

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК**НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ
ФЛУКТУАЦИЙ****В. Л. Гинзбург****ВВЕДЕНИЕ**

Электрические флуктуации представляют, как известно, большой научный и практический интерес и в то же время не могут ещё считаться всесторонне изученными. Понятно поэтому, что теория электрических флуктуаций до сих пор привлекает к себе внимание, причём это относится и к такому основному в рассматриваемой области положению, как формула Найквиста. В последнее время автор столкнулся с тремя относящимися сюда вопросами: об особенностях электрических флуктуаций вблизи точек фазового перехода второго рода (точек Кюри), о применении к электрическим флуктуациям термодинамики и о квантовом обобщении формулы Найквиста. Все эти вопросы представляются не лишёнными интереса, и вместе с тем их понимание может, как нам кажется, быть доведено до известной ясности. Рассмотрению этих трёх вопросов и посвящена настоящая статья, носящая в основном методический характер. По последней причине автор стремился избегать излишней краткости изложения.

1. КЛАССИЧЕСКАЯ ФОРМУЛА НАЙКВИСТА

Для целей дальнейшего изложения необходимо остановиться сначала на определении основных величин, используемых в теории электрических флуктуаций, и на выводе формулы Найквиста. При этом сейчас речь будет идти о той хорошо известной форме формулы Найквиста, которая справедлива только при пренебрежении квантовыми эффектами.

Тепловое движение в некотором электрическом контуре приводит к тому, что даже при отсутствии внешней э. д. с. в контуре течёт ток $I(t)$. Мгновенное значение этого тока быстро меняется и по величине и по направлению, в силу чего интерес

представляет не величина $I(t)$, а её средний квадрат $\overline{I^2}$ и спектральная плотность $|I_\omega|^2$, определяемые соотношениями:

$$\overline{I^2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T I^2 dt = 4\pi \int_0^\infty |I_\omega|^2 d\omega, \quad (1,1)$$

$$|I_\omega|^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{4\pi^2 T} \left| \int_0^T I(t) e^{-i\omega t} dt \right|^2. \quad (1,2)$$

Определять величину $|I_\omega|^2$ как некоторый предел приходится потому, что $I(t)$ не разлагается в интеграл Фурье (подробнее см. например¹, § 117, где определение величин типа $|I_\omega|^2$ отличается от (1,2) множителем $4\pi^2$).

В ряде случаев оказывается удобным определять плотность $|I_\omega|^2$ не непосредственно, а выражая её через плотность $|\mathcal{E}_\omega|^2$ флуктуационной электродвижущей силы $\mathcal{E}(t)$:

$$\left. \begin{aligned} |\mathcal{E}_\omega|^2 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{4\pi^2 T} \left| \int_0^T \mathcal{E}(t) e^{-i\omega t} dt \right|^2, \\ \overline{\mathcal{E}^2} &= 4\pi \int_0^\infty |\mathcal{E}_\omega|^2 d\omega = \int_0^\infty w(\omega) d\omega = \int_0^\infty w(\nu) d\nu, \\ w(\omega) &= \frac{w(\nu)}{2\pi} = 4\pi |\mathcal{E}_\omega|^2, \end{aligned} \right\} \quad (1,3)$$

где частота $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$ введена потому, что на практике при обсуждении разбираемых вопросов она используется чаще, чем ω . Флуктуационная э. д. с. $\mathcal{E}(t)$ по определению есть э. д. с., необходимая для того, чтобы вызвать в контуре флуктуационный ток $I(t)$. Но в рамках квазистационарного приближения, которым мы ограничиваемся, ток $I(t)$ не отличается в принципе от тока, возникающего в контуре под влиянием какой-нибудь внешней э. д. с. Поэтому если, как это будет предполагаться, система (контур) линейна, т. е. при наличии э. д. с. $\mathcal{E}(\omega)$, изменяющейся по закону $e^{i\omega t}$, ток в системе равен $I(\omega) = \frac{\mathcal{E}(\omega)}{Z(\omega)}$, то аналогичное соотношение связывает также $\mathcal{E}_\omega$ и I_ω :

$$|I_\omega|^2 = \frac{|\mathcal{E}_\omega|^2}{|Z_\omega|^2} = \frac{4\pi w(\omega)}{|Z(\omega)|^2}. \quad (1,4)$$

В простейшем случае, когда рассматриваемая система есть контур с сопротивлением R , ёмкостью C и самоиндукцией L , импеданс $Z = R + i \left(L\omega - \frac{1}{\omega C} \right)$ (для определённости ниже часто будет идти речь именно о таком контуре). В общем же случае ниже под R следует понимать $\text{Re } Z$. Если мы интересуемся не током I , а зарядом на конденсаторе, входящем в контур, то в рассматриваемом квазистационарном случае

$$|q_\omega|^2 = \frac{|I_\omega|^2}{\omega^2}, \quad \overline{q^2} = 4\pi \int_0^\infty |q_\omega|^2 d\omega, \quad (1,5)$$

где $\overline{q^2}$ — средний квадрат заряда на конденсаторе. Импеданс системы $Z(\omega)$ можно считать известным, или во всяком случае его определение не имеет отношения к вопросу о флуктуациях. Таким образом, как ясно из (1,4) и (1,5), задача теории электрических флуктуаций в линейных системах сводится к нахождению функции $w(\omega)$.

Спектральная плотность флуктуационной э. д. с. $w(\omega)$ определяется характером теплового движения в системе и в самом общем случае, конечно, определена быть не может. Однако функцию $w(\omega)$ можно найти² в важнейшем частном случае, когда система находится в состоянии термодинамического равновесия^{*)}. Для этой цели наиболее удобно установить вначале одно общее свойство функции $w(\omega)$ в равновесном состоянии. Именно, оказывается, что в этом случае величина $w(\omega)$ для системы с импедансом $Z(\omega)$ есть произведение $R(\omega) = \text{Re } Z$ на некоторую универсальную (т. е. не зависящую от свойств контура) функцию частоты ω и температуры системы T :

$$w(\omega) = R(\omega) \cdot f(\omega, T). \quad (1,6)$$

Для доказательства формулы (1,6) рассматривают замкнутую цепь, состоящую из двух двухполюсников, находящихся в термостатах с одинаковой температурой T . В состоянии термодинамического равновесия средняя мощность P_{12} , отдаваемая первым двухполюсником второму, должна быть равна средней мощности P_{21} , отдаваемой вторым двухполюсником первому. Но с другой стороны, например, средняя мощность $P_{12} = \overline{I_1(t) V_1(t)}$, где черта означает усреднение по времени, I_1 — ток в цепи, создаваемый флуктуационной э. д. с. $\mathcal{E}_1$, действующей в первом двухполюснике, и V_1 — соответствующая этому току разность потенциалов на вто-

^{*)} Разумеется представляют также интерес как неравновесные флуктуации, так и равновесные флуктуации в нелинейных системах. Однако никаких результатов в этой области или вообще нет, или во всяком случае они неизвестны автору. (Уже после того как настоящая статья была написана, появилось несколько работ, посвящённых флуктуациям в нелинейных системах; см. J. Appl. Phys. 22, 1143, 1153, 1211 (1951).)

ром двухполюснике. Поэтому, как легко видеть, используя введенные выше выражения:

$$P_{12} = \int_0^{\infty} \frac{R_2 w_1(\omega) d\omega}{|Z|^2}, \quad P_{21} = \int_0^{\infty} \frac{R_1 w_2(\omega) d\omega}{|Z|^2}, \quad (1,7)$$

где Z_1 и Z_2 — импедансы двухполюсников 1 и 2, $R_1 = \text{Re } Z_1$, $R_2 = \text{Re } Z_2$, $Z = Z_1 + Z_2$ — импеданс всей цепи и $w_{1,2}$ — спектральные плотности флуктуационной э. д. с. соответственно в двухполюсниках 1 и 2. Приравнявая выражения P_{12} и P_{21} и учитывая, что это равенство должно иметь место для любых двухполюсников, приходим к (1,6), т. е. к заключению, что для любого двух-

полюсника 1, 2, ..., k $\frac{w_1}{R_1} = \frac{w_2}{R_2} = \dots = \frac{w_i}{R_i} = f(\omega, T)$, где f — универсальная функция ω и T . На соотношении (1,6) базировался в своём выводе формулы для $w(\omega)$ и сам Найквист²; более подробно и очень ясно оно доказано в § 4 статьи Г. С. Горелика³.

Универсальность функции $f(\omega, T)$ позволяет для её нахождения рассмотреть какую-нибудь одну простейшую («пробную») систему. Найквист для этой цели рассматривал двухпроводную линию. Иногда в качестве «пробной» системы выбирают антенну, находящуюся в поле теплового излучения. По нашему мнению, проще и удобнее всего в качестве «пробной» системы взять обыкновенный электрический RCL -контур со слабым затуханием.

Средняя электрическая энергия $\bar{U}$ во входящем в состав RCL -контура конденсаторе равна

$$\begin{aligned} \bar{U} &= \frac{q^2}{2C} = \frac{2\pi}{C} \int_0^{\infty} |q_{\omega}|^2 d\omega = \frac{2\pi}{C} \int_0^{\infty} \frac{|\epsilon_{\omega}|^2 d\omega}{\omega^2 |Z(\omega)|^2} = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{C w(\omega) d\omega}{R^2 C^2 \omega^2 + (LC \omega^2 - 1)^2}. \end{aligned} \quad (1,8)$$

В состоянии термодинамического равновесия, с одной стороны, $w = R(\omega) \cdot f(\omega, T)$ и, с другой стороны, в рамках классической теории средняя энергия в конденсаторе, вполне аналогичная средней потенциальной энергии осциллятора, равна $\frac{kT}{2}$, где $k = 1,38 \cdot 10^{-16}$ эрг/градус. Далее, для достаточно слабо затухающего контура функция $\frac{CR}{R^2 C^2 \omega^2 + (LC \omega^2 - 1)^2}$, стоящая под интегралом в (1,8) после подстановки (1,6), является очень острой дельта-образной функцией с максимумом при $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ (ω_0 есть собственная частота контура). Поэтому можно положить $R(\omega) = R(\omega_0)$ и $f = f(\omega_0, T)$, после чего интеграл оказывается

равным $\frac{\pi}{4}$ *). В результате получаем $\frac{kT}{2} = \frac{\pi f(\omega_0 T)}{4}$, и, так как частота ω_0 может быть любой, $f(\omega, T) = \frac{2kT}{\pi}$ и

$$w(\omega) = R(\omega) \cdot f(\omega, T) = \frac{2}{\pi} R(\omega) \cdot kT \quad (1,9)$$

или

$$w(\nu) = 2\pi w(\omega) = 4R(\nu) \cdot kT. \quad (1,9')$$

Выражение (1,9) и есть формула Найквиста, применимая в пределах справедливости классической теории. По этой последней причине формулу (1,9), которая до сих пор только и использовалась на практике, будем называть классической формулой Найквиста. Тот факт, что спектральная плотность флуктуационной э. д. с. $w(\omega)$ даже в состоянии термодинамического равновесия зависит от сопротивления R , характеризующего скорость диссипации энергии рассматриваемой системы, выведенной из состояния равновесия, физически вполне понятен. Действительно, если, например, в металле в силу флуктуации в распределении электронов по скоростям пошёл некоторый флуктуационный ток, то, поскольку этот ток принципиально не отличается от всякого другого то-

*) Имея в виду дальнейшее, подчеркнём, что при любых значениях параметра $\alpha = \frac{RC}{\sqrt{LC}}$ получающийся интеграл

$$\frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{RC d\omega}{R^2 C^2 \omega^2 + (LC \omega^2 - 1)^2} = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\alpha d\eta}{\alpha^2 \eta^2 + (\eta^2 - 1)^2} = \frac{\pi}{4}$$

(здесь $\eta = \sqrt{LC} \cdot \omega$). Вместо рассмотрения электрической энергии $\bar{U} = \frac{q^2}{2C}$ для выяснения вида функции $f(\omega, T)$ можно вычислять среднюю магнитную (кинетическую) энергию

$$\bar{K} = \frac{L \bar{I}^2}{2} = \frac{kT}{2} = \frac{1}{2} \int \frac{C^2 L \omega^2 w(\omega) d\omega}{R^2 C^2 \omega^2 + (LC \omega^2 - 1)^2}.$$

Интеграл

$$\frac{1}{2} \int \frac{C^2 L R \omega^2 d\omega}{R^2 C^2 \omega^2 + (LC \omega^2 - 1)^2} = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\alpha \eta^2 d\eta}{\alpha^2 \eta^2 + (\eta^2 - 1)^2}$$

также равен $\frac{\pi}{4}$ при любом значении α . Указанные интегралы проще всего вычислять, используя теорему о вычетах. При рассмотрении слабо затухающего контура, как это сделано в тексте, интегралы вычисляются сразу же, так как в этом случае

$$\frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\alpha d\eta}{\alpha^2 \eta^2 + (\eta^2 - 1)^2} \approx \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\alpha d\eta}{\alpha^2 + 4(\eta - 1)^2} \approx \frac{\pi}{4}.$$

ка, скорость его затухания, определяющая вид функций $|I_\omega|^2$ и $w(\omega)$, должна зависеть именно от сопротивления $R(\omega)$.

Рассматриваемые электрические флуктуации аналогичны броуновскому движению частиц в газе или жидкости. В частности, флуктуации в колебательном контуре, описываемом уравнением

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = \mathcal{E}, \quad (1,10)$$

вполне аналогичны броуновскому движению осциллятора, для которого

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = F, \quad (1,11)$$

где F — случайная сила ($\overline{F} = 0$). Отсюда ясно, что результаты, полученные для электрической системы, сразу же могут быть перенесены на механическую систему, и наоборот.

Однако в механическом случае термодинамические соображения, приведшие к важной формуле (1,6), никогда не применяются, так как они были бы здесь, по меньшей мере, крайне искусственны. Поэтому вычисление всех величин, аналогичных $|I_\omega|^2$, $w(\omega)$ и т. д., в теории броуновского движения проводится другими методами.

Не останавливаясь на теории броуновского движения (см. 4, 5, 6), приведём прямо соответствующий вывод формулы Найквиста для системы (1,10). Для этого предположим, что флуктуационная э. д. с. имеет характер случайных, мгновенных некоррелированных между собой толчков. В этом случае спектр э. д. с. $\mathcal{E}(t)$ будет непрерывным и не зависящим от частоты [$\mathcal{E}(t)$ представляется в виде суммы δ -функций, а спектр δ -функции не зависит от ω]. Таким образом, принимается, что $w(\omega, R, T, \dots) = w(R, T, \dots)$. Далее, средняя электрическая энергия $\overline{U}$ и средняя магнитная энергия $\overline{K}$, соответствующие средней потенциальной и средней кинетической энергии осциллятора, с одной стороны, равны $\frac{kT}{2}$, а с другой стороны, выражаются через функцию w :

$$\begin{aligned} \overline{U} &= \frac{q^2}{2C} = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{Cw d\omega}{R^2 C^2 \omega^2 + (LC \omega^2 - 1)^2} = \frac{kT}{2} = \overline{K} = \frac{L\dot{I}^2}{2} = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{LC^2 \omega^2 w d\omega}{R^2 C^2 \omega^2 + (LC \omega^2 - 1)^2}. \end{aligned} \quad (1,12)$$

Если функция w не зависит от ω , то в предположении, что от ω не зависят также величины L , C и R , интегралы в (1,12) вычисляются (см. примечание к стр. 352; для нахождения w достаточно, конечно, вычислить один из этих интегралов) и равны

$\frac{\pi \omega}{4R} = \frac{kT}{2}$, откуда для ω получается формула Найквиста (1,9)*. Точнее получается формула Найквиста с $R(\omega) = R = \text{const}$, в то время как в (1,9) сопротивление R может зависеть от частоты. Это ограничение весьма существенно. Уже поэтому первому выводу формулы Найквиста должно быть отдано предпочтение перед вторым.

В заключение этого раздела сделаем ещё одно замечание. Используя формулу Найквиста (1,9), мы можем с помощью выражений для $\bar{U}$ и $\bar{K}$ [см. (1,12)] вычислить средние электрическую (потенциальную) и магнитную (кинетическую) энергии контура с произвольными не зависящими от ω параметрами L , C и R . В результате при любых значениях этих параметров получаем

$$\bar{U} = \bar{K} = \frac{kT}{2}. \quad (1,13)$$

На первый взгляд может показаться, что этот вывод совершенно очевиден в силу справедливой в классической статистике теоремы о равномерном распределении энергии по степеням свободы (см. например⁶ § 15 или¹ § 44). Это, однако, не вполне так. Дело в том, что каноническое распределение для «системы в термостате», используемое при доказательстве закона равнораспределения, справедливо, вообще говоря, только если «система» слабо взаимодействует с термостатом, так что соответствующей энергией взаимодействия можно пренебречь. В нашем случае «система» характеризуется некоторой макроскопической координатой q или x [см. (1,10) и (1,11)], а её взаимодействие с термостатом определяется значением сопротивления R или коэффициента r . Термин «система» помещён при этом в кавычки потому, что раньше в систему (без кавычек) включался также термостат. Поэтому во избежание путаницы вместо «системы» будем говорить о подсистеме — макроскопической части всей системы, части, изменение энергии которой происходит только в результате взаимодействия с другими частями системы. Например, в случае маятника, движущегося в газе, координатой x является отсчитываемая от положения равновесия координата центра тяжести груза маятника (масса груза есть m). Роль термостата выполняет газ, окружающий маятник, а трение обусловлено взаимодействием подсистемы — груза — с термостатом — газом, — сводящимся к ударам молекул газа о груз. В случае контура подсистемой являются поля в конденсаторе и катушке самоиндукции, роль x играет заряд на конденсаторе q , термостатом можно считать сам материал проводников, а сопро-

*) Заметим, что использованное в (1,12) равенство $\bar{U} = \bar{K} = \frac{kT}{2}$ для сильно затухающего контура отнюдь не самоочевидно, но при условии $R = \text{const}$ оно фактически имеет место (см. конец этого раздела и раздел 3).

тивление приводит к переходу электромагнитной энергии в тепловое движение в проводниках.

Если сопротивление контура так мало, что за время колебания в контуре его энергия мало меняется, т. е. если

$$\frac{R}{L} \ll \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0, \quad (1,14)$$

то против применения формул статистики и, следовательно, равенств (1,13) не может быть никаких возражений *). Но при несоблюдении неравенства (1,14), когда энергия подсистемы сильно меняется за время одного периода, возможность пренебречь энергией взаимодействия а priori совершенно не ясна. Поэтому, считая, например, что при изменении координаты центра тяжести маятника на величину x потенциальная или, точнее, свободная энергия всего маятника и окружающей среды с любой вязкостью изменяется только на величину $U = \frac{kx^2}{2}$, мы делаем дополнительное предположение; то же относится к электрическому случаю. Предположение, о котором идёт речь, означает, в частности, что подсистема как таковая по существу остаётся неизменной вне зависимости от величины затухания, т. е. скорости перекачки энергии от подсистемы к термостату.

В рамках классической теории пренебрежение энергией взаимодействия при большом затухании в принципе возможно и, как следует из опыта, часто является практически допустимым. Энергией взаимодействия можно пренебречь, если силы взаимодействия подсистемы с её окружением носят характер мгновенных толчков. Например, в газе из твёрдых шариков средняя энергия взаимодействия (средняя потенциальная энергия) равна нулю, несмотря на то, что при соударениях происходит передача энергии. Это утверждение о равенстве нулю средней потенциальной энергии в случае мгновенных соударений, т. е. когда энергия взаимодействия между частицами очень резко зависит от их взаимного расстояния, следует из теоремы вириала (см.¹ стр. 111). Оно вполне ясно также из простых физических соображений: в момент столкновения, когда, скажем, обе частицы остановились, мгновенная потенциальная энергия конечна и равна кинетической энергии частиц до удара, откуда следует, что при стремлении времени соударения к нулю средняя по времени потенциальная энергия также стремится к нулю.

*) Поэтому использование при выводе формулы (1,9) соотношения

$$\bar{U} = \frac{q^2}{2C} = \frac{kT}{2} \quad \text{или} \quad \bar{K} = \frac{L\bar{I}^2}{2} = \frac{kT}{2}$$

для слабо затухающего контура заведомо законно.

Итак, в случае мгновенных сил соотношение (1,13) должно быть справедливо. Этот вывод находится в полном согласии со сделанным выше на основе формулы Найквиста и предположения о независимости от частоты сопротивления R , так как именно для мгновенных толчков сопротивление R не может зависеть от ω (для мгновенных толчков, как указано выше, величина $w(\omega) = \frac{2}{\pi} R(\omega) \cdot kT$ не зависит от ω , откуда и следует, что в этом случае $R(\omega) = \text{const}$).

Если же $R = R(\omega)$, то из формулы Найквиста и выражений для $\bar{K}$ и $\bar{U}$ через C , L и R [см. (1,12)] соотношения (1,13) не получаются. В этом случае вся ситуация вообще усложняется, так как уравнение движения для заряда q уже нельзя написать в виде (1,10). Вместо этого уравнения, предполагая для простоты, что $q(t)$

разлагается в интеграл Фурье $q(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} q_{\omega} e^{i\omega t} d\omega$, имеем:

$$\left. \begin{aligned} L\ddot{q} + \frac{q}{C} + \mathcal{E}(R) &= \mathcal{E}, \\ \mathcal{E}(R) &= \int_{-\infty}^{+\infty} i\omega R(\omega) q_{\omega} e^{i\omega t} d\omega = \\ &= \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{i\omega}{2\pi} R(\omega) q(t-\tau) e^{i\omega\tau} d\omega d\tau, \end{aligned} \right\} \quad (1,15)$$

где $\mathcal{E}$ — флуктуационная э. д. с.

Интегродифференциальное уравнение (1,15) при $R \neq \text{const}$ не сводится, очевидно, к механическому уравнению для частицы с одной степенью свободы, и поэтому вопрос о применении статистики к величинам $\bar{K}$ и $\bar{U}$, связанным с «квазистепенью свободы» q , нуждается в особом рассмотрении*). Другой стороной того же вопроса является тот факт, что сопротивление R зависит от ω для немгновенных толчков, а в этом случае, вообще говоря, нельзя пренебречь энергией взаимодействия подсистемы с её окружением, и поэтому нельзя также без дальнейшего пользоваться всеми ре-

*) В этой связи тот факт, что в механическом случае при $r = r(\omega)$ величина $\bar{K}$, вычисляемая с помощью формулы (1,9), не равна $\frac{kT}{2}$, не противоречит строго следующему из классической статистики выводу о равенстве кинетической энергии $\bar{K} = \frac{mv^2}{2}$ значению $\frac{kT}{2}$ вне зависимости от характера взаимодействия рассматриваемой частицы массы m с её окружением.

зультатами статистической механики. Останавливаться на этом, не лишённом интереса круге вопросов подробнее мы здесь не будем, так как для дальнейшего важно было лишь выяснить характер и смысл условий, при которых для электрического контура справедливо соотношение (1,13): $\bar{U} = \bar{K} = \frac{kT}{2}$.

2. КВАНТОВАЯ ФОРМУЛА НАЙКВИСТА

Классическая формула Найквиста (1,9) справедлива только при пренебрежении квантовыми эффектами, т. е. если для рассматриваемой частоты ω соблюдается условие

$$\hbar\omega \ll kT, \quad (2,1)$$

или

$$\omega \ll 1,3 \cdot 10^{11} T. \quad (2,1')$$

Даже для частоты $\omega = 2 \cdot 10^{12}$ ($\lambda = \frac{2\pi c}{\omega} \approx 1$ мм) это условие означает, что $T \gg 15^\circ \text{ К}$. Если же, например, $\omega = 6 \cdot 10^{10}$ ($\lambda \approx 3$ см), то для применения классических формул нужно, чтобы $T \gg 0,5^\circ \text{ К}$.

Таким образом, в радиодиапазоне квантовые эффекты могут сильно сказаться на характере электрических флуктуаций в проводниках только при низких температурах. При комнатной температуре $T \approx 300^\circ \text{ К}$ учитывать квантовые поправки нужно лишь при переходе к волнам короче 1 мм или если бы возник вопрос о наблюдении очень малых отклонений от классической формулы Найквиста.

Несмотря на сказанное, вряд ли можно сомневаться в желательности получения квантовой формулы Найквиста, т. е. формулы, пригодной для любых частот ω и температур T и переходящей в классическую формулу (1,9) при условии (2,1). Ясно, что, только имея такую квантовую формулу, можно для данных ω и T количественно узнать точность формулы (1,9), не говоря уже о том, что область низких температур и очень коротких волн, где классической формулой совсем нельзя пользоваться, также представляет определённый интерес. Квантовую формулу Найквиста можно сразу же получить, поступая точно так же, как при выводе классической формулы, но учитывая, что средняя потенциальная и средняя кинетическая энергия слабо затухающего контура (осциллятора) в квантовом случае равна не $\frac{kT}{2}$, а известному выражению

$$\bar{U} = \bar{K} = \frac{1}{2} \left(\frac{\hbar\omega_0}{2} + \frac{\hbar\omega_0}{e^{\hbar\omega_0/kT} - 1} \right), \quad (2,2)$$

где $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ — собственная частота контура.

Таким образом, для достаточно слабо затухающего контура из (1,8) получаем

$$\frac{\pi}{4} f(\omega_0, T) = \frac{1}{2} \left(\frac{\hbar \omega_0}{2} + \frac{\hbar \omega_0}{e^{\frac{\hbar \omega_0}{kT}} - 1} \right)$$

и учитывая возможность выбрать контур с любой частотой ω_0 и универсальность функции f , находим квантовую формулу Найквиста, пригодную при любом $R(\omega)$:

$$\omega(\omega) = R(\omega) \cdot f(\omega, T) = \frac{2}{\pi} R(\omega) \left\{ \frac{\hbar \omega}{2} + \frac{\hbar \omega}{e^{\frac{\hbar \omega}{kT}} - 1} \right\}. \quad (2,3)$$

При условии (2,1) эта формула переходит в (1,9), как это и должно быть. Формула (2,3), правда, без нулевой энергии $\frac{\hbar \omega}{2}$, была получена ещё Найквистом² также по существу путём замены в (1,9) средней энергии осциллятора $\bar{E} = kT$ на квантовое выражение

$$E = \bar{K} + \bar{U} = \frac{\hbar \omega_0}{2} + \frac{\hbar \omega_0}{e^{\frac{\hbar \omega_0}{kT}} - 1}.$$

Приведённый вывод не может, однако, считаться удовлетворительным без дальнейших пояснений. Дело в том, что, помимо классического выражения для средней энергии осциллятора, при выводе классической формулы Найквиста (1,9) использовались понятие импеданса $Z(\omega)$ [см. (1,4)] и конкретное выражение этого импеданса через параметры контура L , C и R . Вместе с тем импеданс обычно вводится, отправляясь от уравнения движения (1,10), носящего классический характер. Другими словами, возникает вопрос о том, ограничивается ли классический элемент в приведённом в разделе 1 выводе формулы Найквиста только предположением о равенстве средней энергии контура классическому значению kT ?

Для разрешения этого вопроса выясним, как нужно рассматривать некоторый электрический контур (систему) в квантовой теории.

Уже в классической области введение сопротивления, т. е. диссипативной силы Rq в уравнении движения (1,10), является результатом некоторого усреднения микроскопической картины, в которой никакого сопротивления нет, и все силы носят консервативный характер. Проведение подобного усреднения и введение силы Rq возможно лишь при условии, что система (колебательный контур, маятник + газ) имеет очень большое число степеней свободы, т. е. является макроскопической системой

в том смысле, который вкладывается в это понятие в статистической физике. С точки зрения квантовой теории это значит, что уровни энергии системы расположены очень плотно, очень близко один к другому *). Если оператор Гамильтона для такой системы при отсутствии внешнего возмущения есть $H_0(x, p)$, то уровни энергии системы E_n определяются из уравнения

$$H_0 \Psi_n(x) = E_n \Psi_n(x), \quad (2,4)$$

где $x, p = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$ — совокупность всех координат и импульсов частиц, входящих в систему.

Пусть теперь на входящий в состав системы проводник длиной l подано внешнее напряжение $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \sin \omega t$. Тогда напряжённость электрического поля в проводнике $E = \frac{\mathcal{E}}{l}$, а энергия возмущения равна

$$V = \sum_k e_k x_k E = \mathcal{E} Q,$$

где e_k и x_k — заряд и координата k -й частицы и $Q = \sum_k \frac{e_k x_k}{l}$.

Гамильтониан системы при наличии возмущения есть $H_0 + V$, а её поведение во времени определяется уравнением Шредингера:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = (H_0 + V) \Psi = H_0 \Psi + \mathcal{E}_0 \sin \omega t \cdot Q \Psi. \quad (2,5)$$

Для решения этого уравнения используется нестационарная теория возмущений, излагаемая во всех курсах квантовой механики (см., например, ⁷, § 40). По последней причине мы не будем останавливаться на деталях, но тем не менее приведём все основные выражения, необходимые для понимания дальнейшего. Исходным моментом нестационарной теории возмущений является представление функции $\Psi(x, t)$ в виде разложения в ряд по функциям невозмущённой задачи Ψ_k :

$$\Psi = \sum_k a_k(t) \Psi_k(x) e^{\frac{iE_k t}{\hbar}}. \quad (2,6)$$

*) Во избежание недоразумений подчеркнём, что, как уже указывалось в разделе I, в систему включаются не только её часть, характеризующаяся некоторой координатой q или x (эту часть называем «подсистемой»), но и другие части (газ в случае маятника, проводники в случае контура), взаимодействующие с «подсистемой» и приводящие к затуханию её колебаний. Уровни подсистемы, если отвлечься от её взаимодействия с другими частями системы, могут быть расположены на любом расстоянии один от другого.

Подставляя (2,6) в (2,5), получаем систему уравнений для $a_k(t)$:

$$\left. \begin{aligned} i\hbar \frac{da_k}{dt} &= \sum_n V_{kn} a_n e^{\frac{i}{\hbar}(E_k - E_n)t}, \\ V_{kn} &= \int \Psi_k^*(x) V(x, t) \Psi_n(x) dx. \end{aligned} \right\} \quad (2,7)$$

Если в момент $t=0$ система находится в состоянии n , т. е. при $t=0$

$$a_k = a_k^{(0)} = \delta_{kn},$$

то в первом приближении

$$i\hbar \frac{da_k^{(1)}}{dt} = V_{kn} e^{\frac{i}{\hbar}(E_k - E_n)t} \quad \text{и} \quad a_k^{(1)} = -\frac{i}{\hbar} \int_0^t V_{kn} e^{i\omega_{kn}t'} dt',$$

где

$$\omega_{kn} = \frac{E_k - E_n}{\hbar}.$$

В случае (2,5), когда

$$V = \mathcal{E}_0 Q \sin \omega t,$$

имеем:

$$\left. \begin{aligned} a_k^{(1)} &= -\frac{\mathcal{E}_0 Q_{kn}}{2i} \left[\frac{e^{i(\omega_{kn} - \omega)t} - 1}{\hbar(\omega_{kn} - \omega)} + \frac{e^{i(\omega_{kn} + \omega)t} - 1}{\hbar(\omega_{kn} + \omega)} \right], \\ Q_{kn} &= \int \Psi_k^* Q \Psi_n dx, \quad \omega_{kn} = \frac{E_k - E_n}{\hbar}. \end{aligned} \right\} \quad (2,8)$$

Под влиянием возмущения система переходит из исходного состояния n в другие состояния, причём в первую очередь в состояния, для которых частота ω близка к $\pm \omega_{kn}$. В случае достаточно плотных, практически непрерывных уровней играют роль только переходы на уровни, для которых с большой точностью удовлетворяется условие резонанса $\omega = \pm \omega_{kn}$, причём вероятность перехода системы с уровня n на эти уровни пропорциональна времени t , а вероятность перехода в единицу времени равна

$$W_n = \frac{\pi}{2\hbar} \mathcal{E}_0^2 \{ |\langle E_n + \hbar\omega | Q | E_n \rangle|^2 \rho(E_n + \hbar\omega) + |\langle E_n - \hbar\omega | Q | E_n \rangle|^2 \rho(E_n - \hbar\omega) \}, \quad (2,9)$$

где $\rho(E) dE$ — плотность энергетических уровней в интервале $E, E + dE$, и матричные элементы Q_{kn} записаны в более удобном виде, так что $\langle E_n \pm \hbar\omega | Q | E_n \rangle \equiv Q_{kn}$ и $E_k = E_n \pm \hbar\omega$.

При переходах из состояния E_n в состояние $E_n = E_n + \hbar\omega$ система поглощает квант $\hbar\omega$, при переходе в состояние $E_n = E_n - \hbar\omega$ система теряет энергию $\hbar\omega$. Поэтому полная поглощаемая мощность равна

$$P_n(\omega) = \frac{\pi}{2} \mathcal{E}_0^2 \omega \left\{ |\langle E_n + \hbar\omega | Q | E_n \rangle|^2 \rho(E_n + \hbar\omega) - |\langle E_n - \hbar\omega | Q | E_n \rangle|^2 \rho(E_n - \hbar\omega) \right\}. \quad (2,10)$$

Реальная система и до включения возмущения V при отличной от нуля температуре никогда не находится в каком-нибудь одном состоянии n . Поэтому для нахождения мощности, поглощаемой системой, необходимо усреднить выражение (2,10) по начальным состояниям.

Обозначая статистический вес состояния с энергией E_n через $f(E_n)$, так что $\sum_n f(E_n) = 1$, для поглощаемой мощности получаем:

$$\begin{aligned} P(\omega) = \frac{\pi}{2} \mathcal{E}_0^2 \omega \sum_n f(E_n) \left\{ |\langle E_n + \hbar\omega | Q | E_n \rangle|^2 \rho(E_n + \hbar\omega) - \right. \\ \left. - |\langle E_n - \hbar\omega | Q | E_n \rangle|^2 \rho(E_n - \hbar\omega) \right\} = \\ = \frac{\pi}{2} \mathcal{E}_0^2 \omega \int_0^\infty \rho(E) f(E) \left\{ |\langle E + \hbar\omega | Q | E \rangle|^2 \rho(E + \hbar\omega) - \right. \\ \left. - |\langle E - \hbar\omega | Q | E \rangle|^2 \rho(E - \hbar\omega) \right\} dE, \end{aligned} \quad (2,11)$$

где учтено, что в интервале dE число уровней равно $\rho(E)dE$ и переход от суммирования к интегрированию возможен в силу большой плотности уровней.

Результат (2,11) находится в полном соответствии с известным выводом теории переменных токов, согласно которому средняя мощность, поглощаемая линейной системой с импедансом $Z(\omega)$ под влиянием напряжения $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \sin \omega t$, пропорциональна $\mathcal{E}_0^2$ и равна

$$P(\omega) = \frac{\mathcal{E}_0^2}{2} \frac{R(\omega)}{|Z(\omega)|^2}, \quad (2,12)$$

где $R = \text{Re } Z$, и импеданс Z определяется из соотношения

$$\mathcal{E} = Z(\omega) I \quad (2,13)$$

при условии, что $\mathcal{E}$ зависит от времени по закону $e^{i\omega t}$. Отсюда ясно, что линейность системы и, следовательно, существование импеданса $Z(\omega)$ имеют место для любой диссипативной системы (системы с плотными уровнями) при единственном условии достаточной малости возмущения, позволяющего ограничиться первым

приближением теории возмущений. К этому заключению можно, разумеется, прийти и не вычисляя поглощаемой системой мощности, а непосредственно устанавливая связь между током и напряжением.

В классической теории полный ток в рассматриваемом проводнике

$$I = \sum_k \frac{e_k \dot{x}_k}{l} = \dot{Q} \equiv \frac{dQ}{dt} \quad (\text{например, если заряды и скорости всех}$$

частиц одинаковы и равны e и $\dot{x}$, то $\sum e_k \dot{x}_k = eN\dot{x}$, где N —полное число частиц в проводе с длиной l ; сила же тока равна $en\dot{x}$, где $n = \frac{N}{l}$ —число частиц на единицу длины). В квантовой теории сила тока дается тем же выражением, но под $\dot{x}_k$ нужно понимать среднюю скорость

$$\begin{aligned} \frac{dx_k}{dt} &= \frac{d}{dt} \int \Psi^* x_k \Psi dx = \frac{i}{\hbar} \int \Psi^* (H_0 x_k - x_k H_0) \Psi dx = \\ &= \int \Psi^* \frac{p_k}{m_k} \Psi dx, \end{aligned}$$

где m_k —масса и p_k —импульс k -й частицы. Если до включения возмущения система находилась в состоянии Ψ_n , в котором ток равен нулю, то после включения возмущения в первом приближении теории возмущений

$$\Psi = \Psi_n + \Psi^{(1)}$$

и ток

$$I = \dot{Q} = \frac{d}{dt} \int \Psi^* Q \Psi dx = \frac{d}{dt} \int (\Psi_n^* Q \Psi^{(1)} + \Psi^{(1)*} Q \Psi_n) dx,$$

где

$$\Psi^{(1)} = \sum a_k^{(1)} \Psi_k e^{\frac{i}{\hbar} E_k t}$$

[см. (2,6) и (2,8)]. Поскольку коэффициенты $a_k^{(1)}$ согласно (2,8) пропорциональны $\mathcal{E}_0$, то же относится к току I . При комплексной форме записи эта пропорциональность может быть записана в виде (2,13), что мы и хотели показать*). Выписывать явно громоздкое общее выражение для $Z(\omega)$ здесь не нужно, так как оно ниже не встретится. Что же касается входящей во все выражения

*) Для простоты выражение для тока I было выписано в предположении, что при $t=0$ система находится в состоянии, описываемом функцией Ψ_n . Но вывод о существовании импеданса является, очевидно, весьма общим и сохраняется при описании системы в начальном состоянии не только любой функцией Ψ , он и некоторой статистической матрицей (см. 1).

величины $\frac{R(\omega)}{|Z(\omega)|^2}$, то, сравнивая (2,11) и (2,12), получаем:

$$\frac{R(\omega)}{|Z(\omega)|^2} = \pi\omega \int_0^\infty \rho(E) f(E) \{ |\langle E + \hbar\omega | Q | E \rangle|^2 \rho(E + \hbar\omega) - |\langle E - \hbar\omega | Q | E \rangle|^2 \rho(E - \hbar\omega) \} dE. \quad (2,14)$$

Если действующее на систему внешнее поле не является синусоидальным, то все приведённые результаты остаются в силе для Фурье-компонент величин $\mathcal{E}$ и $\dot{Q} = I$. При этом вместо величины $\frac{1}{2} \mathcal{E}_0^2$ фигурирует вводимая согласно (1,3) спектральная плотность напряжения $w(\omega)$ [если $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \sin \omega t$, то $w(\omega') = \frac{\mathcal{E}_0^2}{2} \delta(\omega - \omega')$] и полная поглощаемая мощность равна

$$P = \int \frac{R(\omega) w(\omega)}{|Z|^2} d\omega,$$

где величина $\frac{R(\omega)}{|Z(\omega)|^2}$ определяется формулой (2,14).

Выясненная возможность введения понятия импеданса в рамках квантовой теории в известной мере тривиальна, так как квантовый подход является наиболее общим, и если из опыта известно, что для данной системы имеет место связь (2,13), то не приходится сомневаться в принципиальной возможности получить эту связь и в результате детального квантовомеханического анализа поведения системы. Тем не менее приведённое рассмотрение представляется полезным для лучшего понимания всего вопроса и, в частности, с точки зрения выявления условий применимости понятия о линейной диссипативной системе.

В силу сказанного ясно, что важная теорема (1,6), при выводе которой не были использованы никакие конкретные свойства импеданса, остаётся справедливой и в квантовой области. Отсюда следует, далее, что для получения квантовой формулы Найквиста можно рассмотреть любую, простейшую, «пробную» линейную диссипативную систему. В качестве такой системы, как и в классическом случае, выберем колебательный контур (осциллятор) со сколь угодно малым затуханием.

При отсутствии затухания оператор Гамильтона для осциллятора, находящегося под действием не зависящей от координат силы $F(t)$, имеет вид

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} + \frac{kx^2}{2} - F\left(\frac{1}{2}\right),$$

где $p = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$. Далее, для среднего значения $x = \int \Psi^* x \Psi dx$ для системы с любой потенциальной энергией $V(x)$ имеет место

уравнение $\ddot{m}\bar{x} = -\frac{\partial V(\bar{x})}{\partial \bar{x}}$ (это положение иногда называют теоремой Эренфеста). В случае, когда функция $V(x)$ квадратична относительно x , очевидно,

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V(\bar{x})}{\partial \bar{x}} \equiv \left[\frac{\partial V(x)}{\partial x} \right]_{x=\bar{x}}$$

и для $\bar{x}$ имеет место классическое уравнение движения, т. е. в нашем случае уравнение $\ddot{m}\bar{x} + k\bar{x} = F(t)$. Отсюда если $F = F_0 e^{i\omega t}$, то $\bar{x} = \frac{F}{i(\omega m - \frac{k}{\omega})}$, и так как по определению $F = Z(\omega) \dot{x}$,

то для импеданса получаем выражение $Z(\omega) = i\left(m - \frac{k}{\omega}\right)$.

В электрическом случае роль F играет напряжение $\mathcal{E}$, и нужно заменить m на L и k на $\frac{1}{C}$, т. е. $Z(\omega) = i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$. Случай механического осциллятора был рассмотрен сначала потому, что здесь всё особенно прозрачно. При переходе к электрическому контуру, если не ограничиваться только привычной заменой m и k на L и $\frac{1}{C}$, необходимо также проследить, каким образом для энергии в контуре получается выражение

$$H_0 = \frac{p^2}{2L} + \frac{q^2}{2C} - q\mathcal{E}.$$

Однако в этом пункте нет ничего специфически квантового и останавливаться на нём здесь было бы нецелесообразно*).

Итак, при отсутствии затухания импеданс осциллятора и колебательного контура имеет в квантовой теории точно такое же выражение, как в классической (это обстоятельство широко используется в теории дисперсии). При наличии сколь угодно слабого затухания мнимая часть Z может считаться неизменной, а вещественная часть есть некоторая функция $R(\omega)$, т. е. $Z(\omega) = R(\omega) + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$. Но именно такое выражение использовано в (1,8) при выводе формулы Найквиста, причём, как указано в начале этого раздела, для получения квантовой формулы (2,3) выражение (1,8) нужно

*) Заметим, что в условиях, когда весь заряд можно считать сосредоточенным на пластинах конденсатора, к которому приложено напряжение $\mathcal{E}$, введённая выше величина $Q = \frac{\sum e_k x_k}{l}$ как раз равна заряду одной из пластин конденсатора q , так как в этом случае l есть расстояние между пластинами конденсатора и $\sum e_k x_k = q(x_2 - x_1)$, где q есть сумма $\{e_k\}$, взятая по одной пластине, а x_2 и x_1 — координаты пластин, заряженных соответственно положительным и отрицательным зарядами.

приравнять квантовому выражению (2,2) для средней потенциальной энергии осциллятора (контура).

Совокупность изложенных соображений может считаться вполне строгим обоснованием квантовой формулы Найквиста (2,3). Интересно, что эта формула была недавно выведена другим путём, без использования вспомогательной теоремы (1,6). Соответствующее доказательство, принадлежащее Калену и Вельтону⁸, также представляется вполне убедительным и, кроме того, ценно с методической стороны. Поэтому оно приведено в конце статьи (см. дополнение).

Перейдём к обсуждению некоторых результатов, которые можно получить, опираясь на квантовую формулу Найквиста. Из классической формулы Найквиста (1,9) следует, что средний квадрат флуктуационной э. д. с. $\overline{\mathcal{E}^2}$ равен

$$\overline{\mathcal{E}^2} = \int_0^\infty w(\omega) d\omega = \frac{2}{\pi} kT \int_0^\infty R(\omega) d\omega. \quad (2,15)$$

Если $R = \text{const}$, то $\overline{\mathcal{E}^2} \rightarrow \infty$. Этот результат вполне понятен, поскольку, как указано в разделе 1, предположение о постоянстве R эквивалентно утверждению о мгновенности толчков напряжения; в спектре же мгновенных толчков сколь угодно высокие частоты присутствуют с таким же весом, как и низкие частоты. Фактически, конечно, при достаточно высоких частотах никакие толчки нельзя считать мгновенными; например, если речь идёт об ударах молекул о груз маятника, то длительность соответ-

ствующих толчков $\Delta\tau \approx \frac{a}{v}$, где $v \approx \sqrt{\frac{kT}{m}}$ — тепловая скорость молекул и $a \approx 10^{-8}$ — размер молекулы (для молекул воздуха при $T \approx 300^\circ \text{K}$ $\Delta\tau \approx 10^{-13}$ сек.). Отсюда ясно, что для высоких частот $\omega \gg \Delta\tau$ сопротивление R обязательно будет зависеть от частоты, и в результате интеграл в (2,15) будет сходиться*). При этом использование выражения (2,15) законно лишь в том случае, если для максимальной частоты, существенной для значения интеграла

$\int_0^\infty R(\omega) d\omega$, ещё выполнено условие классичности (2,1). В про-

тивном случае для вычисления нужно употреблять квантовую формулу (2,3), которая обеспечивает конечность зависящей от темпе-

*) Мы отвлекаемся сейчас и ниже от других моментов, могущих препятствовать использованию всех полученных формул при высоких частотах (в первую очередь нужно помнить, что выше везде предполагалось выполненным условие квазистационарности, которое несправедливо для достаточно высоких частот).

ратуры части $\overline{\mathcal{E}^2}$ даже при $R = \text{const}$. Согласно (2,3)

$$\overline{\mathcal{E}^2} = \overline{\mathcal{E}^2(0)} + \overline{\mathcal{E}^2(T)} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty R(\omega) \left\{ \frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1} \right\} d\omega, \quad (2,16)$$

$$\overline{\mathcal{E}^2(T)} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{R(\omega) \hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1} d\omega.$$

Первая часть $\overline{\mathcal{E}^2}$, т. е. величина $\overline{\mathcal{E}^2(0)} = \frac{\hbar}{\pi} \int_0^\infty R(\omega) d\omega$, носит чисто квантовый характер (она является следствием существования нулевых колебаний), не зависит от температуры и не является

поэтому источником «тепловых шумов», которыми обычно интересуются при изучении электрических флуктуаций. Что же касается среднего квадрата тепловой флуктуационной э. д. с. $\overline{\mathcal{E}^2(T)}$, то

при $R = \text{const}$ $\overline{\mathcal{E}^2(T)} = \frac{\pi R}{3\hbar} (kT)^2$, так как $\int_0^\infty \frac{x dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^2}{6}$. В це-

пи, состоящей только из двух проводников, каждый из которых имеет не зависящее от частоты сопротивление R , «флуктуационная мощность», отдаваемая одним проводником, равна

$$P = \int_0^\infty \frac{R\omega d\omega}{|Z|^2} = \frac{1}{4R} \int_0^\infty \omega d\omega = \frac{\overline{\mathcal{E}^2(T)}}{4R} = \frac{\pi}{12\hbar} (kT)^2 =$$

$$= 4,7 \cdot 10^{-6} T^2; \text{ при } T \approx 300^\circ \text{ К } P \approx 0,5 \text{ эрга.}$$

Выпишем теперь квантовые выражения для средней электрической и магнитной энергии в контуре [см. (1,8) и (2,3)]:

$$\overline{U} = \frac{q^2}{2C} = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{CRf(\omega, T) d\omega}{R^2 C^2 \omega^2 + (LC\omega^2 - 1)^2} =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\alpha \left\{ \frac{\hbar\eta}{2\sqrt{LC}} + \frac{\frac{\hbar\eta}{\sqrt{LC}}}{\exp\left(\frac{\hbar\eta}{\sqrt{LC}kT}\right) - 1} \right\}}{\alpha^2 \eta^2 + (\eta^2 - 1)^2} d\eta,$$

$$K = \frac{LI^2}{2} = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{CRLC\omega^2 f(\omega, T) d\omega}{R^2 C^2 \omega^2 + (LC\omega^2 - 1)^2} =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\alpha \eta^2 \left\{ \frac{\hbar\eta}{2\sqrt{LC}} + \frac{\frac{\hbar\eta}{\sqrt{LC}}}{\exp\left(\frac{\hbar\eta}{\sqrt{LC}kT}\right) - 1} \right\}}{\alpha^2 \eta^2 + (\eta^2 - 1)^2} d\eta, \quad (2,17)$$

$$\alpha = \frac{CR}{\sqrt{LC}}, \quad \eta = \sqrt{CL}\omega, \quad \bar{U} = \bar{U}(0) + \bar{U}(T); \quad \bar{K} = \bar{K}(0) + \bar{K}(T).$$

Если контур является острым, т. е. выполнено условие (1,14) $\frac{R(\omega_0)}{L} \ll \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, то для $\bar{U}$ и $\bar{K}$ получается выражение (2,2) для средней энергии гармонического осциллятора — это обстоятельство использовалось при самом выводе квантовой формулы Найквиста (2,3). Подобный слабо затухающий контур классичен, если

$$\hbar \omega_0 = \frac{\hbar}{\sqrt{LC}} \ll kT. \quad (2,18)$$

При этом условии

$$\bar{U} = \bar{K} = \frac{kT}{2}.$$

При неисчезающем затухании какие-нибудь конкретные выводы из формулы (2,17) можно, разумеется, сделать, лишь фиксируя функцию $R(\omega)$ (L и C всегда считаем постоянными). Поэтому ниже будет рассматриваться только важнейший и в то же время простейший случай, когда $R = \text{const}$, т. е. все параметры контура не зависят от частоты.

Не зависящие от температуры T части $\bar{U}$ и $\bar{K}$, т. е. величины $\bar{U}(0)$ и $\bar{K}(0)$, могут быть вычислены в явном виде при любых значениях параметров. Так, при $\alpha < 2$

$$\begin{aligned} \bar{U}(0) &= \frac{\hbar}{2\pi\sqrt{LC}} \int_0^\infty \frac{\alpha \eta d\eta}{\alpha^2 \eta^2 + (\eta^2 - 1)^2} = \\ &= \frac{\hbar}{2\pi\sqrt{LC}} \cdot \frac{1}{\sqrt{4 - \alpha^2}} \left[\frac{\pi}{2} - \arctg \frac{\alpha^2 - 2}{\alpha \sqrt{4 - \alpha^2}} \right] \end{aligned}$$

и при $\alpha = 2$ $\bar{U}(0) = \frac{\hbar}{2\pi\sqrt{LC}}$. Значение $\bar{K}(0)$ при $\alpha \neq 0$ и $R = \text{const}$ бесконечно, так как

$$\bar{K}(0) = \frac{\hbar \alpha}{4\pi\sqrt{LC}} \left[\ln |\eta^4 + (\alpha^2 - 2)\eta^2 + 1| \right]_0^\infty + \frac{2 - \alpha^2}{2} \bar{U}(0).$$

Учёт зависимости R от ω при высоких частотах приведёт, разумеется, к конечности $\bar{K}(0)$. При $\alpha = \frac{CR}{\sqrt{LC}} \rightarrow 0$ в согласии с (2,2)

$$\bar{U}(0) = \bar{K}(0) = \frac{\hbar}{4\sqrt{LC}} = \frac{\hbar \omega_0}{4}^*.$$

*) Если, например, считать, что $R(\omega) = R$ при $\omega < \omega_m = \frac{\eta_m}{\sqrt{LC}}$ и

$R = 0$ при $\omega > \omega_m$, то $\bar{K}(0) = \frac{\hbar \alpha}{4\pi\sqrt{LC}} \ln \left[\eta_m^4 + (\alpha^2 - 2)\eta_m^2 + 1 \right] + \frac{2 - \alpha^2}{2} \bar{U}(0)$, причём значение первой части $\bar{K}(0)$ определяется высокими частотами; при $\alpha \rightarrow 0$ эта часть стремится к нулю.

не равны друг другу и зависят от обоих параметров $\alpha = \frac{CR}{\sqrt{LC}}$ и $\frac{\hbar}{\sqrt{LC}}$. Аналогичное положение имеет место и для представляющих главный интерес частей $\bar{U}$ и $\bar{K}$, зависящих от температуры, т. е. для величин $\overline{U(T)}$ и $\overline{K(T)}$:

$$\left. \begin{aligned} \overline{U(T)} &= \frac{kT}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\alpha \beta \eta d\eta}{(e^{\beta \eta} - 1) [\alpha^2 \eta^2 + (\eta^2 - 1)^2]} = \\ &= T \Phi_u \left(\sqrt{LC} T, \frac{CR}{\sqrt{LC}} \right), \\ \overline{K(T)} &= \frac{kT}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\alpha \beta \eta^3 d\eta}{(e^{\beta \eta} - 1) [\alpha^2 \eta^2 + (\eta^2 - 1)^2]} = \\ &= T \Phi_k \left(\sqrt{LC} T, \frac{CR}{\sqrt{LC}} \right), \\ \alpha &= \frac{CR}{\sqrt{LC}}, \quad \beta = \frac{\hbar}{kT \sqrt{LC}}. \end{aligned} \right\} \quad (2,19)$$

При произвольных α и β выразить функции Φ_u и Φ_k не через интегралы не удастся. Если затухание слабо, так что

$$\alpha = \frac{CR}{\sqrt{LC}} \ll 1 \quad (2,20)$$

[это условие эквивалентно условию (1,14): $\frac{R}{L} \ll \frac{1}{\sqrt{LC}}$], то, как ясно из сказанного ранее,

$$\Phi_u = \Phi_k = \Phi(\sqrt{LC} T) = \frac{k}{2} \cdot \frac{\frac{\hbar}{\sqrt{LC} kT}}{e^{\frac{\hbar}{\sqrt{LC} kT}} - 1}. \quad (2,21)$$

При условии (2,20) и полагая также $\beta = \frac{\hbar}{\sqrt{LC} kT} < 1$, для вычисления интегралов (2,19) можно воспользоваться разложением $\frac{\beta \eta}{e^{\beta \eta} - 1} = 1 - \frac{\beta \eta}{2} + \frac{(\beta \eta)^2}{12} - \dots$. В результате с точностью до

членов порядка β , например для $\overline{U(T)}$, имеем:

$$\begin{aligned}\overline{U(T)} &= \frac{kT}{2} \left\{ 1 - \frac{\hbar}{\pi \sqrt{LC} kT} \frac{1}{\sqrt{4 - \alpha^2}} \left[\frac{\pi}{2} - \arctg \frac{\alpha^2 - 2}{\alpha \sqrt{4 - \alpha^2}} \right] \right\} = \\ &= \frac{kT}{2} \left\{ 1 - \frac{\hbar}{2 \sqrt{LC} kT} - \frac{\hbar R}{2\pi L kT} - \dots \right\}.\end{aligned}\quad (2,22)$$

Когда затухание сильно, т. е.

$$\alpha = \frac{CR}{\sqrt{LC}} \gg 1, \quad (2,23)$$

существенно также отношение величин α и β . При этом имеем (во всех случаях $\alpha \gg 1$):

$$\frac{\hbar}{RC} \ll kT (\beta \ll \alpha): \quad \overline{U(T)} = \frac{kT}{2}, \quad (2,24a)$$

$$\frac{\hbar}{RC} \gg kT (\beta \gg \alpha): \quad \overline{U(T)} = \frac{\pi}{6} \left(\frac{kT}{\frac{\hbar}{RC}} \right) kT, \quad (2,24b)$$

$$\frac{\hbar R}{L} \ll kT \left(\beta \ll \frac{1}{\alpha} \right): \quad \overline{K(T)} = \frac{kT}{2}, \quad (2,25a)$$

$$\frac{\hbar R}{L} \gg kT \left(\beta \gg \frac{1}{\alpha} \right): \quad \overline{K(T)} = \frac{\pi}{6} \left(\frac{kT}{\frac{\hbar R}{L}} \right) kT. \quad (2,25b)$$

Смысл приведённых неравенств ясен из того, что при пренебрежении квантовыми эффектами характерные частоты, определяющие значения интегралов в выражениях для $\overline{U(T)}$ и $\overline{K(T)}$, при $\alpha \gg 1$ соответственно равны $\omega_U = \frac{\eta_U}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{RC}$ и $\omega_K = \frac{\eta_K}{\sqrt{LC}} = \frac{R}{L}$ (или $\eta_U = \frac{1}{\alpha}$ и $\eta_K = \alpha$); частоты ω_U и ω_K суть в то же время частоты, при которых сила трения в контуре $R\dot{q}$ сравнивается соответственно с упругой силой $\frac{q}{C}$ или инерционным членом $L\ddot{q}$. Таким образом, например, условие $\frac{\hbar}{RC} \ll kT$ [см. (2,24a)] есть условие классичности контура с точки зрения вычисления электрической энергии $\overline{U(T)}$. Это условие не совпадает с условием классичности для магнитной энергии $\overline{K(T)}$, которая при $\alpha \gg 1$ определяется колебаниями с более высокой частотой $\omega_K = \frac{R}{L} \gg \omega_U = \frac{1}{RC}$.

Интересно, что даже в том случае, когда при малом R контур совершенно неклассичен (т. е. $\hbar\omega_0 = \frac{\hbar}{\sqrt{LC}} \gg kT$), при достаточном увеличении R и неизменных L и C средняя электрическая

✓ энергия $\overline{U}$ стремится к классическому пределу $\frac{kT}{2}$, а магнитная энергия $\overline{K}(T)$ стремится к нулю. И вообще ещё раз подчеркнём, что средние электрическая (потенциальная) и магнитная (кинетическая) энергии в контуре не равны между собой и существенно зависят от величины сопротивления R , даже если это сопротивление одинаково для всех частот. Зависимость $\overline{U}(T)$ и $\overline{K}(T)$ от R исчезает лишь при $R \rightarrow 0$ или в классическом предельном случае при $R = \text{const}$.

Причина такого положения состоит в том, что в квантовом случае в отличие от классического, даже при $R = \text{const}$, нельзя пренебрегать изменением энергии подсистемы, связанным с её затуханием. Это заключение непосредственно следует из соотношения неопределённости для энергии, согласно которому неопределённость в энергии подсистемы $\Delta E \approx \frac{\hbar}{\tau}$, где τ — время затухания (см. ⁷, § 44). Проявлением этого общего соотношения является тот факт, что при наличии затухания у подсистемы нет дискретных уровней и можно говорить лишь об уширенных квазистационарных уровнях, ширина которых меньше расстояния между уровнями только при слабом затухании [в случае контура такое условие малости затухания совпадает с условием (2,20)]. Если же затухание настолько сильное, что ширина уровней больше расстояния между уровнями невозмущённой системы, то считать эту последнюю не изменившейся совершенно невозможно. Например, подсистема, получающаяся при включении сильного затухания из осциллятора, радикально отличается от квантового осциллятора, уровни энергии которого дискретны и определяются известным выражением $E_n = \hbar \omega_0 \left(n + \frac{1}{2} \right)$. Невозможность при сильном затухании пренебречь изменением энергии подсистемы не позволяет вычислять её среднюю энергию по формулам статистики. Этим и объясняется тот факт, что в квантовом случае средние энергии $\overline{U}$ и $\overline{K}$ при $R \neq 0$ отличны от статистических выражений (2,2), справедливых для средних потенциальной и кинетической энергий осциллятора с пренебрежимо малым затуханием.

3. О ПРИМЕНЕНИИ ТЕРМОДИНАМИКИ К ЭЛЕКТРИЧЕСКИМ ФЛУКТУАЦИЯМ

Изложенные выше результаты позволяют сделать несколько замечаний, касающихся поставленного недавно Г. С. Гореликом ⁸ вопроса о том, «что можно сказать об электрических флуктуациях на основании одной только феноменологической термодинамики, не пользуясь статистическими соображениями». Законность такой постановки вопроса становится ясной, если принять во внимание

известную условность разграничения явлений на флуктуационные и нефлуктуационные (см. § 2 и § 34). Например, тепловое излучение обычно не рассматривается как флуктуационное явление, хотя ничем в принципе не отличается от тепловых флуктуаций электромагнитной энергии в электрическом контуре. Отсюда ясно, что на основе термодинамики действительно можно сделать определённые заключения о средних энергиях в контуре $\bar{U} = \frac{\overline{q^2}}{2C}$

и $K = \frac{LI^2}{2}$, подобно тому как известное термодинамическое уравнение Вина характеризует среднюю спектральную плотность теплового излучения u_ω :

$$u_\omega(T, \omega) = T \Phi\left(\frac{T}{\omega}\right) \omega^2, \quad (3,1)$$

где Φ — некоторая неизвестная функция отношения $\frac{T}{\omega}$. Уравнение (3,1) получается термодинамически при учёте формулы Доплера для изменения частоты света, отражающегося от движущегося зеркала и справедливого для изотропного излучения соотношения

$$p = \frac{u}{3}, \text{ где } p \text{ — световое давление и } u = \int_0^\infty u_\omega d\omega \text{ — полная плотность энергии излучения}^*).$$

Как формула Доплера, так и выражение $p = \frac{u}{3}$ носят весьма общий характер — они получаются как в классической электромагнитной теории, так и с точки зрения представления о световых квантах.

Соотношение Вина (3,1), сводящее задачу о нахождении функции $u_\omega(\omega, T)$ от двух переменных к задаче нахождения функции Φ от одной переменной, сыграло при развитии теории теплового излучения существенную роль. Однако в настоящее время прибегать к уравнению Вина нет особых оснований, так как проще сразу же установить полное выражение для u_ω , т. е. формулу Планка

$$u_\omega = \frac{\hbar \omega^3}{\pi^2 c^3 \left(e^{\frac{\hbar \omega}{kT}} - 1 \right)}.$$

Тепловое излучение в некоторой полости можно рассматривать как совокупность «осцилляторов поля» со средней энергией

*) Вывод формулы (3,1) см., например, в¹⁰. Эту формулу чаще записывают в эквивалентном (3,1) виде: $u_\omega = \omega^3 \Phi'\left(\frac{\omega}{T}\right)$, где Φ' — неизвестная функция.

$$\bar{E} = \frac{\hbar \omega}{e \frac{\hbar \omega}{kT} - 1}, \text{ причём число осцилляторов в интервале частот } d\omega$$

равно $\frac{\omega^2 d\omega}{\pi^2 c^3}$. Отсюда явствует, что в применении к одному осцилля-

тору (к контуру) термодинамика должна вместо выражения (3,1) привести к соотношению $\bar{E} = T \Phi\left(\frac{T}{\omega}\right)$, где ω — собственная частота

осциллятора*). При этом поскольку мы опираемся на пример незатухающих «осцилляторов поля», речь может идти, по крайней мере, если рассуждать по аналогии, только о незатухающем или достаточно слабо затухающем осцилляторе. Но для незатухающего осциллятора справедлива чисто механическая теорема вириала, согласно которой средние по времени потенциальная и кинетическая энергии $\bar{U}$ и $\bar{K}$ равны между собой. В результате сказанного приходим к заключению, что в случае достаточно слабо затухающего электрического контура с частотой $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ соотноше-

ние, эквивалентное уравнению Вина (3,1), должно иметь вид:

$$\bar{U} = \bar{K} = T \Phi(\sqrt{LC} T). \quad (3,2)$$

Как показано ниже, выражение (3,2) для слабозатухающего электрического контура получается и непосредственно, не прибегая к аналогии с уравнением Вина. Однако в своей статье Г. С. Горелик не стремился получить для электрических флуктуаций аналог уравнения Вина, а пытался по существу термодинамически рассмотреть более общую задачу о флуктуациях в контуре с любым сопротивлением. Более того, в³ разобран лишь предельный случай RC -контура, т. е. контура, состоящего из конденсатора и сопротивления, но без самоиндукции. Для удобства читателей приведём кратко соответствующие рассуждения Г. С. Горелика³.

Средняя энергия RC -контура равна $\bar{U} = \frac{\bar{q}^2}{2C}$, работа электрических сил при изменении ёмкости конденсатора на dC равна

$$\delta A = - \frac{\partial}{\partial C} \left(\frac{\bar{q}^2}{2C} \right) dC = \frac{\bar{q}^2}{2C^2} dC,$$

*) На первый взгляд может показаться странной всякая возможность получения термодинамических результатов для одного осциллятора, т. е. подсистемы с одной степенью свободы. Дело, однако, в том, что термодинамика применима к идеальному газу, состоящему из осцилляторов, а энергия такого газа равна сумме энергий отдельных осцилляторов. Поэтому в конечном счёте термодинамически можно получить заключения и о свойствах одного осциллятора, подобно тому как это сделано в тексте.

и таким образом термодинамическое равенство, выражающее второе начало термодинамики, имеет вид:

$$T dS = d\bar{U} + \delta\bar{A} = d\left(\frac{\bar{\sigma^2}}{2C}\right) + \frac{\bar{q^2}}{2C^2} dC. \quad (3,3)$$

Отсюда, полагая $\bar{q^2} = \varphi(T, C)$ и вычисляя равные между собой производные $\frac{\partial^3 S}{\partial T \partial C}$ и $\frac{\partial^2 S}{\partial C \partial T}$, получаем для φ уравнение

$$T \frac{\partial \varphi}{\partial T} = C \frac{\partial \varphi}{\partial C},$$

из которого следует, что $\varphi(T, C) = \varphi(TC)$ и

$$\bar{U} = \frac{\bar{q^2}}{2C} = T \Phi(TC), \quad (3,4)$$

где $\Phi = \frac{\varphi}{2CT}$ — неизвестная функция произведения CT . Результат (3,4) остаётся неизменным, если считать, что энергия в контуре равна не $\frac{\bar{q^2}}{2C}$, а $\frac{\bar{\sigma^2}}{2C} + F(T)$, где F — неизвестная функция T .

Поскольку при изменении сопротивления система не совершает работы, величины $\bar{q^2}$ и F от R зависеть не могут. Этот вывод является общим для любой системы и сразу же следует из (3,3), так как, например, при адиабатическом процессе, если при $dR \neq 0$ $\delta A = 0$, то $\frac{\partial U}{\partial R} = 0$, и следовательно, энергия не зависит от R .

Обратимся теперь к выражению энергии $\frac{\bar{q^2}}{2C}$ через параметры контура и спектральную плотность $w(\omega)$ в состоянии равновесия, равную $w(\omega) = R(\omega) \cdot f(T, \omega)$. Тогда для RC -контура ($L = 0$), учитывая (1,8) и (3,4), получаем:

$$\bar{U} = \frac{\bar{\sigma^2}}{2C} = T \Phi(TC) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{CR f(T, \omega) d\omega}{R^2 C^2 \omega^2 + 1}. \quad (3,5)$$

В случае не зависящего от частоты сопротивления R видим, что правая часть равенства (3,5) зависит от T и параметра CR , в то время как левая часть зависит от T и CT . Отсюда следует, что функция $\Phi(CT)$ есть некоторая универсальная постоянная $\frac{a}{2}$, т. е.

$$\frac{\bar{q^2}}{2C} = \frac{a}{2} T. \quad (3,6a)$$

В силу (3,6a) интеграл в (3,5) не должен зависеть от RC , откуда

следует, что *)

$$f = \frac{2}{\pi} aT, \quad a = \text{const}, \quad (3,66)$$

т. е. получается классическая формула Найквиста (1,9), так как универсальная постоянная a может быть определена для какого-нибудь одного контура и, очевидно, окажется равной постоянной Больцмана k .

Приведённые результаты (3,6), полученные в ³, совершенно парадоксальны, так как являются чисто классическими и противоречат квантовой формуле Найквиста (2,3), в то время как при их выводе, казалось бы, не делалось никаких классических предположений. Действительно, термодинамические соотношения должны быть в равной мере справедливы и в классической и в квантовой областях. Что же касается использования выражений для энергии

$$\frac{q^2}{2C} = \frac{1}{2} \int \frac{CRf d\omega}{C^2 R^2 \omega^2 + 1}, \quad \text{то они также пригодны далеко за пределами классической теории (см. раздел 2).}$$

Таким образом, несомненно, что вышеприведённый вывод формул (3,6) не является термодинамическим, а содержит в скрытом виде какие-то далеко идущие утверждения, эквивалентные использованию классической статистики. В свете сказанного в разделах 1 и 2 нетрудно выяснить, в чём здесь дело. Из квантовой формулы Найквиста явствует, что средняя энергия в контуре, вообще говоря, зависит от сопротивления этого контура R (см. конец раздела 2). Между тем, если применять к любому контуру термодинамику, подобно тому как это сделано выше для RC -контура, всегда получаются выражения для энергий $\bar{U}$ и $\bar{K}$, которые не зависят от сопротивления R . Причина этого противоречия заключается в том, что в случае контура или любой системы с исчезающим сопротивлением термодинамические соотношения, вообще говоря, нельзя применять. Вся термодинамика, так же как и статистика, строится для квазизамкнутых систем, для систем, энергией взаимодействия которых с термостатом можно пренебречь. Только при этом предположении, как уже подчёркивалось в разделе 1,

*) Строгое доказательство этого утверждения см. в ³. Естественность подобного результата ясна из того, что в силу (3,6а) соотношение (3,5)

$$\text{записывается в виде } \frac{aT}{2} = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{f\left(T, \frac{\xi}{CR}\right) d\xi}{\xi^2 + 1}, \quad \text{т. е. правая его часть}$$

не должна зависеть от CR , что является очень жёстким условием, накладываемым на вид функции $f\left(T, \frac{\xi}{CR}\right)$. Полагая $f\left(T, \frac{\xi}{CR}\right) = f(T)$, получаем (3,66). Единственность этого решения следует из теории интегральных уравнений.

справедливо каноническое распределение Гиббса, из которого можно получить также и основное термодинамическое равенство. Аналогичное положение имеет место и при развитии термодинамики, независимом от статистики, — здесь также невозможно продвинуться без предположения об аддитивности энергии (см., например, §§ 7 и 16). Вместе с тем затухание как раз и является выражением наличия взаимодействия, приводящего к обмену энергией между системой с термостатом, причём затухание считается большим в том случае, когда скорость этого обмена сравнима или больше скорости обмена энергией между частями самой системы [см. условие (2,22), означающее, что $\frac{R}{L} \gg \frac{1}{\sqrt{LC}}$]. В нашем случае системой, к которой применяется термодинамика, является, пользуясь терминологией раздела 1, подсистема, состоящая из маятника или электромагнитного поля в конденсаторе и катушке самоиндукции, но не включающая в себя окружающего маятник газа или материала проводов (см. раздел 1). Если затухание системы велико, то энергия всей системы (маятник + газ, контур в целом), вообще говоря, не равна сумме энергий изолированной подсистемы и ее окружения и применять к подсистеме термодинамику нельзя.

К системе в целом, предполагая её помещённой в некоторый внешний термостат, с которым она слабо взаимодействует, применять термодинамику, разумеется, можно. Но в этом случае использование термодинамического равенства не может привести ни к каким конкретным результатам, так как энергия системы есть некоторая неизвестная функция T и характеризующих состояние системы параметров, в числе которых могут быть параметры C и L . (Здесь дело опять-таки в том, что при наличии сильного взаимодействия подсистемы с окружением энергия всей системы не равна сумме энергии подсистемы $\frac{q^2}{2C} + \frac{L\dot{q}^2}{2}$ и не зависящей от состояния подсистемы функции $F(T)$.)

Таким образом, независимо от того, применяем ли мы термодинамику к подсистеме или к системе в целом, результаты (3,6), полученные для предельно сильно затухающего контура (RC -контура), действительно не являются чисто термодинамическими, а получаются только при дополнительном очень сильном предположении о равенстве нулю энергии взаимодействия, несмотря на сильное затухание подсистемы. В квантовой области подобное предположение вообще невозможно, так как противоречит соотношению неопределённости для энергии. В классической теории пренебрежение энергией взаимодействия возможно в случае, когда воздействие окружающей среды на подсистему осуществляется в результате мгновенных толчков. Но в этом случае, как ясно из сказанного в разделе 1, формулы (3,6а) и (3,6б) и должны быть справедливы. Тем самым парадокс полностью разрешается.

Парадоксальность результата Г. С. Горелика (3,66) можно усмотреть также в том, что даже при предположении о мгновенном характере толчков формула Найквиста получена им без обычного используемого статистического результата $\bar{U} = \bar{K} = \frac{kT}{2}$. Однако, как указано в нижеследующем примечании, теорема о равнораспределении энергии по степеням свободы следует из предположения о мгновенности толчков, т. е. независимости функции ϖ от ω . Поэтому и в этом пункте нет никакого противоречия.

Итак, для затухающего контура никаких чисто термодинамических выводов, т. е. выводов, не зависящих от характера сил взаимодействия в системе, её классичности и т. п., получить нельзя *).

*) Для затухающего контура с не зависящим от частоты сопротивлением R в предположении, что при любом значении R можно пренебречь энергией взаимодействия рассматриваемой подсистемы с её окружением или, другими словами, что энергию всей системы можно пред-

ставить в виде суммы $\frac{q^2}{2C} + F(T)$, термодинамика приводит к формулам (3,6). Именно это доказано Г. С. Гореликом для RC -контура (см. выше). Как автору стало известно, М. Л. Левин получил тот же результат и для любого RCL -контура (таким образом в этом пункте пренебрежение самоиндукцией, вообще говоря, как указано в следующем примечании, недопустимо при рассмотрении тепловых флуктуаций, не существенно). Однако этот вывод не может считаться термодинамическим в обычном смысле этого слова. Последнее ясно, в частности, из того, что к формулам (3,6) можно придти и не пользуясь вторым началом термодинамики и в то же время без дополнительных статистических предположений. Действительно, пренебрежение энергией взаимодействия при сильном затухании возможно, если толчки являются мгновенными, а в этом случае функция $\varpi = Rf$ не зависит от частоты (см. раздел 1). Поэтому, поскольку, по предположению, $R = \text{const}$, из выражений для $\bar{K}$ и $\bar{U}$ [см.

(1,12)] получаем: $\bar{K} = \bar{U} = \frac{\pi}{4} f(T)$, где в силу (1,6) $f(T, \omega) = f(T)$ —

универсальная функция T . Таким образом, получается результат, эквивалентный теореме о равнораспределении энергии по степеням свободы, и остаётся только показать, что если T есть абсолютная термодинамическая температура, то $f(T) = \text{const} \cdot T$. Для этой цели рассмотрим идеальный одноатомный газ, для которого, с одной стороны, в силу универсальности

функции f также $K = \frac{\pi}{4} f(T)$ и, с другой стороны, по теореме вириала средняя энергия в объёме V равна $\bar{E} = N\bar{K} = \frac{3}{2} pV$, где N — число частиц и p — давление. Далее, как следует из опыта, для идеального газа $pV = \text{const} \cdot T$ и, таким образом, используя лишь свойства идеального газа, приходим к формуле (3,66) $f = \text{const} \cdot T$, из которой следует также и формула (3,6а).

Вывод формулы Найквиста Г. С. Гореликом, если распространить его на RCL -контур, есть способ получения универсальной функции f на основе рассмотрения «пробной» системы (см. раздел 1), для которой $R = \text{const}$, и при любом R энергии $\bar{U}$ и $\bar{K}$ не зависят от R . Поскольку подобная «пробная» система может быть реализована на деле только в классической области, с её помощью можно получить только классическую формулу Найквиста.

Напротив, для достаточно слабо затухающего контура такие выводы можно сделать, а именно можно получить соотношение (3,2).

Работа $\delta \bar{A}$, связанная с изменением ёмкости контура на dC и его самоиндукции на dL , равна

$$\delta \bar{A} = -\frac{\partial}{\partial C} \left(\frac{q^2}{2C} \right) dC + \frac{\partial}{\partial L} \left(\frac{LI^2}{2} \right) dL = \frac{q^2}{2C^2} dC + \frac{I^2}{2} dL, \quad \checkmark$$

так как потенциальная энергия электрического поля $U = \frac{q^2}{2C}$, а потенциальная функция, определяющая силы магнитного поля, равна $-\frac{LI^2}{2}$. Энергия в контуре $\bar{E} = \bar{K} + \bar{U} = \frac{q^2}{2C} + \frac{LI^2}{2}$. $L \frac{I^2}{2}$

Далее, для достаточно слабо затухающего контура, который только и рассматривается, так как это позволяет без дальнейших допущений использовать термодинамику, из теоремы вириала, носящей чисто динамический характер, следует, что $\bar{K} = \bar{U}^*$. Воспользовавшись для удобства этим обстоятельством с самого начала и учитывая выписанные выше выражения для $\delta \bar{A}$ и $\bar{E}$, можем записать термодинамическое равенство в виде:

$$T dS = d\bar{E} + \delta \bar{A} = d(L\varphi) + \frac{L}{2C} \varphi dC + \frac{\varphi}{2} dL, \quad (3,7)$$

где $\varphi(T, L, C) = \bar{I}^2$.

Приравняв теперь производные $\frac{\partial^2 S}{\partial T \partial C}$ и $\frac{\partial^2 S}{\partial C \partial T}$ и т. д., получаем:

$$\left. \begin{aligned} L \frac{\partial \varphi}{\partial L} - C \frac{\partial \varphi}{\partial C} + \varphi &= 0, \\ T \frac{\partial \varphi}{\partial T} - 2L \frac{\partial \varphi}{\partial L} - 3\varphi &= 0, \\ T \frac{\partial \varphi}{\partial T} - 2C \frac{\partial \varphi}{\partial C} - \varphi &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3,8)$$

*) Это соотношение при $R \rightarrow 0$ немедленно вытекает также из интегральных выражений для $\bar{K}$ и $\bar{U}$ через параметры L, C, R и функцию f [см. (2,17)] и имеет место как в классической, так и в квантовой областях. Подобное доказательство для случая осциллятора эквивалентно доказательству равенства $\bar{K}$ и $\bar{U}$ на основе более общей теоремы вириала.

Заметим также, что поскольку в классической области при $R = \text{const}$ $\bar{K} = \bar{U} = \frac{kT}{2}$ при любом R , при изучении электрических флуктуаций, вообще говоря, никогда нельзя рассматривать RC — контур, т. е. пренебрегать самоиндукцией и магнитной энергией. Это объясняется тем, что, как ясно из уравнения (1,10), пренебречь самоиндукцией можно, только если частота вынуждающей э. д. с. $\mathcal{E}$ удовлетворяет неравенству $\omega \ll \frac{R}{L}$. В то же время в случае тепловых флуктуаций спектр э. д. с. $\mathcal{E}$ заранее не известен, а фактически простирается до весьма высоких частот, не удовлетворяющих указанному неравенству.

Решение этой системы есть $\bar{\varphi} = \bar{I}^2 = \frac{2T}{L} \Phi(\sqrt{LC}T)$, где Φ — произвольная функция. Отсюда для $\bar{C} = \bar{K} = \frac{LI^2}{2}$ получаем формулу (3,2), как этого и следовало ожидать. Поскольку формула (3,2) получена теперь независимым способом, используя её, легко придти к уравнению Вина (3,1).

Учитывая (3,2), выражение, например, для потенциальной энергии в слабо затухающем контуре можно записать в виде [см. (2,17)]:

$$\bar{U} = T\Phi(\sqrt{LC}T) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{CRf(\omega, T) d\omega}{R^2C^2\omega^2 + (LC\omega^2 - 1)^2}.$$

Отсюда, так же как это делалось в разделах 1 и 2 при выводе формулы Найквиста, сразу же находим, что

$$f(\sqrt{LC}, T) = \frac{4}{\pi} T\Phi(\sqrt{LC}T)$$

или, заменяя $\sqrt{LC}$ на $\frac{1}{\omega}$, получаем:

$$f(\omega, T) = \frac{4}{\pi} T\Phi\left(\frac{T}{\omega}\right). \quad (3,9)$$

Этот результат находится, разумеется, в полном согласии с квантовой формулой Найквиста (2,3), из которой, так же как из сравнения выражений (3,2) и (2,2), явствует, что

$$T\Phi\left(\frac{T}{\omega}\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1} \right).$$

Получить термодинамически, без привлечения дополнительных предположений, ещё какие-либо результаты не представляется возможным. Что же касается формул (3,2) и (3,9), то они могут иметь лишь педагогическую ценность, поскольку значительно более далеко идущая квантовая формула Найквиста (2,3) может быть проще получена и фактически была получена без всякого привлечения указанных термодинамических соотношений.

4. ОБ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ФЛУКТУАЦИЯХ ВБЛИЗИ ТОЧЕК ФАЗОВОГО ПЕРЕХОДА ВТОРОГО РОДА В СЕГНЕТОЭЛЕКТРИКАХ, ФЕРРОМАГНЕТИКАХ И СВЕРХПРОВОДНИКАХ

В связи с вопросами, затронутыми выше, мы хотим также остановиться на особенностях электрических флуктуаций вблизи точек фазового перехода второго рода, именуемых также точками Кюри. Этот случай интересен потому, что вблизи точек Кюри флуктуации некоторого параметра, определяющего характер перехода, сильно возрастают и формально даже стремятся к бесконечности.

Для определённости остановимся сразу на конкретном случае — на фазовом переходе в сегнетоэлектриках: В этом случае термодинамический потенциал вблизи точек Кюри имеет вид (см. ¹¹)

$$\Phi = \Phi_0 + \alpha P^2 + \frac{\beta}{2} P^4, \quad (4,1)$$

где P — электрическая поляризация, Φ_0 , α и β — функции температуры и давления, электрическое поле предполагается отсутствующим, и для простоты рассматривается кристалл с одной сегнетоэлектрической осью, например сегнетова соль. В точке Кюри (при $T = \theta$) коэффициент $\alpha_\theta = 0$, а $\beta_\theta > 0$; вблизи точки Кюри можно положить $\alpha = \alpha'_\theta(T - \theta)$ и $\beta = \beta_\theta$, где $\alpha'_\theta = \left(\frac{d\alpha}{dT}\right)_\theta > 0$, и таким образом при $T > \theta$ $\alpha > 0$. При $T > \theta$ в состоянии термодинамического равновесия $P = 0$, а при $T < \theta$, когда $\alpha < 0$, в состоянии равновесия $P^2 = P_0^2 = -\frac{\alpha}{\beta} > 0$.

Как известно из теории термодинамических флуктуаций (см. ¹, гл. 12 и ⁶, § 30), вероятность флуктуации некоторой величины η пропорциональна $e^{-\frac{\Delta\Phi}{kT}}$, где $\Delta\Phi$ — изменение термодинамического потенциала, связанное с изменением величины η на $\Delta\eta$ в рассматриваемом объёме ΔV (температуру и давление тела считаем постоянными). В нашем случае $\eta = P$ и, скажем, выше точки Кюри $\Delta\eta = P$ и $\Delta\Phi = \alpha P^2 \Delta V$ (членом $\frac{\beta P^4}{2}$ можно, во всяком случае пока флуктуации не слишком велики, пренебречь; потенциал Φ относим к единице объёма). Отсюда находим, что средний квадрат флуктуации поляризации выше точки Кюри равен

$$\overline{P^2} = \frac{kT}{2\alpha\Delta V} = \frac{kT}{2\alpha'_\theta(T - \theta)\Delta V}, \quad \left. \begin{array}{l} \\ T > \theta. \end{array} \right\} \quad (4,2)$$

При приближении к точке Кюри ($T \rightarrow \theta$), если пользоваться выражением (4,2), величина $\overline{P^2}$ неограниченно возрастает. То же имеет место при любых переходах второго рода, где роль P^2 играет какой-нибудь другой или несколько других параметров, имеющих смысл квадрата спонтанного намагничивания M^2 (ферромагнетики), концентрации сверхпроводящих электронов n_s (сверхпроводники), плотности сверхтекучей части жидкости ρ_s (гелий II), квадрата степени упорядоченности η^2 (упорядочивающиеся сплавы) и т. д.^{*}). Наличие больших флуктуаций P^2 , M^2 , n_s и т. д. выше точки

^{*}) Для определённости мы говорим только о переходах второго рода. Фактически же все аномалии (хотя, в общем, в меньшей степени) имеют также место для переходов первого рода, близких к так называемой λ -точке или критической точке Кюри (см. ¹, § 134 и ¹¹, § 2).

Кюри тем более интересно, что в этой области невозможно существование не только устойчивых, но даже и метастабильных, отвечающих относительно минимуму термодинамического потенциала, зародышей упорядоченной фазы (фазы, устойчивой ниже точки Кюри), с чем связана невозможность перегрева при фазовых переходах второго рода. Но, как сказано, флуктуационные быстро переменные «зародыши» упорядоченной фазы могут появляться и выше точки Кюри и при приближении к ней становиться значительными.

Возрастание флуктуаций характерного параметра вблизи точек Кюри в известной мере аналогично возрастанию флуктуаций плотности вблизи критической точки на диаграмме равновесия жидкость — пар. Подобно тому как это последнее явление приводит к критической опалесценции, рост флуктуаций упорядоченности вблизи точек Кюри приводит к аномальному рассеянию рентгеновских лучей¹².

В случае переходов второго рода, связанных с упорядочением, электрические свойства вещества ... меняются лишь косвенно, и с точки зрения электрических флуктуаций эти переходы особого интереса не представляют. Но в случае сегнетоэлектриков, ферромагнетиков и сверхпроводников характерным и сильно флуктуирующим является уже «электромагнитный» параметр — поляризация P , намагниченность M и связанная с глубиной проникновения магнитного поля концентрация сверхпроводящих электронов n_s (см.¹³).

Как проявятся эти флуктуации на опыте? Каковы особенности электрических флуктуаций вблизи точек Кюри в сегнетоэлектриках, ферромагнетиках и сверхпроводниках? На эти естественно возникающие вопросы нужно дать ответ. Сделать это на первый взгляд кажется очень трудным.

В самом деле, допустим, что мы хотим вычислить флуктуацию электрического момента некоторого сегнетоэлектрического образца. Флуктуация момента образца в целом складывается из флуктуаций момента в отдельных его частях. Вдали от точки Кюри эти последние флуктуации определяются выражением (4,2), но вблизи точек Кюри формула (4,2) уже непригодна, и нужно в первую очередь учитывать корреляцию флуктуаций в разных объемах [для этой цели выражение (4,1) нужно дополнить членом $\gamma (\nabla P)^2$; подробнее см.^{1,12}]. Уже отсюда ясно, что вычислить на таком пути флуктуацию электрического момента образца в целом является задачей весьма нелёгкой.

К счастью, эту задачу и не нужно решать или, если угодно, она уже решена.

Действительно, нахождение флуктуаций электрического момента сегнетоэлектрика или магнитного момента некоторого ферромагнитного образца сводится в конечном счёте к определению флуктуаций

зарядов на конденсаторе, в котором находится сегнетоэлектрик, флуктуаций токов в катушке, окружающей ферромагнетик, и т. д. Но флуктуации $\bar{q}^2$ и $\bar{I}^2$ или связанная с ними величина $\omega(\omega)$ в состоянии термодинамического равновесия уже определены и при этом в общем виде, безотносительно к конкретным свойствам веществ, находящихся в контуре: таким образом электрические флуктуации вблизи точек Кюри так же, как в других случаях, определяются обычной формулой Найквиста $\omega = \frac{2}{\pi} R(\omega) kT^*$.

Поэтому, если флуктуации вблизи точек Кюри имеют какие-либо аномалии, то они полностью характеризуются соответствующей аномалией в ходе $R(\omega) = \text{Re } Z$. Отсюда следует, что из измерения равновесных электрических флуктуаций вблизи точек Кюри нельзя получить каких-либо интересных данных, кроме величины $R(\omega)$, которую значительно проще измерять непосредственно.

Для полноты картины укажем всё же, каково поведение $R(\omega)$ вблизи точек Кюри.

Если речь идёт о конденсаторе с сегнетоэлектриком, то импеданс Z легко определить, используя уравнение движения для полной поляризации P (см.¹¹ § 3; ограничиваемся случаем $T > \theta$):

$$2\delta\dot{P} + 2\alpha P = E_0 e^{i\omega t} = E, \quad (4,3)$$

где α — тот же коэффициент, что и в (4,1), E — напряжённость электрического поля, δ — коэффициент, определяющий потери, и членом с $\ddot{P}$ пренебрежено, что можно сделать при достаточно низкой частоте. Далее, по определению $P = \frac{\epsilon' - 1}{4\pi} E \approx \frac{\epsilon'}{4\pi} E$ (так как $|\epsilon'| \gg 1$), где $\epsilon' = \epsilon_1 - i\epsilon_2 = \epsilon - i\frac{4\pi\sigma}{\omega}$ — комплексная диэлектрическая постоянная (ϵ — вещественная диэлектрическая постоянная, σ — эффективная проводимость). Вместе с тем из (4,3) ясно, что $P = \frac{E}{2\delta i\omega + 2\alpha}$, откуда

$$\epsilon' = \frac{2\pi}{\alpha + i\delta\omega}; \quad \epsilon_1 \equiv \epsilon = \frac{2\pi}{\alpha^2 + \delta^2\omega^2}; \quad \epsilon_2 \equiv \frac{4\pi\sigma}{\omega} = \frac{2\pi\delta\omega}{\alpha^2 + \delta^2\omega^2};$$

$$\text{tg } \delta' = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} = \frac{\delta\omega}{\alpha}. \quad (4,4)$$

Мы видим, что величины ϵ_1 , ϵ_2 и $\text{tg } \delta'$ вблизи точек Кюри характерным образом зависят от температуры, так как $\delta = \text{const}$, а

*) Мы ограничиваемся здесь классическим случаем. Кроме того, необходимо ещё раз подчеркнуть, что формула Найквиста характеризует лишь флуктуации в состоянии термодинамического равновесия. Могущие в принципе играть роль неравновесные электрические флуктуации нуждаются в совершенно независимом рассмотрении и учёте. Попытки обнаружить такие неравновесные флуктуации в специфических условиях, имеющих место вблизи точек фазового перехода, представляли бы интерес.

$\alpha = \alpha'_0(T - \theta)$. Однако вещественная часть импеданса $R(\omega)$ никакого «аномального» хода при $T \approx \theta$ не имеет, так как импеданс конденсатора с сегнетоэлектриком

$$Z = \frac{1}{i\omega C'} = \frac{4\pi d}{i\omega \epsilon' S} = \frac{2\delta d}{S} - i \frac{2\alpha d}{\omega S}, \quad R = \frac{2\delta d}{S} = \text{const}, \quad (4,5)$$

где S — площадь пластины конденсатора и d — расстояние между пластинами [к (4,5) приходим также сразу из (4,3), так как $SP = I$, э. д. с. $\mathcal{E} = Ed$ и сопротивление $R = \frac{2\delta d}{S}$, т. е. 2δ есть удельное сопротивление].

В случае ферромагнетиков естественно рассмотреть тороидальный ферромагнитный образец, находящийся в такой же катушке. Импеданс этой катушки пропорционален комплексной магнитной проницаемости образца μ' . Значение μ' в свою очередь определяется уравнением (4,3), где P нужно заменить на намагниченность M , а E на магнитное поле H . В результате для $\mu' = \mu_1 - i\mu_2$ получаются формулы, аналогичные (4,4), а $\text{Re } Z = R(\omega)$ пропорционально $\mu_2 = \frac{2\pi\delta\omega}{\alpha^2 + \delta^2\omega^2}$ и зависит от T , причём эта зависимость может быть (при малых δ) весьма резкой.

В случае сверхпроводников характерный параметр — концентрация сверхпроводящих электронов n_s — определяет глубину проникновения магнитного поля в сверхпроводник и тем самым самоиндукцию катушки на сверхпроводящем сердечнике. Однако измерение шумов в этой катушке не представляет особого интереса, тем более, что эти шумы должны быть очень малы как в силу малости T , так и ввиду незначительности потерь в сверхпроводниках на низких частотах.

Тем не менее в случае сверхпроводников приведённые соображения о флуктуациях вблизи точек Кюри интересны совсем с другой стороны. Дело в том, что при теоретическом анализе поведения сверхпроводников как в постоянном, так и в высокочастотном поле, всегда до сих пор явно или неявно принималось (см. ^{13, 14}), что выше точки перехода (в нормальном состоянии) свойства металла ничем не отличаются от свойств несверхпроводников. Это допущение, которое для обычно рассматриваемых вопросов несущественно, подкрепляется фактом отсутствия аномалии электропроводности в области выше точки перехода и в случае постоянного поля не вызывает сомнений, поскольку сверхпроводящее состояние не может существовать, даже как метастабильное (перегретое) при $T > T_k$ ($T_k = \theta$ — точка перехода в сверхпроводящее состояние при отсутствии магнитного поля). Но флуктуации величины n_s должны присутствовать и выше T_k и тем самым как бы предварять сверхпроводящий переход. Наличие этих флуктуаций должно как-то сказаться на свойствах сверхпро-

водящих металлов выше, но вблизи точки перехода T_k . В первую очередь в этом отношении нужно выяснить влияние флуктуаций n_s на комплексную диэлектрическую постоянную металла ϵ' , которая при $T > T_k$ считается обычно такой же, как и в несверхпроводящих металлах. Разумеется, в постоянном поле ожидать влияния на ϵ' быстропеременных флуктуаций n_s не приходится, но в высокочастотном поле они могли бы проявиться. Возможно вместе с тем, что в нормальном состоянии влияние флуктуаций n_s на значение ϵ' будет практически полностью маскироваться основным вкладом в ϵ' , связанным с обычной проводимостью, которая в рассматриваемых случаях (чистые металлы при низкой температуре) особенно велика. В этой связи интересно отметить, что одно явление «предварения» сверхпроводящего перехода, если верить соответствующим экспериментам, уже наблюдалось, хотя до сих пор и не получило какой-либо интерпретации: мы имеем в виду аномальное поведение термоэлектрических свойств металла, проявляющееся в интервале в несколько десятых градуса выше T_k (см. ^{15, 14}).

Связано ли это явление, существование которого ещё не может считаться надёжно установленным (в работе ¹⁶ оно не наблюдалось), с флуктуациями n_s при $T > T_k$, совершенно неясно, как неясен и весь вопрос о роли этих флуктуаций для других эффектов в сверхпроводниках.

Мы надеемся ещё вернуться к этой проблеме в другом месте, но упомянули о ней здесь для того, чтобы продемонстрировать на этом примере, как и на примере флуктуаций в сегнетоэлектриках и ферромагнетиках, связь затронутых в разделах 1—3 вопросов об электрических флуктуациях в контурах с рядом совершенно других физических явлений.

Дополнение. ВЫВОД КВАНТОВОЙ ФОРМУЛЫ НАЙКВИСТА ПО КАЛЕНУ И ВЕЛЬТОНУ

Вывод квантовой формулы Найквиста (2,3), предложенный Каленом и Вельтоном ⁸, основан на сопоставлении общего квантовомеханического выражения для $\frac{R(\omega)}{|Z(\omega)|^2}$, приведённого в разделе 2 [см. (2,14)], с вычисляемым независимо значением среднего квадрата силы тока $\bar{Q} = \bar{I}^2$ в состоянии термодинамического равновесия и, разумеется, при отсутствии внешнего напряжения.

Пусть система находится в каком-либо стационарном состоянии n , в котором энергия равна E_n и $\Psi = \Psi_n$ [см. (2,4)]. В таком состоянии ток I , т. е. среднее значение оператора силы тока

$$\bar{Q} = \frac{i}{\hbar} (H_0 Q - Q H_0), \text{ имеющее вид } \langle E_n | \dot{Q} | E_n \rangle = \int \Psi_n^* \dot{Q} \Psi_n dx.$$

равно нулю *). Среднее значение величины $\dot{Q}^2$ равно

$$\begin{aligned}\langle E_n | \dot{Q}^2 | E_n \rangle &= \sum_m \langle E_n | \dot{Q} | E_m \rangle \cdot \langle E_m | \dot{Q} | E_n \rangle = \\ &= \frac{1}{\hbar^2} \sum_m \langle E_n | H_0 Q - Q H_0 | E_m \rangle \cdot \langle E_m | H_0 Q - Q H_0 | E_n \rangle = \\ &= \frac{1}{\hbar^2} \sum_m (E_n - E_m)^2 |\langle E_m | Q | E_n \rangle|^2, \quad (D1)\end{aligned}$$

где при преобразованиях использованы обычные в квантовой механике приёмы ($\dot{Q}\Psi_n = \sum_m \langle E_m | \dot{Q} | E_n \rangle \Psi_m$, $\langle E_m | 1 | E_n \rangle = \int \Psi_m^* \Psi_n dx = \delta_{nm}$; см. также сноску на ~~предыдущей~~ ^{следующей} странице).

Вводя теперь частоту ω , определяемую согласно

$$\hbar\omega = |E_n - E_m|, \quad (D2)$$

и учитывая, что речь идёт о системе с плотно расположенными уровнями, можно заменить в (D1) суммирование по m интегрированием по ω :

$$\begin{aligned}\langle E_n | \dot{Q}^2 | E_n \rangle &= \\ &= \frac{1}{\hbar^2} \int_0^\infty (\hbar\omega)^2 |\langle E_n + \hbar\omega | Q | E_n \rangle|^2 \rho(E_n + \hbar\omega) \hbar d\omega + \\ &+ \frac{1}{\hbar^2} \int_0^\infty (\hbar\omega)^2 |\langle E_n - \hbar\omega | Q | E_n \rangle|^2 \rho(E_n - \hbar\omega) \hbar d\omega = \\ &= \int_0^\infty \hbar\omega^2 \{ |\langle E_n + \hbar\omega | Q | E_n \rangle|^2 \rho(E_n + \hbar\omega) + \\ &+ |\langle E_n - \hbar\omega | Q | E_n \rangle|^2 \rho(E_n - \hbar\omega) \} d\omega, \quad (D3)\end{aligned}$$

где первый интеграл отвечает членам суммы в (D2) с $E_n < E_m$, а второй — членам суммы с $E_n > E_m$ [о введении плотности уровней $\rho(E)$ см. в § 2].

Флуктуации, наблюдаемые в реальной системе, получаются в результате усреднения флуктуаций в различных состояниях n с весовым фактором $f(E_n)$. Таким образом, интересующая нас величина

) В силу эрмитовости H_0 для любых функций рассматриваемого класса Ψ^ и φ $\int \Psi^* H_0 \varphi dx = \int \varphi H_0 \Psi^* dx$. Поэтому $\int \Psi_n^* H_0 Q \Psi_n dx = \int (Q \Psi_n) H_0^* \Psi_n^* dx = E_n \int Q \Psi_n \Psi_n^* = E_n \int \Psi_n^* Q \Psi_n dx$. Тому же значению равно, очевидно, выражение $\int \Psi_n^* Q H_0 \Psi_n dx$, откуда и следует утверждение о равенстве нулю величины $\langle E_n | \dot{Q} | E_n \rangle$.

на $\bar{Q}^2 = \bar{I}^2$ равна

$$\begin{aligned} \bar{Q}^2 &= \sum_n f(E_n) \langle E_n | \dot{Q}^2 | E_n \rangle = \\ &= \int_0^\infty \hbar \omega^2 \left[\int_0^\infty \rho(E) f(E) \{ |\langle E + \hbar \omega | Q | E \rangle|^2 \rho(E + \hbar \omega) + \right. \\ &\quad \left. + |\langle E - \hbar \omega | Q | E \rangle|^2 \rho(E - \hbar \omega) \} dE \right] d\omega, \quad (D4) \end{aligned}$$

так как число уровней энергии в интервале dE равно $\rho(E) dE$. Для рассматриваемой линейной системы при наложении на неё напряжения $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 e^{i\omega t}$ $\bar{Q} = I = \frac{\mathcal{E}}{Z(\omega)}$, где Z — импеданс. Поэтому можно считать, что флуктуационные токи в системе с импедансом $Z(\omega)$ обусловлены некоторой флуктуационной э. д. с. $\mathcal{E}$, причём согласно (D4) (см. также раздел 1)

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{E}}^2 &= \int_0^\infty \omega(\omega) d\omega = \int_0^\infty |Z(\omega)|^2 |I_\omega|^2 d\omega = \\ &= \int_0^\infty \hbar \omega^2 |Z(\omega)|^2 \left[\int_0^\infty \rho(E) f(E) \{ |\langle E + \hbar \omega | Q | E \rangle|^2 \rho(E + \hbar \omega) + \right. \\ &\quad \left. + |\langle E - \hbar \omega | Q | E \rangle|^2 \rho(E - \hbar \omega) \} dE \right] d\omega. \quad (D5) \end{aligned}$$

Для получения квантовой формулы Найквиста необходимо связать выражение (D5) с выражением (2,14) для $\frac{R}{|Z|^2}$, которое выпишем здесь ещё раз:

$$\begin{aligned} \frac{R}{|Z|^2} &= \pi \omega \int_0^\infty \rho(E) f(E) \{ |\langle E + \hbar \omega | Q | E \rangle|^2 \rho(E + \hbar \omega) - \\ &\quad - |\langle E - \hbar \omega | Q | E \rangle|^2 \rho(E - \hbar \omega) \} dE. \quad (D6) \end{aligned}$$

Выражения (D5) и (D6) определяются входящими в их состав величинами $C(\pm)$:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\mathcal{E}}^2 &= \int_0^\infty |Z(\omega)|^2 \hbar \omega^3 C(+)\omega d\omega, \quad \frac{R(\omega)}{|Z(\omega)|^2} = \pi \omega C(-), \\ C(\pm) &= \int_0^\infty \rho(E) f(E) \{ |\langle E + \hbar \omega | Q | E \rangle|^2 \rho(E + \hbar \omega) \pm \\ &\quad \pm |\langle E - \hbar \omega | Q | E \rangle|^2 \rho(E - \hbar \omega) \} dE. \end{aligned} \right\} \quad (D7)$$

Произведём теперь во втором интеграле в (Д7), перед которым стоит знак $\pm$, замену переменных $E \rightarrow E + \hbar\omega$ и учтём при этом, что матричный элемент $\langle E - \hbar\omega | Q | E \rangle = \int \Psi_{E - \hbar\omega}^* Q \Psi_E dx$ равен нулю при $E < \hbar\omega$ [все уровни энергии считаются положительными, что отражено в (Д7)], поскольку интегрирование ведётся от энергии $E = 0$. В результате получаем (напомним, что в силу эрмитовости $Q | \langle E | Q | E + \hbar\omega \rangle|^2 = | \langle E + \hbar\omega | Q | E \rangle|^2$):

$$C(\pm) = \int_0^\infty | \langle E + \hbar\omega | Q | E \rangle|^2 \rho(E + \hbar\omega) \rho(E) f(E) \times \\ \times \left[1 \pm \frac{f(E + \hbar\omega)}{f(E)} \right] dE = \\ = \left\{ 1 \pm e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}} \right\} \int_0^\infty | \langle E + \hbar\omega | Q | E \rangle|^2 \rho(E + \hbar\omega) \rho(E) f(E) dE, \quad (\text{Д8})$$

где при переходе ко второму выражению учтено, что в состоянии термодинамического равновесия отношение весов

$$\frac{f(E + \hbar\omega)}{f(E)} = e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}. \text{ Из (Д8) и (Д7) имеем:}$$

$$\left. \begin{aligned} C(+) &= \frac{1 + e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}}{1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}} C(-) = \left(1 + \frac{2}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1} \right) C(-) = \\ &= \frac{2}{\pi\omega} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1} \right) \frac{R(\omega)}{|Z(\omega)|^2}, \\ \overline{\mathcal{E}^2} &= \int_0^\infty \omega(\omega) d\omega = \int_0^\infty |Z|^2 \hbar\omega^2 C(+) d\omega = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty R(\omega) \left(\frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1} \right) d\omega, \end{aligned} \right\} \quad (\text{Д9})$$

т. е. для ω получается квантовая формула Найквиста (2,3):

$$\omega(\omega) = \frac{2}{\pi} R(\omega) \left(\frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1} \right). \quad (\text{Д10})$$

Фигурирующее в (Д10) выражение $\frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}$ есть фор-

мально выражение для средней энергии осциллятора с частотой ω при температуре T . Поэтому во избежание недоразумений, быть может, стоит подчеркнуть, что этот результат тем не менее не

связан ни с какими специальными модельными представлениями о характере рассматриваемой линейной диссипативной системы.

Формула Найквиста обсуждалась в этой статье почти исключительно для электрического случая. Однако, как уже отмечалось, и особенно ясно, в частности, из её вывода, приведённого в настоящем дополнении, формула Найквиста относится фактически к любой линейной диссипативной системе, независимо от того, является ли она электрической или механической. О применении формулы Найквиста к теории броуновского движения уже была речь в разделе 1. Подробнее этот случай, а также вопрос об использовании формулы Найквиста для установления связи между радиационным трением и флуктуациями электрического поля в вакууме или акустическим радиационным трением и флуктуациями давления в газе освещены в ⁸.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Ландау и Е. Лифшиц, Статистическая физика, Гостехиздат, 1951.
2. H. Nyquist, Phys. Rev. **32**, 110 (1928).
3. Г. С. Горелик, УФН **44**, 33 (1951).
4. Сборник «Броуновское движение». Работы А. Эйнштейна и М. Смолуховского. Дополнительные статьи Ю. А. Круткова и Б. И. Давыдова, ОНТИ, 1936.
5. G. E. Uhlenbeck and L. S. Ornstein, Phys. Rev. **36**, 823 (1930); Rev. Mod. Phys. **17**, 323 (1945).
6. М. А. Леонтович, Статистическая физика, Гостехиздат, 1944.
7. Л. Ландау и Е. Лифшиц, Квантовая механика, ч. 1, Гостехиздат, 1948.
8. H. B. Callen and T. A. Welton, Phys. Rev. **83**, 34 (1951).
9. М. А. Леонтович, Введение в термодинамику, Гостехиздат, 1951.
10. М. Планк, Теория теплового излучения, ОНТИ, 1935.
11. В. Л. Гинзбург, УФН **38**, 490 (1949).
12. Л. Ландау, Sow. Phys. **12**, 123 (1937).
13. В. Л. Гинзбург, УФН **42**, 169, 333 (1950).
14. В. Л. Гинзбург, ЖЭТФ **21**, 979 (1951).
15. H. Casimir and A. Rademakers, Physica **13**, 33 (1947).
16. M. Steele, Phys. Rev. **81**, 262 (1951).