1951 г. Май *Т. XLIV, вып. 1*

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

ВИЗУАЛИЗАЦИЯ ПРОСТРАНСТВЕННО-МОДУЛИРОВАННЫХ ЗВУКОВЫХ ВОЛН

С. Н. Ржевкин

Пространственно-модулированные волны, т. е. волны, в которых амплитуда не остаётся постоянной вдоль фронтов равной фазы, возникают в самых разнообразных случаях. Обычный способ получения таких волн сводится к тому, что волну заставляют проходить через поверхность или систему, некоторые части которой для волн более проницаемы, другие же менее непроницаемы. Такого рода поверхности осуществляются, например, в форме диффракционных решёток, зональных пластинок и других систем. Пространственно-модулированные волны возникают также в результате диффракции на отдельных препятствиях.

Весьма существенным является вопрос об устойчивости, так или иначе созданной пространственно-модулированной волны при её дальнейшем распространении. Хотя этот вопрос разбирался в литературе[1,2,4], я считал бы интересным рассмотреть его несколько иным, довольно наглядным методом.

Если мы имеем бесконечную прямую трубу прямоугольного сечения с абсолютно жёсткими стенками, имеющую в сечении размеры a и b и наполненную газом или жидкостью, и возбудим в начальном её сечении волновое движение, задав какое-нибудь распределение скоростей в начальном сечении, то мы можем получить в трубе различного типа пространственно-модулированные волны. Оси x и y направим по граням трубы, а ось z — по её длине (см. рис. 1). Пусть в начальном сечении задано распределение скоростей по нормали к плоскости $z=0$, характеризуемое, например, синусоидальной стоячей волной

$$\dot{\zeta} = v_m \cos(k_m x)\, e^{i\omega t}, \tag{1}$$

где $k_m = \frac{m\pi}{a}$; $m = 0, 1, 2, 3, \ldots$, и $\omega = 2\pi f$ — круговая частота. При этом в отрезке a укладывается m полуволн, т. е. длина волны в плоскости $z=0$ будет равна $\Lambda = \frac{2a}{m}$.

Решая волновое уравнение

$$\Delta\Phi = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} \tag{2}$$

при граничном условии (1) и полагая равными нулю скорости, нормальные к боковым граням, мы получим для потенциала скоростей Φ_m выражение

$$\Phi_m = \frac{v_m}{ik'} \cos(k_m x) e^{i(\omega t - k'z)}, \tag{3}$$

где

$$k' = \sqrt{k^2 - k_m^2}; \quad k_m = \frac{m\pi}{a} = \frac{2\pi}{\Lambda}; \quad k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Заменяя $\cos k_m x$ через $\frac{1}{2}(e^{ik_m x} + e^{-ik_m x})$, мы получим:

$$\Phi_m = \frac{v_m}{2ik'} e^{i(\omega t + k_m x - k'z)} + \frac{v_m}{2ik'} e^{i(\omega t - k_m x - k'z)}. \tag{4}$$

Если будет соблюдено условие $k > k_m$, то выражение (3) показывает, что волновой процесс, возникший в трубе, представляет собой две плоские волны, волновые векторы которых лежат в плоскости xz и составляют с осями x и z углы α и γ, определяемые выражениями

$$\cos\alpha = \frac{k_m}{k}; \quad \cos\gamma = \frac{k'}{k} = \frac{\sqrt{k^2 - k_m^2}}{k}.$$

Следовательно,

$$\sin\gamma = \pm\cos\alpha = \pm\frac{k_m}{k} = \pm\frac{\lambda}{\Lambda}. \tag{5}$$

Фазовая скорость распространения плоских волн (4) в направлениях $+\gamma$ и $-\gamma$ определится из выражения $c = \frac{\omega}{\sqrt{k_m^2 + k'^2}} = \frac{\omega}{k} = c$, т. е. она равна скорости звука. Фазовая скорость вдоль оси z будет равна $\frac{\omega}{k'} = \frac{c}{\cos\gamma}$, т. е. она больше скорости звука c.

Формула (5) совершенно аналогична формуле, которой определяется угол отклонения спектров 1-го порядка при прохождении волн через обычную диффракционную решётку. Плоские волны (4), возбуждаемые в трубе колебаниями в начальном сечении ($z = 0$), выходят двумя пучками шириной $a\cos\gamma$ в направлениях, определяемых углами $\pm\gamma$, затем отражаются последовательно от противоположных граней трубы (рис. 1) и, в результате, заполняют весь объём трубы системой двух плоских волн, пересекающихся друг с другом под углом 2γ. В этой системе волн будут проходить узловые плоскости, соответствующие значениям $\cos k_m x = 0$ или $x_m = \frac{a}{2m}(2n+1)$, где $n = 0, 1, 2, \ldots, m-1$; по этим плоскостям колебательное движение вдоль оси z будет отсут-

ствовать. Учитывая, что твёрдые боковые стенки трубы являются зеркально отражающими звук, мы можем считать, что они сняты, а картина волн в трубе дополнена зеркальным их отражением в боковых гранях; эти мнимые зеркальные волны показаны на рис. 1 пунктиром. Ввиду того, что отображения в боковых гранях будут многократными, причём зеркально отображённые волны будут снова отражаться в противоположных гранях, мы получим в результате картину единого безграничного звукового поля, создаваемого безграничной вдоль оси x плоской синусоидальной решёткой. Это звуковое

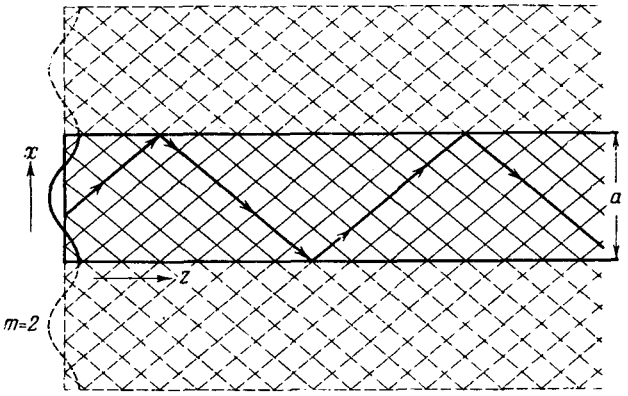

Рис. 1.

поле заполняет всё полупространство $z > 0$, а реальное поле в трубе является его частью, отграниченной габаритами трубы.

Если в плоскости $z = 0$ задано произвольное колебательное движение со скоростью $\dot{\zeta}_0(x, y)$, то его можно представить в виде суммы вида:

$$\dot{\zeta} = \sum_{m,\, n=0}^{\infty}\sum v_{mn} \cos(k_m x) \cdot \cos(k_n y)\, e^{i\omega t}, \tag{6}$$

где

$$k_m = \frac{m\pi}{a}; \quad k_n = \frac{n\pi}{b}; \quad m, n = 0, 1, 2, 3\ldots$$

Нетрудно усмотреть, что задание скорости в начальном сечении формулой вида $v_{mn} \cdot \cos k_m x \cdot \cos k_n y$ эквивалентно заданию системы двух стоячих волн равной амплитуды, с длиной волны

$$\Lambda_{mn} = \frac{2\pi}{\sqrt{k_m^2 + k_n^2}},$$

причём направления распространения этих волн составляют с осями x и y углы:

$$\alpha_{mn} = \arccos \frac{\pm k_m}{\sqrt{k_m^2 + k_n^2}} \text{ и } \beta_{mn} = \arccos \frac{\pm k_n}{\sqrt{k_m^2 + k_n^2}}.$$

Каждая из этих стоячих волн даёт двойной пучок плоских диффракционных волн 1-го порядка, идущих под углом γ_{mn} к оси z, где

$$\sin \gamma_{mn} = \frac{\sqrt{k_m^2 + k_n^2}}{k} = \frac{\lambda}{\Lambda_{mn}}. \tag{7}$$

Каждая волновая мода (m, n) будет представляться четверным пучком плоских диффракционных волн. Эти волны, последовательно отражаясь от граней, заполнят всю трубу четверной системой плоских волн, модулированных по фронту по тому же закону $\cos k_m x \cos k_n y$, как и в начальном сечении. Пространственная модуляция сводится в данном случае к образованию каналов прямоугольного сечения со сторонами $\frac{\pi}{k_m} = \frac{a}{m}$ и $\frac{\pi}{k_n} = \frac{b}{n}$, простирающихся по оси z, вдоль которых и распространяются волны, как будто бы боковые стенки этих каналов были твёрдыми. Таким образом, вся труба как бы разбивается на ряд прямоугольных трубок с твёрдыми стенками.

Мы видели, что при пересечении под углом 2γ двух плоских волн одинаковой частоты и интенсивности в суммарном волновом движении возникают узловые плоскости, расположенные по биссектрисе угла 2γ и отстоящие друг от друга на расстоянии Δx, определяемом условием $k_m \Delta x = \pi$, что даёт

$$\Delta x = \frac{\lambda}{2 \sin \gamma}. \tag{8}$$

Такую картину «псевдо-стоячих» волн даёт, например, наложение друг на друга волны, падающей на плоскую поверхность, и волны, отражённой от неё, при угле скольжения, равном γ (т. е. угле падения $90° - \gamma$).

Визуализация картины звуковых волн может быть весьма чётко осуществлена на ультразвуковых волнах в жидкости с применением метода свилей (шлирен-метода). Используя стробоскопическое освещение, удаётся получить визуально или на фотографии весьма чёткие мгновенные картины фронтов ультразвуковых волн в различных случаях распространения, отражения, преломления, диффракции и пр., как это было показано мною в совместных работах с С. И. Кречмером в Физическом институте АН СССР в 1937—1939 гг.[3].

При наблюдении без стробоскопа, очевидно, невозможно видеть фронтов отдельных бегущих волн, так как скорость их слишком

велика, но возможно видеть те места звукового поля, где колебания всегда отсутствуют. Такими местами являются, в частности, в случае псевдостоячих волн при полном отражении узловые плоскости. На рис. 2 (см. вклейку) дан снимок псевдостоячих волн при полном отражении, полученный нами (без стробоскопирования, в одной из прежних работ. На нём ясно видны тёмные линии, параллельные отражающей плоской поверхности, соответствующие псевдостоячим волнам. Вдоль каналов, образуемых узловыми плоскостями, распространяются бегущие волны с увеличенной фазовой скоростью $c/\cos\gamma$. Никаких поперечных узловых поверхностей на протяжении этих каналов не образуется.

Сложная, пространственно-модулированная по фронту по закону $\cos k_m x = \cos \frac{2\pi}{\Lambda} x$ волна, получающаяся при наложении двух плоских волн, волновые векторы которых составляют угол 2γ, является стабильной, и узловые плоскости по фронту волны, идущие в направлении биссектрисы угла 2γ, остаются при распространении волны неизменными. Вычисляя вектор Умова (вектор плотности потока энергии) вдоль оси z, мы получим выражение

$$J = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[p\dot{\zeta}^*] = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\left[i\omega\rho\Phi\cdot\left(-\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^*\right] =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\rho c v_m^2}{\sqrt{1-\frac{k_m^2}{k^2}}} \cos^2 k_m x. \tag{9}$$

Вектор Умова, представляющий интенсивность звука, является постоянным вдоль оси z, а по оси x меняется пропорционально $\cos k_m x$. Вдоль каждого канала ширины $\frac{\pi}{k_m} = \frac{\Lambda}{2} = \frac{a}{m}$ будет распространяться волна со средней интенсивностью

$$\frac{1}{4} \frac{\rho c v_m^2}{\sqrt{1-\frac{k_m^2}{k^2}}} = \frac{1}{4} \frac{\rho c v_m^2}{\cos\gamma}.$$

Если $\Lambda < \lambda$ $(k_m > k)$, т. е. если длина волны синусоидальной решётки меньше, чем длина звуковой волны (в свободном пространстве), то волновое число $k' = \sqrt{k^2 - k_m^2}$ будет мнимо и уравнение волны (3) запишется в форме

$$\Phi_m = \frac{v_m}{ik'} \cos(k_m x)\, e^{-\sqrt{k_m^2 - k^2}\cdot z}\, e^{i\omega t}, \tag{10}$$

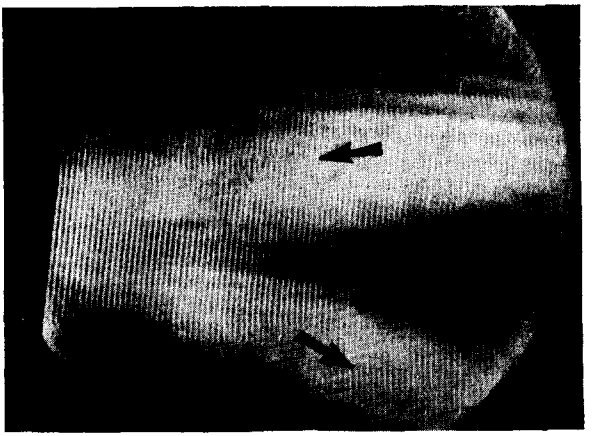

Рис. 2.

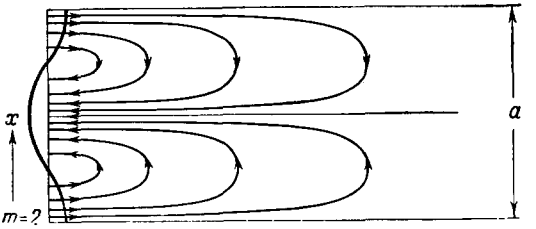

Рис. 3.

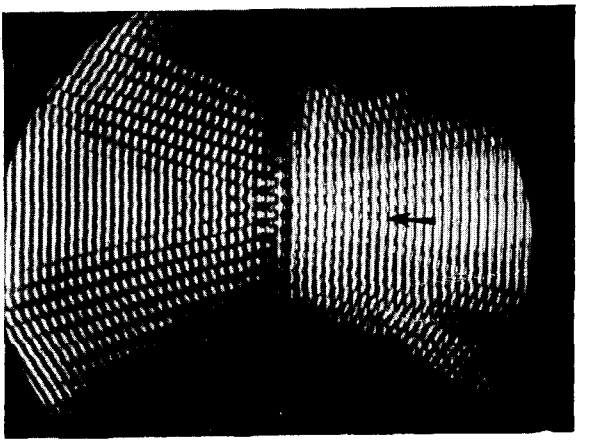

Рис. 4.

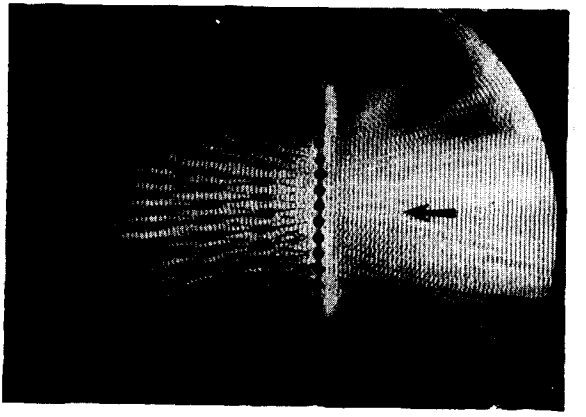

Рис. 5.

Рис. 6.

а выражение (5) будет показывать, что $\sin\gamma > 1$; при этом угол γ оказывается комплексным. Из формулы (10) явствует, что колебания, возбуждённые в начальном сечении с частотой $\omega = kc$ и с периодом пространственной модуляции $\Lambda = \frac{2\pi}{k_m}$, будут постепенно затухать с коэффициентом затухания, равным $\sqrt{k_m^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}$. Линии тока среды, форму которых можно найти, вычислив компоненты скорости по осям x и z $\left(-\frac{\partial\Phi}{\partial x} \text{ и } -\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)$, будут представлять собой кривые, коротко замыкающиеся между соседними пучностями стоячей волны, показанной на рис. 3. Таким образом, в случае $\Lambda < \lambda$ в полупространстве $z > 0$ возникает колебательный процесс лишь в зоне, ближайшей к области возбуждения, волн же, уходящих вдаль, не образуется.

Пространственно модулированная волна в случае $\Lambda < \lambda$ или $f > \frac{c}{\Lambda}$ является нестабильной, созданные на фронте волны неоднородности в этом случае не сохраняются и постепенно исчезают. В частности, в этом случае волна, падающая на диффракционную решётку, даёт по другую сторону решётки лишь затухающий волновой процесс; бегущих вдаль волн, создающих диффракционные спектры, не образуется. При этих условиях волна, падающая нормально на решётку, полностью отразится от неё. Нетрудно показать, вычислив величины среднего звукового давления $\bar{p} = i\omega\rho\bar{\Phi}_m$ и средней скорости частиц по оси $z\left(\bar{v} = -\frac{\partial\Phi_m}{\partial z}\right)$, причём усреднение производится на протяжении одной полуволны $\frac{\Lambda}{2}$, что средний импеданс на единицу поверхности $\bar{Z}_1 = \frac{\bar{p}}{\bar{v}}$ будет в данном случае чисто инерционным

$$\bar{Z}_1 = i\omega M_1 = i\omega \frac{\rho\Lambda\lambda}{2\pi\sqrt{\lambda^2 - \Lambda^2}} = \frac{i\omega\rho}{\sqrt{\frac{1}{\Lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2}}}. \qquad (11)$$

Величина M_1 характеризует присоединённую массу на единицу площади. Инерционный характер импеданса обусловливает полное отражение звука согласно формуле для коэффициента отражения

$$|r| = \left|\frac{\bar{Z}_1 - \rho c}{\bar{Z}_1 + \rho c}\right| = \left|\frac{i\omega M_1 - \rho c}{i\omega M_1 + \rho c}\right| = 1. \qquad (12)$$

Волновая картина существенно изменяется, если кроме стоячей волны вдоль оси x имеется ещё и плоская волна, вызываемая поршневым движением начального сечения со скоростью $v_0 e^{i\omega t}$,

что соответствует постоянному члену в выражении суммы вида (6), т. е. волновой моде $m=0$, $n=0$.

Рассмотрим модуляцию по фронту посредством решётки с прозрачными и непрозрачными полосами; скорость в плоскости $z=0$ зададим в форме ряда

$$\dot{\zeta}_0 = v_0 e^{i\omega t} + v_m \cos k_m x \cdot e^{i\omega t} + v_{2m} \cos 2 k_m x \cdot e^{i\omega t} + \ldots \quad (13)$$

Амплитуды v_{mn} быстро убывают с ростом n. Потенциал скоростей, аналогично (2), запишем в следующей форме:

$$\Phi = \frac{v_0}{ik} e^{i(\omega t - kz)} + \frac{v_m}{i\sqrt{k^2 - k_m^2}} \cos k_m x \cdot e^{i\left(\omega t - \sqrt{k^2 - k_m^2} \cdot z\right)} +$$

$$+ \frac{v_{2m}}{i\sqrt{k^2 - (2k_m)^2}} \cos 2 k_m x \cdot e^{i\left(\omega t - \sqrt{k^2 - (2k_m)^2} \cdot z\right)} \quad . \quad (14)$$

Вектор Умова будет иметь вид:

$$J = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(p\dot{\zeta}^*) = \frac{1}{2} \rho c v_0^2 +$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{\rho c v_m^2}{\sqrt{1 - \frac{k_m^2}{k^2}}} + \frac{1}{2} \frac{\rho c v_{2m}^2}{\sqrt{1 - \frac{(2k_m)^2}{k^2}}} + \ldots$$

$$+ \frac{1}{2} \rho c v_0 v_m \frac{\sqrt{1 - \frac{k_m^2}{k^2}} - 1}{\sqrt{1 - \frac{k_m^2}{k^2}}} \cos k_m x \cdot \cos\left[k - \sqrt{k^2 - k_m^2}\right] z +$$

$$+ \frac{1}{2} \rho c v_0 v_{2m} \frac{\sqrt{1 - \frac{(2k_m)^2}{k^2}} - 1}{\sqrt{1 - \frac{(2k_m)^2}{k^2}}} \cos 2 k_m x \times$$

$$\times \cos\left[k - \sqrt{k^2 - (2k_m)^2}\right] z + \ldots \quad (15)$$

Первые члены в этом выражении дают интенсивность звука, обусловленную плоской волной, с амплитудой скорости v_0, распространяющейся вдоль оси z, и волнами сложного вида, со скоростью, модулированной по фронту по закону $v_m \cos k_m x$, $v_{2m} \cos 2 k_m x$ и т. д. (длина волны модуляции по фронту равна $\Lambda = \frac{2a}{m}$, $\frac{2a}{2m}$ и т. д). Эти первые члены не зависят от z. Последующие

члены (третья и четвёртая строки) обнаруживают периодическую зависимость от z, причём длины пространственного периода равны:

$$\Lambda' = \frac{2\pi}{k - \sqrt{k^2 - k_m^2}} = \frac{\lambda}{1 - \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{\Lambda^2}}}, \tag{16}$$

$$\Lambda'' = \frac{2\pi}{k - \sqrt{k^2 - (2k_m)^2}} = \frac{\lambda}{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{2\lambda}{\Lambda}\right)^2}} \text{ и т. д.,}$$

а интенсивности пропорциональны $v_0 v_m$, $v_0 v_{2m}$ и т. д. Период изменения интенсивности по оси z при малой величине $\frac{\lambda}{\Lambda}$ будет приближённо равен

$$\Lambda' \cong \frac{\lambda}{1 - \left(1 - \frac{1}{2}\frac{\lambda^2}{\Lambda}\right)} = \frac{2\Lambda^2}{\lambda}. \tag{17}$$

Высшие члены ряда (14) с волновыми числами $2k_m$, $3k_m$, ... и т. д., при условии $\lambda \ll \Lambda$, дадут периодичность по оси z с периодом в 2^2, 3^2 и т. д. раз меньшим, и весь процесс в целом будет приближённо периодичен по направлению z. Если условие $\lambda \ll \Lambda$ не соблюдается, то в этом случае члены высших порядков уже не будут иметь периода в целое число раз меньшего, чем основной период и изменение интенсивности вдоль оси z (при заданном значении x и y) не будет носить строго периодического характера.

Минимальная интенсивность будет получаться в тех точках, где $\cos\frac{2\pi}{\Lambda'}z$ имеет наибольшую отрицательную величину, т. е. при $\frac{2\pi}{\Lambda'}z = (2n+1)\pi$ или $z_{\min} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\Lambda'$; максимальная интенсивность будет получаться при $\frac{2\pi}{\Lambda'}z = 2n\pi$ или $z_{\max} = n\Lambda'$. Этого рода рассуждения Релей положил в основу теории копирования диффракционных решёток [2]. Ясно, что на расстояниях $z = n\Lambda'$ от решётки при условии $\lambda \ll \Lambda$, согласно (15), получится распределение интенсивностей, отвечающее «светлым» и «тёмным» штрихам решётки; поставив на таких расстояниях фотопластинку, можно получить копию решётки. При $z_2 = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\Lambda'}{2}$ мы получим обращение интенсивностей — светлым штрихам решётки будут соответствовать минимумы интенсивности, а тёмным — максимумы; на этих расстояниях, очевидно, также можно сфотографировать копию решётки. При любых n теоретически также будут получаться копии решётки, однако вследствие возрастающей неточности в периодичности членов ряда (15) резкость минимумов и максимумов

интенсивности будет постепенно уменьшаться по мере удаления пластинки от решётки.

Изложенные соображения можно удачно иллюстрировать снимками пространственно-модулированных ультразвуковых волн при прохождении их через диффракционную решётку. Диффракционная решётка для этих опытов изготовлялась из стальных стержней диаметром в 2 *мм*. Ультразвуки различной длины волны получались от пьезокварцевого излучателя; решётка и излучатель помещались в ванну с вазелиновым маслом, имеющую плоскопараллельные стенки из зеркального стекла.

На фотоснимках рис. 4 и 5 (см. вклейку) представлены два случая образования диффракционных копий решётки *). Измерение даёт на первом снимке $\lambda = 1{,}80$ *мм*, шаг решётки $\Lambda = 3{,}20$ *мм* и полупериод по оси z равен $\frac{\Lambda'}{2} \cong 10$ *мм*, т. е. $\Lambda' \cong 20$ *мм*. Расчёт по формуле (17) даёт $\frac{\Lambda'}{2} = 11{,}3$ *мм*, т. е. имеет место довольно существенное расхождение с величиной 10 *мм*, полученной из опыта (в данном случае измерение Λ' очень неточно). Однако, учитывая, что $\frac{\lambda}{\Lambda} = 0{,}562$ по точной формуле (16), мы получим $\frac{\Lambda'}{2} = 10{,}4$ *мм*, что уже удовлетворительно согласуется с опытом. Ясно, что в данном случае члены высших порядков в формуле (15) не дадут периодичности, совпадающей с периодичностью основного (первого) члена, и при удалении от решётки резкость «копии» решётки будет сильно уменьшена. Мы видим на рис. 4, что только первый, обращённый, ряд «изображений» стержней решётки на расстоянии $\frac{\Lambda'}{2}$ виден достаточно чётко, дальнейшие же изображения совершенно размыты. На снимке рис. 4. прекрасно видны диффракционные волны 1-го порядка и тёмные «лучи» псевдостоячих волн, идущие по биссектрисе между спектрами первого и нулевого порядка.

На рис. 5 дан снимок диффракции волн для решётки с шагом $\Lambda = 3{,}2$ *мм* при длине волны $\lambda = 0{,}9$ *мм*, т. е. $\frac{\lambda}{\Lambda} = 0{,}28$. На снимке видно по меньшей мере три ряда изображений или копий решётки.

В этом случае вычисление по приближённой формуле (17) даёт $\Lambda' = 22{,}6$ и по точной формуле (16) $\Lambda' = 22{,}5$; разницу в сотых долях миллиметра трудно проверить при промерах на снимке. Измерение по снимку даёт в этом случае $\Lambda' = 22{,}8$ *мм*, что совпадает с теоретическим значением с точностью 1,3%.

---

*) Фотоснимки, приведённые на рис. 4, 5 и 6, получены в период 1937—1938 гг. в лаборатории акустики ФИАН, однако в тот период они не получили должного истолкования и их описание не было дано в ранее опубликованных работах.

На рис. 6 (см. вклейку) показана картина ультразвукового поля при отражении волны от поверхности с параллельными бороздами под косым углом падения; разрез борозд хорошо виден на снимке. Из снимка ясно, что и в данном случае отражённые волны являются пространственно-модулированными, причём получается ряд точек с увеличенной интенсивностью звука и ряд точек с уменьшённой интенсивностью, т. е. модуляция интенсивности в данном случае имеют место как по фронту отражённой волны, так и по направлению распространения волн.

Последний случай представляет интерес с точки зрения архитектурной акустики; он показывает, что звуковое поле при отражении от ряда колонн или борозд на стенах будет неравномерным в пространстве. В нём будут точки с увеличенной нитенсивностью и точки с уменьшённой интенсивностью.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Релей, Волновая теория света, ГТТИ, стр. 82—89 (1940).
2. Rayleigh, Phil. Mag. (1881), стр. 504.
3. С. И. Кречмер и С. Н. Ржевкин, УФН, 18, 1 (1937); Techn. Phys. (USSR), 4, 1 (1937); Труды ФИАН, т. I, вып. 4 (1939).
4. С. М. Рытов, УФН, 41, 425 (1950).