1952 г. Август *Т. XLVII, вып. 4*

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

ЗОННАЯ ПЛАСТИНКА

С. М. Райский

Зонная пластинка в продолжение восьмидесяти лет привлекает к себе внимание физиков. Объясняется это отчасти тем, что теория зонной пластинки тесно связана с общими вопросами распространения волн.

Не меньшее значение имеет также то обстоятельство, что фокусирующие и диспергирующие свойства зонной пластинки служат эффектной иллюстрацией законов диффракции и интерференции[1].

Расчёт зонной пластинки, как известно, проводится по следующей схеме.

Поместим между источником и наблюдателем поверхность произвольной формы. Создадим на этой поверхности прозрачные и непрозрачные зоны. Границы прозрачных зон выберем так, чтобы для точек, расположенных внутри этих зон, суммы расстояний до источника и наблюдателя отличались между собой на целое число длин волн, с точностью до $\pm\lambda/4$. Тогда в точке наблюдения получится яркое изображение источника, так как в этом случае, согласно принципу Гюйгенса-Френеля, имеет место сложение амплитуд колебаний, созданных действующими участками фронта падающей волны.

Топография зон Френеля на выбранной поверхности зависит от её формы и от положения поверхности относительно источника и наблюдателя.

Что касается формы зонной пластинки, то, насколько нам известно, в опубликованных к настоящему времени исследованиях рассматриваются лишь плоские пластинки, работающие в проходящих волнах.

Теория плоской зонной пластинки и характеристика современных образцов таких пластинок изложены в первой части настоящей статьи. Эта часть является рефератом недавно опубликованной работы[2].

Во второй части статьи приведены неопубликованные ранее результаты нашей работы, относящейся к сферической зонной пластинке, работающей в отражённом и проходящем свете, в сочетании с зеркалом или линзой.

I. ЗОННЫЕ ПЛАСТИНКИ, РАБОТАЮЩИЕ В ПРОХОДЯЩЕМ СВЕТЕ

1. Оптические свойства зонной пластинки

Если для некоторой точки P, лежащей на главной оптической оси, расстояния до соседних прозрачных зон различаются на одну длину волны, то в этой точке будет наблюдаться увеличение интенсивности света.

Расстояние b между зонной пластинкой и точкой P при освещении пластинки параллельным пучком света называется главным фокусным расстоянием для данной длины волны λ. Отсюда легко вычислить радиус k-й зоны. Пусть R_k — расстояние от P до внешней границы k-й зоны (считая как прозрачные, так и непрозрачные зоны).

Тогда

$$R_k = b + \frac{1}{2} k\lambda.$$

Для радиуса k-й зоны имеем:

$$r_k = (R_k^2 - b^2)^{\frac{1}{2}} = \left(k\lambda b + \frac{1}{4} k^2\lambda^2\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (1)$$

Обычно $b \gg k\lambda$. Тогда с большой точностью

$$r = (kb\lambda)^{\frac{1}{2}}. \qquad (2)$$

Этим соотношением и руководствуются при изготовлении зонных пластинок.

Оптические зонные пластинки могут быть получены путём фотографирования в уменьшенном масштабе соответствующих чертежей. Более совершенный способ состоит в фотографировании картины колец Ньютона. Таким путём удаётся изготовить зонные пластинки удовлетворительного качества, имеющие диаметр до 30 *мм* и главное фокусное расстояние приблизительно в 1 *м*. Площадь k-й зоны равна $\pi r_k^2 - \pi r_{k-1}^2$ или приблизительно $\pi b\lambda$.

Так как плоская пластинка с радиусами колец, пропорциональными корням квадратным из целых чисел, лишь приближённо передаёт размеры зон Френеля, то при возрастании числа колец на пластинке мы получим, начиная с некоторого момента, заметное ухудшение качества изображения. Лишь для случая параллельного пучка света, распространяющегося вдоль оси зонной пластинки, имеет смысл неограниченно увеличивать число колец на её поверхности.

Для случая точечного источника, расположенного на конечном расстоянии p от зонной пластинки на её оси, легко рассчитать

допустимое число прозрачных зон. Из рис. 1 следует, что оптический путь

$$S=(p^2+r_k^2)^{\frac{1}{2}}+(q^2+r_k^2)^{\frac{1}{2}}, \tag{3}$$

где q — фокусное расстояние пластинки.

Примем во внимание, что

$$r_n=(2bn\lambda+n^2\lambda^2)^{\frac{1}{2}},$$

где $n=\frac{1}{2}k$ — число прозрачных зон, и разложим S по степеням λ. Ограничиваясь членами, содержащими λ^2, получаем для длины пути, соответствующей n-й прозрачной зоне Френеля:

$$S=p+q+n\lambda b\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)+\frac{1}{2}n^2\lambda^2\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-\frac{b^2}{p^3}-\frac{b^2}{q^3}\right). \tag{4}$$

Если мы применяем зонную пластинку, изготовленную согласно (2), то для n-й прозрачной зоны длина пути S_0 отличается от S и равна

$$S_0=p+q+n\lambda b\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right). \tag{5}$$

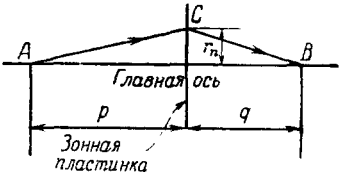

Рис. 1. Схема хода лучей при образовании изображения точечного источника A, расположенного на главной оси на конечном расстоянии p от зонной пластинки. Изображение находится в точке B на расстоянии q от пластинки.

Но для получения хорошего качества изображения оптические пути всех лучей, сходящихся в фокус, должны отличаться от целого числа длин волн на величину, не превышающую $\pm\lambda/4$ (критерий Релея).

В нашем случае длина оптического пути луча $AC+CB$, идущего в фокус через n-ю прозрачную зону (рис. 1), должна лежать в пределах

$$p+q+n\lambda\pm\frac{\lambda}{4}. \tag{6}$$

Полагая, что приближение (4) даёт для S значение, достаточно близкое к $p+q+n\lambda$, мы должны принять, что увеличение числа колец на зонной пластинке, удовлетворяющей условию (2), имеет смысл лишь до тех пор, пока $|S_0-S|<\frac{\lambda}{4}$. Отсюда после простых преобразований получим для предельного числа зон:

$$n<[|p^3/6\lambda(p-b)|]^{\frac{1}{2}}. \tag{7}$$

Уравнение (7) показывает, что для случая параллельного пучка,

падающего на зонную пластинку перпендикулярно ($p=\infty$), число зон не ограничено.

Так как приближённо $S=S_0$, то, сопоставив (5) и (6) и отбросив малую величину $\lambda/4$, легко убедиться в том, что для зонной пластинки, так же как и для линзы:

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{b}. \tag{8}$$

Рассмотрим теперь случай параллельного пучка, падающего наклонно на зонную пластинку, для которой $r_n^2=2n\lambda b$. Пусть главная ось пластинки и падающий луч образуют некоторый угол α. Определим наибольшую величину угла α, при которой возможна ещё хорошая фокусировка для данной длины волны λ. Для этого геометрическую длину пути, вычисленную с точностью до членов, содержащих первую степень λ, нужно приравнять к величине $b+n\lambda/4$. Окончательный результат может быть представлен в виде:

$$\left|(2bn\lambda)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{n\lambda}{b}\sin\alpha-n\lambda\sin^2\alpha\right|<\frac{\lambda}{4}. \tag{9}$$

Следующей важной характеристикой зонной пластинки является её разрешающая способность. Как обычно, задача сводится к определению угла между главной осью и линией, соединяющей середину пластинки с первым минумумом кольцевой диффракционной картины, полученной от точечного источника, расположенного на главной оси пластинки. Пусть пластинка освещается монохроматическим пучком света, идущим вдоль главной оси. В образовании главного фокуса, лежащего на главной оси, участвуют все зоны Френеля всей своей площадью. В ином положении находятся точки, несколько смещённые с оси пластинки. Лучи, приходящие в эти точки из одних частей прозрачной зоны, могут интерферировать с лучами, пришедшими от других её частей.

Количественный расчёт распределения интенсивности вблизи главного фокуса может быть выполнен следующим путём: разница в длине оптических путей (рис. 2) AB и AC равна

$$\Delta l\cong-b\,\mathrm{tg}\,\beta\cdot\sin\varphi. \tag{10}$$

Но для малых углов $\mathrm{tg}\,\beta=\beta$ и $r=r_n=b\,\mathrm{tg}\,\varphi\cong b\sin\varphi$. Принимая во внимание (2), получаем:

$$\Delta l\cong-r\beta\cong-\beta(2n\lambda b)^{\frac{1}{2}}.$$

Уравнение (10) справедливо для частей зон, находящихся в плоскости чертежа (рис. 2). Для других частей зон величину r надо заменить на $r\sin\theta$, где θ — угол, образованный прямой, соеди-

няющей точку O с точкой на окружности, и прямой, перпендикулярной к плоскости чертежа.

Если фазу колебания в точке B, обусловленного светом, пришедшим из точки O, принять за нуль, то фазы в B, обусловленные действием других частей зонной пластинки, будут равны

$$-\frac{2\pi}{\lambda}\beta r \sin\theta. \qquad (11)$$

Обозначим $\frac{2\pi}{\lambda}\beta r = \rho$. Тогда результирующая амплитуда в B, возникшая в результате действия зоны с радиусом r, пропорциональна

$$\frac{2}{\pi}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\rho\sin\theta)\,d\theta = I_0(\rho), \qquad (12)$$

где $I_0(\rho)$ — бесселева функция нулевого порядка.

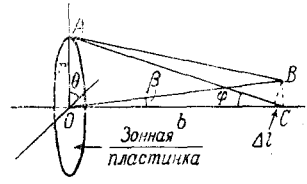

Рис. 2. Схема хода лучей для случая бесконечно удалённого точечного источника, расположенного вне главной оси зонной пластинки. B — положение изображения, C — точка, в которой образовалось бы изображение при падении на пластинку лучей, параллельных главной оси.

Так как интенсивности, обусловленные каждым из колец, приблизительно одинаковы, то амплитуда в точке B равна сумме амплитуд:

$$\sum_1^n I_0\left(\frac{2\pi}{\lambda}\cdot\sqrt{2n\lambda b}\right). \qquad (13)$$

Путём ряда преобразований можно показать, что (приближённо) результирующая амплитуда первый раз обращается в нуль при

$$\frac{2\pi\beta}{\lambda}\cdot[2(n-1)b\lambda]^{\frac{1}{2}} \simeq \frac{2\pi\beta r_n}{\lambda} = 3{,}83.$$

Отсюда

$$\beta = \frac{1{,}22}{2r_n} = 1{,}22\,\frac{\lambda}{d}. \qquad (14)$$

Таким образом, разрешающая сила зонной пластинки — угловая полуширина первого максимума — равна (14), как и для линзы с той же апертурой.

Изложенная теория зонной пластинки является приближённой. Поэтому оптические свойства реальных пластинок, как бы хорошо пластинки ни были изготовлены, могут несколько отличаться от свойств, предсказанных элементарной теорией.

2. Опыты с зонными пластинками

В работе[3] зонной пластинкой служило фотографическое изображение колец Ньютона, снятое на спектроскопических пластинках, разрешающих приблизительно 1000 штрихов на миллиметр. Для получения колец была применена двояковыпуклая линза диаметром 10 *см*, с радиусом кривизны 164 *см*. Освещение производилось параллельным пучком монохроматических лучей с длиной волны 5461 Å (ртутная лампа с фильтром).

Таким способом можно было изготовить зонные пластинки, имеющие более 300 прозрачных зон.

Для проверки зависимости главного фокусного расстояния от длины волны:

$$b = r_n^2 / 2 n\lambda \tag{15}$$

применялась пластинка с эффективной апертурой в 17,5 *мм* и $n = 100$ прозрачными зонами. Измерения при помощи компоратора показали, что радиусы зон этой пластинки обратно пропорциональны квадратным корням последовательных целых чисел. Фокусное расстояние было определено для различных длин волн как в видимой, так и в ближней ультрафиолетовой областях спектра. Оказалось, что при строгой параллельности падающего пучка уравнение (15) подтверждается в пределах ошибки опыта. Кроме интенсивного фокуса первого порядка, зонная пластинка должна давать менее интенсивные побочные фокусы третьего, пятого, седьмого и других нечётных порядков, соответствующих совпадению трёх, пяти, семи и т. д. зон Френеля с каждым из прозрачных колец на поверхности пластинки.

Действия двух, четырёх, шести и т. д. зон Френеля в этих случаях взаимно уничтожаются. В создании освещения участвует одна нескомпенсированная зона Френеля. Побочные фокусы расположены соответственно на расстояниях $\frac{b}{3}$, $\frac{b}{5}$, $\frac{b}{7}$, $\frac{b}{9}$ и т. д. от зонной пластинки. Интенсивности изображений в этих фокусах относятся, очевидно, как обратные величины порядковых номеров побочных фокусов. Разница в длинах оптических путей для лучей, идущих в побочные фокусы через соседние прозрачные кольца пластинки, равны 3λ, 5λ, 7λ и т. д. (для фокуса первого порядка разница в длине пути равна λ). Вдоль главной оптической оси на расстоянии $-b$, $-\frac{b}{3}$, $-\frac{b}{5}$ и т. д. расположены мнимые фокусы зонной пластинки.

Теоретически у зонной пластинки не должны возникать фокусы чётного порядка, так как действия двух, четырёх, шести и т. д. зон Френеля, совпадающих с каждым прозрачным кольцом пластинки, взаимно уничтожаются. На опыте, однако, для всех исследованных зонных пластинок наблюдались фокусы второго

порядка, расположенные приблизительно на половине расстояния между пластинкой и фокусом первого порядка. Это явление связано частично с неравенством площадей прозрачных и непрозрачных колец на поверхности пластинки. Общая ширина двух соседних зон Френеля несколько отличается от ширины соответствующего прозрачного кольца. Благодаря этому в фокусе второго порядка действия соседних зон Френеля не полностью компенсируются и создают частичное увеличение интенсивности. Для сравнения светосилы зонной пластинки и линзы было сфотографировано изображение щели в грубо монохроматизированном свете. Для выделения участка спектра применялась плоская дифракционная решётка. Решётка освещалась параллельным пучком, идущим от коллиматора с кварцевой линзой. Зонная пластинка заменяла камерную линзу. Диаметры сопоставляемых оптических деталей — линзы и пластинки — равнялись 30 *мм*, а фокусные расстояния — соответственно 85 *см* и 90 *см*. Полученные фотографии приведены на рис. 3 и 4. Экспозиции составляли 8 сек. для пластинки и 0,5 сек. для линзы. Оказалось, что зонная пластинка с относительным отверстием 1:28 по своему действию приблизительно эквивалентна линзе 1:120.

Значительно лучшее качество изображения было получено при замене диффракционной решётки фильтром. Это было сделано в опытах по исследованию аберрации. Источником света служила ртутная лампа с фильтром для линии 5461 Å. Коллиматор был снабжён двумя щелями, изображение которых фотографировалось при помощи зонной пластинки с апертурой 17,6 *мм* (100 прозрачных зон) и фокусным расстоянием 66 *см*. Были получены снимки при центральном положении двойной щели и при смещении её в направлении, перпендикулярном к главной оптической оси. Снимки показали, что хорошая фокусировка наблюдается при смещении с оси, не превосходящем 3°18′. При бо́льших углах изображение щелей заметно размывается (рис. 5 и 6). Теоретический предельный угол, рассчитанный по формуле (9), равен 3°15′.

Сопоставление свойств зонной пластинки и собирательной линзы приведено в таблице I (см. стр. 524).

Здесь следует заметить, что хроматизм зонной пластинки связан с применяемым способом изготовления зонной диафрагмы — формула (1). Можно указать условия, при которых зонная диафрагма будет свободна от хроматической аберрации для нескольких заданных длин волн. Рассмотрим две пластинки с одинаковым фокусным расстоянием, из которых одна рассчитана для длины волны λ_1, а вторая — для λ_2. Сложим пластинки вместе, совместим их оптические оси и определим положение общих для обеих пластинок прозрачных участков. Эта задача легко поддаётся расчёту, если принять во внимание, что расстояния от центра пластинок до любых точек, лежащих внутри прозрачных зон

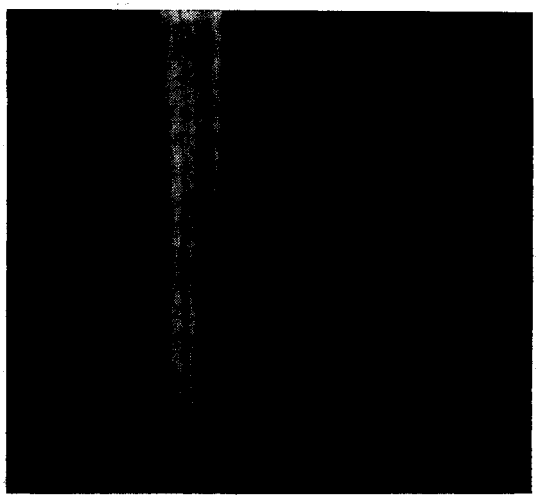

Рис. 3.

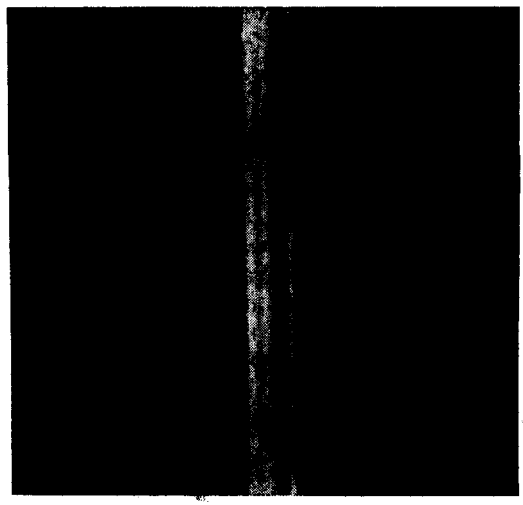

Рис. 4.

Фотографии триплета ртутных линий с длинами волн 3663, 3654 и 3650Å. Изображения получены при помощи зонной пластинки (рис. 3) и выгнуто-выпуклой линзы той же апертуры (рис. 4).

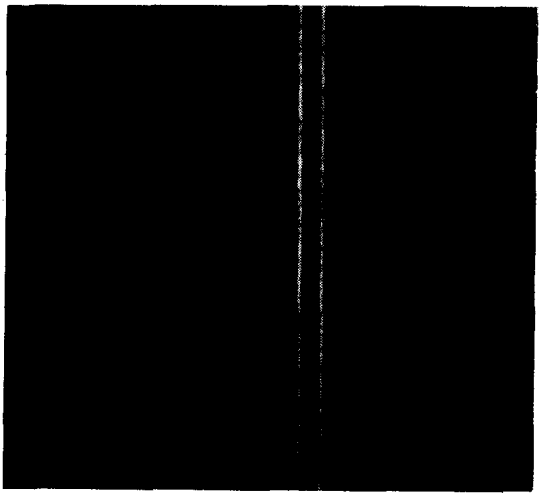

Рис. 5.

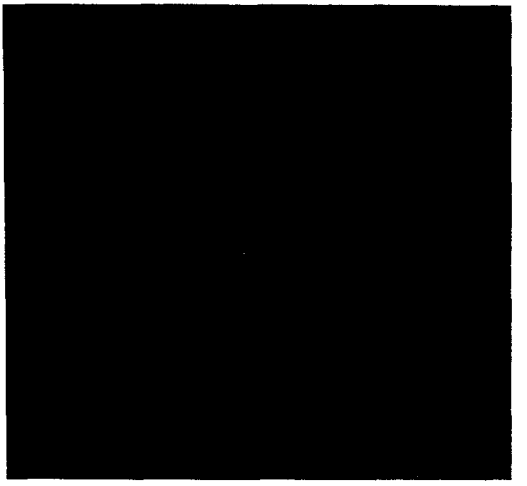

Рис. 6.

Аберрация, наблюдаемая при сдвиге источника (две щели) с главной оси зонной пластинки. Снимки получены при освещении щелей монохроматическим светом (5461 Å). Рис. 5 соответствует сдвигу щелей с оси на угол 2,9°, рис. 6 — сдвигу на 4,1°.

Таблица I

Сравнение свойств зонной пластинки и линзы

Свойство	Собирательная линза	Зонная пластинка, работающая в проходящем свете
Хроматизм	Имеется	Сильно выражен
Положение изображения	$\frac{1}{f}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$	$\frac{1}{f}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$
Фокусы высших порядков	Нет	1, (2), 3, (4), 5 . . .
Разрешающая способность	$\beta=1{,}22\,\lambda/d$	$\beta=1{,}22\,\lambda/d$
Фокусное расстояние	$\frac{1}{f}=[\mu(\lambda)-1]\times\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)$	$\frac{1}{f}=\frac{1}{r_n-n\lambda}-\frac{1}{r_n+n\lambda}$

рассматриваемых диафрагм, соответственно равны:

$$r_n^2(\lambda_1)=bn\lambda_1, \qquad r_n^2(\lambda_2)=bn\lambda_2,$$

где n может принимать все значения от 0 до 1, от 2 до 3, от 4 до 5 и т. д. или все значения от 1 до 2, от 3 до 4, от 5 до 6 и т. д.

Изготовим теперь пластинку с таким расположением прозрачных участков, какое оказалось у нашей системы, состоящей из двух совмещённых зонных диафрагм. Эта пластинка будет, очевидно, ахроматична для длин волн λ_1 и λ_2. Описанным способом можно получить пластинку с общим фокусом для нескольких длин волн. Разумеется, ахроматизация пластинки связана с уменьшением её светосилы.

II. СФЕРИЧЕСКАЯ ЗОННАЯ ПЛАСТИНКА, СОЕДИНЁННАЯ С ВОГНУТЫМ ЗЕРКАЛОМ ИЛИ С СОБИРАТЕЛЬНОЙ ЛИНЗОЙ

1. Вогнутая отражательная зонная пластинка

Обращаясь к рис. 7, мы видим, что для плоской зонной пластинки, работающей на просвет, разность хода центрального луча AOM и нецентрального $ALCKM$ определяется суммой длин отрезков LC и CK. Из-за разного знака кривизны фронтов для источника A и наблюдателя M удлинение оптического пути на величину, равную $\lambda/2$, достигается весьма малым увеличением

угла α. Поэтому разность хода, выраженная в $\lambda/2$ (число зон Френеля), принимает весьма большие значения при сравнительно малых углах α, если, конечно, расстояния a и b не очень велики (лежат в пределах десятков сантиметров).

Для получения светосильной пластинки, имеющей широкие зоны Френеля при большом отверстии и малом фокусном расстоянии, естественно прибегнуть к такому расположению источника и наблюдателя, при котором кривизна фронтов A и M имеет одинаковый знак (рис. 8). Это легко осуществить при помощи отражательного вогнутого зеркала, центр которого $З$ расположен

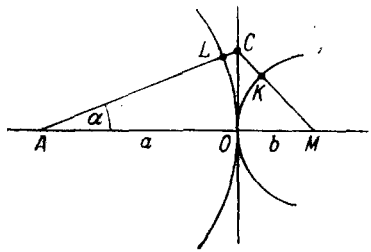

Рис. 7. A — источник, M — точка наблюдения, O — середина плоской зонной пластинки, C — точка на пластинке, находящаяся на расстоянии r от середины пластинки, a и b — расстояния источника и точки наблюдения от пластинки.

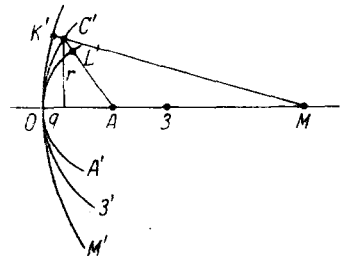

Рис. 8. A — источник, M — точка наблюдения, O — середина вогнутого зеркала $З'$, имеющего центр в $З$, A' и M' — сферические поверхности с радиусами OA и OM, r — расстояние точки C' на поверхности зеркала от оси $OAЗM$, q — проекция OC' на ось $OAЗM$.

между A и M. Очевидно, теперь разность хода для центрального и нецентрального лучей $\Delta S = AOM - AL'C'K'M$ определяется разностью длин отрезков $S = L'C$ и $S_1 = C'K$, каждый из которых короче отрезков LC и CK, соответствующих случаю плоской зонной пластинки. По мере приближения A и M к центру зеркала $З$ разность хода ΔS стремится к нулю и центральная зона Френеля постепенно распространяется на всю поверхность зеркала.

При помощи чертежа, приведённого на рис. 8, легко получить соотношения, необходимые для определения разности хода $\Delta S = S - S_1$:

$$S = -a + \sqrt{a^2 - 2q(a - R)};$$

$$S_1 = b_1 - \sqrt{b_1^2 - 2q(b_1 - R)}, \qquad (16)$$

где $q = R - \sqrt{R^2 - r^2}$ (R — радиус сферического зеркала).

Для вогнутого зеркала с небольшим относительным отверстием*) можно воспользоваться приближённой формулой, положив S^2, S_1^2 и q^2 равными нулю. Тогда

$$\Delta S = \pm \frac{r_m^2}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{2}{R}\right). \tag{17}$$

Положительный знак ΔS соответствует расположению, при котором оптический путь от источника к зонному фокусу оказывается для центрального луча бо́льшим, чем для нецентрального. В обратном случае ΔS имеет отрицательное значение. Число зон Френеля (m), укладывающихся на зеркале радиуса r, можно определить, выразив разность хода ΔS для центрального и крайнего лучей в единицах $\lambda/2$:

$$m = \frac{\Delta S}{\lambda/2}.$$

Отсюда окончательно:

$$\pm \frac{m\lambda}{r_m^2} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{2}{R}. \tag{18}$$

При левой части, равной нулю ($r_m = \infty$), получаем формулу зеркала с геометрическим фокусом в точке b. При конечном r_m имеем два дополнительных ярких фокуса b_1 и b_2, для которых $\frac{1}{b_1} - \frac{1}{b} = \frac{1}{b_2} - \frac{1}{b} = \frac{\lambda m}{r_m^2}$. Если b_1 и b_2 мало отличаются от b, то получим почти симметричное расположение $b_1 - b \cong b_2 - b \cong \cong b^2 \cdot \frac{\lambda_m}{r_m^2}$. Сопоставление вогнутой и плоской зонных пластинок удобнее всего выполнить для частного случая $a = R$, при котором источник помещён в центр зеркала. Тогда $\frac{r_m^2}{\lambda_m} = \pm \frac{ab}{a-b}$, в отличие от формулы для плоской пластинки: $\frac{r_{om}^2}{\lambda_m} = \frac{ab}{a+b}$.

При равных для обеих пластинок расстояниях источника и наблюдателя a и b имеем:

$$\frac{r_m^2}{r_{om}^2} = \frac{a+b}{a-b}.$$

Пусть, например, $a = 100$ *см*; $b = 98$ *см*; $\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$ *см*; $R = 100$ *см* и диаметр пластинок D равен 10 *см*. Тогда радиус первой зоны будет равен 0,5 *мм* для плоской пластинки и 5 *мм* для вогнутой. На поверхность плоской пластинки выбранного диаметра нужно нанести 10 000 зон, на поверхность же вогнутой — лишь

*) См. критерий (7).

100 зон. Ширина последнего кольца у плоской пластинки будет равна 2,5 μ, а у вогнутой — 0,25 *мм*.

Вогнутая пластинка с данными, соответствующими приведённому примеру, была по нашей просьбе изготовлена Ю. Н. Ефимовым. Вогнутое алюминированное зеркало диаметром в 10 *см* было укреплено в патроне токарного станка. Резец, имевший режущую кромку шириной в 0,25 *мм*, был закреплён в суппорте. Отсчёты перемещения резца по поверхности зеркала при снятии

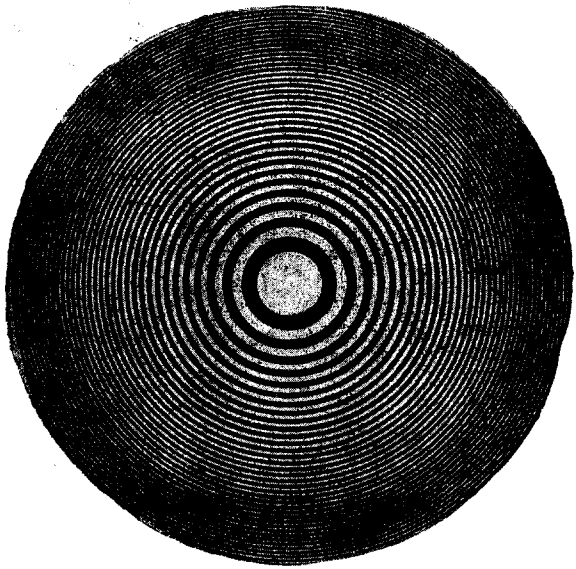

Рис. 9. Внешний вид колец на поверхности вогнутой зонной пластинки. Диаметр центральной зоны равен 10 *мм*.

алюминиевого слоя производились при помощи нониуса, имеющегося на суппорте станка. Внешний вид колец полученной зонной пластинки показан на рис. 9.

Проверка зонной пластинки дала результаты, которые следует признать удовлетворительными.

При помощи этой пластинки отчётливо наблюдаются все три ярких фокуса — геометрический и два дополнительных.

На рис. 10 приведены фотографии изображения освещённой сзади шкалы, снятые со светофильтром в геометрическом фокусе (*а*) и в одном из дополнительных фокусов (*б*). Фотографии получены при $a = 80$ *см*, $b = 137{,}5$ *см*, $b_1 = 133{,}7$ *см*.

Качество изображения в дополнительных фокусах свидетельствует об удовлетворительном совпадении размеров колец на пластинке с вычисленными зонами Френеля.

К результату (18) можно придти и другим путём.

Будем рассматривать вогнутую отражательную зонную пластинку как оптическую систему, состоящую из собирательного зеркала и близко расположенной к нему зонной диафрагмы, работающей в проходящем свете. Для такой диафрагмы, как и для плоской зонной пластинки, главные фокусные расстояния первого порядка $F_{пл}$ (действительное и мнимое) приближённо равны $\pm\frac{r_m^2}{\lambda m}$. Напомним, что зонная пластинка действует одновременно как собирательная и как рассеивающая линза, создавая сходящиеся и расходящиеся пучки света.

а *б*

Рис. 10. Фотографии изображения освещённой сзади молочной шкалы в геометрическом фокусе (*а*) и в одном из дополнительных фокусов (*б*).

Главное фокусное расстояние системы $F_с$ связано с главным фокусным расстоянием элементов, составляющих систему — зеркало ($F_з$) и пластинка ($F_{пл}$), — известным соотношением

$$\frac{1}{F_с}=\frac{1}{F_з}+\frac{1}{F_{пл}} \text{ или } \frac{1}{F_с}=\frac{2}{R}\pm\frac{m\lambda}{r_m^2}\ ^{*)}.$$

Система имеет по два действительных фокуса первого, третьего, пятого и т. д. порядков. Эти фокусы лежат по обе стороны от фокуса зеркала соответственно положительному и отрицательному знаку $F_{пл}$.

Зная фокус системы $F_с$, легко обычным способом связать положение источника и изображения для вогнутой отражательной зонной пластинки:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{F_с}.$$

Отсюда получим, как и прежде,

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{2}{R}=\pm\frac{m\lambda}{r_m^2}.$$

Примем, далее, во внимание, что зонная диафрагма, введённая в пучок света, не изменяет оптического пути между незакры-

*) Для определения главных фокусных расстояний высших порядков следует заменить величину $F_{пл}$ в последнем уравнении на $\frac{F_{пл}}{3}$, $\frac{F_{пл}}{5}$, $\frac{F_{пл}}{7}$ и т. д.

тыми диафрагмой частями фронта и точками, лежащими на оптической оси. Поэтому в оптической системе зеркало — зонная пластинка не только появляются новые «зонные» фокусы (в точках на оптической оси, для которых разность расстояний ΔS до открытых зон последовательно равна $\lambda \pm \lambda/4$, $2\lambda \pm \lambda/4$, $3\lambda \pm \lambda/4$ и т. д.), но и сохраняется прежний фокус зеркала, наблюдавшийся в отсуствии диафрагмы (в точке, для которой $\Delta S = 0$). Рассматривая вогнутую отражательную зонную пластинку как систему зеркало — зонная диафрагма, можно показать, что для получения заметной разницы ΔF между величинами $F_с$ и $F_з$ достаточно ввести в ход лучей диафрагму со значительно бо́льшим фокусным расстоянием ($F_{пл}$), чем $F_з$. Это следует из выражения для относительного изменения фокуса $\frac{\Delta F}{F_з} = \frac{F_с}{F_{пл}}$. С этой точки зрения вогнутая отражательная зонная пластинка позволяет заменить изучение фокусов диафрагмы изучением фокусов системы.

Существенно, что в этом варианте опыта не требуется, чтобы зонная диафрагма имела короткое фокусное расстояние.

Для получения светосильной системы нужно пользоваться светосильным зеркалом. Что же касается зонной пластинки, то необходимо обеспечить лишь достаточные её размеры, не меньшие, чем диаметр зеркала.

Изготовление подобной пластинки с широкими зонами Френеля является сравнительно простой задачей. Целесообразно, однако, осуществлять систему зеркало — зонная пластинка не путём сборки её из отдельных частей (вогнутого зеркала и зонной диафрагмы), а в виде описанной выше вогнутой отражательной зонной пластинки.

Если относительное отверстие зеркала велико, то определение разности хода ΔS должно выполняться по приведённой выше формуле (16) с учётом опущенных ранее членов, содержащих S^2, S_1^2 и q^2. Тогда отпадает ограничение (7).

Так как при больших отверстиях зеркала геометрический фокус точки представляет собой отрезок (для всех расположений, кроме $a \pm b = R$), то на поверхности зеркала может укладываться значительное число зон Френеля даже в том случае, когда точка наблюдения лежит внутри геометрического фокуса.

Заслуживает внимания то обстоятельство, что для хорошо выполненной вогнутой зонной пластинки с большим отверстием «зонное» монохроматическое изображение точки, в принципе свободное от сферической аберрации, может иметь значительно лучшее качество, чем геометрическое изображение. Поэтому, в частности, можно изготовить отражательную зонную пластинку с таким расчётом, чтобы в одной из точек аберрационного отрезка

(геометрический фокус) получилось дополнительное яркое монохроматическое «зонное» изображение источника. Для оценки технических трудностей изготовления подобных пластинок рассмотрим несколько частных примеров.

а) Светосильная пластинка с зонным фокусом, расположенным в геометрическом фокусе центральных лучей

В табл. II приведены результаты вычисления по формуле (16) разности хода ΔS для центрального луча и луча, отражённого от точки поверхности зеркала, находящейся на расстоянии r от его оси.

Вычисления выполнены для следующих данных: радиус отверстия зеркала $\sigma = 10$ *см*, главное фокусное расстояние $\frac{R}{2} = 20$ *см*. Пусть, далее, точечный источник находится на главной оптической оси и удалён от зеркала на 30 *см*. В этом случае геометрический фокус центральных лучей M_0 (рис. 11) расположен на расстоянии $b = 60$ *см* от зеркала и длина аберрационного отрезка M_0M_σ равна 7 *мм*. В первом столбце таблицы указаны значения r, во втором — разность хода, выраженная в $\lambda/2$. На рис. 12 изображена графически зависимость между ΔS и r. Наблюдение ведётся в точке M_0. Длина волны принимается равной $\lambda = 5000$ Å. Как показывают результаты расчёта, радиус первой зоны Френеля равен приблизительно 3 *см*, ширина крайней зоны $\cong 0{,}15$ *мм*. На всей поверхности зеркала уложатся 178 зон. Зоны Френеля оказываются, следовательно, достаточно широкими.

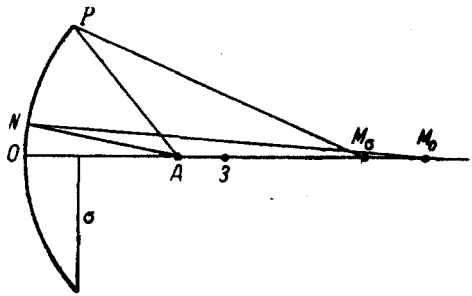

Рис. 11. σ — радиус отверстия зеркала с центром в $З$, A — источник, O — середина зеркала, M_0 — фокус центральных лучей ANM_0, M_σ — фокус крайних лучей APM_σ.

Таблица II

r (*см*)	ΔS ($\lambda/2 = 2{,}5 \cdot 10^{-5}$ *см*)
1	0,0
2	0,1
3	1,5
4	4,5
5	10,9
6	22,7
7	42,6
8	72,3
9	116,3
10	178,0

Однако трудности существенно возрастут, если мы станем удалять источник в бесконечность. Для граничного случая, плоского фронта падающей волны разность хода центрального и крайнего лучей

$$\Delta S = \sqrt{\sigma^3 + \left(\frac{R}{2} - \sqrt{R^2 - \sigma^2}\right)} - R\frac{3}{2} + \sqrt{R^2 - \sigma^2}. \quad (19)$$

Частное $\frac{\Delta S}{\lambda/2}$ даёт число колец на поверхности зеркала с относительным отверстием $\frac{2\sigma}{R}$ при наблюдении из геометрического фокуса центральных лучей. Пусть попрежнему $R = 40$ *см*, $\sigma = 10$ *см*, $\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$ *см*. Тогда число зон Френеля будет равно приблизительно 1500. Заметим, что для плоской пластинки с тем же диаметром отверстия и фокусным расстоянием число зон достигает 100 000.

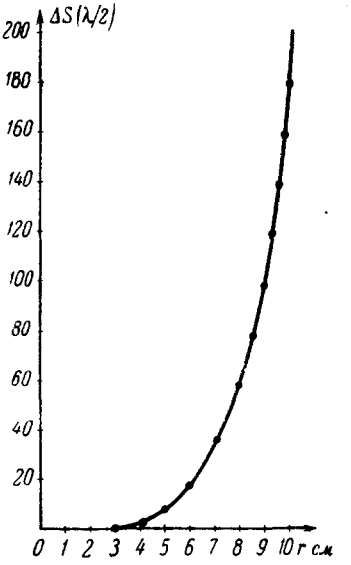

Рис. 12. График зависимости разности хода ΔS (в единицах $\lambda/2 = 2{,}5 \cdot 10^{-5}$ *см*) от r — расстояния точки (в *см*) на поверхности зеркала до главной оптической оси зонной пластинки.

б) Пластинка с зонным фокусом, расположенным внутри геометрического фокуса. Случай косого падения параллельных лучей

Для расчёта этого случая удобно воспользоваться тем, что расстояние τ между сферой *1* и параболоидом *2* (рис. 13) с большой точностью равно:

$$\tau = r^3 (r_0^2 - r^2) \cdot \frac{1}{8R^3},$$

где r — ордината, а R — радиус кривизны сферы, r_0 — ордината точки пересечения окружности и параболы. Расстояние τ равно нулю при $r = 0$ и при $r = r_0$. Максимальное значение τ получаем при $r = \frac{r_0}{\sqrt{2}}$. Разность хода ΔS двух лучей, сходящихся в фокусе параболоида, — одного, отражённого от сферического зеркала в точке θ $(r = r_0)$, и другого, отражённого в точке с ординатой $r \neq r_0$ — равна:

$$\Delta S = 2\tau = r^3 (r_0^2 - r^2) \cdot \frac{1}{4R^3}.$$

Максимальное значение $\Delta S_{макс} = 2\tau_{макс} = \frac{r_0^4}{16R^3}$. На всей поверхности зеркала при наблюдении из фокуса параболоида уложится

$$n = \frac{2\Delta S_{макс}}{\lambda/2}$$

зон Френеля:

$$n = \frac{r_0^4}{4R^3\lambda}. \qquad (21)$$

Например, при $R = 40$ *см* и $r_0 = 10$ *см* получим $n = 800$.

В интересующем нас случае зеркало, работающее при косом падении параллельного пучка, можно рассматривать как расположенную вне оси часть (*3* на рис. 13) другого, значительно большего по размерам сферического зеркала *1* (на рис. 13), освещённого параллельным пучком света, идущим вдоль главной оптической оси. Зоны Френеля на поверхности зеркала *3* в этом случае имеют вид полос, направленных по дугам, проведённым радиусом r из точки O (рис. 14). Поэтому изготовление зонной пластинки, соответствующей косому падению параллельного пучка, может быть выполнено тем же способом, который применялся нами для случая пластинки, работающей в центральном пучке.

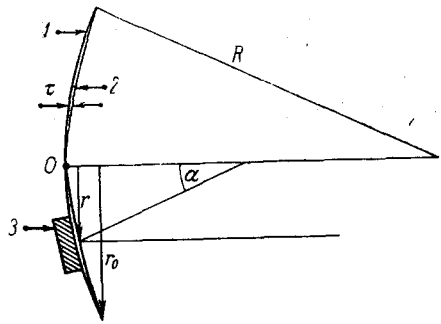

Рис. 13. R — радиус сферы *1*; *2* — параболоид, O — середина сферической поверхности *1*, *3* — сферическое зеркало, α — угол между направлениями на фокус и на середину O сферической поверхности *1*, τ — расстояние между сферой и параболоидом, r_0 — ордината точки пересечения сферы и параболоида, r — ордината точки на поверхности зеркала *3*.

Ширина в проекции зон Френеля на плоскость rZ при наблюдении поверхности сферы *1* из фокуса параболоида будет равна:

$$l = 1 : \frac{\Delta S}{\Delta r \cdot \lambda/2} = \frac{\lambda R^3}{r(r_0^2 - 2r^2)}. \qquad (22)$$

Следует заметить, что расстояние между зонами на поверхности зеркала *3* зависит от положения зеркала на сфере *1* (рис. 13). Обозначим $r_0/\sqrt{2} = \xi$. Если крайние ординаты r_1 и r_2 больше или меньше ξ, то зоны будут сгущаться или разрежаться

при увеличении r от r_1 до r_2. Если же $r_1 < \xi$, а $r_2 > \xi$, то ширина зон имеет максимум вблизи $r = r_0/\sqrt{2}$.

В первом случае число зон Френеля на поверхности зеркала равно:

$$n = \frac{2(\tau_1 - \tau_2)}{\lambda/2} = \frac{1}{2R^3\lambda}\left[r_1^2(r_0^2 - r_1^2) - r_2^2(r_0^2 - r_2^2)\right]. \qquad (23)$$

Во втором случае:

$$n = \frac{4(\tau_{\text{макс}} - \tau_1)}{\lambda} + \frac{4(\tau_{\text{макс}} - \tau_2)}{\lambda} =$$

$$= \frac{1}{2R^3\lambda}\left[\frac{r_0^4}{2} - r_1^2(r_0^2 - r_1^2) - r_2^2(r_0^2 - r_2^2)\right]. \qquad (24)$$

Зонная пластинка, изготовленная в соответствии с приведённым расчётом, будет иметь дополнительный зонный фокус, находящийся в фокусе параболоида $f = \frac{1}{4}\left(R + \sqrt{R^3 - r_0^2}\right)$.

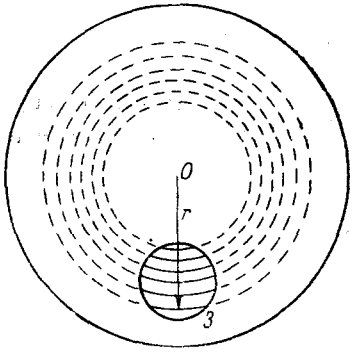

Рис. 14. Вид зон Френеля для зеркала *З*. *O* — середина сферической поверхности, r — ордината точки на поверхности зеркала.

Таблица III

r (*см*)	l (*мм*)
5	0,4
6	0,33
7	0,35
8	0,4
9	0,6
10	8,2
11	0,5
12	0,2
13	0,13

Для оценки числа и размеров зон Френеля, с которыми можно встретиться при обычно применяемых зеркалах, рассмотрим пример, когда $R = 80$ *см* и $\alpha = 15°$. Пусть $r_0\sqrt{2}$ — ордината середины зеркала *З* на рис. 13. Тогда $r_0 = 14$ *см*. Пусть, далее, размеры зеркала ограничены ординатами $r_1 = 4$ *см* и $r_2 = 13$ *см*. Число зон Френеля на поверхности такого зеркала будет равно 230 (результаты вычисления ширины зон l вблизи некоторых значений ординат r приведены в табл. III). Очевидно, что в этом случае, как и в других рассмотренных выше примерах, изготовление зонной пластинки не должно встретить серьёзных затруд-

нений. Для рассмотренного частного примера фокус параболоида (39,69 *см*) лежит внутри геометрического фокуса зеркала (39,43 *см* — 39,96 *см*).

Легко показать, что зонная пластинка, изготовленная в соответствии с приведённым выше расчётом, всегда имеет зональный фокус, расположенный внутри аберрационного отрезка — геометрического изображения точки. Действительно, из общей формулы для сферического зеркала

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{2R}{ab}\cdot\frac{1-\cos\varphi}{2\cos\varphi-1}=\frac{2}{R}\cdot\frac{\cos\varphi}{2\cos\varphi-1},$$

где $\varphi=\arcsin\frac{r}{R}$, следует, что при параллельном пучке ($b=\infty$) фокусные расстояния F_1 и F_2 для центральных лучей ($\varphi=0$) и для крайних лучей $\left(\varphi=\arcsin\frac{r_0}{R}\right)$ соответственно равны:

$$F_1=\frac{R}{2};\ F_2=R-\frac{1}{2}\sqrt{R^2-r_0^2},$$

где r_0 — радиус отверстия зеркала. С другой стороны, в нашем случае расстояние f между серединой зеркала и фокусом параболоида связано с R и r_0 соотношением

$$f=\frac{R}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{R^2-r_0^2}.$$

Отсюда

$$F_1>f>F_2.$$

2. Сферическая зонная пластинка, работающая в проходящем свете совместно с линзой

Как уже отмечалось выше, для получения светосильной зонной пластинки с широкими зонами Френеля необходимо применять расположение, при котором кривизна фронта волны, падающей на пластинку, имеет тот же знак, что и обращённая к источнику часть сферической поверхности, с центром в точке наблюдения (рис. 8). Эта задача может быть решена не только при помощи вогнутого зеркала, но и путём предварительной фокусировки света собирательной линзой. Рассмотрим оптическую систему, состоящую из линзы и зонной пластинки.

Для фокусного расстояния системы F_c, составленной из двух близко расположенных элементов — линзы и зонной пластинки

с фокусными расстояниями $F_л$ и $F_{пл}$, можно написать, как и для двух линз:

$$\frac{1}{F_с} = \frac{1}{F_л} + \frac{1}{F_{пл}}.$$

Дополняя линзу зонной пластинкой, получим, следовательно, изменение фокусного расстояния $\Delta F = F_с - F_л$, для которого

$$\Delta F = \frac{F_с F_л}{F_{пл}}. \qquad (25)$$

Если изменение невелико, то $\Delta F = \frac{F_л^2}{F_{пл}}$.

Как в случае системы вогнутое зеркало — зонная пластинка, для заметного смещения фокуса линзы достаточно последовательно с ней поставить зонную пластинку со значительно бо́льшим фокусным расстоянием, чем у применяемой линзы.

Удобно сочетать менисковую собирательную линзу с вогнутой зонной диафрагмой, работающей на просвет (рис. 15). Изготовление диафрагмы легко выполнимо, например, путём нанесения на вогнутую поверхность линзы сплошного слоя непрозрачного отражающего покрытия и последующего удаления его резцом с соответствующих участков поверхности. Такое устройство может работать и в проходящем, и в отражённом свете.

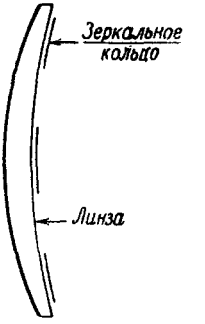

Рис. 15. Менисковая линза с зонной диафрагмой.

Оптические свойства зонной диафрагмы, нанесённой на линзу, совпадают со свойствами вогнутой отражательной диафрагмы, рассмотренной выше. В отличие от системы двух линз, система линза — зонная пластинка имеет, помимо геометрического фокуса, также и дополнительные зонные фокусы.

Нами был изготовлен один образец комбинированной сферической зонной пластинки. Фокусное расстояние диафрагмы для середины видимой области спектра равнялось 50 *м*. Диаметр линзы был 10 *см*. Радиус кривизны вогнутой посеребрённой поверхности — 1 *м*. Радиус кривизны выпуклой поверхности был выбран с таким расчётом, чтобы главное фокусное расстояние линзы $F_л$ было равно 2 *м*. Тогда согласно формуле (25) фокусное расстояние системы $F_с$ должно отличаться на 4% от $F_л$.

При этих условиях ещё легко наблюдать три ярких фокуса системы, если в качестве источника света выбрать объект, структура которого благоприятна для острой наводки на резкость изображения. Таким объектом может служить, например, спиральная нить лампочки накаливания.

Опыты с комбинированной сферической зонной пластинкой состояли в наблюдении и фотографировании изображения в «геометрическом» и двух «зонных» фокусах системы первого порядка. Результаты измерения фокусных расстояний системы оказались в хорошем согласии с формулой (25).

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Г. С. Ландсберг, Оптика, стр. 92, Гостехиздат, 1947; Р. Вуд, Физическая оптика, стр. 52, ОНТИ, 1936.
2. Ora E. Myers, American Journal of Physics **19**, 359—365 (1951).