О МАГНИТО-ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ВОЛНАХ В ГАЗЕ

За последнее время в литературе появился целый ряд статей [1—8], посвящённых так называемым магнито-гидродинамическим волнам, т.е. волнам, могущим распространяться в проводящей среде, находящейся в магнитном поле. Явления, связанные с магнито-гидродинамическими волнами, нашли себе широкое применение, главным образом, в астрофизических проблемах. В 1942 году была сделана попытка [8] создать теорию солнечных пятен, согласно которой возмущения, возникающие в центральных областях Солнца, передаются на поверхность с помощью магнито-гидродинамических волн. В ряде теорий [3, 4] происхождения космических лучей магнито-гидродинамические волны играют важную роль *). Представляет также несомненный интерес исследование явлений, связанных с распространением в ионосфере магнито-гидродинамических волн. Естественно поэтому, что выяснение вопроса о природе этих волн является весьма актуальным. В связи с этим привлекает к себе внимание работа [6], опубликованная на страницах ЖЭТФ. В этой работе было показано, что магнито-гидродинамические волны представляют собой обычные электромагнитные волны низкой частоты, возникающие в проводящей газообразной или жидкой среде, помещённой в магнитное поле, при учёте движения тяжёлых заряженных (ионов) или нейтральных частиц. Аналогичные выводы были получены в работе [7], в которой, в отличие от [6], не принимались во внимание столкновения между частицами.

Прежде всего остановимся на выяснении свойств магнито-гидродинамических волн на основе гидродинамического приближения [1, 5, 6]. Для этого исследуем задачу о проводящей жидкости с плотностью ρ и проводимостью σ, находящейся в электромагнитном поле. Уравнения движения и поля в этом случае имеют вид:

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + \frac{1}{c}[\mathbf{jH}], \quad \mathbf{j} = \sigma\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{vH}]\right), \tag{1}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}, \quad \operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\rho\mathbf{v} = 0,$$

где $\mathbf{v}$ — скорость жидкости, $\mathbf{j}$ — плотность тока, $\mathbf{H}$ и $\mathbf{E}$ — напряжённости магнитного и электрического полей и p — давление. Током смещения $\left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right)$ пренебрегаем. Будем решать полученную систему уравнений в линейном приближении, т. е. будем предполагать, что $\mathbf{v}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}_1 = \mathbf{H} - \mathbf{H}_0$ ($\mathbf{H}_0$ — постоянное внешнее магнитное поле) и $\rho_1 = \rho - \rho_0$ (ρ_0 — плотность невозмущённой жидкости при $H = 0$) — малые величины. Ради простоты проводимость σ считаем бесконечной (это приводит к соотношению $\mathbf{E} = -\frac{1}{c}[\mathbf{vH}]$). Тогда линеаризованная система будет выглядеть так:

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -u_0^2 \nabla\rho_1 + \frac{1}{c}[\mathbf{jH}_0],$$

$$\Delta\mathbf{E} - \nabla \operatorname{div}\mathbf{E} = \frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial f}, \quad \mathbf{E} = -\frac{1}{c}[\mathbf{vH}_0], \tag{2}$$

где $u_0^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho}$ — квадрат скорости звука при $H_0 = 0$; поле $\mathbf{H}$ исключено. Решение для всех величин, входящих в (2), ищем в виде плоских волн, т. е. $\sim \exp\left\{i[\omega t - \mathbf{kr}]\right\}$.

В результате исключения $\mathbf{j}$ и $\mathbf{E}$ получим следующее уравнение для определения скорости $u = \frac{\omega}{k}$ волн, могущих распространяться в жидкости:

$$u^2\mathbf{v} = \frac{1}{4\pi\rho_0}\left\{[\mathbf{H}_0[\mathbf{vH}_0]] - \left[\mathbf{H}_0\frac{\mathbf{k}}{k}\right]\left(\frac{\mathbf{k}}{k}[\mathbf{vH}_0]\right)\right\} + \frac{u_0^2\mathbf{k}(\mathbf{kv})}{k^2}.$$

*) См. также В. С. Вавилов, УФН 39, 612 (1949).

Вводя угол θ между векторами $\mathbf{k}$ и $\mathbf{H}_0$, находим, что u может принимать значения

$$u_1^2 = \frac{H_0^2}{4\pi\rho_0}\cos^2\theta, \tag{3}$$

когда скорость $\mathbf{v}$ направлена перпендикулярно к $\mathbf{k}$ и $\mathbf{H}_0$ — поперечная волна, и

$$u_{2,3}^2 = \frac{1}{2}\left(u_0^2 + \frac{H_0^2}{4\pi\rho_0}\right) \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{H_0^4}{(4\pi\rho_0)^2} + u_0^4 - 2\frac{H_0^2 u_0^2}{4\pi\rho_0}\cos 2\theta}, \tag{4}$$

когда скорость $\mathbf{v}$ лежит в плоскости векторов $\mathbf{k}$ и $\mathbf{H}_0$, причём в общем случае эти волны не являются ни продольными, ни поперечными.

При $\theta = 0$ (распространение по полю)

$$u_1^2 = u_2^2 = \frac{H_0^2}{4\pi\rho_0}, \quad u_3^2 = u_0^2. \tag{5}$$

Волны *1* и *2* являются поперечными ($\mathbf{kv} = 0$); волна *3* — продольной (т. е. для неё $\mathbf{v} \parallel \mathbf{k}$; см. рис. 1).

При $\theta = \frac{\pi}{2}$ (распространение перпендикулярно к полю):

$$u_1^2 = u_3^2 = 0; \quad u_2^2 = u_0^2 + \frac{H_0^2}{4\pi\rho}. \tag{6}$$

Здесь волна *2* является продольной (см. рис. 2).

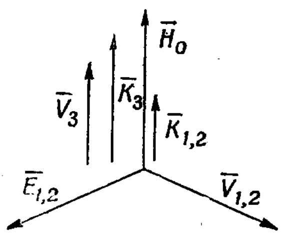

Рис. 1.

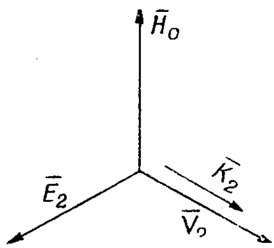

Рис. 2.

Из анализа общей формулы (2) следует, что скорость поперечных волн достигает своего максимального значения при $\theta = 0$. Поправка к скорости продольных волн $\sim \frac{H_0^2}{4\pi\rho_0 u_0}$, т. е. в жидкости, всегда очень мала $\left(\text{для ртути при } H_0 \sim 10^4, \ \frac{H_0^2}{4\pi\rho_0 u_0} \sim 1 \text{ см/сек, в то время как } u_0 = 1{,}46\cdot 10^5 \text{ см/сек}\right)$.

Таким образом мы видим, что наличие проводимости при $H_0 \neq$ приводит к появлению, например при $\theta = 0$, поперечных волн, которые обычно отсутствуют в жидкости. Эти волны и были названы магнитогидродинамическими[1] и, как будет видно из дальнейшего на примере газа, являются обычными электромагнитными волнами низкой частоты. Для выяснения этого вопроса наиболее последовательный путь в случае газообразной среды есть путь решения совместных кинетических уравнений для электронов и ионов (рассматривается полностью ионизованный газ — плазма). Однако существенным упрощающим обстоятельством при решении этой задачи является тот факт, что для поперечных волн кинетическое рассмотрение может быть заменено анализом уравнений движения электронов и ионов с использованием некоторых эффективных чисел соударений ν, вычисляемых на основе кинетической теории[9]. Эти уравнения таковы:

$$m\frac{d\mathbf{v}_e}{dt} = -e\mathbf{E} - \frac{e}{c}[\mathbf{v}_e\mathbf{H}] + m\nu(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e),$$
$$M\frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}[\mathbf{v}_i\mathbf{H}] + m\nu(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e), \tag{7}$$

где m и M — массы электрона и иона, $-e$ и $+e$ — заряды электрона и иона, $\mathbf{v}_e$ и $\mathbf{v}_i$ — их средние скорости и ν — эффективное число соударений электронов с ионами. Предполагается, что плазма квазинейтральна (т. е. концентрации ионов и электронов равны) и что имеются только однократные ионы одной массы.

К уравнениям (7) надо добавить уравнения поля:

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{4\pi\mathbf{j}}{c} + \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t},$$
$$\Delta\mathbf{E} - \nabla\operatorname{div}\mathbf{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial\mathbf{j}}{\partial t}. \tag{8}$$

Решение совместной системы (7) — (8) ищем в виде плоской волны, распространяющейся вдоль поля $\mathbf{H}_0$, в которой все величины пропорциональны $e^{i(\omega t - \mathbf{kr})}$.

После подстановки в (7) и (8) получим систему однородных линейных алгебраических уравнений относительно искомых величин, которая имеет решение, отличное от нуля при условии обращения в нуль детерминанта системы. Это условие приводит к следующему соотношению, определяющему скорость волны u:

$$\frac{k^2c^2}{\omega^2} = \frac{c^2}{u^2} = 1 - \frac{4\pi e^2N}{m\omega\left(\omega - i\nu \mp \omega_H - \omega_H\frac{\Omega_H}{\omega}\right)}, \tag{9}$$

где $\omega_H = \frac{eH}{mc}$ и $\Omega_H = \frac{eH}{Mc}$ — гиромагнитные частоты электронов и ионов. Два знака в знаменателе отвечают двум различным поперечным волнам, поляризованным по кругу соответственно налево и направо. При получении этого соотношения были отброшены члены $\sim\frac{m}{M}$. Укажем, что система (7) — (8) имеет ещё одно решение, соответствующее обычной продольной плазменной волне, которая при $\nu = 0$ обладает частотой

$$\omega^2 = \frac{4\pi e^2N}{m}.$$

Рассмотрим два наиболее интересных предельных случая высоких и низких частот. При $\omega \gg \Omega_H$ мы получим обычную формулу для электромагнитной ионосферной волны:

$$\frac{k^2c^2}{\omega^2} = \frac{c^2}{u_{\pm}^2} = 1 - \frac{4\pi e^2 N}{m\omega(\omega \mp \omega_H - i\nu)}.$$

При $\Omega_H \gg \omega$; $\Omega_H \omega_H \gg \omega\nu$ формула (9) принимает вид:

$$\frac{c^2}{u_{\pm}^2} = 1 + \frac{4\pi e^2 N}{m\omega_H \Omega_H} \approx \frac{4\pi M N c^2}{H_0^2}. \quad (10)$$

Легко видеть, что последнее выражение эквивалентно формуле (5) настоящей заметки, а также формуле (5) в работе [1] для скорости магнито-гидродинамической волны, так как MN есть как раз плотность ρ_0. В случае выполнения (10) исходные уравнения (5) и (6) также переходят в гидродинамические уравнения несжимаемой жидкости (без давления). Тем самым показано, что магнито-гидродинамические волны суть не что иное, как обычные электромагнитные волны, частота которых значительно меньше гиромагнитной частоты ионов.

В последнем разделе работы [6] учитывается, помимо ионов, движение нейтральных частиц. В этом более сложном случае выражения для скорости волны при достаточно низких частотах также совпадают с гидродинамической формулой (5).

Отметим в заключение, что недавно [5] была сделана первая попытка экспериментального исследования магнито-гидродинамических волн в жидкости (ртуть).

Полученные при этом результаты несколько не согласуются с теорией, развитой применительно к условиям, имевшим место в опыте. Автор объясняет это несогласие наличием постоянного возмущения на поверхности ртути.

В последнее время появился также ряд работ, посвящённых решению магнито-гидродинамических уравнений в нелинейном приближении при наличии скачков и турбулентности [10, 11].

В. Ф.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. H. Alfven, Nature **150**, 405 (1942); Arkiv f. Mat. Astr. o. Fys. **29B**, № 2 (1942).
2. C. Walen, Arkiv f. Mat. Astr. o. Fys. 30A, № 15 (1941); **31B** № 3 (1944).
3. E. Fermi, Phys. Rev. **75**, 1169 (1949).
4. R. D. Richtmyer and E. Teller, Phys. Rev. **75**, 1729 (1949).
5. S. Lundquist, Phys. Rev. **76**, 1805 (1949).
6. В. Л. Гинзбург, ЖЭТФ, **21**, 788 (1951).
7. E. Åstrom, Arkiv f. Fysik **2**, 443 (1951).
8. H. Alfven, Arkiv f. Mat. Astr. o. Fys. **29A**, № 12 (1943).
9. В. Л. Гинзбург, Теория распространения радиоволн в ионосфере, Гостехиздат, 1949.
10. S. Chandrasekhar, Proc. Roy. Soc. **204A**, 435 (1950); Proc. Roy. Soc. **207A**, 301 (1951).
11. Batchelor, Proc. Camb. Phil. Soc. **47**, 359 (1951).