1953 г. Октябрь *Т. LI, вып. 2*

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

МАГНИТНОЕ ВРАЩЕНИЕ ПЛОСКОСТИ ПОЛЯРИЗАЦИИ НА САНТИМЕТРОВЫХ ВОЛНАХ

А. Л. Микаэлян

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В последние годы интерес к магнито-оптическим явлениям на сантиметровых волнах значительно возрос в связи с возможностью практического использования этих явлений в радиотехнике сантиметровых волн и появился ряд (главным образом экспериментальных) работ, обобщение результатов которых стало назревшей задачей.

Среди различных практических применений наиболее важным, пожалуй, является возможность создания элемента на сантиметровых волнах, который ведёт себя различно для волн, распространяющихся в противоположных направлениях. В частном случае этот элемент будет вести себя как линейный «вентиль», т. е. будет пропускать волны, распространяющиеся только в одном направлении. Принцип действия «вентиля» основан на магнитном вращении плоскости поляризации (эффект Фарадея) и подробно рассмотрен в гл. V. Применение такого элемента дало бы возможность легко решить ряд сложных вопросов в технике сантиметровых волн.

Поэтому изучение явления Фарадея на сантиметровых волнах в различных материалах приобретает практический интерес. Именно: задача сводится к созданию такого материала, который был бы «прозрачен» для сантиметровых волн и вызывал бы значительное вращение плоскости поляризации.

Из оптических экспериментов известно, что значительное вращение плоскости поляризации дают лишь ферромагнитные материалы (тонкие прозрачные плёнки). Того же можно ожидать и на сантиметровых волнах. Поэтому исследованию ферритов, т. е. группы ферромагнетиков, прозрачных для сантиметровых волн, уделяется наибольшее внимание в настоящем обзоре. Кроме того мы рассмотрим возможность применения для поворота плоскости поляризации плазмы и искусственного диэлектрика.

Мы приведем также описание некоторых технических схем, принцип работы которых основан на магнитном вращении плоскости поляризации.

I. МАГНИТНОЕ ВРАЩЕНИЕ ПЛОСКОСТИ ПОЛЯРИЗАЦИИ

(Общие сведения)

Известно, что, если через вещество, помещённое в постоянное магнитное поле, пропустить в направлении поля поляризованную волну, то плоскость поляризации волны повернётся на некоторый угол, зависящий от размеров и свойств вещества и от напряжённости магнитного поля. При этом направление вращения связано с направлением магнитного поля и не зависит от направления распространения волны (в отличие от естественного вращения плоскости поляризации). Это означает, что, если луч, вышедший из вещества, заставить с помощью отражения пройти вторично тот же путь в обратном направлении, то суммарное вращение будет вдвое больше, чем после одного прохождения. На этом свойстве и основано, как мы увидим ниже, использование описанного явления на практике.

Объяснение этого явления, называемого эффектом Фарадея, в рамках классической электродинамики сводится к следующему: в отсутствие магнитного поля электроны в веществе находятся в определённом состоянии движения. Согласно теореме Лармора [1] наложение на электроны (определяющие показатель преломления) постоянного магнитного поля эквивалентно переходу к системе координат, вращающейся вокруг направления магнитного поля с угловой скоростью

$$\omega_L = -\frac{e}{2mc}H = 2{,}8\cdot\pi\cdot H\ \textit{Мгц}, \qquad (I,1)$$

где H — напряжённость магнитного поля, действующего на электрон, в эрстедах. В системе единиц MKS, которой мы везде будем пользоваться, формула (I. 1) примет вид:

$$\omega_L = -\frac{e}{2m}\mu_0 H = \frac{1,78}{2}\cdot 10^{11}\cdot B, \qquad (I.\,1_1)$$

где B выражено в веберах на квадратный метр.

Разложим мысленно линейно-поляризованную волну частоты ω, падающую в направлении магнитных силовых линий, на две волны круговой поляризации с противоположным направлением вращения. Тогда левополяризованная волна, т. е. волна, поляризованная по кругу в направлении против часовой стрелки, если смотреть вдоль силовых линий магнитного поля, будет иметь частоту, по отношению к вращающейся со скоростью ω_L координатной системе, на ω_L меньшую, т. е. $\omega - \omega_L$. Волна с той же частотой ω, но правополяризованная, т. е. поляризованная по кругу в обратном направлении, имеет во вращающейся координатной системе бо́льшую частоту, именно $\omega + \omega_L$. Следовательно, если $n(\omega)$ есть показатель преломления вещества, то при включении магнитного поля скорость правополяризованной волны определяется значением этой функции для частоты $\omega + \omega_L$, а скорость левополяризованной волны — её значением для частоты $\omega - \omega_L$. В соответствии с этим плоскость поляризации волны с прохождением в веществе расстояния l поворачивается на угол

$$\psi = (n_+ - n_-)\frac{\omega}{2c}\, l = (n_+ - n_-)\,\pi\,\frac{l}{\lambda_0}, \qquad (I.\,2)$$

где

$$n_- = n(\omega - \omega_L), \quad n_+ = n(\omega + \omega_L) \qquad (I.\,3)$$

и λ_0 — длина волны в вакууме.

На рис. 1 показан ход показателя преломления для указанных двух волн (кривые *1* и *2*). Из рисунка также следует, что кривая изменения $n_- - n_+$ симметрична по отношению к спектральной линии ($\omega = \omega_0$) и вне этой линии вращение плоскости поляризации сохраняет положительный знак; оно совпадает с направлением тока в катушке, вызывающего магнитное поле H. Кривые рис. 1 справедливы только для диамагнетиков, т. е. для веществ, у которых атомы или молекулы при отсутствии внешнего магнитного поля не обладают магнитным моментом.

Если же магнитный момент атомов и молекул среды в отсутствие внешнего магнитного поля отличен от нуля, т. е. отдельная молекула заранее обладает преимущественным направлением вращения электронов, что имеет место в парамагнетиках, то картина будет иная, чем та, которая описывается рис. 1. Именно, при включении постоянного магнитного поля, параллельного направлению распространения волны, произойдёт частичная ориентировка молекул, т. е. число молекул, в которых электроны вращаются против часовой стрелки по отношению к направлению поля, увеличится, а число молекул, в которых электроны вращаются в противоположном направлении, уменьшится. Это приведёт к увеличению показателя

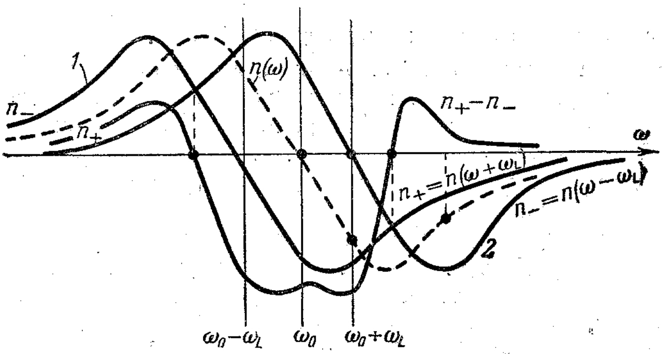


Рис. 1.

преломления для левополяризованной волны и к уменьшению — для правополяризованной волны (рис. 2). В этом случае величина $(n_- - n_+)$, определяющая эффект Фарадея, становится несимметричной относительно линии $\omega = \omega_0$.

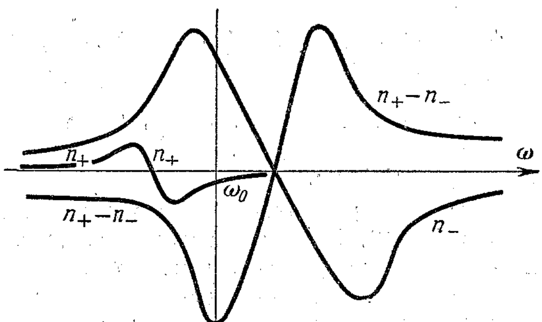


Рис. 2.

Следует заметить, что зависимость показателя преломления от частоты определяется движением не только электронов, но и молекул. Для эффекта Фарадея существенно лишь движение электронов, поскольку масса молекулы в тысячи раз больше, чем масса электрона, и в соответствии с формулой (I. 1) действие магнитного поля на молекулы во столько же раз слабее, чем на электроны. Следовательно, надо учитывать только ту часть показателя преломления, которая обусловлена движением электронов.

Для случая световых волн, когда $\omega_L \ll \omega$, можно оценить величину магнитного вращения плоскости поляризации, воспользовавшись тем, что

$$n_+ - n_- = n(\omega + \omega_L) - n(\omega - \omega_L) = \frac{dn}{d\omega} 2\omega_L. \tag{I. 4}$$

Тогда

$$\frac{\psi}{l} = \frac{\omega}{2c} \cdot \frac{dn}{d\omega} \cdot 1{,}4\pi H = \rho \cdot H, \tag{I. 5}$$

где ρ — постоянная Верде, зависящая от вещества. Это известная формула Беккереля[1].

Для всех неферромагнитных материалов угол поворота в полях порядка тысяч эрстед измеряется минутами. В ферромагнетиках, где формула (I. 5) несправедлива, вращение плоскости поляризации имеет величину, на несколько порядков бóльшую. Этот факт находит своё объяснение только в рамках квантовой механики[9].

На сантиметровых волнах уже не соблюдается условие $\omega_L \ll \omega$ и приближение (I. 4) теряет силу. Более того, в магнитных полях порядка тысяч эрстед частота распространяющегося колебания и ларморова очень близки и могут совпадать, что приводит к нарушению линейной связи между углом поворота поляризации и магнитным полем, т. е. в этом случае постоянная Верде теряет смысл. При условии равенства частот ω и ω_L поворот плоскости поляризации будет, очевидно, равен:

$$\frac{\psi}{l} = \frac{\omega}{2c} [n(2\omega) - n(0)], \tag{I. 6}$$

где $n(2\omega)$ — показатель преломления вещества на частоте 2ω, а $n(0)$ — показатель преломления вещества на нулевой частоте. Таким образом, в формуле (I. 6) неизвестным является лишь значение $n(2\omega)$. В дальнейшем будет показано, что в случае равенства частот ω и ω_L (гиромагнитный орбитальный резонанс) поворот плоскости поляризации имеет наибольшую величину. Вообще же и на сантиметровых волнах вращение плоскости поляризации во всех материалах, кроме ферромагнетиков, малó и измеряется минутами. Изложим кратко основные экспериментальные результаты, подтверждающие это положение.

Измерения углов поворота плоскости поляризации проводились на сантиметровых волнах, причём использовался круглый волновод с волной H_{11}, участок которого заполнялся исследуемым веществом.

Величина магнитного поля, приложенного вдоль оси волновода, была порядка 1350 гаусс.

Наиболее подробно были исследованы парамагнитные вещества $MnCl_2 \cdot 4H_2O$ и $MnSO_4 \cdot H_2O$[3,4], которые в присутствии магнитного поля сильно поглощают сантиметровые волны. Результаты приведены в таблице I.

Таблица I

λ (*см*)	*H* (*гаусс*)	*l* (*см*)	ψ (*минут*)
$MnSO_4 \cdot H_2O$			
3,34	1350	9,2	9,5
3,45	1350	9,2	12,5
3,338	1350	9,2	12,5
$MnCl_2 \cdot 4H_2O$			
3,338	1350	9,2	22,7
3,338	1350	9,65	28,7
3,338	1350	23,4	61,5
3,338	1350	30,5	73,3
3,338	920	30,5	55,2
3,338	460	30,5	25,9
3,442	1350	30,5	25,7
3,553	1350	30,5	46,9

Здесь l — путь волны в веществе, ψ — вращение плоскости поляризации (в минутах).

Из таблицы следует, что вращение тем больше, чем сильнее магнитное поле. Кроме того, заметна зависимость от частоты. Измерение зависимости вращения плоскости поляризации от напряжённости магнитного поля в области гиромагнитного резонанса было подробно проведено Ритером[6] для сульфата марганца $MnSO_4 \cdot 4H_2O$ на частоте 9500 *Мгц* и Гихердом[7] на частоте 3000 *Мгц*. Форма измеренной кривой указывает на резонансный характер зависимости поворота плоскости поляризации от величины приложенного магнитного поля. Максимальное вращение плоскости поляризации волны соответствует точке гиромагнитного резонанса.

При испытании ряда других материалов (табл. II) сколько-нибудь заметного вращения плоскости поляризации обнаружено не было. Таким образом, можно сделать вывод о том, что вещества, не относящиеся к ферромагнетикам, обладают очень малой вращательной способностью, измеряемой десятками минут на сантиметр пути.

Таблица II

Этиловый спирт (жидк.)	Полистирен (тв.)
Нитробензол (жидк.)	Аммиак (газ)
Метиловый спирт (жидк.)	Хлористый натрий (крист.)
Нитрат аммония (крист.)	Глицерин (жидк.)
Гидроокись аммония (жидк.)	Сульфат железа (крист.)
Вода (дистил.)	Хлористое железо (порош.)
Хлороформ	Четырёххлористый углерод (жидк.)
Хлористый этилен	Карбонат марганца (тв.)
Хлористый метилен	Сульфат железа (тв.)
Бензол (жидк.)	Азотнокислое железо (тв.)
Хлористый кобальт (тв.)	Сернокислый кобальт (тв.)

II. ВРАЩЕНИЕ ПЛОСКОСТИ ПОЛЯРИЗАЦИИ В ФЕРРИТАХ

1. Краткие сведения о ферритах

Ферриты составляют особую группу ферромагнитных веществ, обладающих очень большим удельным сопротивлением (порядка $10^2 - 10^6$ *ом·см* по сравнению с 10^{-5} *ом·см* у обычного железа), т. е. представляют собой ферромагнитные полупроводники. Возможность существования таких материалов связана с тем, что явления электропроводности и ферромагнетизма обусловлены не одними и теми же электронами. Электроны, являющиеся причиной ферромагнетизма, вносят в электропроводность лишь небольшой вклад [9].

Таким образом, электромагнитная волна, распространяющаяся в феррите, будет поглощаться слабо, что позволяет использовать этот материал также и для целей поворота плоскости поляризации волны.

Не останавливаясь на физической теории структуры ферромагнетиков, мы лишь напомним, что ферромагнитные тела имеют кристаллическое строение. Каждый ферромагнитный материал является поликристаллическим, т. е. состоит из большого числа кристаллитов, ориентация которых во многих материалах имеет случайный характер. При этом каждый кристаллит ведёт себя как монокристалл, изолированный от соседних кристаллитов.

Общую формулу ферритов можно записать как $Me^{II}O \cdot Fe_2O_3$, где Me^{II} — ион двухвалентного металла. В технике хорошо известны ферриты, в которых в качестве Me^{II} служат ионы Ni, Co, Fe, Mn, Mg, Ca, Cu [8]. Хотя в настоящее время известны ферриты с кубической, гексагональной и тетрагональной решётками, однако изучены главным образом ферриты, имеющие кубическую структуру. Подробные сведения о свойствах различных типов ферритов на сантиметровых волнах можно найти в цитируемых книгах С. В. Вонсовского [9, 10].

2. Теория ферромагнитного резонанса

Если к ферромагнитному материалу, намагниченному до насыщения в постоянном внешнем магнитном поле, приложить слабое магнитное поле высокой частоты в направлении, перпендикулярном постоянному магнитному полю, то при некоторой частоте ω_0, определяемой, в основном, как будет показано ниже, частотой прецессии свободного электронного спина во внешнем поле, наблюдается явление, называемое ферромагнитным резонансом. В частности, плоская волна, распространяющаяся в ферромагнетике в направлении приложенного постоянного магнитного поля, будет испытывать резонансное поглощение.

Принципиальная возможность явления ферромагнитного резонанса была впервые предсказана в работах В. К. Аркадьева [11, 12], а квантовый механизм этого явления был рассмотрен Я. Г. Дорфманом [13].

Фундаментальным исследованием в этом направлении явилась работа Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица [14], в которой была построена общая теория поведения ферромагнитных кристаллов в переменных магнитных полях и в количественной форме исследован резонансный эффект. Теория Ландау и Лифшица была детально развита применительно к новым опытным фактам в серии работ Киттеля [15, 16, 17].

При использовании ферромагнетиков для целей поворота плоскости поляризации явление ферромагнитного резонанса играет чрезвычайно важную роль, поскольку оно в значительной степени определяет величину потерь. Поэтому мы изложим ниже основные положения этой теории, которая базируется на классической модели ферромагнетика, впервые предложенной Ландау и Лифшицем в цитированной выше работе.

Известно [18], что почти весь магнитный момент ферромагнитных материалов связан со спином электронов, а не с их орбитальным движением. (Измерения гиромагнитного отношения, т. е. отношения магнитного момента к механическому, дают значение, близкое к $\frac{e}{m}$, что соответствует спину, в то время как для орбитального движения оно равно $\frac{e}{2m}$.) В соответствии с этим намагничивание единицы объёма ферромагнетика **M** связано с результирующим внутренним магнитным полем уравнением [2]

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \gamma\,[\mathbf{M}\mathbf{H}]\,\mu_0, \qquad (II.1)$$

в котором $\gamma = \frac{e}{m} = 1{,}78 \cdot 10^{11}\ \frac{кулон}{кг}$.

Если принять, что **H** равно приложенному постоянному полю H_z, то (при гармонической зависимости от времени **M**) мы получим в первом приближении[15]:

$$i\omega M_x = \gamma M_y H_z \mu_0, \tag{II.2}$$

$$i\omega M_y = -\gamma M_x H_z \mu_0, \tag{II.3}$$

откуда

$$(-\omega^2 + \gamma^2 H_z^2 \mu_0^2) M_x = 0,$$

что приводит к выражению для резонансной частоты:

$$\omega = \gamma H_z \mu_0. \tag{II.4}$$

Это означает, что величина поглощения волны частоты ω_0, распространяющейся через ферромагнетик, будет проходить через максимум, когда величина поля H_z достигнет значения $\frac{\omega_0}{\gamma\mu_0}$. При выводе формулы (II.4) мы положили внутреннее поле равным приложенному, т. е. пренебрегли факторами размагничивания. Если учесть эти факторы, то для случая эллипсоида с главными осями, параллельными осям x, y, z, внутреннее магнитное поле $\mathbf{H}^i$ будет равно[16]:

$$\left.\begin{aligned} H_x^i &= H_x - N_x M_x, \\ H_y^i &= -N_y M_y, \\ H_z^i &= H_z - N_z M_z. \end{aligned}\right\} \tag{II.5}$$

Здесь H_x — составляющая магнитного поля плоской волны (других составляющих нет), H_z — постоянное магнитное поле, причём $H_z \gg H_x$, N_x, N_y, N_z — размагничивающие факторы, зависящие от формы ферромагнетика.

Подставляя уравнение (II.5) в (II.3), мы получим тем же способом, что и выше, выражение для резонансной частоты[16]:

$$\omega_0 = \gamma \{[H_z + (N_y - N_z) M_z][H_z + (N_x - N_z) M_z]\}^{\frac{1}{2}} \mu_0. \tag{II.6}$$

Отметим несколько частных случаев формы ферромагнетика:

1. Сфера $\left(N_x = N_y = N_z = \frac{1}{3}\right)$

$$\omega_0 = \gamma H_z \mu_0. \tag{II.6а}$$

2. Пластинка $y = 0$ $(N_x = N_z = 0;\ N_y = 1)$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{B_z H_z}{\mu_0}}\, \mu_0, \tag{II.6б}$$

где

$$B_z = (H_z + M_z)\mu_0.$$

3. Бесконечный круговой цилиндр

$$\left(N_x = N_y = \frac{1}{2}\ ,\ N_z = 0\right)$$

$$\omega_0 = \gamma\left(H_z + \frac{1}{2} M_z\right)\mu_0. \qquad \text{(II.6в)}$$

При выводе уравнения (II.6) было предположено, что размеры ферромагнетика значительно меньше глубины проникновения распространяющейся волны.

Помимо зависимости от формы тела, факторы размагничивания зависят также и от энергии анизотропии или, как её иногда называют, магнитно-кристаллической энергии ферромагнитного кристалла. Последняя связана с тем, что в кристалле существуют направления (совпадающие с определёнными кристаллографическими осями), вдоль которых кристалл наиболее легко намагничивается. Эти направления называются направлениями лёгкого намагничивания. Существуют также направления, в которых наиболее трудно намагничивать кристалл. Избыток энергии, необходимый для намагничивания кристалла до насыщения в трудном направлении по сравнению с лёгким, и есть энергия анизотропии.

Таким образом, вместо формулы (II.6) надо писать [16]:

$$\omega_0 = \gamma\left\{\left[H_z + (N_x + N_x^e - N_z) M_z\right]\left[H_z + (N_y + N_y^e - N_z) M_z\right]\right\}^{\frac{1}{2}}\mu_0, \qquad \text{(II.7)}$$

где N_x^e, N_y^e учитывают влияние энергии магнитной кристаллографической анизотропии на резонансную частоту.

Вычисление этих коэффициентов для ряда частных случаев, а также ряд экспериментальных данных имеется в работе Киттеля и в работах других авторов. С квантово-механической точки зрения вывод формулы (II.7) был дан Ван-Флеком [22].

При практическом использовании ферромагнетика необходимо создать такие условия, чтобы частота распространяющейся волны была далека от резонансной; в этом случае поглощение волны будет наименьшим.

Теперь мы перейдём к рассмотрению вопроса о распространении волн в ферромагнитной среде при наличии постоянного магнитного поля. Основной целью этого рассмотрения является количественная оценка угла поворота плоскости поляризации распространяющейся в ферромагнетике волны.

3. Распространение волн в ферромагнитной среде

Рассмотрим распространение плоской волны в ферромагнитной среде (феррите), намагниченной в определённом направлении до насыщения. Если пренебречь потерями (магнитными и диэлектрическими), то мы должны будем исходить из уравнения движения спина, записанного в форме (II. 1)

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt}=\gamma\,[\mathbf{MH}]\,\mu_0,$$

с помощью которого и устанавливается связь между магнитной индукцией и напряжённостью магнитного поля в ферромагнитной среде, намагниченной до насыщения. Чтобы установить эту связь, предположим, что в бесконечной ферромагнитной среде, которая подвергается действию постоянного магнитного поля $\mathbf{H}_z$, распространяется волна, т. е. действует переменное поле $\mathbf{h}=\mathbf{H}-\mathbf{H}_z$. Если переменные составляющие намагничения обозначить через $\mathbf{m}$, то мы сможем написать, что $\mathbf{m}=\mathbf{M}-M_z$, где M_z — намагничение среды в отсутствие переменного поля. Подставляя в (II. 1) значения $\mathbf{M}=\mathbf{m}+\mathbf{M}_z$ и $\mathbf{H}=\mathbf{h}+\mathbf{H}_z$, мы получим (для гармонической зависимости $\mathbf{M}$ от времени):

$$\left.\begin{aligned}
i\omega m_x&=\mu_0\gamma\,(m_y H_z-M_z h_y),\\
i\omega m_y&=\mu_0\gamma\,(M_z h_x-m_x H_z),\\
i\omega m_z&=0
\end{aligned}\right\}\qquad(\text{II. }8)$$

(мы пренебрегли в этом уравнении произведением малых величин $\mathbf{h}$ и $\mathbf{m}$, поскольку $|h|\ll H_z$).

Разрешая эту систему относительно m_x и m_y, получим:

$$\left.\begin{aligned}
m_x&=\frac{\mu_0^2\gamma^2 M_z H_z}{\mu_0^2\gamma^2 H_z^2-\omega^2}\,h_x-i\,\frac{\mu_0\,\omega\gamma M_z}{\mu_0^2\gamma^2 H_z^2-\omega^2}\,h_y,\\
m_y&=\frac{\mu_0^2\gamma^2 M_z H_z}{\mu_0^2\gamma^2 H_z^2-\omega^2}\,h_y+i\,\frac{\mu_0\,\omega\gamma M_z}{\mu_0^2\gamma^2 H_z^2-\omega^2}\,h_x.
\end{aligned}\right\}\qquad(\text{II. }9)$$

Чтобы найти переменную составляющую магнитной индукции $\mathbf{b}$, нам остаётся подставить в уравнение для $\mathbf{b}=(\mathbf{h}+\mathbf{m})\,\mu_0$ значения составляющих $\mathbf{m}$ из (II. 9). Это даёт:

$$\left.\begin{aligned}
b_x&=\mu h_x-ikh_y,\\
b_y&=\mu h_y+ikh_x,\\
b_z&=\mu_0 h_z,
\end{aligned}\right\}\qquad(\text{II. }10)$$

где

$$\frac{\mu}{\mu_0}=\frac{\mu_0\gamma^2 B_z H_z-\omega^2}{\mu_0^2\gamma^2 H_z^2-\omega^2},\quad \frac{k}{\mu_0}=\frac{\mu_0 M_z\gamma\omega}{\mu_0^2\gamma^2 H_z^2-\omega^2},\quad B_z=(H_z+M_z)\,\mu_0.\qquad(\text{II. }11)$$

Таким образом, уравнения (II. 10) и (II. 11) устанавливают связь между переменными составляющими магнитной индукции и напряжённостью магнитного поля в ферромагнитной среде, намагниченной до насыщения, при условии, что потери в среде отсутствуют. Для учёта потерь надо ввести в основное уравнение (II. 1') дополнительный член, уменьшающий энергию прецессионного движения электрона.

Если использовать этот член в форме, предложенной Ландау и Лифшицем[14], то мы вместо (II. 1) получим:

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt}=\gamma\,[\mathbf{MH}]\,\mu_0-\frac{\gamma\delta}{M}\,[\mathbf{M}\,[\mathbf{MH}]]\,\mu_0, \tag{II. 1$_1$}$$

где δ — коэффициент, характеризующий затухание и определяемый экспериментальным путём из ширины резонансной кривой поглощения. Например,[20] для случая ферромагнетика $NiOFe_2O_3$ (феррит никеля) сферической формы на частоте 24 000 *Мгц* $\delta=4{,}5\cdot10^{-3}$. Если решать уравнение (II. 1_1) в том же приближении, что и уравнение (II. 1), то мы снова получим систему (II. 10), в которой лишь μ и k будут выражаться более сложными формулами.

Эти формулы имеют следующий вид[23]:

$$\mu=\mu'-i\mu'',\quad k=k'-ik'', \tag{II. 12}$$

причём

$$\frac{\mu'}{\mu_0}=1+$$

$$+\frac{\left[\mu_0^2\gamma^2H_z^2(1+\delta^2)-\omega^2\right]\left[\mu_0^2M_z\gamma^2H_z(1+\delta^2)\right]+2\mu_0^2M_z\,\omega^2\gamma^2\delta^2H_z}{\left[\mu_0^2\gamma^2H_z^2(1+\delta^2)-\omega^2\right]^2+4\omega^2\gamma^2\delta^2H_z^2\,\mu_0^2}, \tag{II. 13$_1$}$$

$$\frac{\mu''}{\mu_0}=\frac{\mu_0M_z\gamma\delta\omega\left[\mu_0^2\gamma^2H_z^2(1+\delta^2)+\omega^2\right]}{\left[\mu_0^2\gamma^2H_z^2(1+\delta^2)-\omega^2\right]^2+4\omega^2\gamma^2\delta^2H_z^2\,\mu_0^2}, \tag{II. 13$_2$}$$

$$\frac{k'}{\mu_0}=\frac{\mu_0M_z\gamma\omega\left[\mu_0^2\gamma^2H_z^2(1+\delta^2)-\omega^2\right]}{\left[\mu_0^2\gamma^2H_z^2(1+\delta^2)-\omega^2\right]^2+4\omega^2\gamma^2\delta^2H_z^2\,\mu_0^2}, \tag{II. 13$_3$}$$

$$\frac{k''}{\mu_0}=\frac{2\mu_0^2M_z\,\omega^2\gamma^2\delta H_z}{\left[\mu_0^2\gamma^2H_z^2(1+\delta^2)-\omega^2\right]^2+4\omega^2\gamma^2\delta^2H_z^2\,\mu_0^2}. \tag{II. 13$_4$}$$

Легко видеть, что (II. 12) и (II. 13) переходят в (II. 11), если пренебречь потерями, т. е. положить $\delta=0$.

Чтобы решить задачу о распространении плоской волны в ферромагнитной среде, нам, очевидно, необходимо найти такое решение уравнений Максвелла, которое не противоречило бы соотношениям (II. 10) и в котором составляющие поля $\mathbf{b}$, $\mathbf{h}$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$ были пропорциональны $e^{i\omega t-\Gamma z}$.

Для простоты выкладок мы сразу же рассматриваем практически важный случай, когда волна распространяется по оси z, т. е. вдоль постоянного магнитного поля. Исключив из уравнений Максвелла, записываемых в виде

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{b}}{\partial t},\qquad \operatorname{rot}\mathbf{h}=\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t},$$

$\mathbf{E}$ и $\mathbf{D}$ (мы считаем, что $\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}$), получим:

$$\nabla^2\mathbf{h}=\varepsilon\frac{\partial^2\mathbf{b}}{\partial t^2}. \qquad \text{(II. 14)}$$

Заметим, что ε — комплексная диэлектрическая проницаемость среды. Полагая $\mathbf{h}=\mathbf{h}_0 e^{i\omega t-\Gamma z}$, $\mathbf{b}=\mathbf{b}_0 e^{i\omega t-\Gamma z}$, мы получим:

$$-\Gamma^2\mathbf{h}_0=\omega^2\varepsilon\cdot\mathbf{b}_0. \qquad \text{(II. 15)}$$

Подставив теперь вместо величины $\mathbf{b}_0$ её значения из (II. 10), придём к системе уравнений следующего вида:

$$\left.\begin{aligned}(\mu h_{0x}-ikh_{0y})\,\omega^2\varepsilon&=-\Gamma^2h_x,\\(\mu h_{0y}+ikh_{0x})\,\omega^2\varepsilon&=-\Gamma^2h_y.\end{aligned}\right\} \qquad \text{(II. 16)}$$

Система (II. 16) может быть удовлетворена, если положить:

$$h_{0x}=\pm ih_{0y}. \qquad \text{(II. 17)}$$

Вместе с тем уравнение (II. 17) указывает на то, что волна имеет круговую поляризацию, причём верхний знак относится к волне, поляризованной по кругу в направлении по часовой стрелке, если смотреть вдоль постоянного магнитного поля (правополяризованная волна); нижний знак соответствует левополяризованной волне. Постоянная распространения согласно (II. 16) и (II. 17) будет равна:

$$\Gamma_{\pm}=i\omega\sqrt{\varepsilon(\mu\pm k)}. \qquad \text{(II. 18)}$$

Таким образом, плоская волна, распространяющаяся в ферромагнитной среде в направлении постоянного магнитного поля, распадается на две волны круговой поляризации, имеющие различные постоянные распространения. Можно показать, что если плоская волна распространяется под углом θ к направлению силовых линий постоянного магнитного поля H_z, то в этом общем случае она распадается на две эллиптически поляризованные волны, которые распространяются с различными скоростями. При отсутствии потерь постоянные распространения двух упомянутых волн выражаются формулой [24]

$$\Gamma_{\pm}=i\omega\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}\,\frac{M\sin^2\theta+2\mu\pm\sqrt{M^2\sin^4\theta+4k^2\cos^2}}{\left(\frac{\mu}{\mu_0}-1\right)\sin^2\theta+1}}, \qquad \text{(II. 19)}$$

где для удобства записи положено $\mu_0\left(\frac{\mu^2}{\mu_0^2}-\frac{\mu}{\mu_0}-\frac{k^2}{\mu_0^2}\right)=M$.

В случае $\theta = \frac{\pi}{2}$ мы имеем две линейно поляризованные волны, постоянные распространения которых равны:

$$\Gamma_- = i\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon}, \quad \Gamma_+ = i\omega\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}(\mu^2 - k^2)}. \qquad \text{(II. 19а)}$$

Эти формулы указывают на известное явление двойного лучепреломления в среде, находящейся под воздействием постоянного магнитного поля (явление Коттона-Мутона). Знак минус относится к обыкновенной волне, знак плюс — к необыкновенной.

В случае $\theta = 0$ или $\theta = \pi$ получим, как указывалось выше, две волны круговой поляризации с постоянными распространения

$$\Gamma_+ = i\omega\sqrt{\varepsilon(\mu + k)} \quad \text{и} \quad \Gamma_- = i\omega\sqrt{\varepsilon(\mu - k)}. \qquad \text{(II. 19б)}$$

В формулах (II. 19) потери не учитываются и значения μ и k надо брать из соотношения (II. 11).

Вернёмся к исследованию формулы (II. 18), т. е. общего случая распространения волны вдоль направления магнитного поля при наличии потерь. Прежде всего мы отметим, что эффективная магнитная проницаемость для волн круговой поляризации определяется величиной $\mu \pm k$, которая вблизи резонанса меняется в широких пределах. Для дальнейшего удобно разделить вещественную и мнимую части уравнения (II. 18). Поэтому мы положим, что

$$\Gamma_\pm = i\omega\sqrt{(\mu \pm k)\varepsilon} = \beta_\pm + i\alpha_\pm. \qquad \text{(II. 20)}$$

Очевидно, $\beta_\pm$ характеризует затухание волны, а $\alpha_\pm$ — её фазовую скорость. Решая уравнение (II. 20) относительно α и β, мы получим:

$$\alpha_\pm = \omega\sqrt{\frac{(\mu' \pm k')\varepsilon'}{2}}\sqrt{\sqrt{1 + \operatorname{tg}\delta_м \cdot G + \operatorname{tg}^2\delta_д} + 1 + \operatorname{tg}\delta_м \operatorname{tg}\delta_д}, \qquad \text{(II. 21)}$$

$$\beta_\pm = \omega\sqrt{\frac{(\mu' \pm k')\varepsilon'}{2}}\sqrt{\sqrt{1 + \operatorname{tg}\delta_м \cdot G + \operatorname{tg}^2\delta_д} - 1 - \operatorname{tg}\delta_м \operatorname{tg}\delta_д}, \qquad \text{(II. 22)}$$

где для удобства записи положено $4\operatorname{tg}\delta_д + \operatorname{tg}\delta_м(1 + \operatorname{tg}^2\delta_д) = G$.

Здесь

$$\operatorname{tg}\delta_м = \frac{\mu'' \pm k''}{\mu' \pm k'}; \quad \operatorname{tg}\delta_д = \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}; \quad \varepsilon = \varepsilon' - i\varepsilon''. \qquad \text{(II. 23)}$$

Мы рассмотрим два вырожденных случая формул (II. 21) и (II. 22), поскольку исследование их в общем виде не представляется возможным.

В первом случае[23] предполагается, что магнитные потери пренебрежимо малы, т. е. $\operatorname{tg}\delta_{м} \cong 0$. Это допущение может быть справедливым, когда частота ферромагнитного резонанса значительно сдвинута относительно частоты распространяющейся волны, так как основная составляющая магнитных потерь обусловлена именно явлением ферромагнитного резонанса. Другие факторы, например, релаксация границ доменов, также увеличивают магнитные потери, но если ферромагнетик намагничен до насыщения, то роль этих факторов значительно снижается.

Итак, если положить $\operatorname{tg}\delta_{м} = 0$, то мы получим:

$$\alpha_{\pm} = \omega \sqrt{\frac{(\mu' \pm k')\,\varepsilon'}{2}} \sqrt{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta_{д}} + 1}, \qquad \text{(II. 21a)}$$

$$\beta_{\pm} = \omega \sqrt{\frac{(\mu' \pm k')\,\varepsilon'}{2}} \sqrt{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta_{д}} - 1}, \qquad \text{(II. 22a)}$$

или

$$\alpha_{\pm} = \omega \sqrt{\frac{|\varepsilon| + \varepsilon'}{2}} \sqrt{\mu' \pm k'}, \qquad \text{(II. 21б)}$$

$$\beta_{\pm} = \omega \sqrt{\frac{|\varepsilon| - \varepsilon'}{2}} \sqrt{\mu' \pm k'}, \qquad \text{(II. 22б)}$$

где

$$|\varepsilon| = \sqrt{\varepsilon'^2 + \varepsilon''^2}.$$

При прохождении волной в ферромагнитной среде пути l плоскость поляризации волны повернётся на угол:

$$\phi = (n_{+} - n_{-}) \frac{\omega}{c} \frac{l}{2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \frac{\omega}{c} \frac{l}{2} \sqrt{\frac{|\varepsilon| + \varepsilon'}{2}} \left[\sqrt{\mu' + k'} - \sqrt{\mu' - k'}\right]. \qquad \text{(I. 2a)}$$

Если, кроме того, $\omega \gg \omega_{рез}$, то, подставляя из (II. 13) или (II. 11) в уравнение (I. 2a) значения

$$\frac{\mu'}{\mu_0} \cong 1 \quad \text{и} \quad \frac{k'}{\mu_0} \cong -\frac{\mu_0 M_z \gamma}{\omega},$$

получим:

$$\frac{\psi}{l} = \frac{\omega}{2c} \sqrt{\frac{|\varepsilon| + \varepsilon'}{2\varepsilon_0}} \left[\sqrt{1 - \frac{\mu_0 M_z \gamma}{\omega}} - \sqrt{1 + \frac{\mu_0 M_z \gamma}{\omega}} \right]. \quad \text{(I. 2б)}$$

Учитывая, что насыщение ферритов происходит приблизительно при $\mu_0 M_z = 0{,}2$ *вб/м*^{2} (что соответствует 2000 гаусс), получим для сантиметровых волн [23]:

$$\frac{\mu_0 M_z \gamma}{\omega} \leqslant \frac{0{,}2 \cdot 1{,}78 \cdot 10^{11}}{2\pi \cdot 10^{10}} = 0{,}567.$$

В этом приближении:

$$\frac{\psi}{l} = \frac{1}{2c} \sqrt{\frac{|\varepsilon| + \varepsilon'}{2\varepsilon_0}} \mu_0 M_z \gamma \quad \text{(I. 2в)}$$

или

$$\frac{\psi}{l} = \frac{1{,}78 \cdot 10^{11}}{2 \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot \sqrt{2}} \sqrt{\frac{|\varepsilon| + \varepsilon'}{\varepsilon_0}} \mu_0 M_z \frac{180}{\pi} =$$

$$= 120 \sqrt{\frac{|\varepsilon| + \varepsilon'}{\varepsilon_0}} \mu_0 M_z \frac{\text{град}}{\text{см}}. \quad \text{(I. 2г)}$$

Например, для $\varepsilon' = 15\varepsilon_0$; $\varepsilon'' = 0$; $\mu_0 M_z = 0{,}1 \frac{\text{вб}}{\text{м}^2}$ ($4\pi M_z = 1000$ гаусс) получим $\frac{\psi}{l} = 65$ *град/см*. Существенно отметить, что в пределах приведённых приближений вращение плоскости поляризации не зависит от частоты, что видно из формулы (I. 2в).

Исследуем несколько подробнее случай, когда отсутствуют магнитные потери, т. е. $\delta_м = 0$. Тогда из формулы (II. 22б) получим:

$$n_+ = \sqrt{\varepsilon_{эфф} (\mu' + k')} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}, \quad \text{(II. 24)}$$

$$n_- = \sqrt{\varepsilon_{эфф} (\mu' - k')} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}, \quad \text{(II. 25)}$$

где $\varepsilon_{эфф} = \frac{1}{2} (|\varepsilon| + \varepsilon')$.

Поскольку $\delta_м = 0$, мы найдём из (II. 11)

$$\frac{\mu' \pm k'}{\mu_0} = 1 + \frac{\mu_0 M_z \gamma \left[\mu_0 \gamma H_z \pm \omega\right]}{\mu_0^2 \gamma^2 H_z^2 - \omega^2}$$

и получим:

$$\left.\begin{aligned} n_+ &= \sqrt{\varepsilon_{эфф}} \sqrt{1 + \frac{\mu_0 M_z \gamma}{\mu_0 \gamma H_z - \omega}} \, \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}, \\ n_- &= \sqrt{\varepsilon_{эфф}} \sqrt{1 + \frac{\mu_0 M_z \gamma}{\mu_0 \gamma H_z + \omega}} \, \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(II. 26)}$$

Графически n_+ и n_- в зависимости от ω представлены на рис. 3, из которого следует довольно примечательный закон изменения показателя преломления n_+ для правополяризованной волны. В некоторой области частот ω показатель преломления n_+ становится чисто мнимым, что означает прекращение процесса распространения (аналогично тому, что имеет место в предельном волноводе). В этой области правополяризованная волна сильно поглощается. Что касается показателя преломления левополяризованной волны, то при увеличении частоты ω он медленно уменьшается.

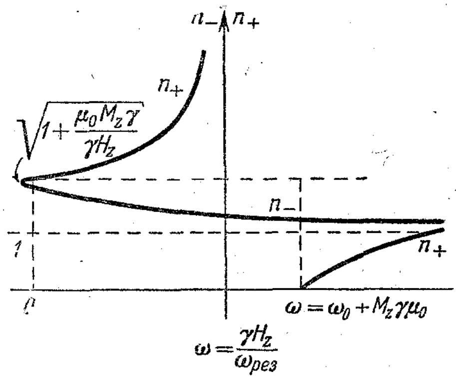


Рис. 3.

Легко видеть, что вращение плоскости поляризации, пропорциональное $(n_- - n_+)$, имеет при $\omega > \omega_0$ положительный знак, а при $\omega < \omega_0$ — отрицательный. Тот частный случай $\omega \gg \omega_{рез}$, который мы рассмотрели выше (формула (I. 2в)), сразу же получается из формул (II. 26). Для этого случая можно также оценить поведение показателя затухания $\beta_\pm$. Действительно, сравнивая формулы (II. 22 б) и (II. 21 б), мы можем придти к заключению, что график на рис. 3 будет характеризовать также зависимость $\beta_\pm$ от частоты.

Таким образом поглощение правополяризованной волны растёт с частотой ω до тех пор, пока $\omega < \omega_{рез}$; при дальнейшем увеличении частоты эта волна вообще не распространяется. Затем при частоте $\omega = \omega_0 + \mu_0 M_z \gamma$ волна снова начинает проходить, причём потери медленно нарастают с частотой. Левополяризованная волна вообще не реагирует на явление ферромагнитного резонанса и поглощение её медленно уменьшается с ростом частоты.

Следует особо подчеркнуть, что рис. 3 указывает изменение показателя преломления вследствие изменения эффективной магнитной проницаемости. Зависимость же диэлектрической проницаемости от частоты на рис. 3 не учитывается, т. е. предполагается, что диэлектрическая проницаемость не зависит от частоты.

В случае, когда имеются только магнитные потери, формулы для постоянной распространения и показателя затухания имеют следующий вид:

$$\alpha_{\pm}=\omega\sqrt{\frac{(\mu'\pm k')\,\varepsilon'}{2}}\sqrt{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\delta_{\text{м}}}+1}, \tag{II.27}$$

$$\beta_{\pm}=\omega\sqrt{\frac{(\mu'\pm k')\,\varepsilon'}{2}}\sqrt{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\delta_{\text{м}}}-1} \tag{II.28}$$

или

$$\alpha_{\pm}=\omega\sqrt{\varepsilon'\,\frac{|\mu_{\pm}|+\mu_{1\pm}}{2}}, \tag{II.29}$$

$$\beta_{\pm}=\omega\sqrt{\varepsilon'\,\frac{|\mu_{\pm}|-\mu_{1\pm}}{2}}, \tag{II.30}$$

где

$$\mu_{1\pm}=\mu'\pm k'; \qquad |\mu_{\pm}|=\sqrt{(\mu'\pm k')^2+(\mu''\pm k'')^2}.$$

Тогда показатель преломления будет равен:

$$n_{\pm}=\sqrt{\varepsilon'\,\frac{\mu'\pm k'}{2}}\sqrt{1+\sqrt{1+\left(\frac{\mu''\pm k''}{\mu'\pm k'}\right)^2}}\;\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}, \tag{II.31}$$

где μ', k', μ'', k'' определяются по формулам (II. 13), или

$$n_{\pm}=\sqrt{\frac{1}{2}\,\varepsilon'\mu_{\text{эфф}\pm}}\sqrt{1+\sqrt{1+\left(\frac{\mu''\pm k''}{\mu_{\text{эфф}\pm}}\right)^2}}\;\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}, \tag{II.32}$$

причём $\mu_{\text{эфф}\pm}=\mu'\pm k'$.

Если подставить из (II. 13) значения μ' и k', то получим:

$$\frac{\mu_{\text{эфф}\pm}}{\mu_0}=1+\frac{\mu_0 M_z\gamma}{\omega}\;\frac{\left(1+\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\left(1\pm\frac{\omega}{\omega_0}\right)+2\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\delta^2}{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2+4\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\delta^2}, \tag{II.33}$$

где $\omega_0=\gamma H_z\mu_0$.

Для двух значений $\frac{\mu_0 M_z \gamma}{\omega}$ (соответствующих области сантиметровых волн) на рис. 4 и 5 построены зависимости $\mu_{эфф\pm}$ от

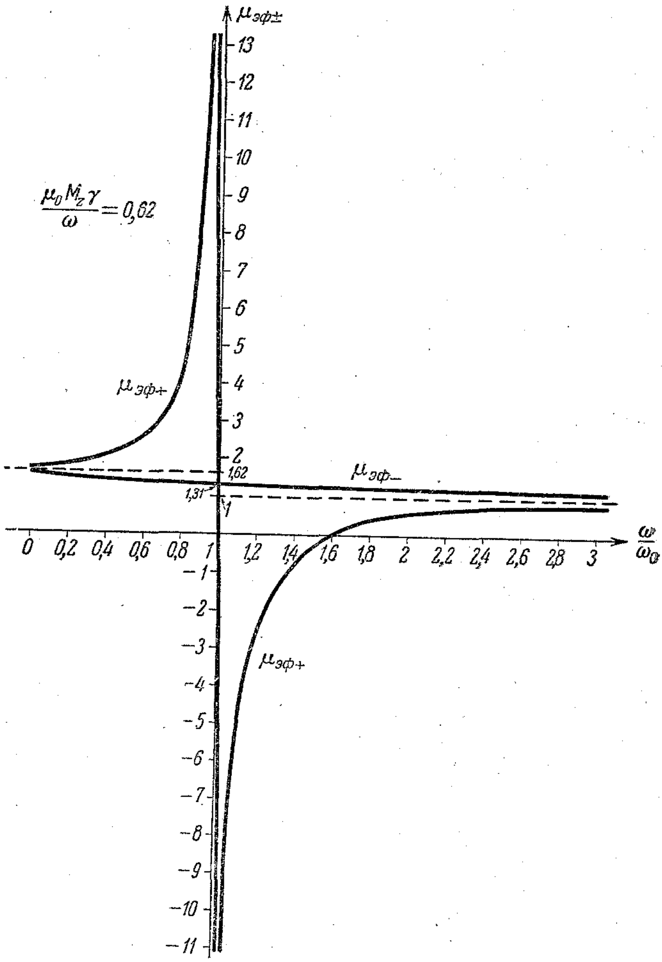


Рис. 4.

$\frac{\omega}{\omega_0}$. Эти кривые имеют такую же форму, как и на рис. 3, за исключением области резонанса, поскольку они учитывают затухание вследствие магнитных потерь ($\delta \neq 0$).

На рис. 5 показано также в уменьшенном виде различие формы кривых для различных δ. Таблица III характеризует влияние δ на кривые, представленные на рис. 4 и 5.

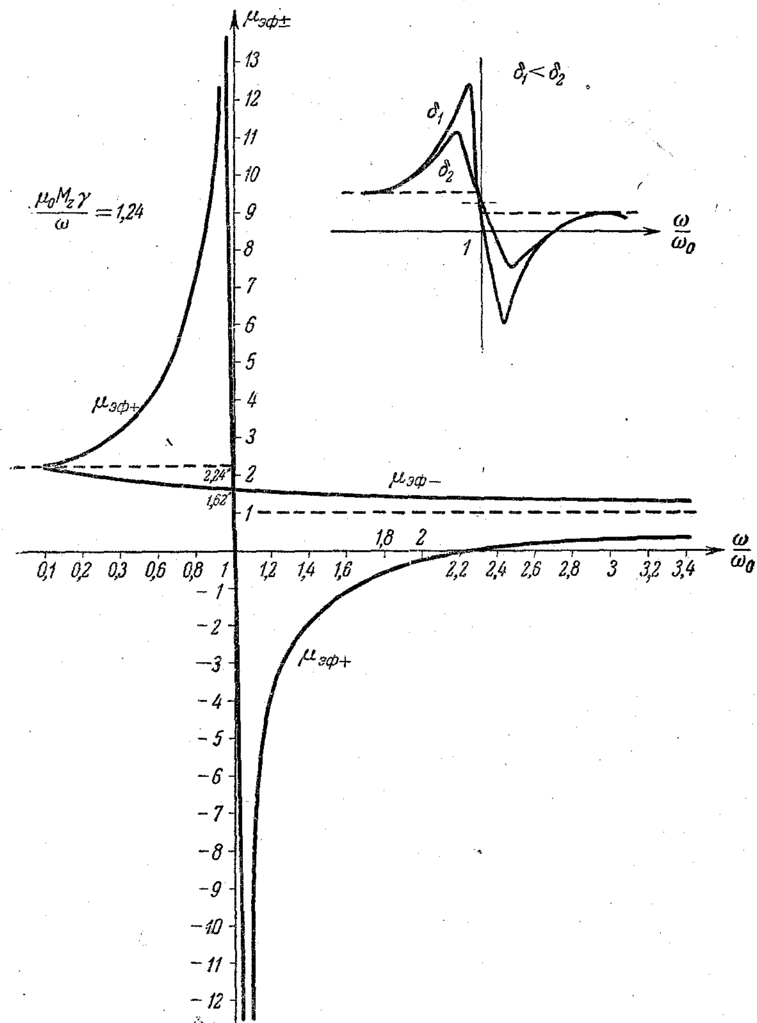


Рис. 5.

Как видно из таблицы, увеличение δ в сто раз влияет заметно на потери только в области ферромагнитного резонанса.

Как следует из формулы (II. 33), показатель преломления пропорционален корню из $\mu_{эфф}$. Графически эта зависимость показана на

Таблица III

$\frac{\omega}{\omega_0}$	$\mu_{эфф+}$				$\mu_{эфф-}$			
	$\frac{\mu_0 M_z \gamma}{\omega_0}=0,62$		$\frac{\mu_0 M_z \gamma}{\omega_0}=1,24$		$\frac{\mu_0 M_z \gamma}{\omega_0}=0,62$		$\frac{\mu_0 M_z \gamma}{\omega_0}=1,24$	
	$\delta=10^{-4}$	$\delta=10^{-2}$	$\delta=10^{-4}$	$\delta=10^{-2}$	$\delta=10^{-4}$	$\delta=10^{-2}$	$\delta=10^{-4}$	$\delta=10^{-2}$
0,1	1,69	1,69	2,38	2,38	1,56	1,56	2,13	2,13
0,6	2,55	2,55	4,1	4,1	1,39	1,38	1,775	1,775
0,8	4,1	4,1	7,2	7,2	1,34	1,34	1,69	1,69
0,95	13,4	12,96	25,8	24,9	1,32	1,32	1,64	1,64
0,98	32,0	25,95	63,0	50,9	1,313	1,313	1,63	1,63
1,0	1,31	1,31	1,62	1,62	1,31	1,31	1,62	1,62
1,02	−30,0	−23,8	−61	−48,6	1,307	1,307	1,61	1,61
1,05	−11,4	−10,9	−23,8	−22,8	1,302	1,303	1,605	1,605
1,1	− 5,2	− 5,13	−11,4	−11,3	1,295	1,295	1,59	1,59
1,5	− 0,24	− 0,24	− 1,48	− 1,48	1,248	1,248	1,50	1,50
3,0	0,69	0,38	0,38	0,38	1,555	1,155	1,31	1,31
10	0,931	0,931	0,86	0,86	1,06	1,06	1,11	1,11

рис. 6, причём по оси ординат отложена величина, пропорциональная показателю преломления. Объяснение хода кривых было уже нами дано при рассмотрении рис. 3. Добавим только, что поворот плоскости поляризации увеличивается с ростом $\frac{M_z}{\omega}$ (для данного

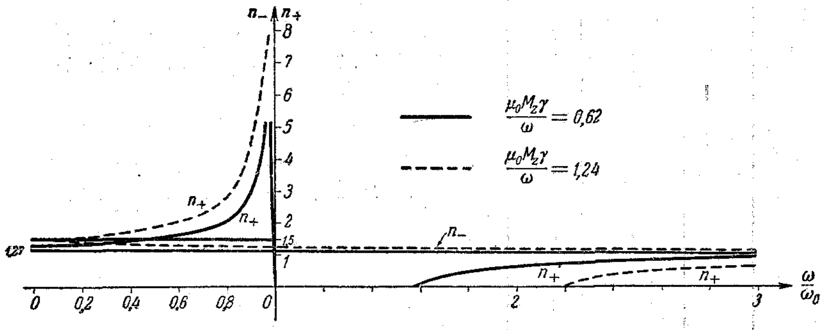


Рис. 6.

отношения $\frac{\omega}{\omega_0}$). Это легко видеть из рис. 6. Графики рис. 3, 4, 5, 6 дают возможность просто объяснить экспериментальные результаты, приведённые в работе Хогана[23].

4. Экспериментальные результаты

Магнитное вращение плоскости поляризации на сантиметровых волнах было исследовано для случая распространения волн в волноводе. Отметим, что для волноводов изложенная выше теория будет справедлива только приближённо. Однако исследование магнитного вращения плоскости поляризации для случая круглого волновода[25] показало, что формула для поворота плоскости поляризации отличается от той же формулы в случае свободного пространства лишь постоянным множителем, характеризующим тип волны в волноводе.

Схема испытательной камеры дана на рис. 7. Один из прямоугольных волноводов укреплён таким образом, что его можно поворачивать относительно продольной оси. Ферритовые цилиндры, подлежащие исследованию, помещаются в середине круглого волновода.

Кроме измерения поворота плоскости поляризации измерялись потери путём сравнения передаваемых мощностей при наличии и отсутствии ферритового цилиндра. Эллиптичность распространяющейся волны определялась путём сравнения мощностей, передаваемых в случаях, когда прямоугольный волновод со стороны детектора был повёрнут в положение максимальной и минимальной передачи.

На рис. 8 показана зависимость вращения плоскости поляризации волны от напряжённости приложенного магнитного поля для марганцево-цинкового феррита в виде тонкого диска.

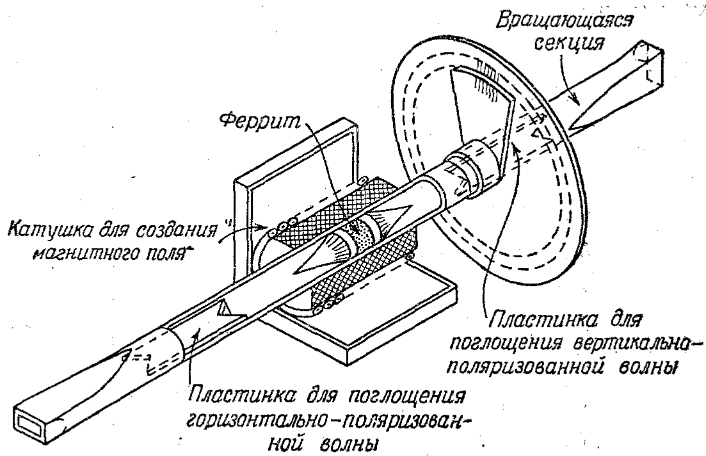


Рис. 7.

Значения постоянного магнитного поля таковы, что $\omega \gg \omega_0$ (см. рис. 6). Следовательно, в этом случае справедлива приближённая формула (I. 2г). Действительно, подставляя в (I. 2г) измеренные значения $\varepsilon' = 17\varepsilon_0$, $\varepsilon'' = 24\varepsilon_0$, $\mu_0 M_{z_{\text{нас}}} = 0{,}15 \frac{\text{вб}}{\text{м}^2}$, мы найдём $\frac{\psi}{l} = 121$ *град/см*, что полностью соответствует измеренным значениям угла поворота (123°).

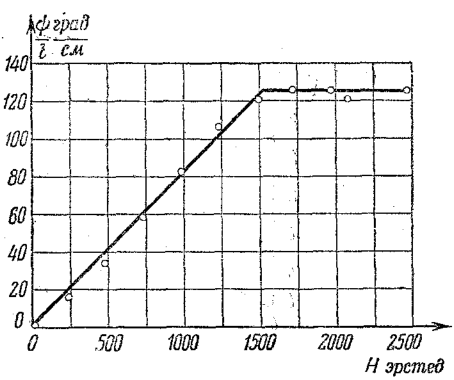


Рис. 8.

При дальнейшем увеличении магнитного поля кривая рис. 8 должна пойти вверх, так как мы будем приближаться к частоте ферромагнитного резонанса; это совпадает с теоретическими кривыми рис. 6. (Увеличение магнитного поля соответствует перемещению на рис. 6 в области значений $\frac{\omega}{\omega_0} \gg 1$ справа налево.) Действительно, кривые[26] рис. 9 подтверждают это предположение.

Формула (I. 2г) указывает также на независимость вращения от частоты. Кривая рис. 10 подтверждает это только частично, поскольку разность частот для двух измерений была взята очень малой (270 *Мгц*).

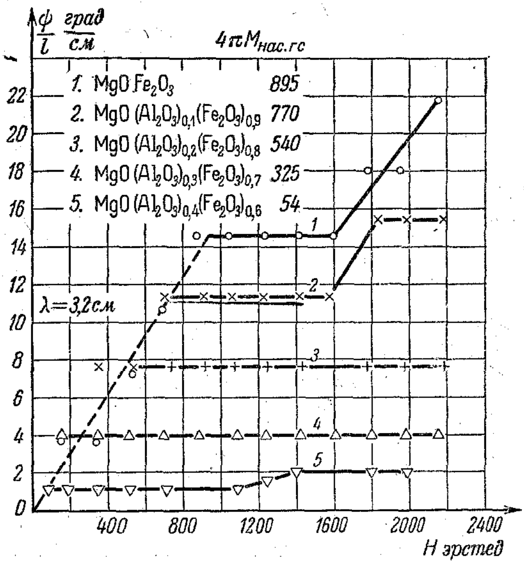


Рис. 9.

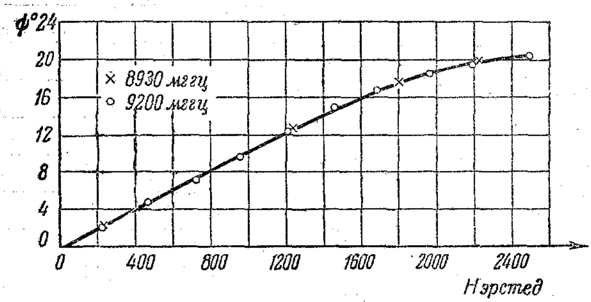


Рис. 10.

Затухание в феррите меняется в широких пределах в зависимости от материала. Для того же марганцево-цинкового феррита основные потери обусловлены комплексной диэлектрической проницаемостью. Только в области, близкой к ферромагнитному резонансу, магнитные потери резко возрастают за счёт поглощения праволяполяризованной волны. Эти магнитные потери можно учесть, если путём измерения эллиптичности распространяющейся волны вычислить разность между поглощениями право- и левополяризованных волн. Заметим, что эллиптичность волны, проходящей через феррит, обусловлена, главным образом, явлением ферромагнитного резонанса, т. е. неодинаковым поглощением двух волн, поляризованных по кругу в противоположных направлениях.

Результаты, полученные для марганцево-цинкового феррита таким способом, показаны на рис. 11. Этот график подтверждает

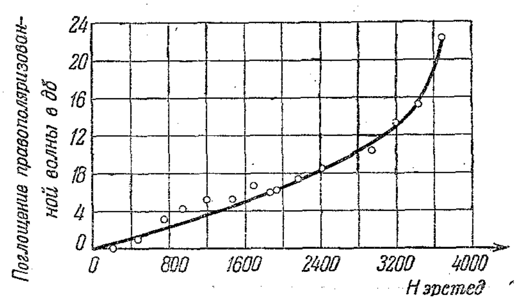


Рис. 11.

высказанное нами при рассмотрении кривой рис. 8 замечание о величине магнитного поля, соответствующего резонансной частоте.

При дальнейшем увеличении магнитного поля кривая рис. 11 будет следовать форме кривой резонансного поглощения.

Приведём ещё один график (рис. 12), относящийся к ферриту «Феррамик G» [23], который обладает очень малыми диэлектрическими потерями, но вызывает большое поглощение на частоте 9000 *Мгц* вследствие магнитных потерь. С чем связаны эти потери, можно определить экспериментально. Действительно, если потери связаны с релаксацией границ доменов, то они одинаково влияют на право- и левополяризованные волны. Если же потери связаны с ферромагнитным резонансом, то поглощается правополяризованная волна.

Рис. 12 иллюстрирует высказанное положение. При увеличении магнитного поля поглощение левополяризованной волны быстро падает и при насыщении оно исчезающе мало. Поглощение же правополяризованной волны сначала несколько падает, так как уменьшаются потери, связанные с релаксацией границ доменов, а затем поглощение быстро растёт; этот рост, очевидно, можно объяснить приближением к области ферромагнитного резонанса.

Ряд других экспериментальных данных [23], полученных для некоторых ферритов на частоте 9000 *Мгц*, приведён в таблице IV (см. стр. 230).

Таблица IV

Материал	Размеры в *см* (длина × диаметр)	Прилож. поле H_z в эрстедах	Вращение на 1 *см* пути в град.	Вносимые потери в *дб*	Эллиптичность в *дб*	Коэффициент стоячей волны на входе
Марганцево-цинковый феррит $Mn_\delta Zn_{1-\delta}Fe_2O_4$	0,447 × 2,28	0	0	10,0	50	—
		245	15,6	10,3	50	—
		490	33,5	10,0	23,2	—
		735	58,2	9,2	15,0	—
		980	81,6	9,1	12,1	—
		1225	107	9,2	10,9	—
		1470	120	10	10,4	—
		1715	125	11	9,3	—
		1960	123	11,2	9,0	—
		2206	121	11,3	7,7	—
		2450	123	11,4	6,6	—
		2695	—	12,4	5,0	—
		2940	—	13,0	3,7	—
		3185	—	—	3,0	—
		3675	—	—	1,4	—
$Ni_\delta Zn_{1-\delta}Fe_2O_4$	1,36 × 2,28	0	0	0,8	>40	—
		245	25	1,9	~40	—
		490	44	2,7	~40	—
		735	56	2,9	~40	—
		980	61	2,7	40	—
		1225	68	2,8		—
		1715	82	3,33		—
		1960	85	4,9		—
		2450	118	7,3	0,8	—
Феррамик A	2,54 × 0,635	0	0	1,1	>50	0,7
		245	34,9	0,8	>50	0,3
		490	43,7	0,8	>50	0,3
		735	48,3	0,8	>50	0,3
		980	51,1	1,0	>50	0,4
		1225	54,0	1,1	>50	—
		1715	57,0	1,1	>50	—
		1960	60,0	1,9	>50	0,4
		2450	63,0	3,0	35	—
		2695	24,2	3,7	—	—
Феррамик G	1,77 × 2,28	0	0	23,2	$\gg30$	—
		245	38	21,4	23,0	—
		490	77	16,7	7,6	—
		735	124	12,4	2,1	—
		980	157	9,9	1,4	—
		1225	170	7,7	0,7	—
		1470	180	6,0	0,7	—
		3430	с. р.	7,1	0,0	—

Основные выводы, которые можно сделать из данных таблицы, следующие:

1. Потери в ферритах, как правило, значительны. Минимальными потерями обладает материал «Феррамик А» (0,8 *дб*).

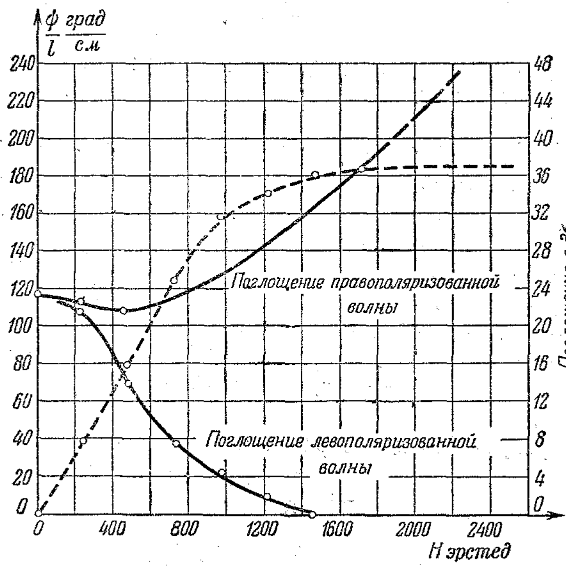


Рис. 12.

2. В области, не близкой к ферромагнитному резонансу, волна примерно линейно-поляризованная (эллиптичность велика).

3. Поворот плоскости поляризации во всех ферритах измеряется десятками градусов на сантиметр длины пути, т. е. достаточно велик.

4. В изложенных опытах, повидимому, не исследовалось влияние формы образца на потери. Вместе с тем следует ожидать, что это влияние будет значительным, поскольку от формы тела зависит частота ферромагнитного резонанса.

III. ВРАЩЕНИЕ ПЛОСКОСТИ ПОЛЯРИЗАЦИИ В ИСКУССТВЕННЫХ ДИЭЛЕКТРИКАХ

Если в каком-либо объёме разместить в определённом порядке металлические частицы, изолированные друг от друга, то этот объём, как известно, будет эквивалентен диэлектрику (размеры частиц и расстояние между ними должны быть много меньше длины волны). Подобно тому, как в обычном диэлектрике молекулы поляризуются под воздействием внешнего поля, т. е. приобретают электрический момент, в металлических частицах искусственного диэлектрика смещаются свободные электроны, что также приводит к появлению электрического момента у металлической частицы.

Формула, выражающая диэлектрическую проницаемость искусственного диэлектрика, та же, что и для обычного диэлектрика:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \alpha N, \tag{III. 1}$$

где α — поляризуемость частицы, т. е. отношение электрического момента $\mathbf{p}$ частицы к величине поля, создающего этот момент $\alpha = \frac{\mathbf{p}}{E}$, и N — число частиц в единице объёма. (Формула (III. 1) не учитывает взаимного влияния соседних частиц. Если этот учёт необходим, то надо воспользоваться известной формулой Лоренц-Лорентца [2].)

Например, в случае, когда частицами являются металлические диски радиуса $a \ll \lambda$, расположенные в плоскости электрического вектора, диэлектрическая проницаемость определяется формулой

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_0 \frac{16}{3} N a^3,$$

так как поляризуемость диска равна [27]:

$$\alpha = \frac{16}{3} \varepsilon_0 a^3. \tag{III. 2}$$

В случае металлических шариков [2] $\alpha = 4\pi a^3 \varepsilon_0$. Поляризация искусственного диэлектрика, т. е. электрический момент единицы объёма равен:

$$\mathbf{P} = N\mathbf{p} = N\alpha\mathbf{E}, \tag{III. 3}$$

а поляризационный ток:

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = \alpha N \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \tag{III. 4}$$

Предположим теперь, что в искусственном диэлектрике вдоль оси z распространяется волна, причём в направлении распространения приложено постоянное магнитное поле $\mathbf{B}_0$.

В этом случае, как известно, в металлических частицах будет наблюдаться эффект Холла, состоящий в том, что электроны, образующие поляризационный ток, под действием магнитного поля отклоняются к одному краю металлической частицы и накопляются там до тех пор, пока вызванное ими электрическое поле не уравновесит отклоняющего действия магнитного поля. Величина и направление этого поля определяются формулой

$$\mathbf{E}_H = R\,[\mathbf{B}_0 \mathbf{J}], \tag{III. 5}$$

где R — коэффициент Холла, зависящий от материала частицы. Соответственно, вектор электрической индукции изменится на величину

$$\mathbf{D}_H = \alpha N \mathbf{E}_H = \alpha N R\,[\mathbf{B}_0 \mathbf{J}] = \alpha^2 N^2 R \left[\mathbf{B}_0\,\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right]. \qquad \text{(III. 6)}$$

Результирующий вектор $\mathbf{D}$ будет равен:

$$\mathbf{D} = (\varepsilon_0 + \alpha N)\,\mathbf{E} + \mathbf{D}_H = (\varepsilon_0 + \alpha N)\,\mathbf{E} + \alpha^2 N^2 R \left[\mathbf{B}_0 \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right]. \qquad \text{(III. 7)}$$

Теперь остаётся решить уравнения Максвелла при условии, что $\mathbf{D}$ и $\mathbf{E}$ связаны формулой (III. 7).

Для простоты мы ограничимся рассмотрением случая $\mu = \mu_0$, т. е. случая, когда магнитные силовые линии распространяющейся волны не искажаются при прохождении через рассматриваемый искусственный диэлектрик. Для этого, очевидно, необходимо металлические элементы делать плоскими и располагать их перпендикулярно к направлению распространения волны.

Действительно, в этом случае магнитные силовые линии распространяющейся волны будут касательны к плоским металлическим элементам и не будут искажаться, так как граничные условия автоматически соблюдаются.

Принимая, следовательно, $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$, получим:

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu_0 (\varepsilon_0 + \alpha N) \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \mu_0 \alpha^2 N^2 R \left[\mathbf{B}_0\,\frac{\partial^3 \mathbf{E}}{\partial t^3}\right]. \qquad \text{(III. 8)}$$

Для рассматриваемого частного случая распространения вдоль оси z плоской волны в бесконечной среде уравнение (III. 8) примет вид:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = \frac{1+\rho}{c^2}\,\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + i\,\frac{\varepsilon_0 \rho^2 R B_0}{c^2}\,\frac{\partial^3 E}{\partial t^3}, \qquad \text{(III. 9)}$$

где

$$\rho = \frac{\alpha N}{\varepsilon_0};\; E = E_x + iE_y. \qquad \text{(III. 10)}$$

При гармонической зависимости от времени, т. е. при $E = Ee^{\pm i\omega t}$, получим:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + k^2_{\pm} E = 0, \qquad \text{(III. 11)}$$

где

$$k^2_{\pm} = \frac{\omega^2}{c^2}\left[1 + \rho \mp \omega \varepsilon_0 \rho^2 R B_0\right]. \qquad \text{(III. 12)}$$

Следовательно, общее решение уравнения (III. 9) будет иметь вид:

$$E = A\left[e^{i\omega\left(t - \frac{z}{v_+}\right)} + e^{-i\omega\left(t - \frac{z}{v_-}\right)}\right], \qquad \text{(III. 13)}$$

где согласно (III. 12)

$$\frac{1}{v_{\pm}^2}=\frac{k_{\pm}^2}{\omega^2}=\frac{1}{c^2}\left[1+\rho\mp\omega\varepsilon_0\rho^2RB_0\right]. \qquad \text{(III. 14)}$$

Уравнение (III. 13) описывает две волны, поляризованные по кругу в противоположных направлениях и распространяющиеся с разными фазовыми скоростями в положительном направлении оси z.

Это эквивалентно тому, что плоскость поляризации линейно-поляризованной волны, распространяющейся в такой среде, будет поворачиваться. Это сразу становится ясным, если переписать (III. 13) в несколько ином виде, выделив из экспоненциального множителя часть, не зависящую от времени. Тогда мы получим:

$$E=Ae^{i\frac{\omega z}{u}}\cos\omega\left(t-\frac{z}{v}\right), \qquad \text{(III. 15)}$$

где

$$\frac{1}{v}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{v_-}+\frac{1}{v_+}\right),\quad \frac{1}{u}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{v_-}-\frac{1}{v_+}\right). \qquad \text{(III. 16)}$$

Таким образом, с прохождением расстояния z плоскость поляризации волны поворачивается на угол:

$$\psi=\frac{\omega z}{u}=\frac{\omega z}{2}\left(\frac{1}{v_-}-\frac{1}{v_+}\right)=\frac{\omega}{2c}(n_--n_+)z. \qquad \text{III. (17)}$$

В области сантиметровых волн для применяемых на практике диэлектриков соблюдается условие:

$$\varepsilon_0\rho^2RB_0\omega\ll 1+\rho. \qquad \text{(III. 18)}$$

Тогда, разлагая (III. 14) в ряд и ограничиваясь первым членом ряда, получим:

$$\frac{1}{v_{\pm}}=\frac{1}{c}\sqrt{(1+\rho)\mp\omega\varepsilon_0\rho^2RB_0}\cong$$

$$\cong\frac{1}{c}\sqrt{1+\rho}\left(1\mp\frac{1}{2}\,\frac{\omega\varepsilon_0\rho^2RB_0}{1+\rho}\right). \qquad \text{(III. 19)}$$

В том же приближении:

$$\frac{1}{u}=\frac{\rho^2}{\sqrt{1+\rho}}\,\frac{\varepsilon_0RB_0\omega}{2c}$$

и, следовательно,

$$\psi=\frac{\omega z}{u}=\frac{\rho^2}{\sqrt{1+\rho}}\,\frac{\varepsilon_0RB_0\omega^2}{2c}. \qquad \text{(III. 20)}$$

Если угол вращения плоскости поляризации на единицу длины пути выразить в градусах, то последняя формула примет вид:

$$\frac{\psi}{z} = \frac{3RB_0}{\lambda^2} \frac{\rho^2}{\sqrt{1+\rho}} \frac{град}{м}. \tag{III.21}$$

Приведём ряд числовых данных [28].

Принимая $B_0 = 0{,}1 \frac{вб}{м^2}$ (1000 гаусс) и $\rho = \frac{\alpha N}{\varepsilon_0} = 8$, получим на волне $\lambda = 1$ *см*

$$\frac{\psi}{z} = 0{,}64 \cdot 10^5 R \frac{град}{м}.$$

Для хорошо проводящих металлов $\frac{\psi}{z} \sim 0{,}5 \cdot 10^{-5} \frac{град}{м}$, в то время как для германия типа N $\frac{\psi}{z} = 512 \frac{град}{м}$. Это объясняется тем, что у германия сопротивление примерно в 10^6 раз больше, вследствие чего постоянная Холла, которая обратно пропорциональна общему заряду электронов проводимости в единице объёма [1], у германия очень велика.

С другой стороны, большое сопротивление приводит к значительным потерям в металлических элементах. Таким образом заметное вращение плоскости поляризации у всех известных металлов связано со значительными потерями. Следует, однако, заметить, что сопротивление и постоянная Холла определяются различными факторами. Поэтому отношение постоянной Холла к удельному сопротивлению меняется в широких пределах для различных металлов. Для меди, например, оно порядка 0,003, а для висмута — 0,9. Это даёт некоторое основание предположить, что можно найти такой материал, который имел бы большую постоянную Холла и маленькое сопротивление.

IV. ВРАЩЕНИЕ ПЛОСКОСТИ ПОЛЯРИЗАЦИИ В ЭЛЕКТРОННОЙ ПЛАЗМЕ

1. Общая теория распространения волн в ионизованной среде при наличии постоянного магнитного поля

Мы используем здесь тот же метод исследования, что и при рассмотрении распространения волн в искусственном диэлектрике. Наша задача сведётся, следовательно, к решению уравнений Максвелла

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J} \end{aligned}\right\} \tag{IV.1}$$

при определённой связи $\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{E})$ в рассматриваемой среде, которую надо предварительно выяснить.

Предположим, что волна распространяется вдоль оси z, постоянное магнитное поле $\mathbf{B}_0$ параллельно плоскости yOz и составляет с осью z угол β (рис. 13), т. е.

$$B_{0z} = B_0 \cos\beta, \quad B_{0y} = B_0 \sin\beta. \qquad \text{(IV. 2)}$$

Магнитную проницаемость ионизованной среды можно принять равной μ_0.

Рассмотрим сначала случай разреженного ионизованного газа, когда средняя длина свободного пробега электрона настолько велика, что допустимо пренебречь потерями, т. е. положить $\sigma = 0$. При указанных условиях уравнения (IV. 1) примут вид:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(IV. 3)}$$

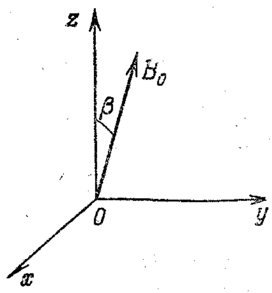


Рис. 13.

При гармонической зависимости $\mathbf{H}$ и $\mathbf{D}$ от времени получим:

$$\Delta \mathbf{E} + \omega^2 \mu_0 \mathbf{D} = 0 \qquad \text{(IV. 4)}$$

или

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + \omega^2 \mu_0 D_x &= 0, \\ \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} + \omega^2 \mu_0 D_y &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(IV. 5)}$$

Чтобы выразить $\mathbf{D}$ через $\mathbf{E}$, воспользуемся уравнением движения:

$$m\mathbf{r}'' = -e\mathbf{E} - e\,[\mathbf{r}'\mathbf{B}_0], \qquad \text{(IV. 6)}$$

где $\mathbf{r}$ — смещения электронов относительно исходных положений, m — масса, а e — заряд электрона; штрихи означают дифференцирование по времени. При этом мы пренебрегли напряжённостью магнитного поля распространяющейся волны, поскольку

$$\mu_0 \mathbf{H} \ll \mathbf{B}_0.$$

Умножая (6) на Ne, где N — число электронов в единице объёма, и учитывая, что электрический момент единицы объёма равен $\mathbf{P} = -eN\mathbf{r}$, имеем:

$$-\omega^2 \mathbf{P} = \frac{Ne^2}{m} \mathbf{E} - i \frac{\omega e}{m} [\mathbf{P}\mathbf{B}_0]. \qquad \text{(IV. 7)}$$

Принимая во внимание соотношение $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ и формулу (IV. 7), получим[29] искомую связь между $\mathbf{D}$ и $\mathbf{E}$:

$$\left.\begin{aligned} D_y &= \varepsilon_0 E_y + P_y = -i\varepsilon_0 Б E_x + \varepsilon_0 (1 + C) E_y, \\ D_x &= \varepsilon_0 E_x + P_x = \varepsilon_0 (1 + A) E_x + i\varepsilon_0 Б E_y, \\ D_z &= \varepsilon_0 E_z + P_z = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (IV.8)$$

Здесь

$$A = p\left(\omega^2 - \omega_0^2\right); \qquad Б = p\frac{\omega_z}{\omega}\left(\omega^2 - \omega_0^2\right);$$

$$C = p\left(\omega^2 - \omega_0^2 - \omega_x^2\right); \quad \omega_0^2 = \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m} = 3{,}22 \cdot 10^3 N;$$

$$\omega_z = \omega_{рез} \cdot \cos\beta = \frac{eB_{0z}}{m}; \quad \omega_y = \omega_{рез} \sin\beta = \frac{eB_{0y}}{m};$$

$$p = \frac{\omega_0^2}{\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)\left(\omega_z^2 - \omega^2\right) + \omega^2\omega_x^2} \quad \text{и} \quad \omega_{рез} = \frac{eB_0}{m}$$

($\omega_{рез}$ — частота гиромагнитного резонанса).

Подставляя найденную зависимость $\mathbf{D}$ от $\mathbf{E}$ из (IV. 8) в (IV. 5), получим:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} + \varepsilon_0\mu_0\omega^2 \left[-iБ E_x + (1 + C) E_y\right] = 0, \\ \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + \varepsilon_0\mu_0\omega^2 \left[(1 + A) E_x + iБ E_y\right] = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (IV.9)$$

Решение системы ищем в виде:

$$\left.\begin{aligned} E_x &= E_{mx} e^{-i\frac{\omega}{c}nz}, \\ E_y &= E_{my} e^{-i\frac{\omega}{c}nz}, \end{aligned}\right\} \qquad (IV.10)$$

где n—показатель преломления ионизованного газа. Подставляя (IV. 10) в (IV. 9), получим систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \left[1 + A - n^2\right] E_{mx} + iБ E_{my} = 0, \\ -iБ E_{mx} + \left[1 + C - n^2\right] E_{my} = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (IV.11)$$

которая будет иметь нетривиальные решения при условии

$$\begin{vmatrix} 1 + A - n^2 & iБ \\ -iБ & 1 + C - n^2 \end{vmatrix} = 0$$

или

$$n^4 - (2 + A + C) n^2 + (1 + A)(1 + C) - Б^2 = 0. \qquad (IV.12)$$

Решая это уравнение, получим выражение для показателя преломления ионизованного газа, на который наложено постоянное магнитное поле:

$$n_{\pm}^2 = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2 - \frac{\omega^2\omega_y^2}{2\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)} \mp \sqrt{\left[\frac{\omega^2\omega_y^2}{2\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)}\right]^2 + \omega_z^2\omega^2}}. \quad \text{(IV. 13)}$$

Поляризация волны будет характеризоваться отношением

$$\left(\frac{E_{mx}}{E_{my}}\right)_{\pm} = i\left[\frac{\omega_y^2\omega}{2\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)\omega_z} \pm \sqrt{\left[\frac{\omega_y^2\omega}{2\omega_z\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)}\right]^2 + 1}\right], \quad \text{(IV. 14)}$$

которое получается из формул (IV. 11).

Таким образом, мы получили решение, указывающее на то, что в рассматриваемой среде распространяются две эллиптически поляризованные (в противоположных направлениях) волны, причём скорости распространения этих волн различны.

Рассмотрим частные случаи формул (IV. 13) и (IV. 14):

а) Магнитное поле отсутствует ($B_0 = 0$; $\omega_y = \omega_z = 0$). В этом случае

$$n^2 = 1 - \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m\omega^2}, \quad \text{(IV. 13а)}$$

$$\left.\begin{aligned} D_x &= \varepsilon_0 n^2 E_x, \\ D_y &= \varepsilon_0 n^2 E_y, \end{aligned}\right\} \quad \text{(IV. 8а)}$$

т. е. среда изотропна ($\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_0 n^2$).

б) Продольное магнитное поле ($B_0 = B_{0z}$; $\omega_y = 0$; $\omega_z = \omega_{\text{рез}}$). Это как раз случай, когда распространяются две поляризованные по кругу волны, с разными скоростями. Действительно, из (IV. 14) имеем:

$$\left(\frac{E_x}{E_y}\right)_{\pm} = \pm i; \quad \text{(IV. 14а)}$$

$$n_{\pm}^2 = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega\left(\omega \mp \omega_z\right)}, \quad \text{(IV. 13б)}$$

где верхний знак соответствует правополяризованной волне, а нижний — левополяризованной волне. На рис. 14 показан приблизительный ход изменения квадратов показателей преломления для право- и левополяризованных волн.

Таким образом, если в рассматриваемой среде распространяется плоская волна, то плоскость поляризации волны будет поворачиваться.

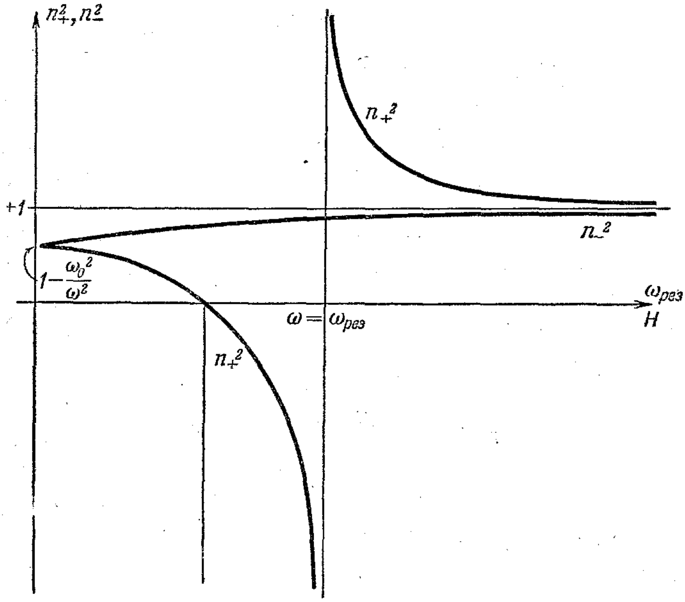

n_+^2, n_-^2
n_+^2
$+1$
n_-^2
$1-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}$
$\omega_{рез}$
H
$\omega = \omega_{рез}$
n_+^2

Рис. 14.

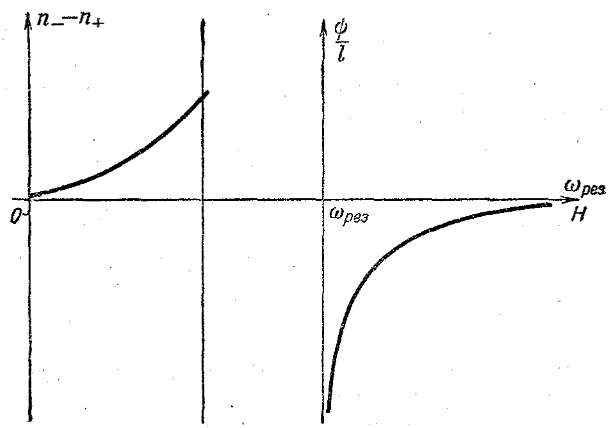

$n_- - n_+$
$\frac{\phi}{l}$
$\omega_{рез}$
H
0
$\omega_{рез}$

Рис. 15.

Поворот плоскости поляризации на единицу длины пути будет равен:

$$\frac{\psi}{l}=\frac{\omega}{2c}(n_{-}-n_{+}),$$

т. е.

$$\frac{\psi}{l}=\frac{\omega}{2c}\left[\sqrt{1-\frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m\omega}\,\frac{1}{\omega+\omega_{\text{рез}}}}-\right.$$

$$\left.-\sqrt{1-\frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m\omega}\,\frac{1}{\omega-\omega_{\text{рез}}}}\right]. \qquad \text{(IV. 15)}$$

Это и есть окончательная расчётная формула. Зависимость поворота плоскости поляризации волны от $\frac{\omega}{\omega_{\text{рез}}}$ показана на рис. 15.

в) Поперечное магнитное поле ($\mathbf{B}_0=B_{0y},\ \omega_z=0$).

Это — случай двойного лучепреломления

$$\left.\begin{aligned}&\left(\frac{E_{mx}}{E_{my}}\right)_{+}=\infty, \quad \text{т. е. } E_1=E_{mx},\\ &\left(\frac{E_{mx}}{E_{my}}\right)_{-}=0, \quad \text{т. е. } E_2=E_{my}.\end{aligned}\right\} \qquad \text{(IV. 14б)}$$

Показатели преломления для этих двух линейно-поляризованных волн равны:

$$\left.\begin{aligned}&n_{+}^2=1-\frac{\omega_0^2}{\omega^2-\dfrac{\omega^2\omega_y^2}{\omega^2-\omega_0^2}},\\ &n_{-}^2=1-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}=1-\frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m\omega^2}.\end{aligned}\right\} \qquad \text{(IV. 13в)}$$

Таким образом волна, соответствующая знаку минус, не испытывает влияния магнитного поля. Происходит это потому, что указанная волна имеет составляющую электрического поля E_y, совпадающую с направлением постоянного магнитного поля.

Под действием поля волны электрон движется также в направлении оси y, т. е. в направлении постоянного магнитного поля и вследствие этого не испытывает его действия. Таким образом, фазовая скорость указанной волны не зависит от постоянного магнитного поля. Эту волну в оптике называют «обыкновенной». Другая волна — «необыкновенная», распространяется с фазовой скоростью, зависящей от внешнего поля, и имеет составляющую вдоль направления распространения, т. е. не является поперечной.

Таковы явления, происходящие при распространении волн в ионизованной среде при наличии постоянного магнитного поля. Напомним, что мы пренебрегли потерями, обусловленными столкновениями электронов с молекулами и ионами. Если учесть их, то в исходном уравнении (IV. 4) вместо $\mathbf{D}$ надо писать $\left(\mathbf{D}-i\frac{\mathbf{I}}{\omega}\right)$, а в уравнение движения (IV. 6) ввести член, пропорциональный скорости электрона $\mathbf{r}'$.

Если считать, что ν есть среднее число столкновений, неиспытываемое каждым электроном с нейтральными молекулами в одну секунду, и что при каждом столкновении электрон передаёт накопленное количество движения молекуле, то общее изменение количества движения за секунду будет определяться членом $\nu m\mathbf{r}'$.

Это выражение и надо добавить в левую часть уравнения (IV. 6). Точное значение ν может быть определено лишь в результате газокинетического рассмотрения. Очевидно, однако, что ν пропорционально числу молекул в единице объёма, радиусу молекулы и средней скорости электронов $\overline{v}$.

Мы приведём окончательные формулы лишь для интересующего нас случая продольного магнитного поля[30]:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_{\pm} &= n_{\pm}^2-\frac{c^2}{\omega^2}\beta_{\pm}^2=1-\frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m\omega}\,\frac{\omega\mp\omega_{\text{рез}}}{(\omega\mp\omega_{\text{рез}})^2+\nu^2},\\ \frac{\sigma_{\pm}}{\omega} &= 2n_{\pm}\frac{c}{\omega}\beta_{\pm}=\frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m\omega}\,\frac{\nu}{(\omega\mp\omega_{\text{рез}})^2+\nu^2}, \end{aligned}\right\} \qquad (IV.16)$$

где $\beta_{\pm}$ — показатель затухания, так как распространяющаяся в направлении оси z волна содержит множитель вида

$$e^{i[\omega t-(\alpha_{\pm}-i\beta_{\pm})z]}=e^{-\beta_{\pm}z}e^{i(\omega t-\alpha_{\pm}z)}.$$

Из (IV. 16) мы найдём, что

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{\pm} &= \frac{\omega}{c}n_{\pm}=\frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{\varepsilon_{\pm}}{2}\left[\sqrt{1+\left(\frac{\sigma_{\pm}}{\omega\varepsilon_{\pm}}\right)^2}+1\right]},\\ \beta_{\pm} &= \frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{\varepsilon_{\pm}}{2}\left[\sqrt{1+\left(\frac{\sigma_{\pm}}{\omega\varepsilon_{\pm}}\right)^2}-1\right]}, \end{aligned}\right\} \qquad (IV.17)$$

где $\varepsilon_{\pm}$ и $\sigma_{\pm}$ даются формулами (IV. 16).

2. Расчёт некоторых случаев

Чтобы получить общее представление о том, какие углы поворота плоскости поляризации и какие потери следует ожидать в практически осуществимых условиях, мы просчитали несколько вариантов, соответствующих типичным режимам в плазме.

Полученные результаты сведены в приводимые ниже таблицы V, VI и VII. Расчёт проводился для различных ω_0 (собственная частота колебаний в плазме) при двух значениях ν.

$\omega_{рез}$	H в эрстедах	$\omega_0 = 2\cdot10^9$, $\nu = 4\cdot10^9$				
		α_+	α_-	$\alpha_- - \alpha_+$	β_+	β_-
0	0	11237°15′	11237°15′	0°	0,0077	0,0077
$2\cdot10^{10}$	1137	11233°53′	11238°23′	4°30′	0,0175	0,0043
$4\cdot10^{10}$	2270	11224°53′	11239°30′	14°37′	0,0718	0,0027
$5\cdot10^{10}$	2848	11208°2′	11240°38′	38°36′	0,2824	0,0023
$5,5\cdot10^{10}$	3185	11195°46′	11240°38′	44°52′	0,8637	0,0021
$5,8874\cdot10^{10}$	3350	11244°24′	11240°38′	— 3°46′	1,6668	0,00192
$6\cdot10^{10}$	3415	11269°05′	11240°38′	—28°27′	1,5408	0,00189
$6,5\cdot10^{10}$	3700	11287°53′	11240°38′	—47°15′	0,4962	0,0017
$7\cdot10^{10}$	3980	11274°22′	11240°38′	—33°44′	0,1903	0,0016
$8\cdot10^{10}$	4550	11260°52′	11240°38′	—20°14′	0,0576	0,0014
$10\cdot10^{10}$	5680	11253°00′	11241°45′	—11°15′	0,0156	0,001

$\omega_{рез}$	H в эрстедах	$\omega_0 = 6\cdot10^{10}$, $\nu = 4\cdot10^9$				
		α_+	α_-	$\alpha_- - \alpha_+$	β_+	β_-
0	0	2661°27′ i	2661°27′ i	0°	29,14 i	29,14 i
$2\cdot10^{10}$	1137	8470°6′ i	5370°8′	—	20,86 i	8,06
$4\cdot10^{10}$	2270	16490°27′ i	6957°40′	—	43,98 i	3,93
$5\cdot10^{10}$	2848	25284°23′ i	7451°21′	—	112,6 i	3,05
$5,5\cdot10^{10}$	3185	32732°24′ i	7657°10′	—	265,9 i	2,67
$5,8874\cdot10^{10}$	3350	32119°37′	7801°5′	—24318°32′	525,11	2,36
$6\cdot10^{10}$	3415	35558°2′	7842°41′	—27715°21′	439,43	2,37
$6,5\cdot10^{10}$	3700	32982°2′	8005°44′	—24976°18′	152,83	2,21
$7\cdot10^{10}$	3980	27528°41′	8155°16′	—19373°25′	10,10	2,01
$8\cdot10^{10}$	4550	21955°2′	8413°53′	—13541°9′	26,61	1,47
$10\cdot10^{10}$	5680	17702°33′	8820°55′	— 8881°38′	14,96	1,09

Таблица V

$\omega_0 = 2\cdot10^9,\ \nu = 4\cdot10^7$				
α_+	α_-	$\alpha_- - \alpha_+$	β_+	β_-
11237°15′	11237°15′	0°	0,00008	$0{,}77\cdot10^{-4}$
11233°53′	11238°23′	4°30′	0,00018	$0{,}43\cdot10^{-4}$
11223°46′	11239°30′	15°44′	0,00075	$-0{,}27\cdot10^{-4}$
11200°9′	11239°30′	39°21′	0,0034	$0{,}23\cdot10^{-4}$
11145°3′	11239°30′	95°27′	0,0179	$0{,}21\cdot10^{-4}$
15299°9′	11239°30′	4059°39′	166,675	$0{,}19\cdot10^{-4}$
11577°57′	11239°30′	—338°27′	0,2040	$0{,}19\cdot10^{-4}$
11305°51′	11240°38′	— 65°13′	0,0071	$0{,}17\cdot10^{-4}$
11277°44′	11240°38′	— 37°6′	0,0022	$0{,}16\cdot10^{-4}$
11261°59′	11240°38′	— 21°21′	0,0006	$0{,}14\cdot10^{-4}$
11253°00′	11240°38′	— 12°22′	0,0002	$0{,}1057\cdot10^{-4}$

Таблица VI

$\omega_0 = 6\cdot10^{10},\ \nu = 4\cdot10^7$				
α_+	α_-	$\alpha_- - \alpha_+$	β_+	β_-
2217°19′ i	2217°24′ i	0°	0,35 i	—0,35 i
8508°20′ i	5328°32′	—	0,21 i	0,081
16826°39′ i	6947°40′	—	0,45 i	0,040
27290°19′ i	7444°39′	—	1,26 i	0,031
43229°48′ i	7650°25′	—	4,16 i	0,027
310962°56′	7795°28′	303167°28′	5423,79	0,025
83563°10′	7834°49′	—75728°21′	25,43	0,024
37260°22′	8001°14′	—29259°8′	1,93	0,022
28657°35′	8150°47′	—20506°48′	0,76	0,020
22187°47′	8411°38′	—13776°9′	0,27	0,017
17732°55′	8818°40′	— 8914°15′	0,09	0,012

Таблица VII

$\omega_{рез}$	H в эрстедах	$\omega_0 = 3\cdot 10^{10}$ $\nu = 4\cdot 10^7$				
		α_+	α_-	$\alpha_- - \alpha_+$	β_+	β_-
0	0	9674°20′	9674°20′	0°	0,020	0,020
$2\cdot 10^{10}$	1137	8759° 5′	10 095°59′	1336°54′	0,051	0,011
$3\cdot 10^{10}$	1710	7714°31′	10 170°12′	2455°41′	0,105	0,0084
$4\cdot 10^{10}$	2270	4902°26′	10 339°51′	5437°25′	0,39	0,0066
$5\cdot 10^{10}$	2848	9558°40′ i	10 424°19′	—	—0,90 i	0,0055
$5,5\cdot 10^{10}$	3185	19 297°25′ i	10 461°25′	—	—2,33 i	0,0050
$5,8874\cdot 10^{10}$	3350	—	10 487°16′	—	—	0,0046
$6\cdot 10^{10}$	3415	42 900°36′	10 496°16′	—32 404°20′	12,39	0,0046
$6,5\cdot 10^{10}$	3700	21 021°50′	10 527°45′	—10 494° 5′	0,86	0,0042
$7\cdot 10^{10}$	3980	17 324°46′	10 555°52′	— 6768°54′	0,31	0,0038
$8\cdot 10^{10}$	4550	14 761°71′	10 606°28′	— 4154°39′	0,10	0,0033
$10\cdot 10^{10}$	5680	13 168°58′	10 689°40′	— 2479°18′	0,03	0,0025

Таблицы подтверждают резонансный характер поглощения право-поляризованной волны (β_+) и поворота плоскости поляризации ($\alpha_- - \alpha_+$). Максимальные значения β_+ и ($\alpha_- - \alpha_+$) соответствуют резонансной частоте ($\omega = \omega_{рез}$). Из таблиц следует также, что поворот плоскости поляризации растёт с увеличением ω_0. Это понятно, поскольку ω_0 пропорционально концентрации электронов. При этом, однако, возрастают потери (величина $\beta_\pm$). При больших концентрациях электронов существуют области значений внешнего магнитного поля, при которых показатель преломления становится мнимым. Это означает, что процесс распространения волны прекращается и волна проникает в плазму лишь на небольшую глубину.

Наибольший практический интерес представляет случай, соответствующий таблице V. Из этой таблицы следует, что в полях порядка 1000 эрстед угол поворота плоскости поляризации волны измеряется тысячами градусов при потерях 10—15% по мощности. Следовательно, требуемые повороты плоскости поляризации волны ($45^\circ \div 90^\circ$) можно осуществить при потерях, не превышающих 1% по мощности.

На рис. 16 показаны зависимости поворота плоскости поляризации волны и потерь от внешнего магнитного поля в области слабых полей. График позволяет более подробно проследить характер изменения величин ($\alpha_- - \alpha_+$) и $\beta_\pm$ при различных концентрациях электронов (ω_0).

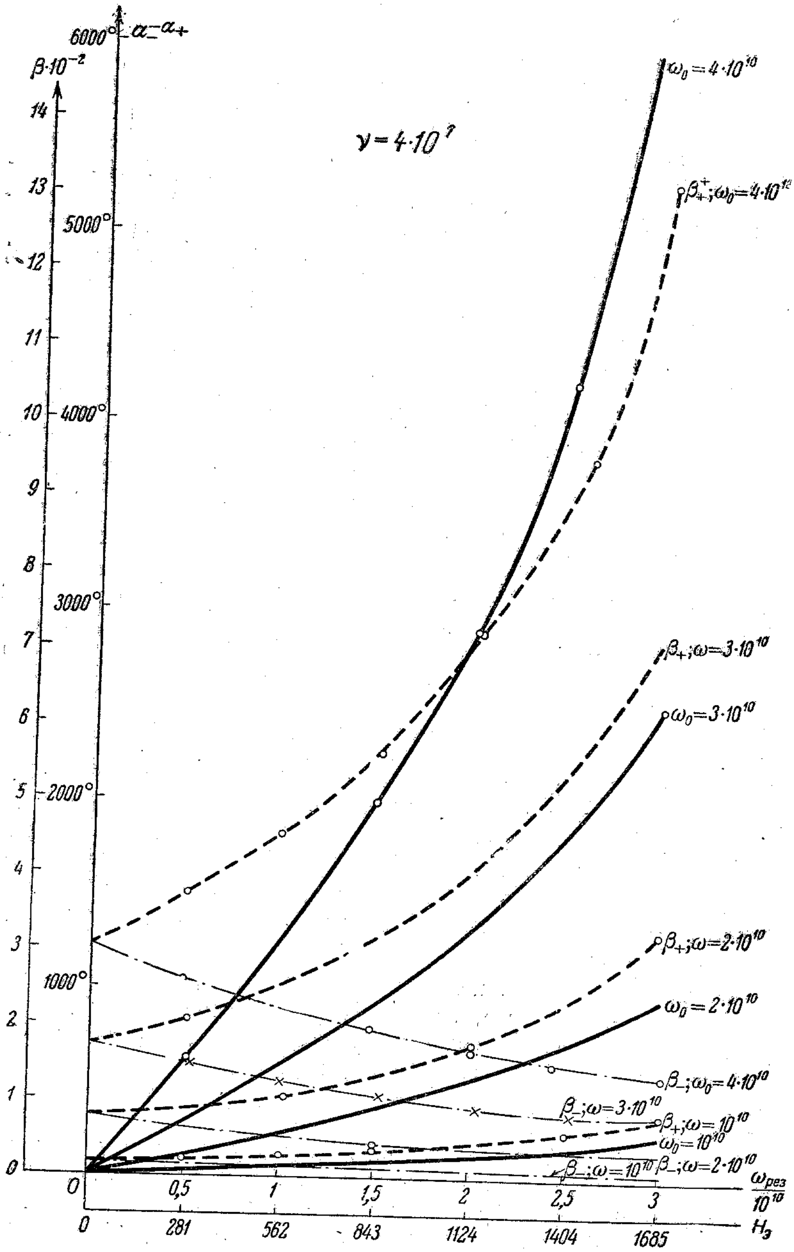
3. Экспериментальные результаты

Воспроизведём коротко основные экспериментальные результаты[31, 32], касающиеся вращения плоскости поляризации волны при её распространении в электронном газе, к которому приложено постоянное магнитное поле. Постановка эксперимента приблизительно та же, что была описана выше, в разделе о ферритах, с той лишь разницей, что частота колебаний теперь меняется в пределах 4600—5500 *Мгц*.

Электронный газ был получен при помощи разряда на постоянном токе в инертном газе, находящемся под определённым давлением. Отрезок круглого волновода с волной H_{11}, в котором находился газ, помещался в соленоид, создающий продольное магнитное поле (рис. 17). Экспериментальные результаты сводятся к следующему:

1. По мере приближения к гиромагнитному резонансу угол вращения плоскости поляризации возрастает. Поляризация волны становится эллиптической, а при резонансе — круговой.

2. По обе стороны от частоты гиромагнитного резонанса вращение плоскости поляризации имеет разные знаки.


$\beta \cdot 10^{-2}$
$\alpha_- - \alpha_+$
$\gamma = 4 \cdot 10^7$
$\omega_0 = 4 \cdot 10^{10}$
$\beta_+^+; \omega_0 = 4 \cdot 10^{10}$
$\beta_+; \omega = 3 \cdot 10^{10}$
$\omega_0 = 3 \cdot 10^{10}$
$\beta_+; \omega = 2 \cdot 10^{10}$
$\omega_0 = 2 \cdot 10^{10}$
$\beta_-; \omega_0 = 4 \cdot 10^{10}$
$\beta_-; \omega = 3 \cdot 10^{10}$
$\beta_+; \omega = 10^{10}$
$\omega_0 = 10^{10}$
$\beta_-; \omega = 10^{10}$
$\beta_-; \omega = 2 \cdot 10^{10}$
$\frac{\omega_{рез}}{10^{10}}$
$H_э$
6000°
5000°
4000°
3000°
2000°
1000°
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14
0 0,5 1 1,5 2 2,5 3
0 281 562 843 1124 1404 1685

На рис. 18 показана зависимость вращения плоскости поляризации от величины магнитного поля для газа Ne + 1% A при давлении 1 *мм* рт. ст. Частота колебаний равнялась 5500 *Мгц*. Длительность разрядного импульса равнялась 5 *мксек*, после чего прикладывался импульс высокой частоты длительностью 50 *мксек*. Амплитуда разрядного импульса была равна 1050 *в* при токе 135 *ма*.

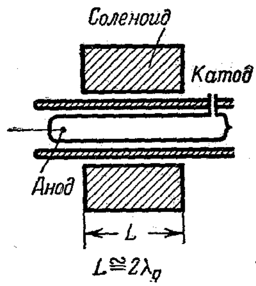


Рис. 17.

Объяснение результатов эксперимента легко получить, если разложить волну H_{11} на две волны, поляризованные по кругу в противоположных направлениях. Мы это уже делали выше, поэтому ограничимся ссылкой на главу I. Надо заметить, что ход кривых рис. 18 полностью совпадает с теоретической кривой, приблизительный ход которой мы показали на рис. 15. Измерения при использовании прямоугольного волновода показали, что ширина линии поглощения увеличивается с давлением и не зависит от природы газа[32].

Что касается зависимости вносимых потерь энергии от величины магнитного поля, то она, как уже указывалось выше, имеет форму

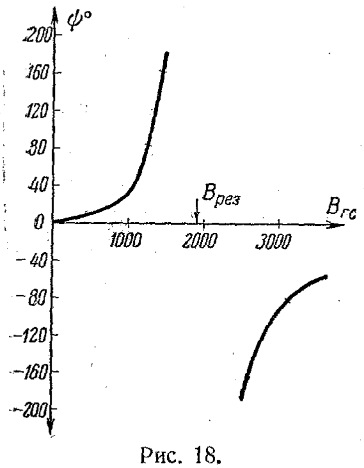


Рис. 18.

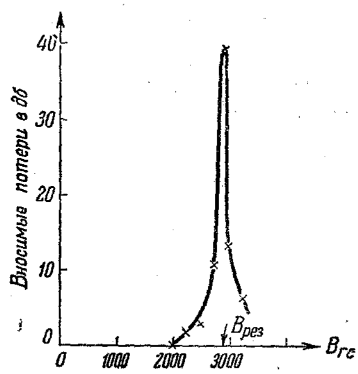


Рис. 19.

резонансной кривой. Для того же газа, но при давлении 0,1 *мм* рт. ст. кривая зависимости вносимых потерь энергии от приложенного поля показана на рис. 19.

Частота колебаний равнялась 8200 *Мгц*. Измерения проводились в прямоугольном волноводе, в котором мог распространяться только один тип волны (H_{10}).

V. ПРИМЕНЕНИЕ МАГНИТНОГО ВРАЩЕНИЯ ПЛОСКОСТИ ПОЛЯРИЗАЦИИ НА САНТИМЕТРОВЫХ ВОЛНАХ

Интерес, который представляет явление магнитного вращения плоскости поляризации для техники сантиметровых волн, обусловлен тем, что устройства, использующие это явление, нарушают принцип обратимости. Мы опишем некоторые из этих устройств, представляющих наибольший интерес.

Элемент, в котором происходит поворот плоскости поляризации независимо от его устройства, условимся называть «вращающим элементом» и будем изображать его так, как показано на рис. 20, который надо понимать следующим образом: если силовые линии магнитного поля идут слева направо (рис. 20,*а*) (т. е. в направлении стрелки), то плоскость поляризации волны поворачивается по часовой стрелке (относительно направления магнитного поля) на угол $\psi°$. На рис. 20,*б* показано обозначение для случая, когда поворот плоскости поляризации происходит в противоположном направлении.

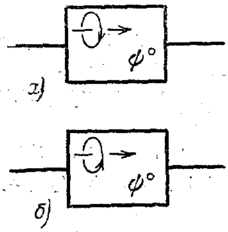


Рис. 20.

Рис. 21.

1. Гиратор. Гиратор[33] можно определить, как пассивный четырёхполюсник, в котором (рис. 21):

$$U_1 = AI_2, \quad U_2 = -AI_1. \tag{1}$$

Это означает, что разность фаз между волнами, проходящими гиратор в противоположных направлениях, составляет 180°. Как осуще-

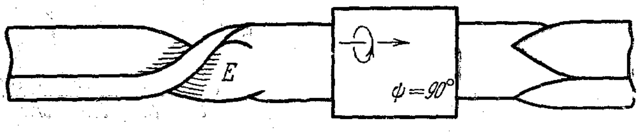


Рис. 22.

ствить гиратор практически, показано на рис. 22. При распространении волны справа налево поля находятся в фазе, в то время как при распространении в противоположном направлении сдвиг фаз равен 180°. Обозначение гиратора показано на рис. 23.

Возможность создания гиратора в электроакустике была рассмотрена в книге В. В. Фурдуева[33], где было также показано, что с помощью гиратора возможно создание линейных четырёхполюсников, не удовлетворяющих принципу взаимности. С другой стороны, известно, что построение четырёхполюсников основывается на существовании четырёх элементов: ёмкости, индуктивности, сопротивления и идеального трансформатора. Очевидно, что пятый элемент — гиратор, дал бы возможность добиться значительно лучших решений многих проблем четырёхполюсников.

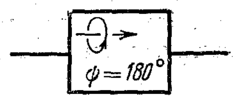


Рис. 23.

В частности, Теллегеном[34] было показано, что построение пассивных четырёхполюсников значительно упрощается в случае введения гиратора. Именно, уменьшается число элементов, необходимых для построения четырёхполюсника по заданным его характеристикам. Кроме того, гиратор позволяет разделить четырёхполюсник порядка n (число независимых элементов такого четырёхполюсника равно $2n+1$) на 2 четырёхполюсника порядка $n-2$ и 2. Вопросами применения гиратора занимались также Макмиллан[35] и Майлз[36]. Последний показал, что с помощью гиратора можно было бы сконструировать схему, эквивалентную схеме лампового усилителя класса A.

Хотя усиление мощности в такой схеме не превышает единицы, её применение в некоторых случаях может иметь смысл.

2. Вентиль — передающая система одностороннего действия. Если прямоугольные волноводы, расположенные по обе стороны круглого волновода, в котором находится «вращающий элемент», образуют угол 45°, то волна сможет распространяться только в одном направлении. Это схематически поясняется рисунком 24. Рис. 24, *а* показывает, что волна из прямоугольного волновода попадает в круглый. До вращающего элемента поляризация волны не меняется (рис. 24, *б*), вращающий элемент поворачивает плоскость поляризации на 45° (рис. 24, *в*) и с такой поляризацией волна попадает в прямоугольный волновод, который повёрнут на 45° относительно первого (рис. 24, *г*).

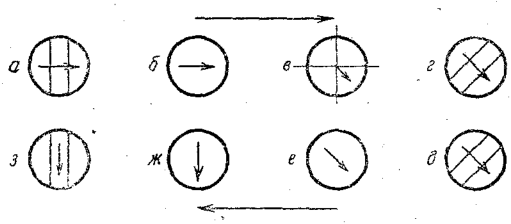


Рис. 24.

При распространении в противоположном направлении, как видно из рис. 24, *д*—*з*, волна придёт с такой поляризацией, что не сможет распространяться в первом волноводе. Однако, если её не поглотить, она, очевидно, будет отражаться. Отразившись, волна снова пойдёт слева направо (рис. 25, *а*—*г*), дойдёт до второго волновода, снова отразится и, придя к первому волноводу (рис. 25,*д*—*з*), будет иметь такую поляризацию, что сможет распространяться в нём. Не останавливаясь на описании конкретных схем, основанных на использовании вентиля, укажем, что применение этого элемента даёт возможность просто решить целый ряд сложных вопросов в технике сантиметровых волн.

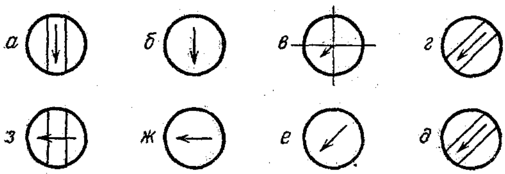


Рис. 25.

Другие возможные применения вращающего элемента основаны на том, что величину поворота плоскости поляризации можно регулировать путём изменения напряжённости магнитного поля. На этом принципе возможно создание волноводных антенных переключателей, аттенюаторов [38, 39] и других устройств.

Наконец, укажем ещё на возможность создания регулируемых во времени фазовращателей для волн, поляризованных по кругу. Это основано на отмеченной выше зависимости фазовой скорости поляризованной по кругу волны, распространяющейся во вращающем элементе, от величины продольного магнитного поля.

В случае линейно-поляризованных волн для этой цели, очевидно, следует использовать зависимость фазовой скорости «необыкновенной» волны от величины поперечного магнитного поля (см. формулы (II. 19а) и (IV. 13в)).

Автор выражает глубокую признательность чл.-корр. АН СССР А. А. Пистолькорсу за руководство работой.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Р. Беккер, Теория электричества, т. II, Гостехиздат, 1941.
2. И. Е. Тамм, Основы теории электричества. Гостехиздат, 1946.
3. Wilson and Hull, Phys. Rev. **74**, № 6, 71 (1948).
4. Hull и др., Phys. Rev. **82**, № 2, 341 (1951).
5. Lacrois и др., Helv. Phys. Acta **23**, № 5, 537 (1950).
6. Ryter и др., Helv. Phys. Acta **23**, № 5, 539 (1950).
7. Guicherd, Comptes Rendus **231**, № 25, 1460 (1950).
8. Я. Г. Дорфман, Изв. АН СССР, сер. физ. **16**, № 4, 412 (1952).
9. С. В. Вонсовский, Современное учение о магнетизме, Гостехиздат, 1952.

10. Сборник «Ферромагнитный резонанс» под. ред. С. В. Вонсовского, 1952.
11. В. К. Аркадьев, ЖРФХО, сер. физ. **44**, 4, 165 (1912).
12. В. К. Аркадьев, ЖРФХО, сер. физ. **45**, 312 (1913).
13. Я. Г. Дорфман, Zeits. f. Phys. **17**, 98 (1923).
14. А. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Phys. Zeits. Sow. Un. **8**, 153 (1935).
15. Kittel, Phys. Rev. **71**, № 4, 270 (1947).
16. Kittel, Phys. Rev. **73**, № 2, 155 (1948).
17. Kittel, J. phys. et rad. **12**, 291 (1951).
18. Я. И. Френкель, Электродинамика, II, 1935.
19. Bickford, Phys. Rev. **78**, 449 (1950).
20. Jager и др., Phys. Rev. **80**, 744 (1950).
21. В. Н. Лазукин, Изв. АН СССР, сер. физ. т. XIV, № 4, 510 (1952).
22. Van Vleck, Phys. Rev. **78**, № 3 (1950).
23. Hogan, Bell. Syst. Tech. Journ., январь (1952).
24. Polder, Phil. Mag. **40**, 99 (1949).
25. Sul and Walker, Phys. Rev. **86**, № 1, 122 (1952).
26. Roberts, J. phys et rad. **12**, 305 (1952).
27. А. З. Фрадин, Антенны С. В. Ч. Ленинград, 1950.
28. Wicher, J. Appl. Phys. **22**, № 11, 1327 (1951).
29. М. П. Долуханов, Распространение радиоволн, Москва, 1951.
30. В. Л. Гинзбург, Теория распространения радиоволн в ионосфере, Гостехиздат, 1949.
31. Goldstein и др., Phys. Rev. **82**, № 6, 956 (1951).
32. Goldstein и др., Phys. Rev. **83**, № 6, 1255 (1951).
33. В. В. Фурдуев, Теоремы взаимности, Гостехиздат, 1948.
34. Tellegen, Philips Res. Rep. **3**, 81, 321 (1948); **4**, 31, 366 (1949).
35. McMillan, J. Acous. Soc. of Am. **19**, 922 (1947).
36. Miles. J. Acous. Soc. of Am. **19**, 910 (1947).
37. Reggia, Tele.-Tech. сентябрь, 60 (1951).
38. Miller, J. Appl. Phys. **20**, 878 (1949).