1951 г. Май Т. XLIV, вып. 1

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ ВТОРОГО ЗАКОНА ТЕРМОДИНАМИКИ К ЭЛЕКТРИЧЕСКИМ ФЛУКТУАЦИЯМ

Г. С. Горелик

1. ВВЕДЕНИЕ

Что можно сказать об электрических флуктуациях, играющих такую важную роль в современной технике, на основании одной только феноменологической термодинамики, не пользуясь статистическими соображениями? В частности, какие следствия, относящиеся к электрическим флуктуациям, можно вывести из уравнения *)

$$T\,dS = dU + \Sigma X_i\,dx_i\,, \tag{1}$$

выражающего второй закон термодинамики для квазистатических процессов?

Таковы вопросы, на которые мы постараемся здесь ответить.

Вопросы эти могут показаться странными: принято говорить, что флуктуационные явления выходят за рамки феноменологической термодинамики. Однако такое мнение неправильно, как будет разъяснено в § 2 **). После этого вопросы, поставленные в начале, покажутся, как мы надеемся, вполне естественными и не лишёнными некоторого — по крайней мере педагогического — интереса.

*) Обозначения: T — температура по термодинамической шкале, S — энтропия, U — внутренняя энергия, x_i, X_i — обобщённые координаты и соответствующие им обобщённые силы.

**) Уже в работе Найквиста[1] содержится рассуждение относительно электрических флуктуаций, основанное на феноменологической термодинамике. Это рассуждение воспроизводится (с несущественными изменениями) в § 4. Заметим, во избежание недоразумений, что здесь не строится, как это иногда делалось, новая формулировка второго закона термодинамики, учитывающая флуктуации физических величин около их средних значений. Здесь к флуктуационным явлениям применяется второй закон термодинамики в его классической формулировке.

2. ТЕПЛОВОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ И ФЛУКТУАЦИОННЫЙ ШУМ

Обычная терминология, относящаяся к флуктуациям, страдает непоследовательностью. Это связано с тем, что невозможно провести однозначное разграничение физических явлений на два класса: флукутации и «не-флуктуации»; отнесение того или иного физического явления к флуктуациям или «не-флуктуациям» может зависеть от выбора переменных *).

Мы сможем нагляднее всего обосновать эти утверждения, если проведём параллель между тепловым излучением в полости и тепловым шумом в электрическом колебательном контуре **). Рассмотрение будет вестись в этом параграфе с позиций статистической термодинамики.

Как известно (см., например,[2]), если замкнутая система, находящаяся в состоянии термодинамического равновесия, состоит из двух частей, имеющих энергии E и E' (общая энергия $E+E'$ — постоянная), и если $\overline{E} \ll \overline{E'}$, то средний квадрат отклонения

$$\varepsilon = E - \overline{E}$$

энергии E от её среднего значения $\overline{E}$ равен:

$$\overline{\varepsilon^2} = kT^2 \frac{d\overline{E}}{dT} \tag{2}$$

(k — постоянная Больцмана). На основании формулы (2) и формулы Планка для среднего значения энергии $E_и$ равновесного излучения температуры T в объёме V и частотном интервале $\Delta\nu$ имеем:

$$\overline{E}_и = N \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}, \tag{3}$$

где h — постоянная Планка и N — число степеней свободы этого излучения, а именно:

$$N = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} V\Delta\nu \tag{4}$$

(c — скорость света), Эйнштейн вычислил средний квадрат отклонения энергии $E_и$ от её среднего значения: на основании (2), (3) имеем в результате несложного вычисления

$$\overline{\varepsilon_и^2} = h\nu\overline{E}_и + \frac{1}{N}\overline{E}_и^2. \tag{5}$$

---

*) На это обстоятельство и связанную с ним невозможность разграничения между областями применимости феноменологической и статистической термодинамики обратил моё внимание М. А. Леонтович.

**) Дробовые электрические флуктуации в этой статье не рассматриваются.

$$-\frac{kT^2\, h\nu\, e^{\frac{h\nu}{kT}}}{\left(e^{\frac{h\nu}{kT}}-1\right)^2}\cdot\left(-\frac{h\nu}{kT^2}\right) = \frac{(h\nu)^2 e^{\frac{h\nu}{kT}}}{\left(e^{\frac{h\nu}{kT}}-1\right)^2} N$$

Применим рассуждение Эйнштейна к электрическому колебательному контуру, находящемуся в термодинамическом равновесии с окружающим его веществом и (или) излучением. Среднее значение энергии контура

$$E_{\text{к}} = \frac{q^2}{2C} + \frac{L\dot{q}^2}{2} \tag{6}$$

(q — заряд, C — ёмкость, L — индуктивность), если не пренебрегать $h\nu$, где

$$\nu = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}, \tag{7}$$

по сравнению с kT, равно:

$$\bar{E}_{\text{к}} = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}. \tag{8}$$

На основании (2), (8) имеем:

$$\overline{\varepsilon_{\text{к}}^2} = h\nu\bar{E}_{\text{к}} + \bar{E}_{\text{к}}^2. \tag{9}$$

$\sqrt{\overline{\varepsilon^2}} = \frac{W(\nu)}{4R} = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1} \to kT$

С термодинамической и статистической точек зрения случай колебательного контура отличается от случая равновесного излучения (V, $\Delta\nu$) лишь тем, что в первом выделенная система имеет число степеней свободы $N = 1$*).

Обычно употребляемая терминология такова. Величина $\bar{E}_{\text{и}}$ называется средней энергией теплового излучения, о величине $\bar{E}_{\text{к}}$ говорят, как о средней энергии электрических флуктуаций; величиной же флуктуации в случае излучения называют $\varepsilon_{\text{и}}$. При такой терминологии следует говорить о $\varepsilon_{\text{к}}$ как о величине, характеризующей флуктуацию энергии флуктуаций.

Ясно, что эта терминология идёт вразрез с действительным соотношением между физическим смыслом величин $E_{\text{и}}$, $E_{\text{к}}$, $\varepsilon_{\text{и}}$, $\varepsilon_{\text{к}}$: величина $E_{\text{к}}$ аналогична $E_{\text{и}}$, а величина $\varepsilon_{\text{к}}$ величине $\varepsilon_{\text{и}}$. Это и даёт нам право утверждать, что обычная терминология является непоследовательной.

Последовательной терминологией является, например, такая: $E_{\text{и}}$ есть энергия теплового излучения (V, $\Delta\nu$), $E_{\text{к}}$ есть энергия теплового колебания в контуре; $\varepsilon_{\text{и}}$ есть флуктуация энергии теплового излучения (V, $\Delta\nu$), $\varepsilon_{\text{к}}$ есть флуктуация энергии теплового колебания в контуре. Но можно построить и другую последовательную терминологию, при которой название «флуктуация» относилось бы к тому, что обычно называют тепловым излучением.

*) Формулу (9) можно непосредственно получить из (5), положив в ней $N = 1$.

Действительно, будем рассматривать не энергию, а напряжённости электрического и магнитного полей $\mathscr{E}$, $\mathscr{H}$. Как в случае колебательного контура, так и в случае излучения, имеем:

$$E = \frac{1}{8\pi}\int(\mathscr{E}^2 + \mathscr{H}^2)\,dV. \tag{10}$$

Кроме того, при термодинамическом равновесии всюду

$$\overline{\mathscr{E}} = 0, \quad \overline{\mathscr{H}} = 0, \tag{11}$$

и, следовательно, $\mathscr{E} = \mathscr{E} - \overline{\mathscr{E}}$, $\mathscr{H} = \mathscr{H} - \overline{\mathscr{H}}$.

Таким образом можно сказать, что как величина $\overline{E}_к$, так и величина $\overline{E}_и$ характеризуют средний квадрат флуктуации величин $\mathscr{E}$, $\mathscr{H}$, а величины $\overline{\varepsilon_к^2}$, $\overline{\varepsilon_и^2}$ — средний квадрат флуктуации энергии флуктуации.

Итак, одно и то же явление (наличие при термодинамическом равновесии излучения в полости или колебаний в контуре) относится к классу флуктуаций, если рассмотрение ведётся в «линейных» переменных $\mathscr{E}$, $\mathscr{H}$ (или q, $\dot{q}$) и к классу «не-флуктуаций», если рассмотрение ведётся в «квадратичных» переменных $E_и$ или $E_к$. Термин «флуктуации» не может служить однозначной характеристикой того или иного явления, однозначный смысл имеет лишь термин: «флуктуации такой-то физической величины»: заряда конденсатора, энергии поля и т. п.

Сформулируем теперь основную идею настоящей статьи.

Мы знаем, что к средним значениям физических величин применимы законы феноменологической термодинамики. Так, например, с помощью феноменологической термодинамики (без статистики) выводится, что для плотности энергии излучения u, равной по определению

$$u = \frac{1}{V}\int\limits_0^\infty \frac{\overline{E}}{\Delta\nu}\,d\nu, \tag{12}$$

имеет место соотношение

$$u = \sigma T^4, \tag{13}$$

где σ — универсальная постоянная (закон Стефана-Больцмана), что спектральная плотность величины u и пропорционального ей потока энергии равновесного излучения есть универсальная функция $F(\nu, T)$ частоты и температуры (закон Кирхгофа), причём

$$F(\nu, T) = \nu^3\Psi\left(\frac{\nu}{T}\right) \tag{14}$$

(закон Вина). Здесь будет показано, как можно получить из феноменологической термодинамики аналогичные до некоторой степени высказывания для **средних** величин, характеризующих — если употреблять обычную терминологию — равновесные электрические флуктуации.

Феноменологическая термодинамика будет применяться нами в сочетании с **классической** электродинамикой. Таким образом, квантовые явления (тепловые флуктуации при $h\nu \gtrsim kT$) выходят за рамки нашего исследования.

3. ТЕРМОДИНАМИЧЕСКАЯ ТЕОРЕМА О СРЕДНЕМ КВАДРАТЕ ФЛУКТУАЦИИ ЗАРЯДА

Пусть нам известно, что давление излучения

$$p = \frac{u}{3}. \tag{15}$$

Тогда, применяя (1), мы получаем («термодинамика удваивает наши знания») закон Стефана-Больцмана. Проведём рассуждение того же типа для среднего квадрата флуктуаций заряда на конденсаторе.

Пусть конденсатор ёмкости C находится в равновесии с термостатом температуры T (в схеме рис. 1 равновесие обеспечивается посредством погруженного в термостат сопротивления R). Возьмём в качестве независимых переменных T, C и R. Независимой переменной C соответствует обобщённая сила

не понял. без $q^2(c)$)

$$X = -\overline{\frac{\partial}{\partial C}\left(\frac{q^2}{2C}\right)} = \frac{\overline{q^2}}{2C^2} \tag{16}$$

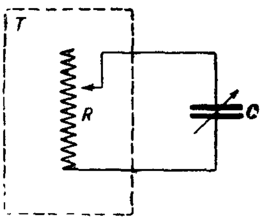

Рис. 1.

(обобщённая сила в **термодинамическом** смысле есть среднее значение за большое время обобщённой силы в механическом смысле, равной, в свою очередь, минус производной по обобщённой координате C от электростатической энергии $q^2/2C$). Величина X характеризует в среднем за большое время притяжение, существующее в результате флуктуаций заряда q, между обкладками конденсатора. (Рассматриваемое в термодинамике давление газа или излучения p есть также среднее значение «истинного» давления за большое время.)

Обобщённая сила, соответствующая переменной R, равна **нулю**. В отличие от смещения пластин конденсатора, смещение движка реостата — при отсутствии трения — происходит без затраты работы.)

Величина $\overline{q^2}$ должна рассматриваться как неизвестная функция независимых переменных T, C, R

$$\overline{q^2} = \varphi(T,\ C,\ R). \tag{17}$$

Уравнение

$$X = \frac{\varphi(T,\ C,\ R)}{2C^2} \tag{18}$$

есть уравнение состояния нашей системы, подобно тому, как (15), если u выражено в функции T, V, есть уравнение состояния излучения.

Внутренняя энергия системы (в термодинамическом смысле)

$$U = \frac{\overline{q^2}}{2C} + F(T, R) = \frac{\varphi(T,\ C,\ R)}{2C} + F(T,\ R) \tag{19}$$

(среднее значение за большое время электростатической энергии + функция температуры и сопротивления R).

Следовательно, для рассматриваемой системы уравнение (1) имеет вид

$$TdS = d\left[\frac{\varphi(T,\ C,\ R)}{2C} + F(T, R)\right] + \frac{\varphi(T,\ C,\ R)}{2C^2}\,dC \tag{20}$$

или

$$dS = \frac{1}{T}\left(\frac{1}{2C}\frac{\partial\varphi}{\partial T} + \frac{\partial F}{\partial T}\right)dT + \frac{1}{2TC}\frac{\partial\varphi}{\partial C}\,dC + {}$$
$$+ \frac{1}{T}\left(\frac{1}{2C}\frac{\partial\varphi}{\partial R} + \frac{\partial F}{\partial R}\right)dR. \tag{21}$$

Так как dS — полный дифференциал, имеем:

$$\frac{\partial}{\partial C}\left[\frac{1}{T}\left(\frac{1}{2C}\frac{\partial\varphi}{\partial T} + \frac{\partial F}{\partial T}\right)\right] = \frac{\partial}{\partial T}\left[\frac{1}{2TC}\frac{\partial\varphi}{\partial C}\right], \tag{22а}$$

$$\frac{\partial}{\partial T}\left[\frac{1}{T}\left(\frac{1}{2C}\frac{\partial\varphi}{\partial R} + \frac{\partial F}{\partial R}\right)\right] = \frac{\partial}{\partial R}\left[\frac{1}{T}\left(\frac{1}{2C}\frac{\partial\varphi}{\partial T} + \frac{\partial F}{\partial T}\right)\right], \tag{22б}$$

$$\frac{\partial}{\partial R}\left[\frac{1}{2TC}\frac{\partial\varphi}{\partial C}\right] = \frac{\partial}{\partial C}\left[\frac{1}{T}\left(\frac{1}{2C}\frac{\partial\varphi}{\partial R} + \frac{\partial F}{\partial R}\right)\right], \tag{22в}$$

откуда легко получить

$$T\frac{\partial\varphi}{\partial T} = C\frac{\partial\varphi}{\partial C}, \tag{23а}$$

$$\frac{1}{2C}\frac{\partial\varphi}{\partial R} + \frac{\partial F}{\partial R} = 0, \tag{23б}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial R} = 0. \tag{23в}$$

Уравнение (23в) указывает, что φ не зависит от R, (23б) указывает, что F также не зависит от R, а уравнение (23а), — что функция φ имеет вид

$$\varphi = \Phi\ (CT), \tag{24}$$

т. е., на основании (17),

$$\overline{q^2} = \Phi\ (CT). \tag{25}$$

Итак, из соотношения (18) (из того, что было известно заранее о структуре уравнения состояния) и из соотношения (19) (из того, что было известно заранее о структуре выражения внутренней энергии) второй закон термодинамики позволяет заключить, что средний квадрат заряда конденсатора (средний квадрат флуктуации величины q) зависит только от произведения ёмкости конденсатора на температуру.

4. ТЕРМОДИНАМИЧЕСКАЯ ТЕОРЕМА О СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ ФЛУКТУАЦИОННОЙ Э. Д. С.

Одно из утверждений, составляющих второй закон термодинамики, может быть сформулировано следующим образом. Если система, заключённая в адиабатическую оболочку, находится в состоянии термодинамического равновесия (при этом её части имеют одинаковую температуру), то нельзя создать разности температур между её частями без затраты работы извне. Применяя это утверждение к обмену энергией между двумя печами равной температуры посредством излучения (рис. 2) и мысленно помещая на пути излучения непоглощающие пластинки, коэффициенты отражения и пропускания которых зависят от частоты, мы приходим к закону Кирхгофа.

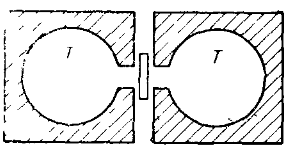

Рис. 2.

Аналогичное рассуждение может быть проведено для электрических флуктуаций.

Представим себе два линейных двухполюсника, находящихся в адиабатически изолированных термостатах температуры T_1, T_2 и имеющих соответственно импедансы

$$Z_1 = R_1 + iX_1, \qquad Z_2 = R_2 + iX_2 \tag{26}$$

(вообще говоря, не только реактансы X_1, X_2, но и активные сопротивления R_1, R_2 зависят от частоты). Замкнём эти двухполюсники друг на друга (рис. 3). Вследствие наличия флуктуирующего (теплового) напряжения между соединительными проводами A, B и флуктуирующего (теплового) тока в них имеет место, вообще говоря, передача энергии от одного двухполюсника к другому, что приводит к изменению их температур.

Введём для описания флуктуационных электрических явлений в схеме рис. 3 эквивалентные флуктуационные э. д. с. $\mathscr{E}_1(t)$, $\mathscr{E}_2(t)$ (t — время), представив себе их источники включёнными последовательно с двухполюсниками и находящимися внутри соответствующих термостатов (рис. 4). Какими свойствами должны обладать эти эквивалентные э. д. с. для того, чтобы не было противоречия с термодинамическим утверждением, приведённым в начале этого параграфа?

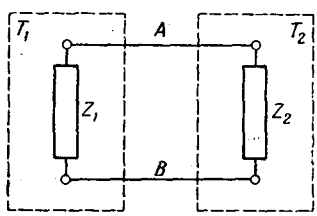

Рис. 3.

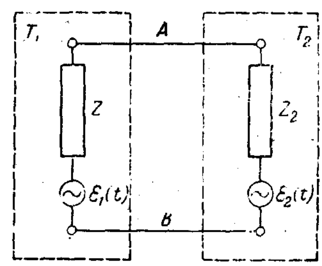

Рис. 4.

Если система находится в термодинамическом равновесии, то согласно второму закону термодинамики должно быть

$$P_{12} = P_{21}, \tag{27}$$

где P_{12}, P_{21}, — соответственно, мощности, отдаваемые источником э. д. с. $\mathscr{E}_1$ двухполюснику Z_2 и источником э. д. с. $\mathscr{E}_2$ двухполюснику Z_1 *). При этом

$$P_{12} = \int_0^\infty R_2 \frac{w_1(\nu)\,d\nu}{|Z|^2}, \quad P_{21} = \int_0^\infty R_1 \frac{w_2(\nu)\,d\nu}{|Z|^2}, \tag{28}$$

*) Статистическая расшифровка:

$$P_{12} = \overline{V_1(t)\,I_1(t)}, \qquad P_{21} = \overline{V_2(t)\,I_2(t)},$$

где $I_1(t)$, $I_2(t)$ — составляющие тока в проводе A (рис. 4), $V_1(t)$, $V_2(t)$ — составляющие разности потенциалов между проводами A, B, возбуждаемые соответственно источниками $\mathscr{E}_1$, $\mathscr{E}_2$. Положительные направления для V_1 и для V_2 — от A к B. Положительное направление для I_1 — от Z_1 к Z_2, для I_2 — от Z_2 к Z_1. Усреднение проводится за очень большое время.

где $w_1(\nu)$, $w_2(\nu)$ — спектральные плотности *) э. д. с. $\mathcal{E}_1(t)$, $\mathcal{E}_2(t)$, а

$$Z = Z_1 + Z_2. \tag{29}$$

Подставляя (28) в (27), получаем уравнение

$$\int_0^\infty R_2 \frac{w_1(\nu)\, d\nu}{|Z|^2} = \int_0^\infty R_1 \frac{w_2(\nu)\, d\nu}{|Z|^2}. \tag{30}$$

Из него следует, в частности, лемма: если на всех частотах $R_2=0$, $R_1 \neq 0$, то на всех частотах $w_2(\nu)=0$; иными словами, если один из двухполюсников не поглощает, то он не содержит флуктуационной э. д. с.

Пользуясь этой леммой, легко усилить утверждение (30).

Включим между двухполюсниками непоглощающий (чисто реактансный) фильтр (рис. 5). Теперь

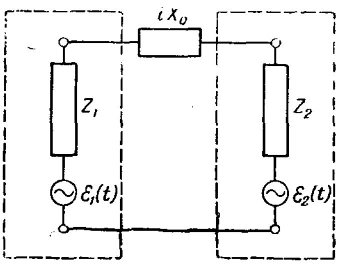

Рис. 5.

$$P_{12} = \int_0^\infty R_1 \frac{w_2(\nu)\, d\nu}{|Z'|^2},$$

$$P_{21} = \int_0^\infty R_2 \frac{w_1(\nu)\, d\nu}{|Z'|^2}, \tag{31}$$

где

$$Z' = Z + iX_0 \tag{32}$$

(X_0 — реактанс фильтра). Так как согласно лемме фильтр «не шумит» **), при термодинамическом равновесии должно попрежнему

---

*) Статистическая расшифровка:

$$w(\nu) = \lim_{\tau \to \infty} \frac{2A(\nu)\, A^*(\nu)}{\tau},$$

где

$$A(\nu) = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \mathcal{E}(t)\, e^{-i2\pi\nu t}\, dt, \quad \nu = \frac{n}{\tau} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Усреднение проводится по большому числу промежутков времени τ. Величина $|A(\nu)|$ пропорциональна амплитуде гармонической составляющей частоты ν ряда Фурье, представляющего функцию $\mathcal{E}(t)$ в интервале t_0, $t_0+\tau$.

**) Т. е. не содержит флуктуационной э. д. с. Для того чтобы применить лемму, нужно представить себе схему рис. 5 как соединение фильтра с двухполюсником $Z_1 + Z_2$.

выполняться (27), откуда

$$\int_0^\infty R_1 \frac{w_2(\nu)\,d\nu}{|Z'|^2} = \int_0^\infty R_2 \frac{w_1(\nu)\,d\nu}{|Z'|^2}. \tag{33}$$

Для того чтобы это равенство удовлетворялось при *любом* виде характеристики фильтра $X_0(\nu)$, подинтегральные функции должны быть тождественно равны друг другу. Отсюда следует, что

$$R_1(\nu)\, w_2(\nu) = R_2(\nu)\, w_1(\nu) \tag{34}$$

или

$$\frac{w_1(\nu)}{R_1(\nu)} = \frac{w_2(\nu)}{R_2(\nu)}. \tag{35}$$

Рассмотрим теперь всевозможные линейные двухполюсники $Z_1, Z_2, \ldots, Z_i, \ldots, Z_k, \ldots$ температуры T. Распространяя только что приведённые рассуждения на любую пару двухполюсников Z_i, Z_k, мы убеждаемся, что отношение $\frac{w_i(\nu)}{R_i(\nu)}$ одинаково (при данной температуре) для всех двухполюсников. Но оно может зависеть от температуры.

Мы приходим, таким образом, к *теореме*:

$$\frac{w(\nu)}{R(\nu)} = f(\nu, T), \tag{36}$$

причём $f(\nu, T)$ — универсальная функция частоты и температуры.

Сходство этой теоремы с законом Кирхгофа очевидно.

Переписав (36) в таком виде:

$$w(\nu) = R(\nu)\, f(\nu, T), \tag{37}$$

мы можем сказать: двухполюсник тем сильнее шумит на данной частоте, чем больше на данной частоте его активное сопротивление. Хотя нет полной аналогии между R и поглощательной способностью, а также между w и испускательной способностью, следует отметить сходство последней формулировки с другой («второй») формулировкой теоремы Кирхгофа: испускательные способности тел (при данных ν, T) относятся между собой так же, как их поглощательные способности.

5. НЕКОТОРЫЕ СЛЕДСТВИЯ ИЗ СООТНОШЕНИЙ (25) и (37) И ТЕОРИИ ПЕРЕМЕННЫХ ТОКОВ *)

А. Вернёмся к схеме рис. 1. Применяя к ней представление об эквивалентной флуктуационной э. д. с., мы можем написать для спектральной плотности силы тока в RC-контуре, пользуясь

*) Автор благодарен М. Л. Левину и М. А. Леонтовичу за дискуссии, оказавшие существенное влияние на содержание §§ 5,6.

квазистационарной классической электродинамикой (теорией переменных токов), выражение

$$\frac{w(\nu)}{R^2+(1/2\pi\nu C)^2}.$$

Разделив его на $(2\pi\nu)^2$, мы найдём спектральную плотность заряда конденсатора. Интегрируя затем по всем частотам, мы получаем для среднего квадрата этого заряда формулу

$$\overline{q^2}=\int_0^\infty \frac{1}{(2\pi\nu)^2}\,\frac{w(\nu)\,d\nu}{R^2+(1/2\pi\nu C)^2}, \tag{38}$$

или

$$\overline{q^2}=\int_0^\infty \frac{C^2 w(\nu)\,d\nu}{4\pi^2\nu^2R^2C^2+1}. \tag{39}$$

Примем во внимание соотношение (37). Подставляя (37) в (39), имеем:

$$\overline{q^2}=C\int_0^\infty \frac{RCf(\nu, T)\,d\nu}{4\pi^2\nu^2R^2C^2+1}. \tag{40}$$

Пусть R не зависит от частоты. Тогда подинтегральная функция зависит от двух параметров: температуры T и произведения RC. Следовательно, интеграл есть некоторая функция Ψ от двух аргументов: T и RC, и

$$\overline{q^2}=C\Psi(T, RC). \tag{41}$$

Примем теперь во внимание также (25). Имеем:

$$C\Psi(T, RC)=\Phi(CT). \tag{42}$$

Так как правая часть не зависит от R, левая часть также не должна зависеть от R, а следовательно, Ψ не зависит от аргумента RC:

$$\Psi(T, RC)=\psi(T). \tag{43}$$

Подставляя (43) в (42), получаем:

$$C\psi(T)=\Phi(CT). \tag{44}$$

Так как левая часть (44) зависит линейно от C, правая часть также должна зависеть линейно от C, а следовательно, и от своего аргумента CT. Итак,

$$\Phi(CT)=\alpha CT, \tag{45}$$

где α — постоянная (одинаковая для всех конденсаторов), или

$$\overline{q^2}=\alpha CT, \tag{46}$$

или ещё

$$\boxed{\frac{\overline{q^2}}{2C}=\frac{\alpha T}{2}}. \tag{47}$$

Итак, теория переменных токов + соотношение (25) + соотношение (37) приводят к выводу, что в RC-системах с независящими от частоты R и C средняя энергия, обусловленная флуктуациями заряда, пропорциональна температуре, причём коэффициент пропорциональности не зависит от R и C.

Б. Подставляя (46) в (40), получаем, после деления на CT:

$$\int_0^\infty \frac{\tau F(\nu, T)\, d\nu}{4\pi^3 \nu^2\tau^3 + 1} = \alpha, \tag{48}$$

где введены обозначения

$$\tau = RC, \qquad F(\nu, T) = \frac{f(\nu, T)}{T}. \tag{49}$$

Величина α от τ не зависит (см. раздел А). Уравнение (48) — интегральное уравнение, которому должна удовлетворять функция $F(\nu, T)$. Единственным решением этого уравнения является

$$F(\nu, T) = 4\alpha\ ^{*}). \tag{50}$$

---

*) *Доказательство*: Вводя новые переменные

$$x = \frac{1}{2\pi\tau}, \qquad u = \frac{\nu}{x},$$

перепишем (48) в виде

$$\int_0^\infty \frac{F(ux, T)}{u^2+1}\, du = 2\pi\alpha. \tag{а}$$

Дифференцируя (а) по x и обозначая

$$v = (ux)^2, \qquad \Phi(v, T) = F'_\nu(ux, T), \tag{б}$$

получим:

$$\int_0^\infty \frac{\Phi(v, T)\, dv}{v + x^2} = 0. \tag{в}$$

Уравнение (в) есть вырожденный случай интегрального уравнения Стильтьеса (правая часть равна 0). Оно имеет единственное решение (см., например, [4], стр. 404)

$$\Phi(v, T) = 0,$$

откуда, на основании (б),

$$F(\nu, T) = \chi(T). \tag{г}$$

Подставляя (г) в (а), получим:

$$\chi(T) \int_0^\infty \frac{du}{u^2+1} = 2\pi\alpha,$$

т. е.

$$F(\nu, T) = \chi(T) = 4\alpha.$$

Отсюда следует на основании (49), (37) соотношение

$$w = 4\alpha RT. \tag{51}$$

Это (с точностью до расшифровки константы α) — формула Найквиста

$$w = 4kRT. \tag{52}$$

6. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Рассмотрим систему, состоящую из излучения и проводников. Пусть система находится в термодинамическом равновесии. Тогда, как известно, из формулы Найквиста (52) (с учётом сопротивления излучения проводников) + классической электродинамики + второго принципа термодинамики можно получить для распределения энергии в спектре излучения формулу Рэлея-Джинса (см., например, [5]).

При обычных выводах формулы Найквиста или Рэлея-Джинса, а также утверждения, выражаемого формулой (47), используется в явном виде *статистическое* утверждение о равномерном распределении энергии по степеням свободы. При обычном выводе формулы Найквиста переход с термодинамических позиций на статистические происходит сразу после получения формулы (37). ?

Здесь было *доказано*, что формулы (47) и (51) являются следствием исходных соотношений (25), (37), (39). Как нам кажется, это обстоятельство представляет некоторый интерес независимо от рассуждений, приведших к исходным соотношениям. Относительно же самих этих рассуждений можно сказать следущее: либо в них неявно содержатся предположения, равносильные утверждению о равномерном распределении энергии по степеням свободы, либо можно, не прибегая к этому утверждению, продвинуться в построении теории тепловых флуктуаций и теплового излучения значительно дальше, чем это принято считать. Мы надеемся ещё вернуться к этому вопросу.

? Че [illegible] и равно[illegible]

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. H. Nyquist, Phys. Rev., **32**, 110 (1928).
2. Г. А. Лорентц, Статистические теории в термодинамике, ОНТИ (1935).
3. A. Einstein, Phys. Zeits., **10**, 185, 817 (1909).
4. Е. Титчмарш, Введение в теорию интегралов Фурье, Гостехиздат (1948).
5. R. E. Burgess, Proc. Phys., Soc., **53**, I, 293 (1941).