

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК**К ВОПРОСУ О ПОЛНОМ ОТРАЖЕНИИ ВОЛН
(Исторический очерк)****А. А. Коробко-Стефанов**

ВВЕДЕНИЕ

Полное отражение волн принадлежит к числу явлений, в которых проявляется всё многообразие волновой оптики и интерес к исследованию этого явления не ослабевает вплоть до наших дней. Ещё Ньютон¹, которому принадлежит первое экспериментальное исследование этого явления, обратил внимание на то, что при полном отражении свет проникает в оптически менее плотную среду. В дальнейшем исследование явления полного отражения пошло по пути экспериментального определения глубины проникновения и выяснения её зависимости от угла падения, длин волны и положения плоскости поляризации падающего света.

Попытки теоретического описания наблюдаемых явлений на основе механической теории света не дали положительных результатов. Особую трудность при этом представлял вопрос о характере волн, распространяющихся в менее плотной среде. Правильное и исчерпывающее теоретическое описание процесса полного отражения света было дано в 1909 г. профессором Московского университета А. А. Эйхенвальдом² на основе электромагнитной теории.

В этой работе А. А. Эйхенвальд установил, что при отражении плоской неограниченной волны от границы, образованной прозрачными средами, при углах падения больших предельного «энергия падающего луча, как бы ныряет во вторую среду, чтобы затем целиком появиться в первой среде в луче отражённом».

Внимание последующих исследователей было сосредоточено на описании процесса полного отражения волн, ограниченных диафрагмой. Это позволило, с одной стороны, уточнить и более подробно описать наблюдаемое смещение отражённого светового пучка, с другой стороны, показать влияние взаимодействия диафрагмы с проходящей волной на величину смещения.

ОПЫТЫ НЬЮТОНА

Исследование полного отражения света от прозрачной границы двух сред Ньютон³ производил с двумя прямоугольными стеклянными призмами. Большая грань одной из них представляла слегка выпуклую поверхность. Приводя призмы в соприкосновение большими гранями, можно было наблюдать проходящий свет через место соприкосновения призм, как через сплошное стекло. В других местах, где нет соприкосновения поверхностей призм, происходит полное отражение. Если смотреть на место соприкосновения призм со стороны отражённого света, то место соприкосновения поверхностей призм будет тёмным.

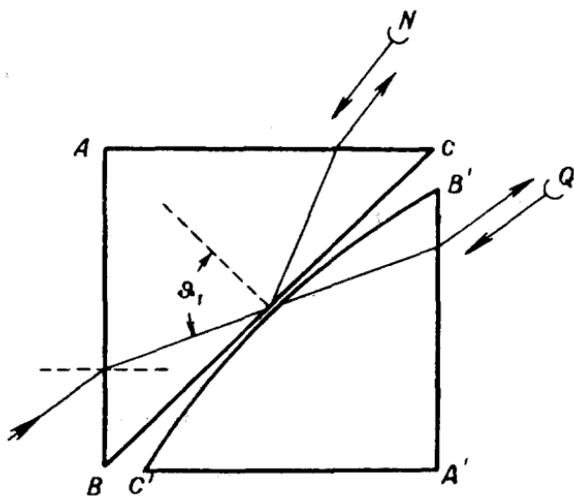


Рис. 1. Схема расположения призм в опытах Ньютона-Квинке.

Схема опыта Ньютона представлена на рис. 1. Этой схемой впоследствии пользовались почти все исследователи для наблюдения проникновения света в менее плотную среду при полном отражении.

Размеры тёмного пятна, как указывает Ньютон, изменяются в зависимости от угла падения в области полного отражения. Это обстоятельство, как было выяснено позже, связано зависимостью глубины проникновения света в менее плотную среду, от угла падения света на границу раздела.

Измерение геометрических размеров тёмного пятна позволило Ньютону сделать количественное суждение о глубине проникновения света в менее плотную среду при полном отражении⁴.

Глубина, на которой можно обнаружить свет в менее плотной среде, определённая Ньютоном, оказалась равной $2,5 \cdot 10^{-6}$ см. Желая увязать проникновение света в менее плотную среду с полным отражением, Ньютон считал, что в этом случае траектория света в менее плотной среде представляет параболу⁵. Уместно заметить, что экспериментальное доказательство проникновения света в менее плотную среду, данное Ньютоном, долгое время оставалось неизвестным приверженцам и корпускулярной и волновой теорий света, которые так или иначе повторяли его опыты. Но, независимо от точек зрения на природу света, результаты опытов приводили к одному выводу: при полном отражении свет проникает в менее плотную среду. Количественное расхождение в определении глубины проникновения не следует принимать во внимание, так как серьёзных аргументов не приводили ни те ни другие. Одни считали, что глубина проникновения составляет $1/4$, а другие — $1/2$ длины волны падающего света. Таким образом, опыты Ньютона, объяснение которых не укладывалось в рамки корпускулярной теории света, положили начало экспериментально-теоретическим исследованиям явления полного отражения. Не останавливаясь на подробностях, укажем на работы таких исследователей, как Гюйгенс⁶, Юнг⁷, Верде⁸, Био⁹, Френель¹⁰, Бабине¹¹, Стокс¹², Биллет¹³. Этот ряд исследований проблемы полного отражения, который охватывает во времени почти два столетия, был завершён обстоятельной экспериментальной работой Квинке¹⁴, которую мы подробно опишем.

НАБЛЮДЕНИЯ КВИНКЕ

Схема опыта Квинке та же, что и у Ньютона, т. е. две стеклянные призмы, сложенные своими большими гранями. Для краткости эти грани будем называть диагональными плоскостями. Одна из диагональных плоскостей призм имела сферическую форму с радиусом кривизны, равным 1607,7 мм. При сближении диагональных плоскостей до соприкосновения между ними образуется воздушная прослойка, толщина которой возрастает во все стороны по мере удаления от точки соприкосновения. Таким образом, для света, падающего на грань призмы с неокруглённой диагональной плоскостью, осуществляются, согласно геометрической оптике, условия полного отражения на всей диагональной плоскости (см. рис. 1), за исключением места соприкосновения.

Если теперь смотреть, как это делал Ньютон, по направлению стрелки *N*, т. е. со стороны отражённого света, то увидим тёмное пятно на светлом фоне. Если же смотреть по направлению *Q*, как сделал Квинке, то увидим обратную картину, т. е. светлое пятно, образованное вследствие проникновения света через точку

соприкосновения и вблизи неё, во всех тех местах, где расстояние между диагональными плоскостями меньше глубины проникновения света во вторую среду.

Для того чтобы убедиться, что свет проникает во вторую призму не только в точке соприкосновения, но и вблизи неё, необходимо было образовать, как это и сделал Квинке, зазор между диагональными плоскостями, т. е. устранить точку соприкосновения. Тёмное пятно, которое наблюдал Ньютон, при этом исчезает, но светлое, образованное проникающим светом, остаётся.

Следовательно, во всех тех местах, где расстояние между диагональными плоскостями меньше глубины проникновения света в менее плотную среду, свет, вошедший в неё при полном отражении, имеет возможность по обычным законам преломления проникнуть во вторую призму.

Благодаря сферической форме диагональной плоскости второй призмы Квинке достиг плавного изменения расстояния между диагональными плоскостями. Из геометрических размеров светлого пятна, которое имело форму эллипса, можно элементарным путём вычислить глубину проникновения света в менее плотную среду при полном отражении.

Действительно, обозначим через 2ρ большую ось эллипса светлого пятна. Тогда расстояние ε от периферии эллипса до плоской поверхности первой призмы, или глубина проникновения, определится из уравнения

$$\varepsilon = \frac{\rho^2}{2R},$$

где R — радиус кривизны диагональной поверхности второй призмы.

Определяя ρ при разных углах падения, Квинке обнаружил зависимость глубины проникновения от угла падения. Квинке рассмотрел случаи, когда падающий свет был поляризован либо в плоскости падения, либо перпендикулярно к ней. При этом оказалось, что при одном и том же угле падения проникновение света в менее плотную среду существенным образом зависит от положения плоскости поляризации.

Зависимость глубины проникновения от угла падения для двух случаев поляризации света, падающего в условиях полного отражения на границу раздела стекло — воздух, представлена на рис. 2. Пунктирной линией указана зависимость глубины проникновения в менее плотную среду света, поляризованного в плоскости, перпендикулярной к плоскости падения, а сплошной — параллельно к ней.

Квинке производил исследование глубины проникновения с многими призмами, изготовленными из различных сортов стекла,

заполняя промежуток между ними различными прозрачными жидкостями. На рис. 2 представлен результат наблюдения, когда первая призма была изготовлена из флинтгласа $n = 1,6160$, а вторая из кронгласа $n = 1,5149$. Промежуток между ними был заполнен атмосферным воздухом. Предельный угол ϑ_g при этом оказался равным $38^\circ 14'$.

Следует обратить внимание на важное обстоятельство, которое впервые было обнаружено Квинке в этом весьма тонком эксперименте. На рис. 2 глубина проникновения света, поляризованного в плоскости падения, при углах падения, несколько больших предельного, меньше, чем для света, поляризованного

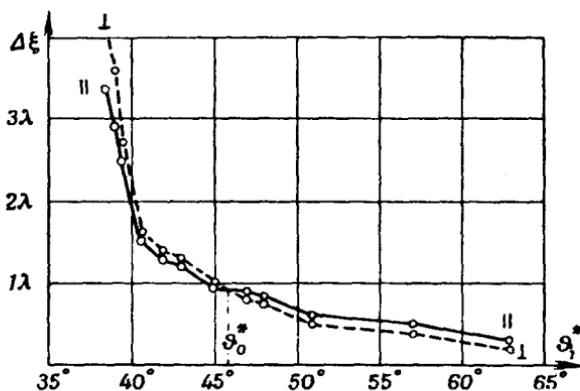


Рис. 2. Зависимость глубины проникновения поляризованного света во вторую среду от угла падения по Квинке.

перпендикулярно к ней. Но эта разность глубин проникновения по мере возрастания угла падения становится всё меньше и меньше, обращаясь при некотором угле падения ϑ_0 в нуль. При углах падения больших, чем ϑ_0 , разность становится отрицательной, т. е. свет, поляризованный в плоскости падения, проникает в менее плотную среду глубже, чем свет, поляризованный в плоскости, перпендикулярной к ней. Опыты Квинке относятся к 1866 г.

Много позже, в 1902 г., эксперименты Квинке более совершенным образом были повторены Галлем²⁴. Исследование Галля подтверждает обнаруженную Квинке зависимость глубины проникновения света в менее плотную среду при полном отражении от угла падения, длины волны и положения плоскости поляризации падающего света (рис. 3).

Следует заметить, что ход кривых глубины проникновения поляризованного света в менее плотную среду, обнаруженный Квинке и Галлем, находится в противоречии с результатами теоретического рассмотрения. Подробное обсуждение этого инте-

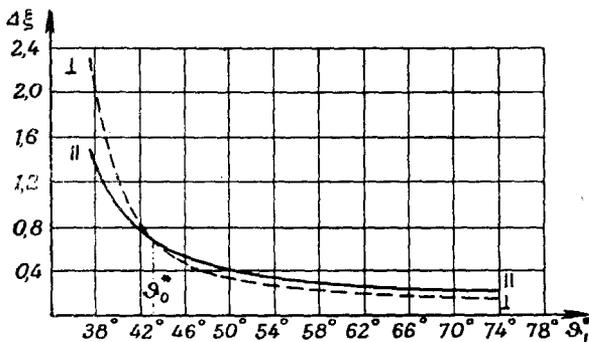


Рис. 3. Зависимость глубины проникновения поляризованного света от угла падения во вторую, оптически менее плотную среду по Галлю.

ресного факта мы сделаем ниже, в связи с опытами Гооса и Хенхен⁵⁵.

НЕСОСТОЯТЕЛЬНОСТЬ ТЕОРИИ И ОПЫТА ФОГТА

Объяснить проникновение света в менее плотную среду при полном отражении, как мы уже указывали, корпускулярная теория света не могла. Что касается волновой теории, построенной на механической основе, то она, как это видно из теоретического исследования Фогта¹⁵, также не могла дать правильного объяснения вышеописанных опытов Квинке. Механическая теория света, применённая Фогтом к данному оптическому явлению, привела его к ошибочному утверждению существования во второй среде продольной световой волны.

Из предложенной Фогтом теории вытекало наличие во второй, оптически менее плотной, среде двух волн неравных амплитуд. Одна из них распространяется по нормали к границе раздела, направленной во вторую среду, а другая — вдоль границы раздела.

По утверждению Фогта та волна, которая распространяется по нормали, — поперечная, другая же, распространяющаяся во второй среде вдоль границы раздела — продольная. И так как до этого не было ни одного опыта, где обнаруживался бы продольный характер световых волн, возможных в механической теории света, то утверждение Фогта стало той почвой, на которой

возник вопрос о характере световых волн, проникающих во вторую среду при полном отражении. Эта продольная волна, по мнению Фогта, могла быть непосредственно наблюдаема в условиях опыта, который был им предложен¹⁶. Схема опыта Фогта для наблюдения продольной волны ясна из рис. 4.

Свет падает на грань AB стеклянной призмы так, что он претерпевает полное отражение на гранях BC и CD , которые образуют между собой тупой угол.

Продольная волна, по мнению Фогта, распространяющаяся вдоль грани BC , не может следовать за её резким изгибом и у ребра C отделяется; в результате этого, если смотреть по направлению стрелки (рис. 4), мы должны увидеть ребро C светящимся, что и наблюдается в действительности, однако по иной причине.

Несостоятельность теоретического объяснения опытов Квинке, которое предложил Фогт, и его попытки наблюдения продольной световой волны являются следствием упорного отстаивания им механической теории света. Достаточно указать, что работа Фогта относится к 1899 г., т. е. вышла спустя 35 лет после опубликования Максвеллом электромагнитной теории (1864).

Заметим, что Фогт в своём запоздалом признании электромагнитной теории света был не одинок. Теории Максвелла нужны были опыты П. Н. Лебедева¹⁷, чтобы получить всеобщее признание. Так Вильям Томсон (лорд Кельвин) в беседе с К. А. Тимирязевым¹⁸ говорил: «Вы, может быть, знаете, что я всю свою жизнь воевал с Максвеллом, не признавая его светового давления, но Ваш Лебедев заставил меня сдать перед его опытами».

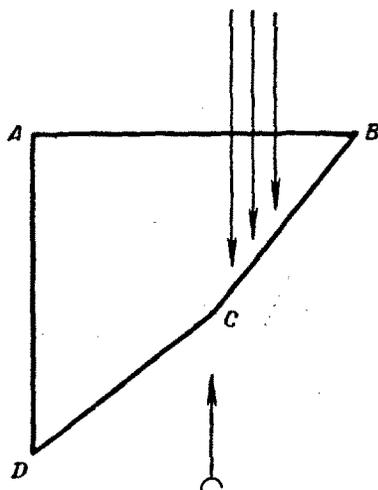


Рис. 4. Схема опыта Фогта.

РАЗЛИЧНЫЕ ОПЫТЫ, УСТАНОВЛИВАЮЩИЕ ПРОНИКНОВЕНИЕ СВЕТА В МЕНЕЕ ПЛОТНУЮ СРЕДУ

Опыт Фогта был объяснен Кеттелером¹⁹ как диффракционное явление, вследствие которого у ребра C (см. рис. 4) наблюдается свечение. Такое толкование наблюденного Фогтом явления дало основание для опытов Дитшайнера²⁰, Экснера²¹ и Эдсера-Сеньора²².

Особенность их опытов состояла в том, что они наносили на диагональные плоскости призм диффракционные решётки. Свет,

проникающий в оптически менее плотную среду, попадал на диффракционную решётку и можно было наблюдать диффрагированный свет. Им, таким образом, вновь удалось показать проникновение света в менее плотную среду при полном отражении. Однако ответа на вопрос, является ли волна, проникающая в оптически менее плотную среду, поперечной или продольной, эти опыты не могли дать, так как явление диффракции, вообще говоря, не является *experimentum crucis* в вопросе поперечности световых волн. Наблюдаемая ими диффракционная картина ничем не отличалась от обычной.

Много позднее Вуд²³, наблюдая диффракцию от краёв частичек сажи, нанесённых на диагональную плоскость призмы, подтвердил этот же результат.

Ничего нового не внёс и опыт Галля²⁴, который вместо диффракционной решётки нанёс на диагональную плоскость призмы светочувствительный слой. Почернение, вызываемое светом, проникающим в эмульсию, ничем не отличалось от обычного.

Всё это показывает, что сам факт проникновения света, падающего на границу раздела в условиях полного отражения, во вторую, оптически менее плотную, среду экспериментально был доказан. Но вопрос о характере световых волн во второй среде оставался открытым. Оставалось неясным, имеется ли действительно во второй среде реальная световая волна, у которой световые колебания происходят по направлению распространения.

Некоторые авторы, как, например, Друде²⁵, полагали, что если волна, распространяющаяся вдоль границы раздела во второй среде, продольная, то это возможно допустить, поскольку она представляет собою волну неравных амплитуд, относя, таким образом, свойство поперечности световых волн только к волнам равных амплитуд.

ТЕОРИЯ А. А. ЭЙХЕНВАЛЬДА

Ошибочность теоретических выводов Фогта, связанных с механической теорией света, была вскрыта исследованиями А. А. Эйхенвальда² на основе электромагнитной теории света.

Исследования Эйхенвальда относятся к случаю, когда плоская монохроматическая волна падает на плоскую границу раздела прозрачных сред в условиях полного отражения. Исходными в его работе являются уравнения Максвелла, которые при данных граничных условиях позволяют определить волновое поле по обе стороны от границы раздела.

При этих условиях он находит, что свет проникает и во вторую среду, но, во-первых, сила света быстро убывает с глубиной под плоскостью раздела и, во-вторых, угол χ (угол преломления) становится переменным во времени.

Относительно угла γ Эйхенвальд пишет: «Итак, хотя в случае полного отражения и нельзя подыскать такого постоянного направления преломлённого луча, которое бы удовлетворяло граничным условиям, тем не менее преломлённый луч существует, но имеет направление, меняющееся со временем по закону:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{a}{k} \operatorname{tg} \frac{2\pi}{T} (t - ax),$$

где a — величина, обратная скорости фаз по оси x , лежащей в плоскости границы раздела; k — величина, зависящая от угла падения φ , скорости распространения света в первой среде v_1 и относительного показателя преломления n . Величина k определяется уравнением

$$k = \frac{\sqrt{\sin^2 \varphi - n^2}}{v_1}.$$

Компоненты волнового поля по обе стороны границы раздела, найденные Эйхенвальдом для случая полного отражения, позволяют определить форму линий потоков энергии (лучей), заходящих во вторую среду. Эти кривые показаны нами на рис. 5.

Если координатную плоскость XOZ принять за плоскость падения, то «составляющие потоков энергии, — пишет Эйхенвальд, — по осям Z и X как для луча, поляризованного в плоскости падения, так и для луча, поляризованного перпендикулярно к этой плоскости, будут совершенно одинаковы, если амплитуды обоих лучей одинаковы».

Аналитическое выражение составляющих потоков энергии в случае падения поляризованного света во второй среде имеют вид

$$f_x = -A^2 \frac{\varepsilon}{8\pi k} e^{-\frac{4\pi k}{T} z} \cdot \sin \frac{4\pi}{T} (t - ax),$$

$$f_z = A^2 \frac{\varepsilon a}{8\pi k} e^{-\frac{4\pi k}{T} z} \cdot \left[1 - \cos \frac{4\pi}{T} (t - ax) \right].$$

«Выражение f_x , — пишет Эйхенвальд, — показывает, что световая энергия колеблется по направлению Z с периодом $T/2$, т. е. за время полного периода светового колебания T энергия успевает два раза войти из первой среды во вторую и два раза выйти обратно».

«Однако, — указывает Эйхенвальд, — выражение f_z , а в особенности наши кривые (см. рис. 5) показывают, что вход и выход энергии в разных местах плоскости раздела (для разных x) совершается не в одно время, так что в то время, когда в одних местах $f_z > 0$, энергия входит из первой среды во вторую, в

других местах, отстоящих от первых на длину

$$x = T/4a = \frac{\lambda}{4},$$

$f_z < 0$, энергия выходит из второй среды в первую».

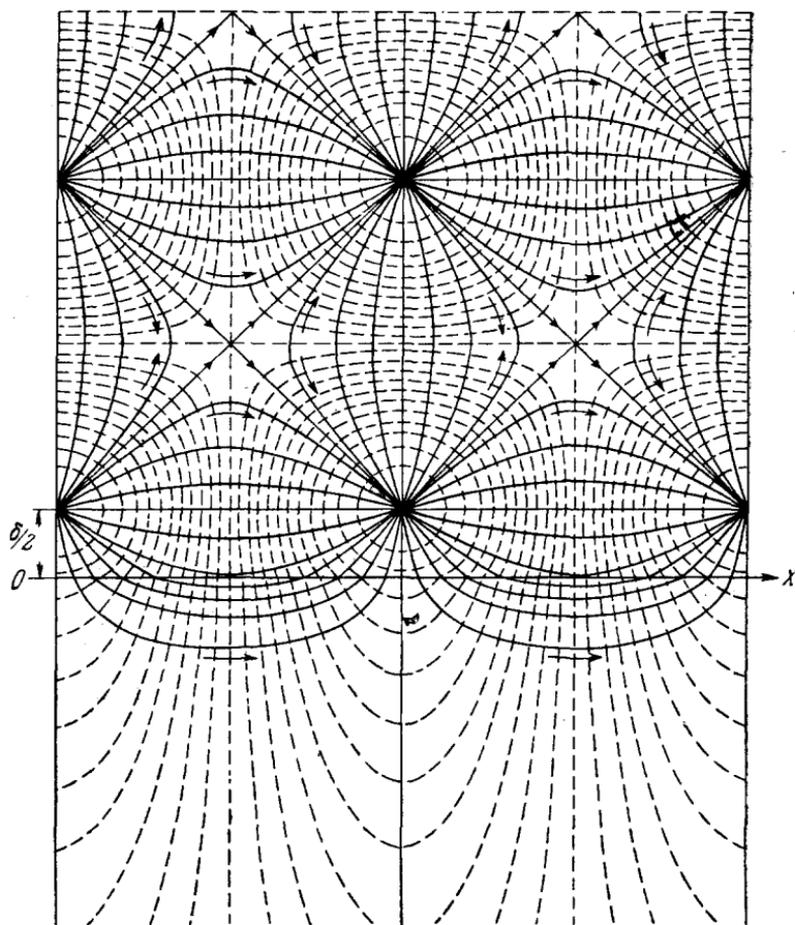


Рис. 5.

Так как граница раздела, рассмотренная Эйхенвальдом, прозрачна, то подсчет количества энергии, вытекающей из первой среды во вторую и вытекающей из второй среды в первую, убеждает нас в том, что отражение действительно полное.

«Энергия падающего луча, — заключает Эйхенвальд, — как бы ныряет во вторую среду, чтобы затем целиком появиться в первой среде в луче отражённом. Но вход и выход энергии происходит в разных местах в разное время, а для данного времени вход энергии во вторую среду происходит в местах, отстоящих друг от друга на половине расстояния между одинаковыми фазами по оси X ».

Относительно продольной волны Фогта Эйхенвальд замечает, что «выражение для f_x всегда (для любого t) и везде (для любого x) имеет положительное значение, и это обстоятельство дало повод к недоразумению, будто мы имеем здесь дело с самостоятельным лучом, идущим вдоль плоскости раздела. Кроме того, этот фиктивный луч обладает особенным свойством: в нём световые колебания происходят по тому же направлению X , т. е. колебания эти продольные».

Хотя П. Друде и полагает, что это обстоятельство не противоречит поперечности световых колебаний, которая будто бы имеет место лишь при постоянной амплитуде, но нам кажется, что и это недоразумение отпадает, если принять во внимание, что f_x нельзя рассматривать как самостоятельный луч света, а лишь как проекцию лучей на ось X ; на самом же деле лучи света во второй среде имеют кривую форму, показанную на чертеже (см. рис. 5) толстыми линиями, колебания в них строго поперечны».

Таким образом, теоретическое исследование Эйхенвальда даёт исчерпывающее описание экспериментально обнаруженного явления проникновения света в менее плотную прозрачную среду и разъясняет недоразумение с продольной световой волной Фогта.

ОПЫТ ШЕФЕРА И ГРОССА

Экспериментальное подтверждение теоретических выводов Эйхенвальда мы находим в работе Шефера и Гросса^[26]. Шефер и Гросс экспериментировали с электромагнитными волнами. И это понятно, так как в то время (1910) было необходимо как можно большим числом неопровержимых опытов подтвердить электромагнитную природу света. Шефер и Гросс, следуя за Эйхенвальдом, теоретически определили величину эффектов, которые можно наблюдать в конкретном опыте, схема которого представлена на рис. 6. P_1 и P_2 представляют две несоприкасающиеся между собой призмы, изготовленные из парафина. На диагональной плоскости призмы P_1 происходит полное отражение падающего излучения, которое представляет собой электромагнитную волну длиной 15 см. Излучатель волн E находится в фокусе вогнутого зеркала H_1 . Отражённый зеркалом H_1 пучок проходит через диафрагму D и падает на грань призмы P_1 . На вогнутое зеркало H_2 ,

в фокусе которого находится термоэлемент, падает пучок, отражённый диагональной плоскостью P_1 . Но благодаря тому, что при полном отражении электромагнитная волна проникает в менее плотную среду на некоторую глубину, она имеет возможность попасть в призму P_2 , если диагональная плоскость призмы P_2 отстоит от диагональной плоскости призмы P_1 на расстоянии d , сравнимом с глубиной проникновения.

Проникающее в призму излучение по выходе из неё фокусируется зеркалом на термоэлемент.

Расстояние между диагональными плоскостями может быть изменено винтом G и определено при помощи указателя по шкале S_K .

Как видим, Шефер и Гросс в отличие от Квинке не округляли диагональной плоскости второй призмы и не приводили её в соприкосновение с первой, т. е. не создавали тех условий, против которых справедливо возражал Фогт²⁷, утверждая, что этим нарушается полное отражение. Вместо видимого света Шефер и Гросс использовали электромагнитные волны, кото-

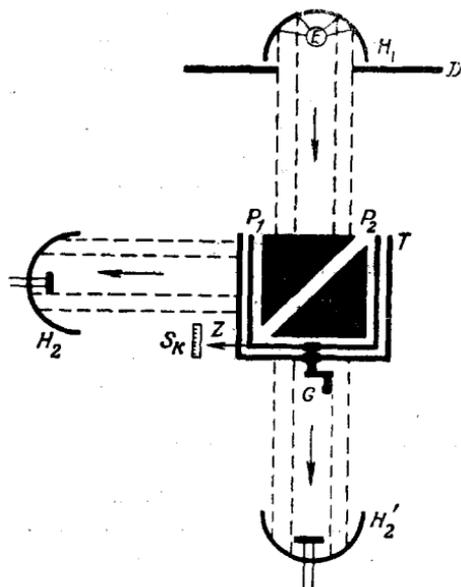


Рис. 6. Схема опыта Шефера и Гросса.

рыми для этих же целей пользовался Риги²⁸, осуществляя опыт в том виде, как он был поставлен Квинке. На опытах Риги мы не будем останавливаться, так как ему не удалось преодолеть технических трудностей этого тонкого эксперимента и его результаты были ошибочны. Шефер и Гросс наблюдали проходящее излучение при расстоянии между диагональными плоскостями вплоть до $1,2\lambda$.

Зависимость величины проходящего излучения от расстояния между диагональными плоскостями представлена на рис. 7.

Рис. 8 подтверждает, что в отражённом излучении нехватало именно той доли излучения, падающего на диагональную плоскость призмы P_1 , которая из-за проникновения во вторую среду имела возможность пройти во вторую призму, т. е. обнаруживалась в проходящем излучении. На рис. 7 и 8 пунктирными линиями указаны теоретически вычисленные кривые, а отдельными точками — результаты экспериментального наблюдения

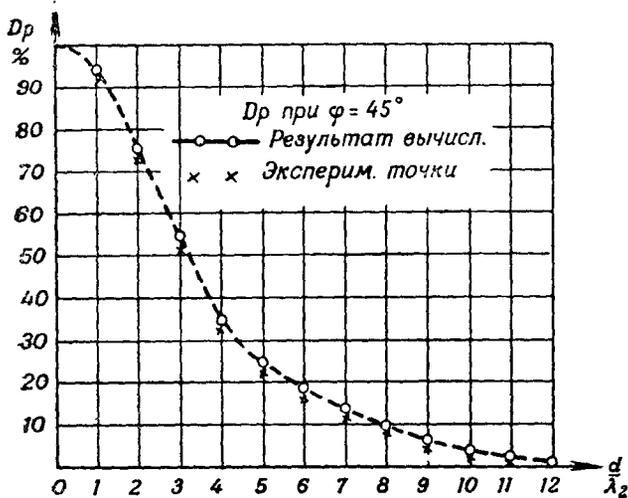


Рис. 7.

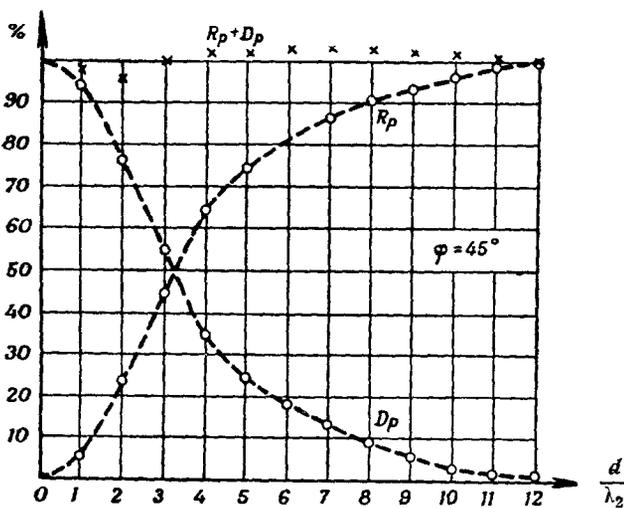
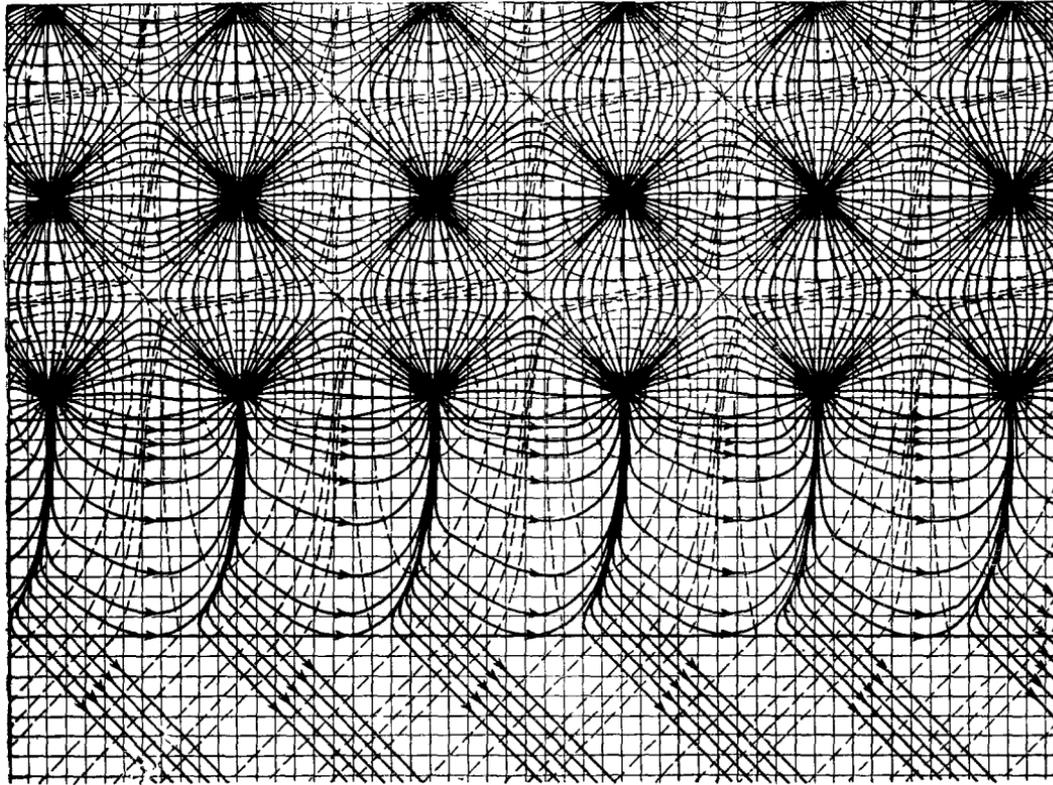


Рис. 8.



1/2

Рис. 9.

которые, как видно, хорошо укладываются на теоретической кривой.

Таким образом, решение вопроса о полном отражении, полученное Эйхенвальдом, было подтверждено работой Шефера и Гросса.

Кроме того, их теоретические расчёты показывают, что решение Эйхенвальда даёт возможность провести конкретные вычисления, учитывая особенности экспериментальной установки.

Шефер и Гросс нашли поведение потоков энергии для случая, когда вторая среда граничит с тростью, и тем самым экспериментально подтвердили правильность данного Эйхенвальдом теоретического описания волнового поля в менее плотной среде.

Поведение потока энергии при полном отражении в условиях опыта Шефера и Гросса, т. е. в условиях, когда толщина менее плотной среды одного порядка с глубиной проникновения в неё волны, представлено на рис. 9.

ОПЫТ Л. И. МАНДЕЛЬШТАМА

В одной из работ Л. И. Мандельштама²⁹ описан опыт, который весьма наглядно доказывает проникновение света в менее плотную среду при углах падения, больших предельного. Действительно, если погрузить стеклянную призму диагональной плоскостью в раствор флуоресцирующего вещества — флуоресцина — и заставить свет падать из стекла на границу с жидкостью под углом, превышающим предельный, то наблюдается интенсивное свечение малого объёма раствора под действием проникающего в него света.

Схема опыта Мандельштама представлена на рис. 10. Следует заметить, что этот опыт был поставлен не для доказательства проникновения света в менее плотную среду, а для осуществления источника света, находящегося на расстоянии от границы раздела сред, сравнимом с длиной световой волны.

Таким образом, Л. И. Мандельштамом было положено начало практическому применению оптических эффектов при полном от-

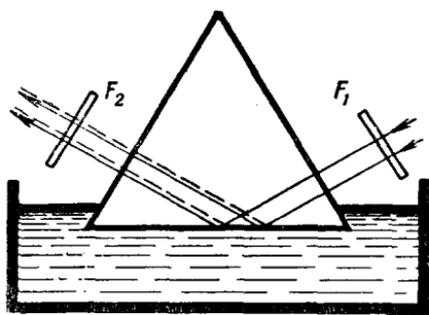


Рис. 10. Схема опыта Мандельштама. Под действием света, проникающего в раствор флуоресцина, наблюдается интенсивное свечение другого спектрального состава. Фильтр F_2 подобран так, что он пропускает только излучение флуоресценции.

ражении. В связи с этим укажем на работу Ф. С. Барышанской³⁰, которая исследовала концентрационное тушение флуоресценции в слое, толщина которого сравнима с длиной световой волны. Схема опыта Барышанской представлена на рис. 11. Целесообразно заметить, что проникновение света в менее плотную среду можно с успехом использовать для исследования оптических свойств менее плотной среды в том случае, когда она обладает поглощением. Это особенно ценно, если исследуемая жидкость малопрозрачна в тонком слое. Получение тонкого слоя непосредственно сопряжено с трудностями технического характера. Метод полного отражения устраняет эту трудность. Но исследование оптических свойств этим методом до сего времени не имеет должного рас-

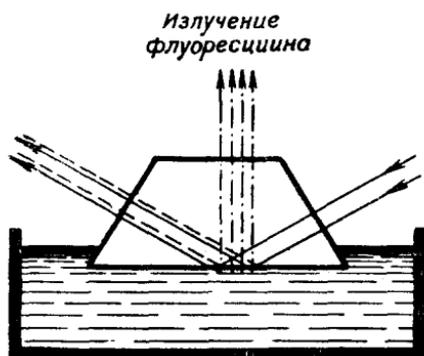


Рис. 11. Опыт Барышанской. Излучение флуоресцина, возбуждённое проникающим в него светом, проектировалось на щель спектрофотометра.

пространения. Причину этого следует усматривать в том, что не установлено зависимости между коэффициентами отражения при углах падения, больших предельного, и оптическими константами.

ДИФФРАКЦИЯ И ЯВЛЕНИЕ ПОЛНОГО ОТРАЖЕНИЯ

Остановимся теперь на одном весьма важном вопросе, связанном с экспериментальным наблюдением явления полного отражения.

Во всех практических исследованиях всегда имеют дело со световыми пучками, ограниченными диафрагмой. С этой точки зрения представляется интересным исследовать падение ограниченного светового пучка на границу раздела в условиях полного отражения. При этом, как мы увидим ниже, удаётся несколько подробнее выяснить процесс проникновения волны во вторую среду.

Такого рода работа была осуществлена Пихтом³¹. Пихт рассмотрел полное отражение цилиндрической волны, посылаемой длинной светящейся нитью через узкую щель неограниченной

длины. Светящаяся нить предполагалась расположенной на конечном расстоянии от плоской границы раздела двух прозрачных сред. В этом случае Пихту было необходимо рассмотреть явление диффракции, обусловленной прохождением световой волны через щель. На необходимости такого исследования настаивал Фогт³⁷ в полемике с Эйхенвальдом³² по поводу его теоретического исследования и опытов Шефера и Гросса, в которых не учитывалась диффракция, обусловленная диафрагмой D (см. рис. 6), перед зеркалом H_1 .

Исследование диффракционной картины, вообще говоря, а при полном отражении тем более, представляет значительные трудности математического характера. Однако физическая сторона явления может быть выяснена, как на это указал Нетер³³, несложными математическими средствами.

Прежде всего укажем, что данное Эйхенвальдом описание полного отражения плоской монохроматической волны от прозрачной границы раздела, по мнению Пихта³¹ и Нетер³³, недостаточно потому, что оно не позволяет установить, в каком именно месте границы раздела волна, обнаруживаемая экспериментально, проникает в менее плотную среду. Кроме того, согласно исследованиям Эйхенвальда, среднее значение потока энергии по времени равно нулю в любом месте плоскости раздела, т. е., в среднем, энергия во вторую среду не проникает. Но это противоречит данным экспериментов, обнаруживающих энергию во второй среде, так как каждое оптическое измерение в конечном счёте сводится к определению среднего значения потока энергии.

Противоречие устраняется, как это следует из работы Пихта, если исследовать падение на границу раздела светового пучка с конечным углом раствора. Физическую сущность этого положения можно выяснить, если рассмотреть падение двух плоских волн с двумя близкими направлениями распространения, как это показано на рис. 12. Из рисунка ясно, что две волны приходят в какую-либо точку O плоскости раздела (перпендикулярной плоскости рисунка) с различными фазами. Вследствие этого вектор потока энергии, перпендикулярный к результирующим векторам E и H , будет представлен двумя слагаемыми. Среднее значение по времени одного слагаемого при этом оказывается равным нулю, но для другого оно отлично от нуля. Знак, указывающий направление вектора потока по оси X , существенным образом зависит от координаты y в плоскости раздела сред, в области геометрического контура светового пучка.

Таким образом, можно себе представить, что в ограниченном диафрагмой пучке, угол раствора которого равен разности углов падения двух указанных волн, энергия входит во вторую среду по одну сторону от оси пучка и выходит по другую. Сам же пучок можно себе представить как суперпозицию плоских волн,

направления распространения которых лежат внутри двух указанных направлений. Иначе подходят к решению этой задачи Шефер и Пих³⁴. Они рассматривают ограниченный световой пучок, в сечении которого амплитуда не остаётся постоянной. Распределение амплитуды в сечении пучка они выбирают в форме равнобокой трапеции. При этом они обнаруживают, что поток энергии на границе раздела входит в менее плотную среду с одной стороны пучка, а выходит из неё с другой. И тем не менее, даже при таком решении, выяснить траекторию энергии во второй среде от места входа в менее плотную среду до выхода не удалось более подробно, чем это было сделано Эйхеновальдом. Если угол раствора светового пучка приближать к нулю, т. е. перейти к плоским волнам,

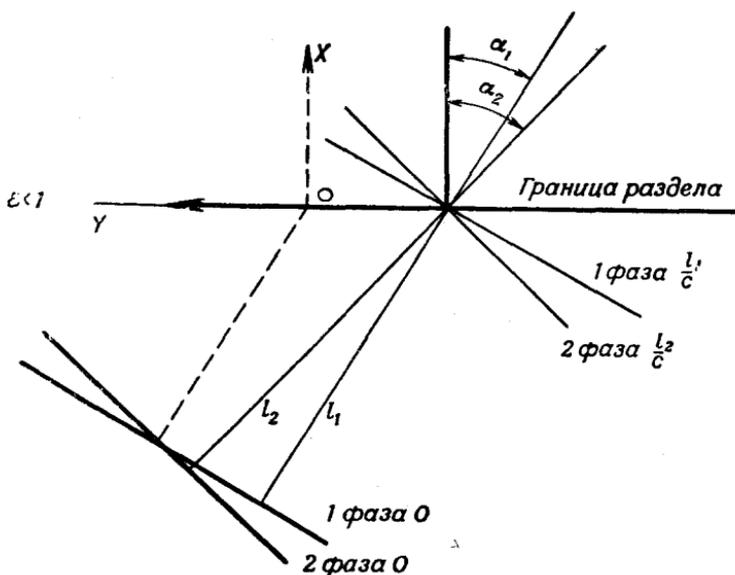


Рис. 12.

как это было показано Пихтом, то приходим к результатам Эйхенвальда. Следовательно, рассмотрение полного отражения ограниченных световых пучков лишь уточняет исследование Эйхенвальда, но не вносит ничего существенно нового по сравнению с ним.

ОПЫТ ГООСА И ХЕНХЕН

Во всех опытах, связанных с доказательством проникновения света во вторую, оптически менее плотную, среду при его падении в условиях полного отражения, процесс отражения фактически нарушался. В этих опытах, как мы видели, для волны, проника-

ющей во вторую среду, создаются такие условия, при которых она не имеет возможности полностью возвратиться из менее плотной среды. На этом, собственно говоря, и основывалось доказательство проникновения света в менее плотную среду.

Действительно, в опытах Квинке, Шсфера и Гросса волна частично проникает из второй среды через вторую границу в третью. В опытах Галля и Мандельштама энергия, приносимая волной во вторую среду, расходуется либо на разложение бромистого серебра, либо на возбуждение свечения флуоресценна. Следовательно, как в одних, так и в других опытах условия полного отражения нарушались тем, что часть энергии была изъята для того, чтобы обнаружить себя в оптически менее плотной среде.

Однако, как установили Гоос и Хенхен³⁵,

при доказательстве проникновения света в менее плотную среду нарушения, присущие вышеописанным опытам, могут быть устранены. Их исследование основано на том, что вход волны в менее плотную среду и её выход из неё в более плотную при полном отражении, как это было показано Эйхенвальдом, совершаются в местах, отстоящих друг от друга на некотором расстоянии, зависящем от длины волны падающего света.

Это положение Гоос и Хенхен иллюстрируют схематическим рис. 13, где плоскость, перпендикулярная к плоскости рисунка, является границей раздела сред. Если бы в точке Q , куда падает луч P в условиях полного отражения, происходило непосредственное отражение, то отражённым был бы луч R , но так как свет проникает во вторую, оптически менее плотную, среду, проходит там некоторый путь, указанный пунктиром, и выходит в точке S , то фактически возвратившийся луч будет идти по направлению T . Таким образом, луч при полном отражении смещается. Величина смещения D и является предметом исследования в работе Гооса и Хенхен.

Устройство, при котором может быть осуществлена схема, показанная на рис. 13, можно себе представить следующим образом. Нанесём на диагональную плоскость призмы P (рис. 14) серебряную полосу $efgh$. Диагональная плоскость стеклянной призмы, таким образом, будет граничить в узкой полосе с серебром, а во всех других точках — с воздухом. Если теперь пучок света PP' падает на диагональную плоскость в таких условиях, что на обеих границах «стекло — воздух» и «стекло — серебро» должно иметь

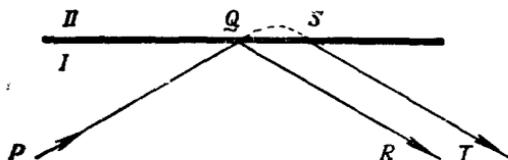


Рис. 13. Схематическое изображение процесса полного отражения.

место полное отражение, то будет наблюдаться следующее явление.

Выше серебряной полосы и ниже неё (т. е. на границе стекло—воздух) будет осуществляться проникновение света во вторую среду. Свет, пройдя в ней некоторое расстояние, войдёт вновь в призму выше точек S и S' , давая лучи T (о луче T мы говорили при обсуждении рис. 13).

Если считать, что на границе стекло—серебро имеет место непосредственное отражение, т. е. что оно происходит между точками Q и Q' , давая луч R , то падающий пучок PP' , имевший

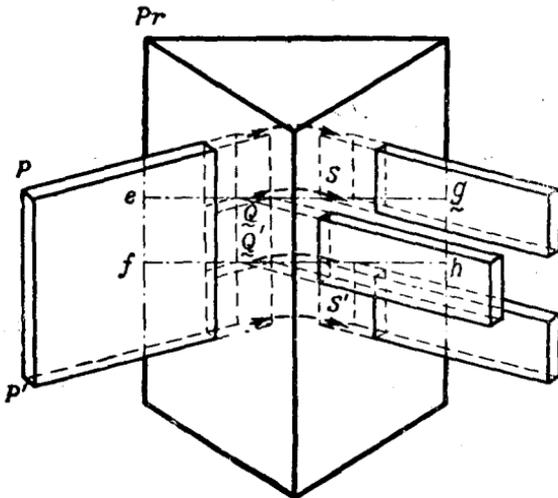


Рис. 14.

первоначально прямоугольное сечение, при выходе из призмы после полного отражения от её диагональной плоскости, на которой нанесена серебряная полоса, расщепляется и, попадая на фотографическую плёнку, вызывает почернение, которое передаёт форму его сечения.

Форма отражённого светового пучка показана на рис. 15, на котором указана также величина смещения между лучами, отражёнными от границ стекло—воздух и стекло—серебро.

Серебряная полоса, нанесённая на диагональной плоскости призмы, играет роль устройства, которое даёт нам несмещённое положение светового луча, так называемый нулевой луч. Принимаяемое авторами допущение, что отражение от серебра имеет непосредственный характер, т. е. что оно происходит без проникновения света в толщу серебра, может быть оправдано тем, что падение

света происходило под углом, несколько большим предельного для границы стекло — воздух, но для границы стекло — серебро этот угол больше предельного на величину порядка 30° . Глубина проникновения света в серебро при таких углах падения становится значительно меньше длины световой волны. Тем не менее, проникновение во вторую среду (серебро) имеет место и должно сказаться, как только мы увеличим число отражений. Поэтому величина смещения, по существу, представляет собой разность смещений при полном отражении света от границы стекло — воздух и стекло — серебро.

Величина смещения, полученная Гоосом и Хенхен после однократного отражения (см. рис. 13), оказалась недостаточной для того, чтобы возможно было её непосредственно измерить. Прибегая к многократному полному отражению при помощи устройства, представленного на рис. 16, они получили результирующее смещение, доступное измерению. На рис. 16, Pl — стсклянная плоскопараллельная пластинка, к которой приклеены призмы P_1 и P_2 . После многократного отражения луч, выходящий из призмы P_2 , вызывает почернение на фотоплёнке, которое соответствует форме его сечения. Серебряные полосы на плоскопараллельной пластинке наносились как с одной, так и с другой стороны. Следует указать, что Гоос и Хенхен не могли увеличивать число отражений настолько, чтобы смещение лучей сделалось непосредственно видимым, так как интенсивности лучей R и T после нескольких десятков отражений были настолько различны, что почернение, вызываемое лучом R , становилось незаметным.

Различие в интенсивности лучей R и T может быть объяснено только тем, что граница стекло — воздух прозрачная, а граница стекло — серебро непрозрачная и свет, проникающий хотя и на незначительную глубину во толщу серебра, заметно поглощается им при многократном отражении. Это обстоятельство побудило Гооса и Хенхен прибегнуть к другому методу обнаружения смещения светового луча при полном отражении.

Как следует из теоретического исследования явления полного отражения, которое было сделано Эйхенвальдом, смещение (у Эйхенвальда оно называется расстоянием между входом луча из первой среды во вторую и выходом его из второй среды в первую) пропорционально длине волны света, падающего на границу раздела. Опираясь на это, Гоос и Хенхен, с целью избавиться от поглощения света при отражении от серебра, которое, как мы видели,



Рис. 15. Смещение светового пучка после полного отражения от диагональной плоскости призмы, имеющей посеребрённую полосу.

нарушает полное отражение, произвели измерение смещения между лучами различной длины волны. Этот метод они назвали дифференциальным.

Действительно, если, например, в падающем на границу раздела излучении имеется две волны, длина которых $\lambda = 0,587 \mu$ и $\lambda = 0,437 \mu$, то после отражения от границы раздела в условиях полного отражения между ними произойдёт смещение ΔD , которое может быть измерено, если отражение сделать многократным. Интенсивность обоих лучей при этом будет примерно одинакова и число отражений благодаря этому можно сделать достаточно

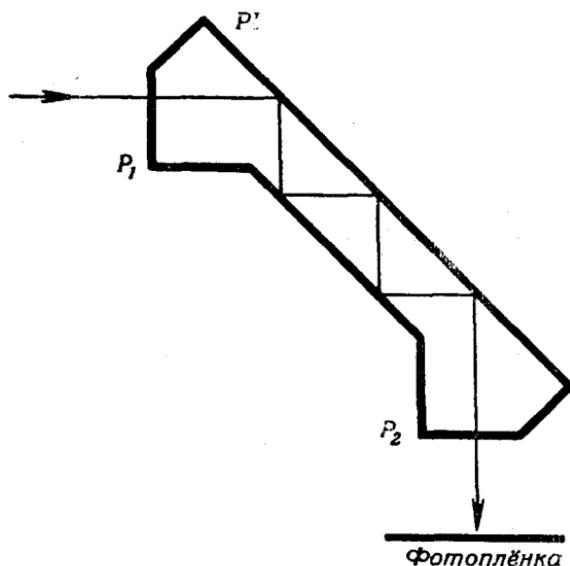


Рис. 16. Благодаря многократному отражению смещение светового пучка достигает значительных размеров.

большим. Гоосу и Хенхен удалось измерить после многократного отражения удвоенную величину этого смещения лучей следующим образом.

Представим себе, что по высоте прямоугольного сечения светового пучка PP' (см. рис. 14), падающего на границу раздела, лучи распределены так, что один цвет (например, жёлтый — $\lambda = 0,587 \mu$) окаймляет другой (голубой), т. е. жёлтый цвет находится вверху и внизу, а голубой в середине. После отражения между ними произойдёт смещение, обусловленное различием длин волн, и выходящий из призмы P_2 пучок будет иметь форму, указанную на рис. 17 слева, где пунктиром ограничена область, соот-

ветствующая голубому цвету, а сплошной линией—жёлтому. Если поменять теперь цветные лучи местами так, чтобы голубой цвет окаймлял жёлтый, то мы получим изображение, показанное на рис. 17 справа.

Отсюда становится ясным, что разность измеряемых расстояний представляет собой удвоенное смещение, обусловленное различием длин волн в падающем пучке, т. е. $2\Delta D = b - c$, где b и c — расстояния, указанные на рис. 17. Как видим, дифференциальный метод позволяет установить факт проникновения света в менее плотную среду при полном отражении, не нарушая самого процесса отражения.

Величина смещения, как показывают результаты измерений, зависит от разности углов $\vartheta - \vartheta_g$, где ϑ — угол падения, а ϑ_g — предельный угол. Так, например, если разность $\vartheta - \vartheta_g$ составляет $3^\circ 23' 2$, то смещение D оказывается равным $0,84 \mu$, а при разности углов, равной $0^\circ 13' 6$, смещение составляет $3,48 \mu$.

При обработке результатов опыта Гоос и Хенхен находят, что величина смещения связана с функцией

$$\sqrt{\sin^2 \vartheta - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}$$

следующим образом:

$$D = kn_2 \frac{\lambda_1}{\sqrt{\sin^2 \vartheta - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}},$$

где k — постоянный множитель, λ_1 — длина волны в более плотной среде, n_2 — показатель преломления менее плотной среды. Поскольку в приведённом выражении все величины, кроме k , доступны непосредственному измерению, то постоянная k может быть определена эмпирически:

$$k = \frac{D}{\lambda_1} \frac{1}{n_2} \sqrt{\sin^2 \vartheta - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}.$$

Значение постоянной k , полученное отсюда, оказывается равным $0,52 \pm 2\%$. При этом необходимо указать, что этот результат был получен при измерении смещений естественного света.

Измерения смещений света, поляризованного во взаимноперпендикулярных плоскостях, дают тоже самое значение постоянной k . Таким образом, из опыта Гооса и Хенхен следует, что $k_{\parallel} = k_{\perp}$, т. е. смещение не зависит от положения плоскости поляризации падающего света. Этот вывод, вытекающий из опыта Гооса и Хенхен, противоречит результатам опытов Квинке и Галля, так как он отрицает обнаруженную ими зависимость глубины проникновения от положения плоскости поляризации падающего

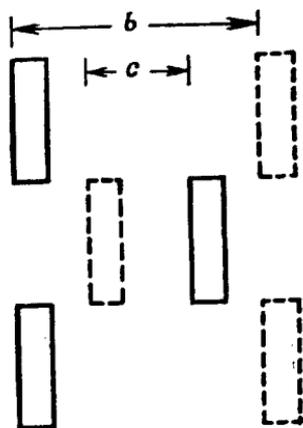


Рис. 17. Смещение пучка при дифференциальном методе.

света. Действительно, если обратиться к уравнениям, определяющим компоненты волнового поля в менее плотной среде, при углах падения, больших предельного, то обнаружим, что при падении на границу раздела света, поляризованного во взаимноперпендикулярных плоскостях, затухание амплитуды, независимо от положения плоскости поляризации падающего света, определяется одним и тем же экспоненциальным фактором:

$$\exp \left[-\frac{2\pi}{\lambda_1} z \cdot \sqrt{\sin^2 \vartheta - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2} \right].$$

Зависимость показателя экспоненты от $\sqrt{\sin^2 \vartheta - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}$ позволяет Гоосу и Хенхен выразить его через смещение D и постоянную k следующим образом:

$$\exp \left[2\pi \cdot \frac{k}{D} \cdot n_2 z \right].$$

Отсюда следует, что глубина проникновения света в менее плотную среду и смещение пропорциональны друг другу. В самом деле, полагая показатель экспоненты равным единице, находим, что глубина проникновения выражается через смещение следующим образом:

$$z = \frac{1}{2\pi n_2 k} D.$$

Но, по Гоосу и Хенхен, смещение D не зависит от положения плоскости поляризации падающего света, следовательно, не должна зависеть и глубина проникновения.

ИССЛЕДОВАНИЕ ОШИБКИ ГООСА И ХЕНХЕН

На несоответствие между теорией и опытом Гооса и Хенхен указал Артман⁸⁶. В своём исследовании Артман формулирует дифракционную задачу, исходя из конкретного опыта Гооса и Хенхен.

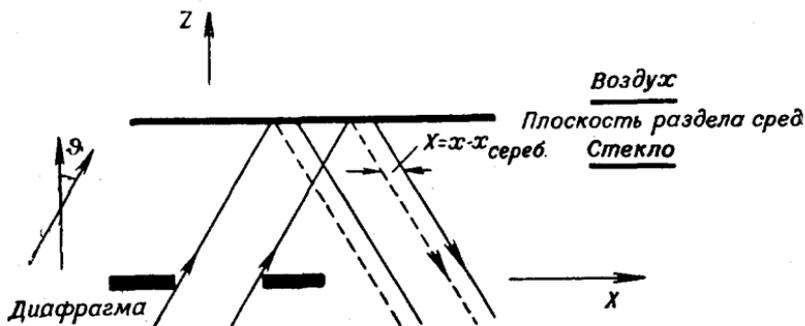


Рис. 18. Схема опыта Гооса и Хенхен, разбираемая Артманом.

Схема опыта Гооса и Хенхен, которую разбирает Артман, представлена на рис. 18. Рассматривая падающий световой пучок как

суперпозицию элементарных плоских волн, направления распространения которых мало отличаются друг от друга, Артман находит, что смещение при полном отражении должно быть равно

$$D = -\frac{\lambda_1}{2\pi} \frac{d\varphi}{d\vartheta},$$

где ϑ — угол падения, а $\varphi = \varphi(\vartheta)$ — сдвиг фазы при полном отражении.

Если подставить сюда вместо $\frac{d\varphi}{d\vartheta}$ его выражение согласно формулам Френеля, которые определяют сдвиг фазы при полном отражении в зависимости от угла падения, то получим, что смещение зависит от поляризации и угла падения падающего света следующим образом:

$$D_{E\perp} = \frac{1}{\pi n_1} \frac{n_2 \lambda_1}{\sqrt{\sin^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta_g}};$$

$$D_{H\perp} = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \frac{1}{\pi n_1} \frac{n_2 \lambda_1}{\sqrt{\sin^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta_g}},$$

где $D_{E\perp}$ — смещение светового пучка, когда вектор \mathbf{E} перпендикулярен плоскости падения; $D_{H\perp}$ — смещение в том случае, когда вектор \mathbf{H} перпендикулярен плоскости падения. Сопоставляя теоретические результаты Артмана с тем, что получено эмпирически Гоосом и Хенхен, видим, что постоянные k для двух оплощений плоскости поляризации падающего света отличны друг от друга:

$$k_{\parallel} = \frac{1}{\pi n_1},$$

$$k_{\perp} = \frac{n_1}{\pi n_2^2}.$$

Если подставить численные значения показателей преломления сред, которые были взяты Гоосом и Хенхен, а именно: $n_1 = 1$, $n_2 = 1,52$, то получим:

$$k_{\perp} = 0,48; \quad k_{\parallel} = 0,21,$$

в то время как в опытах с поляризованным светом Гоос и Хенхен получили

$$k_{\parallel} = k_{\perp} = 0,52.$$

Однако следует указать, что хотя Артман поставленную дифракционную задачу в рамках кирхгофовских представлений решил, но причину несоответствия между теорией и опытом Гооса и Хенхен ему не удалось выяснить.

Собственную неудачу Артман полагает в том, что описание дифракции по Кирхгофу не затрагивает вопроса о взаимодействии края диафрагмы и проходящей мимо неё волны. Рассмотреть это взаимодействие Артману удалось в другой работе³⁷, где он специально разбирает влияние диафрагмы конечной толщины на про-

ходящую мимо неё волну. При этом оказывается, что взаимодействие края диафрагмы существенным образом зависит от положения плоскости поляризации проходящей волны.

Если воспользоваться результатами Шефера и Пиха, то без особого труда, как это показал Фрагштейн³⁸, можно получить выражение для смещения светового пучка при полном отражении. Если оставить в стороне полемику между Артманом³⁹, с одной стороны, и Шефером и Фрагштейном⁴⁰—с другой, то их теоретические результаты, полученные различными путями, совпадают между собой. Это является неоспоримым доказательством того, что опыты Гооса и Хенхен с поляризованным светом являются ошибочными.

Необходимость повторных опытов стала очевидной. Повторные опыты были поставлены Гоосом и Хильдой Линдберг-Хенхен⁴¹. Результаты этих опытов, поставленных в самое последнее время, находятся в полном соответствии с теорией.

О ПОЛЯРИЗАЦИИ ОТРАЖЁННОГО ЛУЧА

Исследование поляризации света, отражённого от границы раздела двух прозрачных сред при полном отражении, не представляло каких-либо затруднений.

Ещё Френель установил, что отражённый свет поляризован эллиптически. Им же была предложена призма, при прохождении которой линейно-поляризованный свет становится поляризованным по кругу.

Специально исследование поляризации отражённого света проведено Фрелихом⁴², результаты которого находятся в полном соответствии с теорией.

ОТРАЖЕНИЕ ИМПУЛЬСА

В рассмотренных выше опытах и теоретических исследованиях процесс отражения светового пучка от границы раздела, образованной прозрачными средами, рассматривался стационарно.

При этом, как показано Эйхенвальдом, отражение полное. Иначе обстоит дело в том случае, если рассмотреть процесс отражения, относящийся к конечному промежутку времени. Ещё Планк⁴³ указывал, что решение задачи о полном отражении будет исчерпывающим только в том случае, если рассмотреть процессы, относящиеся к конечному промежутку времени.

Обращаясь к изучению процесса отражения в конечном интервале времени, мы вынуждены рассматривать падение волнового импульса. Исследованию отражения импульса от прозрачной границы раздела посвящена работа Фишера⁴⁴.

Фишер установил, что отражение волнового импульса, падаю-

щего на прозрачную границу раздела под углом, большим предельного, не является полным.

Эта особенность обусловлена тем, что в этом случае мы имеем процесс, ограниченный во времени, в течение которого пакет волн успевает расплыться. В своей работе Фишер воспользовался δ -функцией, при помощи которой ему удалось построить волновой импульс.

КРАТКИЕ ВЫВОДЫ

При полном отражении света от границы раздела, образованной прозрачными средами, в оптически менее плотной среде существует световое поле.

Существование светового поля в менее плотной среде бесспорно доказано целым рядом различных друг от друга опытов, поставленных в разное время различными исследователями.

Результаты опытов, обнаруживающих свет в менее плотной среде, находятся в полном соответствии с теорией этого явления, которую дал А. А. Эйхенвальд на основе электромагнитных представлений о природе света.

Проникновение света во вторую среду при полном отражении не сопряжено с потерей энергии. Поток энергии в отражённой волне равен потоку энергии падающей волны. И этот результат, обнаруженный экспериментально, находится в полном соответствии с теорией, поскольку речь идёт о стационарном процессе отражения. В том случае, когда отражается волновой импульс, то, как показывает теория, отражение не является полным. При отражении ограниченного светового пучка наблюдается смещение. Величина смещения зависит от угла падения, длины волны и поляризации падающего света.

Из теоретического рассмотрения отражения плоской неограниченной световой волны от плоской границы, образованной прозрачными средами, следует, что во второй среде поле затухает по нормали к границе раздела. При этом показатель экспоненты, определяющий затухание, один и тот же для двух взаимноперпендикулярных поляризаций падающей волны. Отсюда следует, что глубина проникновения света в менее плотную среду, определяемая как расстояние, на котором поле убывает в e раз, не должна зависеть от поляризации падающего света. Но результаты измерения глубины проникновения света в менее плотную среду, наоборот, обнаружили эту зависимость.

Это несоответствие между опытом и теорией легко разъясняется, ибо в опытах использовались ограниченные световые пучки, в то время как теория относится к плоской неограниченной волне.

Но при этом всё же не была выяснена особенность в ходе кривых глубины проникновения поляризованного света в зависимости

от угла падения, на которую мы указывали при описании опытов Квинке и Галля. Этот вопрос остаётся пока что открытым.

Исходя из того, что глубина проникновения света в менее плотную среду определяется теми же факторами, что и смещение, следует полагать, что глубина проникновения, так же как и смещение, зависит от поляризации и угла падения.

Настоящий обзор является не вполне исчерпывающим, так как в противном случае он неизбежно оказался бы слишком обширным. Но все крупные работы, относящиеся к вопросу о полном отражении, мы попытались осветить подробно. Вместе с тем мы имеем возможность должным образом оценить вклад, который сделали русские учёные. Работа профессора Московского университета А. А. Эйхенвальда не только дала правильное теоретическое решение, но и указала пути, по которым должно пойти дальнейшее изучение этого явления. Работа профессора Московского университета академика Л. И. Мандельштама указала на возможность использования этого тонкого физического явления в практических целях.

В заключение выражаю благодарность профессору С. Н. Ржевкину за сделанные им критические замечания и советы.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Ньютон, Оптика, книга 2, часть I, набл. 8, стр. 160, 1927 г.
2. Эйхенвальд, Журн. Русск. Физико-Хим. о-ва (физ. часть) **41** 131 (1909).
3. Ньютон, Оптика, книга 2, часть I, набл. 1, стр. 151, 1927 г.
4. Ньютон, Оптика, книга 3, часть I, набл. 2, стр. 152, вопрос 29, стр. 289, 1927 г.
5. Ньютон, Математические начала натур. философии, книга 1, предл. 96, стр. 253, 1935 г.
6. Huygens, *Traité de la Lumière*, стр. 38 (1690).
7. Young, *Lectures on Nat. Phil.* I, 461 (1807); II, 623 (1807); *Phil. Trans.* **12** (1801).
8. Verdet, *Oeuvres*, IV, стр. 430—563.
9. Biot, *Traité de physique* III, стр. 276—290 (1816).
10. Fresnel, *Ann. d. Chim. et Phys.* **23**, 130 (1823), **29**, 175 (1825), **46**, 263 (1831).
11. Babinet, *Comptes Rendus* **8**, 709 (1839).
12. Stokes, *Phil. Trans.* **8**, 642 (1849).
13. Billet, *Ann. de Chim.* **64**, 410 (1862).
14. Quincke, *Pogg. Ann.* **127**, 1 (1866).
15. Voigt, *Gött. Nachr.* **2**, 49 (1884).
16. Voigt, *Wied. Ann.* **67**, 185 (1899).
17. Лебедев, Избранные сочинения, стр. 66, 151, 195, 1949 г.
18. К. А. Тимирязев, Наука и демократия, стр. 48, 1920 г.
19. Ketteler, *Wied. Ann.* **67**, 879 (1899).
20. Ditscheiner, *Wien Ber.* (2) **60**, 584 (1870).
21. Exner, *Wien. Ber.* **IIa**, 93, 98 (1889).
22. Fdser and Senior, *Phil. Mag.* **4**, 346 (1902).

23. Вуд, Физическая оптика, стр. 450, 1936 г.
24. Haal, Phys. Rev. 15, 73 (1902).
25. Drude, Winkelman's Handbuch d. Ph. 6, 1275 (1906).
26. Schaefer und Gross, Ann. d. Phys. 32, 648, (1910).
27. Voigt, Ann. d. Phys. 34, 797 (1911).
28. Righi, Optik d. Elektr. Schwing., стр. 161, 1898.
29. Мандельштам, Полное собрание трудов, т. 1, стр. 261, 1948 г.
30. Барышанская, Докл. Акад. наук 17, 3 (1937).
31. Picht, Ann. d. Phys. 3, 433 (1929).
32. Eichenwald, Ann. d. Phys. 35, 1035 (1911).
33. Nöether, Ann. d. Phys. 11, 141 (1931).
34. Schaefer und Pich, Ann. d. Phys. 30, 245 (1937).
35. Goos und Hänchen, Ann. d. Phys. 1, 333 (1947).
36. Artman, Ann. d. Phys. 2, 87 (1948).
37. Artman, Zeits. f. Phys. 127, 468 (1950).
38. Fragstein, Ann. d. Phys. 4, 271 (1949).
39. Artman, Ann. d. Phys. 7, 209 (1950).
40. Schaefer und Fragstein, Ann. d. Phys. 6, 39 (1949).
41. Goos und Hilda Lindberg-Hänchen, Ann. d. Phys. 5, 251 (1949).
42. Fröhlich, Ann. d. Phys. 63, 900 (1920).
43. Планк, Введение в теоретическую физику, т. IV, стр. 30, 1934,
44. Fischer, Ann. d. Phys. 2, 211 (1948).