E_x^d=D^{(1)}e^{i\omega\tau_d},\quad E_y^d=D^{(2)}e^{i\omega\tau_d},\quad E_z^d=D^{(3)}e^{i\omega\tau_d},\\ &\tau_d=t-\frac{\beta^* y+\alpha^* x}{v^*}. \end{aligned}\right\} \qquad (9,4)$$

На рис. 4 s_e и P_e — нормаль и направление колебаний в падающей волне, s_r и P_r — в отражённой волне. Граничные условия требуют непрерывности величин

$$E_y,\ E_z,\ \frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y} \quad \text{и} \quad \frac{\partial E_z}{\partial x}.$$

Применяя граничные условия к (9,4), будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} \alpha(A_p - R_p) = D^{(2)},\ A_p + R_p = \mathfrak{n}^*(\alpha^* D^{(2)} - \beta^* D^{(1)}), \\ A_s + R_s = D^{(3)},\ \alpha(A_s - R_s) = \mathfrak{n}^* \alpha^* D^{(3)}. \end{aligned}\right\} \tag{9,5}$$

Компоненты колебаний, параллельные и перпендикулярные к плоскости падения, остаются поэтому, так же как при проблеме отражения, независимыми друг от друга. Для преломлённых компонент, лежащих в плоскости падения, (9,3) даёт соотношение

$$(\alpha^* + i\beta^* Q) D^{(1)} = -(\beta^* - i\alpha^* Q) D^{(2)}$$

или

$$\alpha^* D^{(2)} - \beta^* D^{(1)} = \frac{D^{(2)}}{\alpha^* + i\beta^* Q}. \tag{9,6}$$

Подставляя (9,6) в (9,5), получим:

$$R_p[(\alpha^* + \mathfrak{n}\alpha) + i\beta^* Q] = -A_p[(\alpha^* - \mathfrak{n}\alpha) + i\beta^* Q], \tag{9,7а}$$

$$R_s(\alpha + \mathfrak{n}\alpha^*) = A_s(\alpha - \mathfrak{n}\alpha^*). \tag{9,7б}$$

Из этих соотношений видно, что компонента, колеблющаяся перпендикулярно к плоскости падения, и следовательно в этой плоскости поляризованная, не зависит от намагниченности. Компонента с колебаниями, параллельными плоскости падения, претерпевает благодаря намагниченности изменение в амплитуде и фазе; однако доказать непосредственно это изменение весьма трудно. Предметом наблюдения является дробь R_s/R_p в случае, когда на границу падает линейно-поляризованный свет, составляющий с плоскостью падения азимут в пределах от 0 до 90°. Так как падающий свет линейно-поляризованный, то A_p и A_s будут реальны и $A_s/A_p = \operatorname{tg}\Gamma$, где Γ — азимут электрического вектора. Из (9,7а) и (9,7б), принимая во внимание (2,6), получим:

$$\frac{R_s}{R_p} = \frac{G}{F} e^{-i(g-f)} =$$

$$= -\frac{\cos\varphi - \mathfrak{n}\alpha^*}{\cos\varphi + \mathfrak{n}\alpha^*} \cdot \frac{\alpha^* + \mathfrak{n}\cos\varphi + i\dfrac{Q\sin\varphi}{\mathfrak{n}}}{\alpha^* - \mathfrak{n}\cos\varphi + i\dfrac{Q\sin\varphi}{\mathfrak{n}}} \frac{A_s}{A_p}, \tag{9,8}$$

где

$$\mathfrak{n} = n(1 - i\varkappa) = n\sqrt{1 + \varkappa^2}\, e^{-i2\Theta} = \sin\Phi \operatorname{tg}\Phi e^{-2i\Theta}$$

и

$$\alpha^* = \sqrt{1 - \frac{\sin^2\varphi}{\mathfrak{n}^2}}.$$

Ограничиваясь членами первого порядка относительно Q, (9,8) можно представить в виде

$$\frac{R_s}{R_p}=\frac{G}{F}\,e^{-i(g-f)}=$$

$$=-\frac{A_s}{A_p}\,\frac{\cos\varphi-n\alpha^*}{\cos\varphi+n\alpha^*}\,\frac{\alpha^*+n\cos\varphi}{\alpha^*-n\cos\varphi}=-\left(1-\frac{iQ\sin 2\varphi}{\alpha^{*2}-n^2\cos^2\varphi}\right). \quad (9,9)$$

В опытах по измерению экваториального эффекта азимут поляризатора устанавливается при таком значении Γ, при котором достигается равенство компонент F и G (их фазы отличаются незначительно); это обнаруживается болометрически. Затем включается магнитное поле и измеряют малое вращение $\delta\Gamma$ поляризатора, которое необходимо для восстановления равенства отражённых компонент. Используя значок «о» для обозначения обычных значений (без намагничения, т. е. при $Q=0$) и полагая $F=G$, в каждом случае мы имеем (если обозначить $(g-f)$ через δ):

$$e^{-i\delta}\operatorname{ctg}\Gamma=-\frac{\cos\varphi-n\alpha^*}{\cos\varphi+n\alpha^*}\,\frac{\alpha^*+n\cos\varphi}{\alpha^*-n\cos\varphi}\left(1-\frac{iQ\sin 2\varphi}{\alpha^{*2}-n^2\cos^2\varphi}\right), \quad (9,10)$$

$$e^{-i\delta_0}\operatorname{ctg}\Gamma_0=-\frac{\cos\varphi-n\alpha^*}{\cos\varphi+n\alpha^*}\,\frac{\alpha^*+n\cos\varphi}{\alpha^*-n\cos\varphi}. \quad (9,11)$$

Поделив первое уравнение на второе, получим:

$$e^{-i(\delta-\delta_0)}\frac{\operatorname{tg}\Gamma_0}{\operatorname{tg}\Gamma}=1-\frac{iQ\sin 2\varphi}{\alpha^{*2}-n^2\cos^2\varphi}=1-\frac{iQ\sin 2\varphi}{1-\dfrac{\sin^2\varphi}{n^2}-n^2\cos^2\varphi}. \quad (9,12)$$

Полагая для краткости $n^2(1+x^2)=b$ и $Q=|Q|e^{-iq}$, уравнение (9,12) можно представить в виде

$$e^{-i(\delta-\delta_0)}\frac{\operatorname{tg}\Gamma_0}{\operatorname{tg}\Gamma}=1+\frac{|Q|\sin 2\varphi\, e^{-i\left(q+\frac{\pi}{2}\right)}}{1-\dfrac{\sin^2\varphi e^{4i\vartheta}}{b}-b\cos^2\varphi e^{-4i\Theta}}=$$

$$=1+\frac{|Q|\sin 2\varphi\, e^{-i\left(q+\frac{\pi}{2}+\vartheta\right)}}{\sqrt{\left[1-\dfrac{\cos 4\Theta\,(b^2\cos^2\varphi+1)}{b}\right]^2+\sin^2 4\Theta\left[\dfrac{b^2\cos^2\varphi-1}{b}\right]^2}}, \quad (9,13)$$

где

$$\operatorname{tg}\vartheta=-\operatorname{tg}4\Theta\,\frac{b^2\cos^2\varphi-1}{b^2\cos^2\varphi+1-b\sec 4\Theta}.$$

Вместо b^2+1 можно писать b^2, ибо во всех рассматриваемых случаях $b^2>100$. Выражение (9,13) можно привести к виду

$$\frac{\operatorname{tg}\Gamma_0}{\operatorname{tg}\Gamma}=\left[1-\frac{|Q|\sin 2\varphi\sin(\vartheta+q)}{y}\right]e^{-i\left[\delta_0-\delta+\frac{|Q|\sin 2\varphi\cos(\vartheta+q)}{y}\right]}, \quad (9,14)$$

где

$$y = \sqrt{b^2 \cos^4 \varphi - 2N\cos^2 \varphi + 1 - \frac{2\cos 4\Theta}{b}}$$

[здесь для удобства введено обозначение: $N = (b - 2\cos 4\Theta)\cos 4\Theta + 1$].

Приравнивая модули и аргументы в (9,14), получим:

$$\delta - \delta_0 = \frac{|Q| \sin 2\varphi \cos(\vartheta + q)}{y}, \tag{9,15}$$

$$\operatorname{tg} \Gamma = \operatorname{tg} \Gamma_0 \left[1 + \frac{|Q| \sin 2\varphi \sin(\vartheta + q)}{y}\right]. \tag{9,16}$$

Заменяя в левой части Γ через $\Gamma_0 + \delta\Gamma$, после простых преобразований получим:

$$2\delta\Gamma = \frac{|Q| \sin 2\varphi \sin 2\Gamma_0 \sin(\vartheta + q)}{y}, \tag{9,17}$$

где Γ_0 определяется формулой

$$\cos 2\Gamma_0 = \frac{2n \sin\varphi \operatorname{tg}\varphi}{\sin^2\varphi \operatorname{tg}^2\Phi + b}. \tag{9,18}$$

Сноу сравнил измерения Ингерсолла, относящиеся к натриевому свету ($\lambda = 5900$ Å), с изложенной здесь теорией экваториального

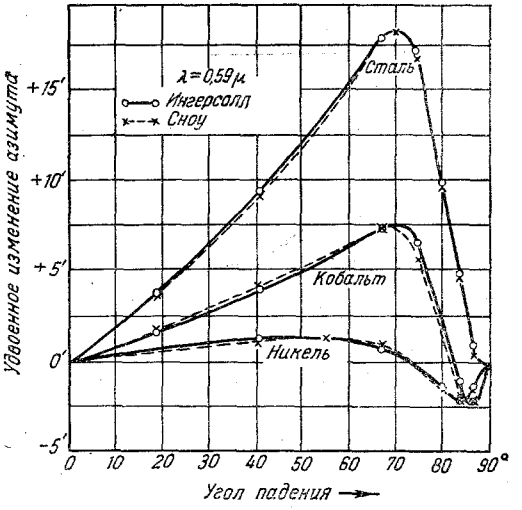

Рис. 5.

эффекта и нашёл, что теория находится в хорошем соответствии с наблюдениями для железа (стали), никеля и кобальта. Это сопоставление представлено на рис. 5.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. D. A. Goldhammer, Wied. Ann., **46**, 71 (1892); P. Drude, Wied. Ann., **46**, 353 (1892); **48**, 122 и **49**, 690 (1893). W. Voigt, Magneto und Elektrooptik, Leipzig (1908).
2. W. Schütz, Handb. d. exp. Phys., **16**, 1 (1936); M. V. Laue, Handb. d. exp. Phys., **18**, 189 (1928).
3. Du-Bois, Wied. Ann., **39**, 25 (1890).
4. L. R. Ingersoll, Phil. Mag., **11**, 41 (1906); **18**, 74 (1909).
5. K. H. Klitzing, Zeits. f. Phys., **85**, 240 (1933).
6. P. Martin, Ann. d. Physik, **39**, 625 (1912); **55**, 561 (1918).
7. Hirsch, Wied. Ann., **48**, 446 (1893).
8. S. G. Barker, Proc. Phys. Soc. London, **29**, 1 (1917); Loria, Ann. d. Physik, **38**, 887 (1912).
9. М. Носков, ДАН, **31**, 112 (1941).
10. Я. И. Френкель, ЖЭТФ, **12**, 467 (1942).
11. М. М. Носков, ДАН, **53**, 417 (1946); ЖЭТФ **17**, 964 (1947).
12. М. М. Носков и А. В. Соколов, ЖЭТФ, **17**, 969 (1947).
13. H. I. Williams, F. G. Foster and E. A. Wood, Phys. Rev., **82**, 119 (1951).
14. М. Борн, Оптика, ОНТИ, § 7 (1937).
15. А. В. Соколов, ЖЭТФ, **20**, 451 (1950).
16. С. В. Вонсовский и А. В. Соколов, ЖЭТФ, **19**, 703 (1949).
17. C. G. Darwin, Proc. Roy. Soc., **151**, 512 (1935).
18. R. Ladenburg, Müller-Pouillets Lehrb. d. Phys., **2**, 2208 (1929).
19. Ch. Show, Phys. Rev., **2**, 29 (1913).
20. P. Zeeman, Leiden Com. № 8 (1893); № 10 (1894).
21. С. В. Вонсовский, УФН, **46**, 396 (1952).