1950 г. Октябрь *Т. XLII, вып. 2*

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ТЕОРИИ СВЕРХПРОВОДИМОСТИ

В. Л. Гинзбург

I. МАКРОСКОПИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ

СОДЕРЖАНИЕ

Введение 169
§ 1. Основные экспериментальные факты 171
§ 2. Старая феноменологическая теория 180
§ 3. Новая феноменологическая теория. Основные соотношения . 198
§ 4. Новая феноменологическая теория. Конкретные результаты . 204
§ 5. Нормальный ток в сверхпроводниках. § 6. Нормальный и аномальный скин-эффект в металлах. Цитированная литература (*см. следующий выпуск*)

Г. 2092

ВВЕДЕНИЕ

Явление сверхпроводимости было открыто Камерлинг-Оннесом уже почти 40 лет назад (в 1911 г.). Тем не менее до сих пор сверхпроводимость продолжает во всех книгах и обзорах фигурировать в качестве довольно загадочного явления и, действительно, остаётся относительно мало изученной как в экспериментальном, так и в теоретическом отношении. Так, до настоящего времени остаётся недостаточно выясненным основной вопрос о глубине проникновения магнитного поля в сверхпроводник. Далеки от завершения также работы по промежуточному состоянию, нормальной проводимости в сверхпроводниках и др. В области теории, начиная с 1935 г., был достигнут известный успех, связанный, в первую очередь, с построением феноменологической электродинамики сверхпроводников[1—3]. Однако эта теория страдает рядом существенных недостатков, не позволяющих пользоваться ею как раз в самых интересных и важных случаях. Более общая феноменологическая теория сверхпроводимости, свободная от этих недостатков, была развита лишь

в самое последнее время[4] и ещё не подверглась специальной экспериментальной проверке. Что касается микроскопической теории сверхпроводимости, то здесь высказаны лишь отдельные соображения и идеи, но никакой, хотя бы и сугубо приближённой, но сколько-нибудь стройной теории (например, такой, как существующая квантовая теория ферромагнетизма) ещё не построено. Предпринятые в этом направлении в последнее время попытки[6—12] не меняют этой оценки, так как, по нашему мнению, не могут считаться успешными. В результате, микроскопическая теория сверхпроводимости является сейчас основной, нерешённой даже в принципиальном отношении, проблемой физики металлов и, собственно, вообще всей атомной и молекулярной физики.

Действительно, если не говорить об ядерной физике, физике космических лучей и астрофизике, то во всех других областях понимание существенных явлений продвинулось значительно дальше, чем это можно сказать о сверхпроводимости. Последнее относится и к родственному сверхпроводимости явлению сверхтекучести гелия II. Несмотря на то, что сверхтекучесть была открыта Капицей только в 1938 г., т. е. значительно позже сверхпроводимости, сверхтекучесть в настоящее время изучена лучше последней главным образом благодаря теоретическим и экспериментальным исследованиям, проведённым в Институте физических проблем АН СССР в Москве (см. обзоры[13—14]; о некоторых нерешённых вопросах см. также[15]). Успехи, достигнутые в области исследования сверхтекучести, явления более простого и в то же время аналогичного сверхпроводимости, общий прогресс в технике физического эксперимента и другие моменты способствовали тому, что изучение сверхпроводимости происходит в последние годы всё более широким фронтом. Можно думать поэтому, что многие остающиеся здесь до сих пор неясными экспериментальные вопросы будут скоро выяснены. Подобное положение не может не сопровождаться повышением и без того никогда не потухавшего интереса к теории сверхпроводимости. И это действительно имеет место — достаточно сказать, что, начиная с 1945 г., появилось около 40 соответствующих работ (правда, в подавляющем большинстве случаев не представляющих особого интереса).

Всё сказанное оправдывает, как нам кажется, появление настоящей статьи, имеющей своей целью осветить современное состояние феноменологической и микроскопической теории сверхпроводимости. При этом автор считал возможным и правильным подробно останавливаться лишь на тех вопросах и работах, которые представляются ему существенными, и не стремился детально осветить попытки создания теории сверхпроводимости, которые не представляются обещающими. В настоящей статье не

было также уместно останавливаться на ряде частных конкретных теоретических вопросов, уже рассмотренных в обзорной литературе[1—3]. Разумеется, такой, неизбежно несколько субъективный подход к выбору материала имеет и свои теневые стороны. С целью в известной мере нейтрализовать возможные промахи в этом отношении и вообще помочь ориентироваться в новых работах, указатель литературы сделан по возможности полным.

Вся статья разделена на две части, посвящённые соответственно макроскопической и микроскопической теории. При этом провести подобное разделение на микро- и макро-теорию сколько-нибудь строго было бы в данном случае и невозможно и нецелесообразно и, например, оказалось удобным отнести к публикуемой ниже первой части вопрос об аномальном скин-эффекте, который связан скорее с микроскопической (т. е. так называемой электронной) теорией металлов. Вторую часть статьи, посвящённую в основном микроскопической теории, автор надеется закончить в близком будущем.

§ 1. ОСНОВНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ФАКТЫ

Прежде чем перейти к обсуждению теории напомним основные экспериментальные данные, касающиеся сверхпроводимости (подробнее см.[2] и приведённую там литературу; ссылки на новые работы см. ниже). Явление сверхпроводимости было открыто и получило своё название в результате обнаружения того факта, что некоторые металлы при низкой температуре полностью теряют своё электрическое сопротивление. При этом потеря сопротивления происходит скачком при некоторой критической температуре $T_к$, характерной для данного металла. Для всех сверхпроводящих элементов $T_к < 10$ градусов Кельвина. Температурная зависимость сопротивления R от температуры T для сверхпроводников и несверхпроводников ясна из схематического рис. 1. На опыте, разумеется, падение сопротивления происходит в некотором конечном интервале температур ΔT. Этот интервал для

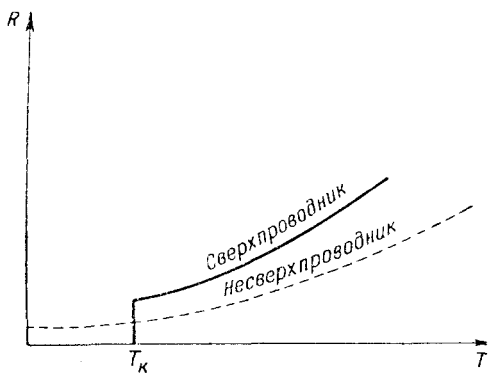

Рис. 1.

сплавов и сверхпроводящих элементов с загрязнениями может быть весьма широким, достигая нескольких градусов. Однако, для достаточно чистых, монокристаллических и лишённых напряжений металлов величина ΔT снижается до $\sim 10^{-3}$ градуса (см., впрочем, [16]). Поэтому можно считать, что в идеальных условиях потеря сопротивления происходит действительно скачком. В дальнейшем мы будем предполагать, что имеем дело только с такими идеальными сверхпроводниками, и будем игнорировать явления, подобные, например, гистерезису, которые можно считать обусловленными неидеальностью исследуемого образца. Заметим, также, что нет никаких указаний на то, что в сверхпроводящем состоянии, т. е. при $T < T_к$, сопротивление металла, хотя и крайне мало, но отлично от нуля. Напротив, все имеющиеся данные говорят в пользу того, что в сверхпроводнике электрическое сопротивление в обычном смысле этого понятия полностью пропадает, т. е., например, электрический ток, текущий в замкнутом контуре, совершенно не затухает.

Второй особенностью сверхпроводников, помимо потери сопротивления, является их характерное поведение в магнитном поле, сводящееся, грубо говоря, к тому, что магнитное поле никогда не проникает в толщу сверхпроводящего металла. Это свойство сверхпроводников (установленное в 1933 г. и иногда именуемое эффектом Мейснера) часто называют идеальным диамагнетизмом, так как в диамагнетике с магнитной проницаемостью $\mu = 0$ $\left(\text{т. е. восприимчивостью } \chi = \frac{\mu - 1}{4\pi} = -\frac{1}{4\pi}\right)$ среднее микроскопическое магнитное поле B (магнитная индукция) также равно нулю. Однако аналогия между сверхпроводником и идеальным диамагнетиком имеет ограниченную область применимости. Так, в диамагнетике, как и во всяком магнитном материале, на границе с вакуумом тангенциальная слагающая вектора индукции B_t меняется скачком, так что $B_{t(\text{вакуум})} = \frac{B_{t(\text{металл})}}{\mu}$. С микроскопической точки зрения это значит, что переходный слой, в котором меняется магнитное поле, имеет толщину порядка атомных размеров, т. е. $\sim 10^{-8} \div 10^{-7}$ *см*. Из опытных же данных известно, что глубина проникновения магнитного поля в толщу сверхпроводника $\delta \sim 10^{-5}$ *см*, а вблизи $T_к$ даже ещё больше. Поэтому для сверхпроводников малых размеров (плёнки, проволочки), свойства которых без поля ещё вполне идентичны свойствам массивного металла, говорить о непроникновении поля нельзя. В этом случае поле внутри образца лишь несколько слабее, чем на его поверхности. Характер проникновения магнитного поля в сверхпроводник имеет, как будет ясно из дальнейшего, чрезвычайно большое значение. Вместе с тем ясно, что во всех случаях, когда мы

хотим рассматривать этот вопрос, сверхпроводник нельзя считать идеальным диамагнетиком, т. е. характеризовать просто проницаемостью $\mu = 0$. Это можно делать лишь в таких задачах, как, например, задача о распределении магнитного поля около массивного сверхпроводника (т. е. если размеры сверхпроводника $L \gg \delta$). В подобных случаях, очевидно, внутри сверхпроводника $B = 0$, а вне его поле такое же, как в случае идеального диамагнетика той же формы. Распределение поля, параллельного и перпендикулярного оси цилиндра, находящегося в сверхпроводящем или нормальном состояниях, приведено, для наглядности, на рис. 2. Поскольку ни один из известных сверхпроводников не является

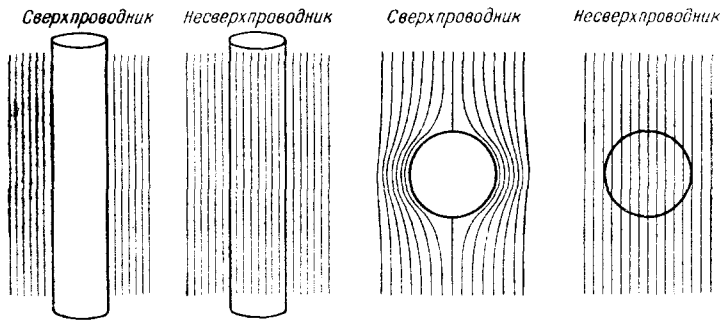

Рис. 2.

ферромагнетиком в нормальном состоянии (при $T > T_к$), магнитное поле в сверхпроводнике практически такое же как и в вакууме (так как $|\chi| \leqslant 3 \cdot 10^{-5}$). Мы нигде ниже не будем отличать индукцию **B** от поля **H**.

Выяснение вопроса о глубине проникновения поля в сверхпроводник является в экспериментальном отношении весьма сложным и ещё далеко не завершено, несмотря на появление в этом направлении ряда новых работ [17–20 а]. Проблема проникновения поля в сверхпроводник тесно связана с теорией сверхпроводимости, и нам её ещё придётся касаться ниже. Сейчас же укажем, что по всем данным глубина проникновения δ (определяемая, например, как расстояние от поверхности металла, на котором поле уменьшается в $e = 2{,}72$ раза) при $T \to 0$ порядка 10^{-5} *см* и возрастает при приближении к критической температуре $T_к$ так, что при $T \to T_к$ $\delta \to \infty$. Повидимому, при $T \sim T_к$

$$\delta^2 = \frac{\text{const}}{T_к - T}. \qquad (1,1)$$

Зависимость δ от T для ртути по различным данным, которые мы будем обсуждать в § 4, приведена на рис. 3. При этом по оси

ординат отложено не δ, а $\delta(T) - \delta(2{,}5°)$. Для кривой *II*, полученной в[4] на основании измерений[21], $\delta(2{,}5°) = 0{,}66 \cdot 10^{-5}$ *см* (кривые *I* и *III* построены по данным работ[17] и [19], в которых непосредственно определялась именно разность $\delta(T) - \delta(2{,}5°)$).

Сверхпроводящее и нормальное состояния данного металла могут и должны рассматриваться как две его фазы в обычном в термодинамике смысле этого слова. При этом в отсутствие магнит-

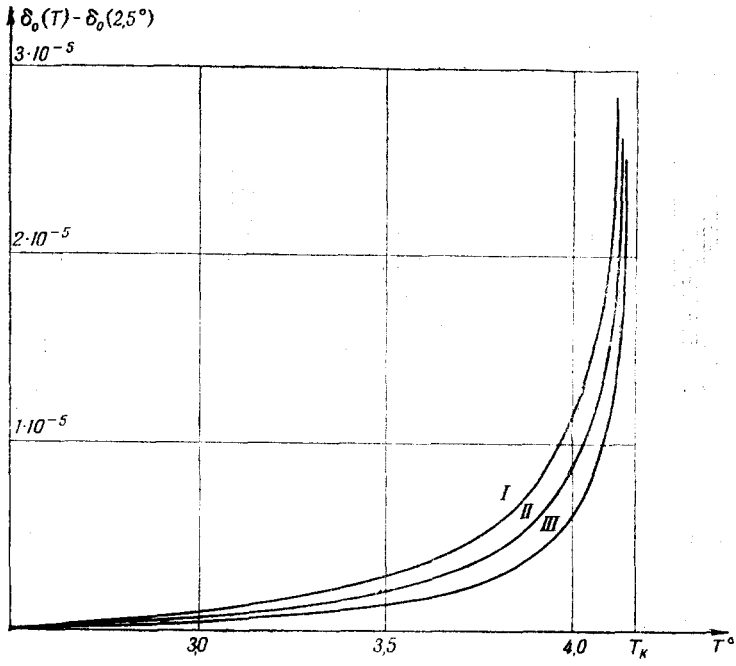

Рис. 3.

ного поля переход из нормального состояния в сверхпроводящее происходящий при температуре $T_к$, является фазовым переходом 2-го рода, т. е. сопровождается лишь скачком теплоёмкости, а не выделением скрытой теплоты, как это имело бы место в случае перехода 1-го рода. При наличии магнитного поля переход в сверхпроводящее состояние происходит уже при температуре, меньшей $T_к$, и является переходом 1-го рода. При каждой данной температуре $T \leqslant T_к$ сверхпроводящая фаза существует или, точнее, термодинамически устойчива только в поле $H \leqslant H_к$, где $H_к(T)$ — критическое магнитное поле. При $T = T_к$ $H_к = 0$. Диаграмма состояния сверхпроводника в магнитном поле

представлена на рис. 4*). Критическое поле при $T=0$ максимально и достигает нескольких сотен эрстед (например, для ртути $H_к(0)=412$ эрстед). При $H>H_к$ металл переходит в нормальное состояние, которое ничем в качественном отношении не отличается от нормального состояния при $T>T_к$. Если, в согласии с опытом, принять, что металл при $T<T_к$ может находиться в нормальном состоянии, которое без поля не является термодинамически устойчивым, то сам факт существования критического поля $H_к$ вполне понятен. Дело в том, что в силу непроникновения поля в сверхпроводник, как показывает простое термодинамическое рассмотрение (см. § 2), в достаточно сильном поле более выгодным будет уже существование нормальной фазы, в которой магнитное поле такое же, как в вакууме. При этом для массивных образцов

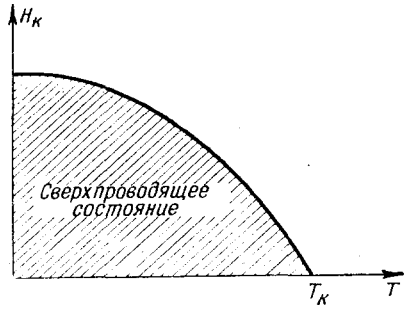

Рис. 4.

$$F_n - F_s = \frac{H_к^2}{8\pi}, \tag{1,2}$$

где F_n и F_s — свободные энергии единицы объёма соответственно нормальной и сверхпроводящей фаз в отсутствие поля. Из опыта следует, что вблизи $T_к$

$$H_к = \left(\frac{dH}{dT}\right)_{T_к} (T - T_к), \tag{1,2a}$$

где $\left(\frac{dH_к}{dT}\right)_{T_к} < 0$ и, например, для ртути $\left|\frac{dH_к}{dT}\right|_{T_к} \cong 190 \frac{\text{эрстед}}{\text{градус}}$.

Используя (1,2), можно выразить через $H_к$, $\frac{dH_к}{dT}$ и $\frac{d^2H_к}{dT^2}$ разность энтропий $\Delta S = S_1 - S_n$ и разность теплоёмкостей $\Delta c = c_s - c_n$ в сверхпроводящем и нормальном состояниях. Соответствующие формулы приведены в § 2, здесь же мы хотим только указать, что скачок теплоёмкости Δc при $T \leqslant T_к$ можно определить с помощью магнитных измерений.

Теплоёмкость металла складывается из теплоёмкости решётки c° и электронной теплоёмкости c^e, причём для несверхпроводни-

*) Переход из сверхпроводящего состояния в нормальное в магнитном поле является резким, только если поле однородно, как это имеет место для цилиндра в поле, параллельном его оси. Мы всегда будем предполагать, что имеем дело именно с этим случаем.

ков и сверхпроводников в нормальном состоянии при низких температурах

$$c_n = c^\circ + c_n^e;\ c^\circ = aT^3,\ c_n^e = \gamma T, \tag{1,3}$$

где α и γ — независящие от T постоянные $\left(a = \frac{464,4}{\theta^3}\frac{\text{калорий}}{\text{моль}\cdot\text{градус}}\right.$, где θ — дебаевская температура, равная, например, для ртути $\theta = 90°$; для ртути $\left.\gamma = 4,5\cdot 10^{-4}\frac{\text{калорий}}{\text{моль}\cdot\text{градус}^2}\right)$. Состояние решётки в сверхпроводящем и нормальном состояниях, повидимому, с большой степенью точности можно считать одинаковым. Об этом свидетельствует как полная идентичность рентгенографической структуры обоих фаз, так и крайняя малость изменения объёма металла при разрушении сверхпроводимости в магнитном поле $\left(\frac{\Delta V}{V} \sim 10^{-7}\right.$ при $H_к \sim 100$ эрстед, при $\left.T = T_к \Delta V = 0\right)$. Поэтому можно думать, что теплоёмкость решётки в сверхпроводящем состоянии такая же как и в нормальном и равна c°. Электронная же тепло-

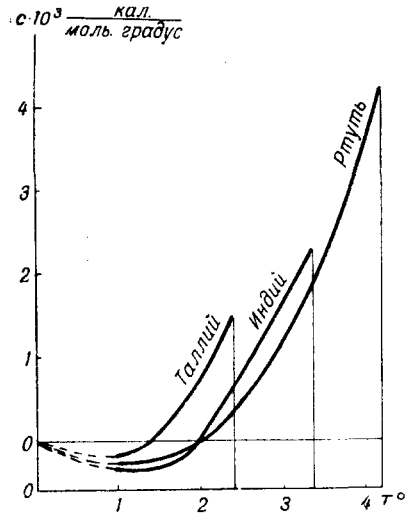

Рис. 5.

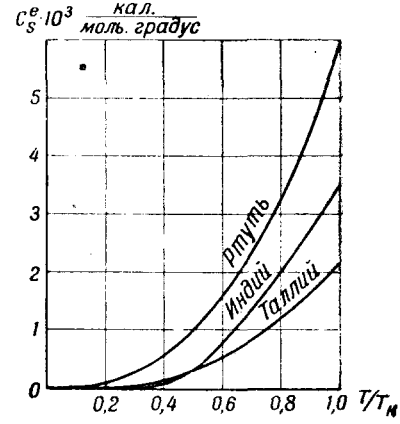

Рис. 6.

ёмкость в сверхпроводящем состоянии c_s^e сильно отличается от c_n^e и, как ясно из вышеизложенного,

$$c_s^e = \Delta c + c_n^e = \Delta c + \gamma T, \tag{1,4}$$

где $\Delta c = c_s - c_n$ — скачок теплоёмкости, который можно определить из магнитных или из калориметрических измерений. Значения $c_s = c^\circ + c_s^e$ и $c_n = c^\circ + c_n^e$ могут быть определены, и фактически в ряде случаев определялись, из калориметрических

измерений. Имеющиеся экспериментальные данные полностью подтверждают закон (1,3) для c_n^e, позволяют для большинства металлов найти γ (см.[32]) и свидетельствуют о том, что в ряде случаев $c_s^e \sim T^3$ (см. ч. II). Значения $\Delta c = c_s^e - c_n^e = c_s - c_n$ и c_s^e для ртути, индия и таллия приведены на рис. 5 и 6.

Сверхпроводимость разрушается не только внешним магнитным полем, но и током, текущим по сверхпроводнику. Здесь, однако, имеют место не два разных, а по сути дела одно явление, поскольку ток связан с магнитным полем. В случае массивного сверхпроводника, скажем круглого цилиндра, по которому течёт ток I, критическое значение тока $I_к = 2cRH_к$, где R — радиус цилиндра и c — скорость света. Таким образом, в этом случае, и вообще для массивных образцов, разрушение сверхпроводимости током начинается тогда, когда поле тока на поверхности достигает критического значения $H_к$ $\left(\text{как известно, поле тока в случае цилиндра как раз равно } H = \frac{I}{2\pi R}\right)$.

Для тонких образцов (т. е. когда толщина плёнки $2d$ или радиус проволочки R порядка или меньше глубины проникновения δ) положение меняется. В этом случае критическое магнитное поле $H_к$ больше критического поля $H_{км}$ для массивного сверхпроводника (в (1,2) фигурирует поле $H_{км}$, но мы раньше просто опускали индекс «м»). На опыте для достаточно тонких плёнок $H_к$ больше $H_{км}$ в десятки раз[21]. Напротив, критический ток $I_к$ для тонких образцов меньше, чем в случае толстых. Вычисление $H_к$ и $I_к$ является задачей теории и будет обсуждаться ниже.

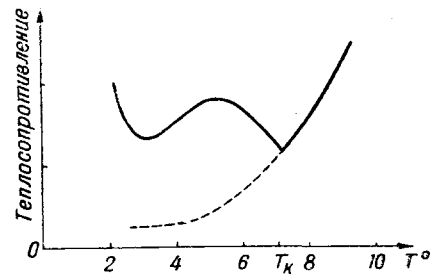

Рис. 7.

Измерения теплопроводности металла в нормальном и сверхпроводящем состояниях показали, что при $T_к$ нет скачка теплопроводности, а лишь меняется её зависимость от температуры (см. рис. 7, на котором представлено теплосопротивление свинца; пунктиром указано сопротивление при $H > H_к$, когда свинец находится в нормальном состоянии; новые работы по теплопроводности[23, 24, 25].). Между тем, если бы при $T = T_к$ электронная часть теплопроводности стала бы равной нулю, то теплопровод-

ность металла, которая определяется, помимо электронной части теплопроводности, теплопроводностью решётки, испытала бы скачок. Таким образом из опыта следует, что электронная часть теплопроводности не претерпевает скачка. Далее, сверхпроводящий ток, как следует из опыта, совершенно не связан с переносом тепла и, поэтому, если бы, грубо говоря, при $T = T_к$ все электроны проводимости перешли в некоторое сверхпроводящее состояние, то скачок теплопроводности обязательно имел бы место. Отсюда можно притти к заключению, подкрепляемому целым рядом других фактов и соображений, что в сверхпроводящем состоянии только часть электронов может участвовать в переносе сверхпроводящего тока, другая же часть, исчезающая при $T \to 0$, приводит к процессам переноса такого же типа, как и в нормальном состоянии. Отсюда следует, что помимо электронной теплопроводности в сверхпроводниках должна наблюдаться также «нормальная проводимость», т. е. помимо сверхпроводящего может итти «нормальный» ток, связанный с выделением джоулева тепла. В обычных условиях этот ток нельзя наблюдать, так как он маскируется сверхпроводящим током. Точнее, в стационарных условиях в сверхпроводнике электрическое поле равно нулю и нормальный ток, очевидно, должен отсутствовать. Однако в переменном поле в металле неизбежно присутствует не только магнитное, но и электрическое поле и должны иметь место джоулевы потери. Это действительно наблюдается на опыте. В последнее время нормальная проводимость в сверхпроводниках, наблюдающаяся в высокочастотном поле, послужила объектом ряда работ[26—29б], которые будут обсуждены в § 6. Заметим здесь только, что при очень высоких частотах в инфракрасной части спектра (частота $\omega \sim 5 \cdot 10^{14}$) свойства сверхпроводников и несверхпроводников уже практически одинаковы, т. е., другими словами, сверхпроводимость исчезает. При наиболее высоких достигнутых радиочастотах $\left(\frac{\omega}{2\pi} = 2{,}4 \cdot 10^{10},\ \lambda = \frac{2\pi c}{\omega} = 1{,}25\ см\right)$, напротив, сверхпроводимость ещё наблюдается[29]. Изучение промежуточной области частот, где сверхпроводимость должна исчезать, пока ещё не проводилось, хотя трудности работы при таких частотах отнюдь не непреодолимы.

Останавливаться на довольно любопытных термоэлектрических свойствах сверхпроводников мы здесь не будем (см. § 5 и [2]; новые работы[30,31]). Ограничимся также лишь указанием новых работ, посвящённых влиянию давления[32—34], свойствам промежуточного состояния[35—40] и другим вопросам[41—65б].

В заключение этого краткого обзора экспериментальных данных напомним, что явление сверхпроводимости не является универсальным и, во всяком случае, такие металлы, как Ag, Au,

Cu, Bi, Pt и некоторые другие не являются сверхпроводниками до температуры в 0,05 ÷ 0,1°. Сверхпроводящими являются элементы, указанные в табл. I и ряд сплавов. Некоторые, установ-

Таблица 1

Сверхпроводящие элементы

Элемент	$T_к^\circ$	Элемент	$T_к^\circ$
1. Ниобий Nb (Колумбий Cb)	9,22	10. Торий Th	~1,35
2. Свинец Pb	7,26	11. Уран U	1,30
3. Лантан La	4,7	12. Алюминий Al	1,17
4. Тантал Ta	4,38	13. Галлий Ga	1,07
5. Ванадий V	4,3	14. Цинк Zn	0,95
6. Ртуть Hg	4,16	15. Рений Re	~0,9
7. Олово (белое) Sn	3,71	16. Цирконий Zr	~0,7
8. Индий In	3,37	17. Кадмий Cd	~0,6
9. Таллий Tl	2,38	18. Титан Ti	0,53
		19. Гафний Hf	~0,3

ленные эмпирически особенности сверхпроводящих элементов (место в таблице Менделеева, величина атомного объёма и т. п.) см. в [2] и [64].

В связи с данными, приводимыми в табл. I, следует иметь в виду, что температура $T_к$ довольно сильно зависит от наличия загрязнений и, вообще, варьирует от образца к образцу (соответствующие изменения $T_к$ даже для хороших образцов достигают иногда ~ 0,1°). Помимо этого, при определении $T_к$ по измерениям сопротивления в некоторых случаях получаются совершенно ложные значения $T_к$, повидимому, за счёт образования в металле сверхпроводящих нитей, свойства которых определяются примесями (см., например, случай титана и урана [2, 43, 51, 58, 58a]).

В последнее время в сверхпроводниках был обнаружен [102—104] значительный изотопический эффект, состоящий в смещении при переходе от изотопа к изотопу критической температуры $T_к$ и всей кривой $H_к(T)$. Так, например, для изотопа Hg^{198} $T_к = 4{,}177°$, для природной ртути ($A = 200{,}6$) $T_к = 4{,}156°$ и для образца Hg с атомным весом $A = 203{,}4$ $T_к = 4{,}137$. Изменения $T_к$ таковы, что приближённо $A^{1/2} T_к = \text{const}$, то-есть $\frac{T_к}{\theta} = \text{const}$, где θ — дебаевская температура, которая как раз обратно пропорциональна квадратному корню из массы атома.

§ 2. СТАРАЯ ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ

Теорию сверхпроводимости, естественно, можно разделить на феноменологическую и микроскопическую. Задача первой состоит в установлении уравнений для сверхпроводящего тока и, вообще, полной системы электродинамических уравнений для случая сверхпроводников. Микроскопическая же теория должна привести к обоснованию принятых уравнений, т. е. к получению их в результате рассмотрения движения электронов в металле, а также к оценке по порядку величины и установлению температурной зависимости коэффициентов, входящих в феноменологические уравнения. Разумеется, проведение резкой грани между феноменологической теорией и теорией микроскопической не всегда целесообразно и даже, в известном смысле не всегда возможно. Однако в случае сверхпроводимости, механизм которой во многом остаётся ещё неясным, особенно важно по возможности чётко отделить феноменологическую схему от различных модельных представлений. Мы будем итти именно по такому пути и начнём с феноменологической теории *).

Электродинамические процессы в любой системе тел, из которых некоторые могут быть сверхпроводниками, описываются уравнениями Максвелла

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot}\mathbf{H} &= \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad \operatorname{div}\mathbf{D} = 4\pi\rho, \\ \operatorname{rot}\mathbf{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{div}\mathbf{B} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{2,1}$$

где $\mathbf{j}$ — плотность тока, ρ — плотность заряда, $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ — напряжённости электрического и магнитного полей, а $\mathbf{D}$ и $\mathbf{B}$ — индукции этих полей.

Уравнения (2,1) приобретают определённое содержание, лишь если задать связи между $\mathbf{B}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$. В покоящихся изотропных телах обычно, в согласии с опытом, принимается, что

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu\mathbf{H}, \tag{2,2}$$

$$\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}, \tag{2,3}$$

где ε, μ и σ не зависят от векторов поля.

В сверхпроводниках нет никаких оснований отказаться от связей (2,2). Нужно только заметить, что диэлектрическая постоянная ε может, в принципе, оказаться в сверхпроводящем

---

*) Чтобы не загромождать изложения, мы не будем, как правило ссылаться на старые теоретические работы и отсылаем за соответствующими указаниями к обзорам [1–3].

состоянии совсем другой, чем в нормальном (см. об этом в § 6); кроме того, в обеих состояниях проницаемость μ, повидимому, очень близка к единице (в случае нормального состояния это твёрдо установлено; в случае сверхпроводящего состояния нет никаких указаний на то, что μ заметно отличается от 1). Поэтому мы всегда в дальнейшем будем полагать, что $\mu = 1$.

Уравнение (2,3) представляет собой закон Ома, записанный в дифференциальной форме. Как раз это соотношение (2,3) не имеет места для сверхпроводящего тока, который не встречает никакого сопротивления. Задача теории, в первую очередь, состоит в замене закона Ома (2,3) другим, без чего пользоваться уравнениями (2,1) невозможно. При этом целесообразно сразу же учесть, что в сверхпроводнике, помимо сверхпроводящего тока, может течь нормальный ток $\mathbf{j}_n$. Полный ток

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_s + \mathbf{j}_n. \tag{2,4}$$

Для нормального тока естественно принять справедливость закона Ома

$$\mathbf{j}_n = \sigma \mathbf{E}, \tag{2,5}$$

где σ — «нормальная» проводимость в сверхпроводящем состоянии. Как выяснилось в последнее время, прямое использование уравнения (2,5) оказывается в ряде случае недопустимым, так как глубина проникновения электромагнитного поля в сверхпроводник может быть меньше длины пробега «нормальных» электронов в металле. В этом случае плотность нормального тока в данной точке определяется не только полем $\mathbf{E}$ в той же точке, но и полем в целой области металла. В подобных условиях, как в сверхпроводниках, так и в нормальных металлах, наблюдается так называемый аномальный скин-эффект. На этом круге вопросов мы остановимся в § 6. Пока же мы будем, для определённости, пользоваться для $\mathbf{j}_n$ соотношением (2,5). Независимо от того, верно это соотношение или нет, нормальный ток не равен нулю, только если не равно нулю электрическое поле $\mathbf{E}$ (мы отвлекаемся сейчас от токов, возникающих при наличии градиента температуры; см. также примечание к стр. 183). Электрическое же поле в сверхпроводнике не равно нулю только в нестационарном случае, так как неравное нулю постоянное во времени электрическое поле приводило бы к нарастанию сверхпроводящего тока. Таким образом, возможность наличия нормального тока нужно учитывать только в переменном поле (а также при наличии градиента температуры, см. § 5). Между тем интерес представляет, в первую очередь, случай постоянного во времени магнитного поля, при наличии которого в сверхпроводнике течёт стационарный сверхпроводящий ток.

Именно этот случай мы и будем в основном рассматривать ниже за исключением §§ 5 и 6.

Итак, отвлекаясь от вопроса о нормальном токе, нужно установить уравнения, определяющие связь с полем сверхпроводящего тока $\mathbf{j}_s$. В рамках феноменологической теории это можно сделать либо непосредственно опираясь на прямые опытные данные, как это имеет место в случае закона Ома (2,3), либо исходя из определённых, оправдывающихся на опыте, предположений и общих требований инвариантности. В стационарном случае, как следует из опыта, ток $\mathbf{j}_s$ однозначно связан с магнитным полем $\mathbf{H}$ в той же точке или в её окрестности. Допуская, что связь $\mathbf{j}_s$ с $\mathbf{H}$ является линейной, легко видеть, что простейшее уравнение, определяющее эту связь, имеет вид:

$$\operatorname{rot} \Lambda \mathbf{j}_s = -\frac{1}{c}\mathbf{H}, \tag{2,6}$$

где Λ — некоторая новая постоянная, могущая зависеть от температуры, c — скорость света и уравнение сразу записано в общепринятой форме. В том, что уравнение (2,6) является простейшим возможным, нетрудно убедиться, учитывая, что $\mathbf{j}_s$ есть вектор полярный, а $\mathbf{H}$—вектор аксиальный. Поэтому связь $\mathbf{j}_s = \text{const}\cdot\mathbf{H}$ неинвариантна и, следовательно, недопустима. Далее, возможны два уравнения, содержащие только производные первого порядка: $\operatorname{rot}\mathbf{H} = \text{const}\cdot\mathbf{j}_s$ и $\operatorname{rot}\mathbf{j}_s = \text{const}\cdot\mathbf{H}$. Первое из этих выражений, при соответствующем выборе постоянной, совпадает с одним из уравнений Максвелла, а второе выражение — с соотношением (2,6). При этом, как уже сказано, постоянная выбрана таким образом (в виде $\text{const} = -c\Lambda$), чтобы уравнение по виду совпадало с получаемым другим путём, указанным ниже.

Принимая, что уравнение (2,6) справедливо и в переменном поле, продифференцируем обе части этого равенства по времени и учтём, что $-\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \operatorname{rot}\mathbf{E}$. Отсюда следует, что

$$\operatorname{rot}\left(\frac{\partial \Lambda \mathbf{j}_s}{\partial t} - \mathbf{E}\right) = 0$$

и

$$\frac{\partial \Lambda \mathbf{j}_s}{\partial t} = \mathbf{E} + \nabla\chi, \tag{2,7}$$

где функция χ является пока произвольной ($\nabla\chi \equiv \operatorname{grad}\chi$). Ряд соображений (см.[2] §§ 13, 16 и 23, работу [66] и, ниже, уравнение (2,18)) говорит в пользу того, что $\chi = \text{const}.\mathbf{j}_s^2$. Можно показать, что присутствие этого члена, вообще говоря, должно быть несущественно [2,66]. С точки зрения эксперимента также нет указаний, свиде-

тельствующих о необходимости считать, что в (2,7) $\nabla\chi \neq 0$ *). Поэтому обычно полагают $\nabla\chi = 0$ и используют уравнение

$$\frac{\partial \Lambda \mathbf{j}_s}{\partial t} = \mathbf{E}. \tag{2,8}$$

Как ясно из сказанного, уравнение (2,8) не может рассматриваться просто как следствие уравнения (2,6) и является в известном отношении независимым. Оно существенно только в нестационарном случае.

Уравнения (2,6) и (2,8) совместно с первой парой уравнений Максвелла и соотношениями (2,2) образуют полную систему электродинамических уравнений $\left(\text{уравнения } \operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}\right.$ и $\operatorname{div}\mathbf{H} = 0$, как легко видеть, являются следствиями уравнений (2,6) и $\left.(2,8)\right)$. Электродинамика сверхпроводников, базирующаяся на уравнениях (2,6) и (2,8), была развита Ф. и Г. Лондонами в 1935 г. и позже[1]; решение на основе этих уравнений конкретных задач проводилось главным образом Лауе[3]. Обобщение на случай анизотропных, движущихся и неравномерно нагретых сверхпроводников, а также учёт возможной нелинейности уравнений, см. в[2, 67—71]. Феноменологическая теория сверхпроводимости, основанная на уравнении (2,6), является в известном отношении внутренне замкнутой и её создание несомненно явилось существенным шагом вперёд. Однако, как мы увидим ниже, эта теория, которую мы будем для краткости называть «старой», имеет ограниченную область применимости и не может быть использована для рассмотрения границы между нормальной и сверхпроводящей фазами, процесса разрушения сверхпроводимости тонких сверхпроводников полем и током и, вообще, не справедлива в сильных полях, т. е. когда $H \sim H_к$. На недостатках старой феноменологической теории мы вскоре остановимся подробнее, а затем, в §§ 3, 4, изложим новую, более общую теорию[4]. Сейчас же, имея в виду, что «старая», теория в ряде случаев применима и, кроме того, до самого последнего времени одна только и рассматривалась, уделим ей ещё некоторое внимание.

Уравнения (2,6) и (2,8) были в своё время установлены не таким образом, как это сделано выше, а другим путём, менее

---

*) Нужно заметить, что если $\nabla\chi \neq 0$, то в стационарном случае, когда $\partial \Lambda \mathbf{j}_s/\partial t = 0$, $\mathbf{E} = -\nabla\chi \neq 0$. Поэтому, если $\nabla\chi \neq 0$, уравнение (2,5) нужно записать в виде $\mathbf{j}_n = \sigma(\mathbf{E} + \nabla\chi)$, так как в противном случае в стационарном состоянии наблюдалась бы диссипация энергии, что противоречит опыту. Выше, когда мы указывали, что в стационарном случае всегда $\mathbf{E} = 0$, неявно принималось, что $\nabla\chi = 0$. Легко видеть, что если $\nabla\chi \neq 0$, вся наша аргументация остаётся по сути дела неизменной, и нормальный ток отличен от нуля только в нестационарных условиях.

формальным. Ввиду важности вопроса приведём этот вывод, хотя, строго говоря, речь идёт не о выводе, а о некоторых наводящих соображениях. Поскольку сверхпроводящий ток не встречает сопротивления, очевидна необходимость учитывать инерцию переносящих этот ток электронов. Если исходить из классической модели свободного электронного газа в металле, то уравнение движения электрона при отсутствии трения имеет вид $\frac{m d\mathbf{v}}{dt} = e\mathbf{E}$, где e и m — заряд и масса электрона, а $\mathbf{v}$ — его скорость. Умножая обе части этого уравнения на заряд e и концентрацию «сверхпроводящих» электронов n_s и вводя плотность тока $\mathbf{j}_s = en_s\mathbf{v}$, мы получаем уравнение (2,8), где

$$\Lambda = \frac{m}{e^2 n_s}. \tag{2,9}$$

Этот вывод уравнения (2,8), даже в рамках выбранной грубой модели, ни в какой мере не является строгим, так как в исходном уравнении движения мы, с одной стороны, не учли влияния магнитного поля, т. е. лорентцевой силы $\frac{e}{c}[\mathbf{vH}]$, и, с другой стороны, вместо полной производной $\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$ при переходе к (2,8) оставили только частную производную $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$. Смысл этих предположений и известное их оправдание будут ясны из дальнейшего.

Уравнение (2,8) отвечает случаю «идеального проводника». Для описания свойств сверхпроводника этого уравнения недостаточно. Действительно, применяя к (2,8) операцию rot и учитывая уравнение $\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$, имеем

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\operatorname{rot}\Lambda\mathbf{j}_s + \frac{1}{c}\mathbf{H}\right) = 0. \tag{2,10}$$

Отсюда следует, что $\operatorname{rot}\Lambda\mathbf{j}_s = -\frac{1}{c}\mathbf{H} - \frac{1}{c}\mathbf{H}_0$, где $\mathbf{H}_0$ — некоторое постоянное во времени магнитное поле, определяемое начальными условиями задачи. Поле $\mathbf{H}_0$ может быть отлично от нуля и в толще сверхпроводника, где оно должно, однако, оставаться постоянным во времени. В самом деле, пренебрегая в первом уравнении (2,1) током смещения и нормальным током, что всегда возможно при достаточно низких частотах, имеем

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_s. \tag{2,11}$$

Отсюда $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{H} = -\Delta\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\operatorname{rot}\mathbf{j}_s$ и, учитывая (2,10),

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\Delta\mathbf{H} - \frac{4\pi}{c^2\Lambda}\mathbf{H}\right) = 0. \tag{2,12}$$

Из (2,12) следует, что, например, в случае плоской поверхности сверхпроводника, параллельной внешнему полю, внутри металла

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \left(\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}\right)_0 e^{-z/\delta}, \tag{2,13}$$

где $\left(\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}\right)_0$ — значение $\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$ на границе раздела, z — расстояние от этой границы вглубь тела и δ — глубина проникновения

$$\delta^2 = \frac{\Lambda c^2}{4\pi} = \frac{mc^2}{4\pi e^2 n_s}. \tag{2,14}$$

В пределе, если $\Lambda \to 0$, как ясно из (2,8) и (2,13), в сверхпроводнике

$$\mathbf{E} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0. \tag{2,15}$$

Равенства (2,15) отвечают условиям, которые считаются имеющими место в идеальных проводниках, т. е. проводниках с бесконечно большой проводимостью. Учёт инерции электронов приводит к замене условий (2,15) соотношениями (2,8) и (2,13), что существенно лишь в переходном слое и при $z \gg \delta$ не играет роли. Итак, если бы сверхпроводник можно было рассматривать просто как идеальный проводник, магнитное поле в его толще, могло бы и не равняться нулю. Именно этот случай, казалось бы, должен был бы осуществляться, если сверхпроводник, нагретый выше $T_к$, поместить в постоянное магнитное поле, а затем охладить ниже $T_к$. Между тем опытные факты (эффект Мейснера) свидетельствуют о том, что во всех случаях, в том числе и в указанном опыте, в толще достаточно чистого сверхпроводящего металла, всегда $\mathbf{H} = 0$. Отсюда ясно, что уравнения (2,8) недостаточно и нужно наложить ещё какое-то условие, отбирающее только часть решений этого уравнения, а именно, те решения, для которых в толще металла $\mathbf{H} = 0$. Этот отбор эквивалентен требованию, чтобы введённое выше, после формулы (2, 10), поле $\mathbf{H}_0$ всегда равнялось нулю. Таким образом получается как раз уравнение (2,6). При этом вместо (2,13) получаем решение $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 e^{-z/\delta}$, о котором ещё будет речь ниже (см. (2, 26)). Таков примерно путь, приведший к формулировке старой феноменологической теории, основанной на уравнениях (2,6) и (2,8).

Эти уравнения имеют также ясный гидродинамический смысл, для выяснения которого рассмотрим движение некоторой заряженной жидкости [66]. В известном приближении такой жидкостью можно считать совокупность электронов проводимости в металле.

Уравнение Эйлера для заряженной жидкости имеет, очевидно, вид

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2}\nabla \mathbf{v}^2 - [\mathbf{v}, \operatorname{rot} \mathbf{v}] =$$
$$= -\frac{\nabla p}{\rho_m} + \frac{e}{m}\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{vH}]\right), \tag{2,16}$$

где p — давление, $\rho_m = mn$ — плотность массы и $\frac{e}{m}$ — отношение плотности заряда жидкости en_s к её плотности $\rho_m = mn_s$. (Таким образом n_s — концентрация частиц, образующих жидкость, а e и m — их заряд и масса). Уравнение (2,6) является следствием требования, чтобы в (2,16) пропадали члены, содержащие векторное произведение. Действительно, это требование, которое можно назвать обобщённым условием отсутствия вихрей, очевидно, таково:

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = -\frac{e}{mc}\mathbf{H}. \tag{2,17}$$

Если ввести ток $\mathbf{j}_s = en_s\mathbf{v}$ и постоянную $\Lambda = \frac{m}{e^2 n_s}$ (см. (2,9)), то (2,17) переходит в (2,6). Остающаяся часть уравнения (2,16) после введения тока $\mathbf{j}_s$ такова:

$$\frac{\partial \Lambda \mathbf{j}_s}{\partial t} = \mathbf{E} - \frac{1}{en_s}\nabla\left(\frac{\Lambda \mathbf{j}_s^2}{2} + p\right). \tag{2,18}$$

Это уравнение имеет вид (2,7) и если отбросить член с градиентом, переходит в (2,8). Таким образом уравнения (2,6) и (2,8) суть уравнения движения идеальной заряженной жидкости при условии (2,17). Это условие, однако, в гидродинамике совсем необязательно, и для его обоснования нужно выйти за её пределы. Более того, уравнения (2,17) и (2,6) заведомо не могут быть получены в результате последовательного чисто классического рассмотрения. Дело в том, что, как хорошо известно, согласно классической теории магнитный момент всякого тела в состоянии термодинамического равновесия равен нулю (см., например,[72] § 29). Для объяснения намагничения необходимо, поэтому, пользоваться квантовой теорией или внести в классическую теорию чуждое ей требование о существовании дискретных электронных орбит и т. п. Так, для объяснения диамагнетизма атомов при таком квазиклассическом рассмотрении принимается, что имеются электронные орбиты, которые в магнитном поле прецессируют вокруг поля с ларморовой угловой скоростью

$$\omega_L = -\frac{eH}{2mc} \tag{2,19}$$

(в случае электрона заряд $e < 0$).

Если средний радиус орбиты есть a и распределение орбит в пространстве изотропно, то для восприимчивости газа, учитывая (2,19), получается известная формула (Z — число электронов в атоме, N_a — концентрация атомов):

$$\chi = -\frac{e^2 Z N_a}{6mc^2} a^2. \tag{2,20}$$

Квантовая природа намагничения отражается в (2,20) в том, что радиус орбиты a определяется постоянной Планка $\hbar =$

$= 1{,}05 \cdot 10^{-27}$ $\left(\text{для атома водорода в основном состоянии } a = \frac{\hbar^2}{me^2}\right)$.

В нашем случае легко видеть, что если поле **H** однородно *), то условие (2, 17) будет удовлетворено, если жидкость вращается вокруг поля как целое, т. е. как твёрдое тело с частотой (2,19). Это и показывает, что условие (2,17) имеет смысл наложения на систему некоторых жёстких связей. Система же свободных электронов, конечно, двигаться таким образом не будет, достаточно сказать, что свободный заряд вращается вокруг поля с частотой $\omega_H = 2\omega_L = -\frac{eH}{mc}$, а не с частотой ω_L. Вывод уравнения (2,6) на основе рассмотрения движения электронов в металле составляет задачу микроскопической теории и будет обсуждаться во второй части статьи.

Уравнения (2,6) и (2,8) или (2,17) и (2,18) могут быть получены из некоторого вариационного принципа [73—75, 5], но это ничего не прибавляет к существу дела.

В (2,6) и (2,8) предполагается, так же как в (2,2), (2,3) и (2,5), что сверхпроводник является в электрическом отношении изотропным. В некубических металлах нужно, вообще говоря, учитывать анизотропию нормальной проводимости и глубины проникновения магнитного поля в сверхпроводник. Поскольку на опыте анизотропия глубины проникновения ещё твёрдо не установлена [19], мы не будем здесь останавливаться на довольно очевидном обобщении всей схемы на анизотропный случай [67, 2, 68, 76]. Нетрудно также рассмотреть случай движущихся сверхпроводников [69]. Уравнения (2,6) — (2,8) можно, далее, обобщить на случай нелинейной зависимости $\mathbf{j}_s$ от **H**, на что имеются определённые основания [2, 70, 71]. В простейшей нелинейной теории в (2,6) — (2,8) можно считать, что Λ зависит от $\mathbf{j}_s$ или **H**. Если исходить из уравнений (2,17) — (2,18), нелинейное обобщение получается естественным образом, если считать, что число сверхпроводящих электронов n_s зависит от v^2 или H^2 (Λ и n_s могут зависеть лишь от чётных степеней v или H, так как они не могут меняться при изменении знака v или H) [2, 70]. Нелинейность уравнений для сверхпроводящего тока автоматически получается в новой феноменологической теории, которой мы займёмся ниже. Поэтому на формальном нелинейном обобщении старой теории мы останавливаться не будем. Заметим, наконец, что уравнения (2,6) — (2,8) должны быть заменены более общими и при наличии градиента температуры. Этот случай важен для

*) В сверхпроводнике фактически поле **H** всегда неоднородно, но это, конечно, не меняет существа дела. Кроме того, например, для шарика или цилиндра радиуса $R \ll \delta$ поле примерно однородно.

рассмотрения термоэлектрических явлений и теплопроводности сверхпроводников[2, 67]; мы его коснёмся в § 5.

Оставив сейчас в стороне все эти направления, в которых может быть обобщён простейший вариант старой феноменологической теории, обратимся к некоторым следствиям установленных уравнений:

$$\operatorname{rot} \Lambda \mathbf{j}_s = -\frac{1}{c}\mathbf{H}, \tag{2,6}$$

$$\frac{\partial \Lambda \mathbf{j}_s}{\partial t} = \mathbf{E}, \tag{2,8}$$

$$\mathbf{j}_n = \sigma \mathbf{E}. \tag{2,5}$$

Уравнение сохранения энергии в электродинамике

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mu \mathbf{H}^2 + \varepsilon \mathbf{E}^2}{8\pi}\right) + \frac{c}{4\pi} \operatorname{div} [\mathbf{EH}] = -\mathbf{jE}$$

в случае сверхпроводников согласно (2,4), (2,5) и (2,8) принимает вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mathbf{H}^2 + \varepsilon \mathbf{E}^2}{8\pi} + \frac{\Lambda \mathbf{j}_s^2}{2}\right) + \frac{c}{4\pi} \operatorname{div} [\mathbf{EH}] = -\mathbf{j}_n \mathbf{E} = -\sigma \mathbf{E}^2. \tag{2,21}$$

Таким образом, плотность энергии в сверхпроводнике

$$w_s = \frac{\mathbf{H}^2 + \varepsilon \mathbf{E}^2}{8\pi} + \frac{\Lambda \mathbf{j}_s^2}{2}, \tag{2,22}$$

где последний член учитывает энергию тока и представляет собой, как ясно из (2, 9), просто кинетическую энергию сверхпроводящих электронов $\frac{m n_s \mathbf{v}^2}{2}$.

При отсутствии магнитного поля переход из нормального в сверхпроводящее состояние происходит непрерывно (является переходом 2-го рода). В соответствии с этим при $T \to T_к$, $\delta \to \infty$ и уравнения (2,5), (2,6), (2,8) также непрерывно переходят в одно уравнение (2,3), определяющее ток в нормальном состоянии. Действительно, при $T \to T_к$

$$\Lambda = \frac{4\pi\delta^2}{c^2} \to \infty \tag{2,23}$$

и, следовательно, как ясно из (2,6), сверхпроводящий ток должен исчезать т. е. при $T \to T_к$

$$\mathbf{j}_s \to 0. \tag{2,24}$$

Если же $\Lambda \to \infty$ и $\mathbf{j}_s \to 0$, то уравнения (2, 6), (2, 8) никаких условий на поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ не накладывают, а $\mathbf{j} = \mathbf{j}_n = \sigma \mathbf{E}$. Отсюда следует также, что нормальная проводимость в сверхпроводнике при $T \to T_к$ должна стремиться к значению проводимости нормального металла при $T = T_к$. Этот вывод, ясный уже из того,

что при $T = T_к$ фазовый переход является переходом 2-го рода, полностью подтверждается на опыте (см. § 6).

Перейдём теперь к нахождению распределения поля и тока в сверхпроводниках, находящихся во внешнем магнитном поле.

В стационарном случае, используя (2,6) и (2,11), имеем

$$\Delta \mathbf{H} - \frac{1}{\delta^2}\mathbf{H} = 0, \qquad \delta^2 = \frac{\Lambda c^2}{4\pi} = \frac{mc^2}{4\pi e^2 n_s}. \qquad (2,25)$$

На границе сверхпроводника с вакуумом должны быть, как всегда, непрерывны тангенциальные составляющие вектора **H**. Поэтому в случае сверхпроводящего полупространства, т. е. фактически для достаточно толстой пластинки, решение уравнений (2,25) таково:

$$H = H_0 e^{-z/\delta},$$

$$j_s = j_{s0} e^{-z/\delta} = \frac{cH_0}{4\pi\delta} e^{-z/\delta} = \frac{c}{4\pi\delta} H, \qquad (2,26)$$

где координата z отсчитывается от границы раздела металла с вакуумом и H_0 — поле при $z = 0$ (т. е. внешнее поле); поле **H** и ток $\mathbf{j}_s$ взаимно перпендикулярны и по предположению, лежат в плоскости xy.

В случае сверхпроводящей пластины толщиной $2d$, находящейся в параллельном ей поле $\mathbf{H}_0$, решение имеет, очевидно, вид:

$$H = H_0 \frac{\operatorname{ch} z/\delta}{\operatorname{ch} d/\delta}, \quad j_s = -\frac{cH_0}{4\pi\delta} \frac{\operatorname{sh} z/\delta}{\operatorname{ch} d/\delta}, \qquad (2,27)$$

где начало координат помещено в середине пластины, поле **H** направлено по оси y и ток имеет слагающую лишь по оси x (см. рис. 8).

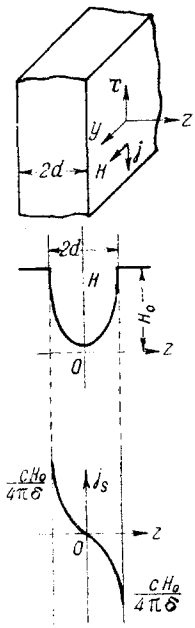

Рис. 8.

Если в однородное магнитное поле $\mathbf{H}_0$ параллельно полю помещён круглый цилиндр радиуса R, то поле везде направлено по оси цилиндра z, а линии тока образуют окружности, причём:

$$H = H_0 \frac{I_0\left(\frac{r}{\delta}\right)}{I_0\left(\frac{R}{\delta}\right)},$$

$$j_s = \frac{c}{4\pi} \operatorname{rot}_\varphi H = -\frac{c\partial H_z}{4\pi \cdot \partial r} = -\frac{cH_0}{4\pi\delta} \cdot \frac{I_1\left(\frac{r}{\delta}\right)}{I_0\left(\frac{R}{\delta}\right)}, \qquad (2,28)$$

где $I_n(x) = i^{-n} J_n(ix)$, $J_n(x)$ — бесселева функция первого рода порядка n $\left(\text{напомним, что } \frac{dI_0(x)}{dx} = I_1(x), \quad I_0(x) = 1 + \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} + \cdots; \text{ при } x \gg 1 \; I_0(x) \approx \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}\right)$.

Для толстого цилиндра

$$R \gg \delta: \; H \cong H_0 \sqrt{\frac{R}{r}}\, e^{-\frac{(R-r)}{\delta}},$$

$$j_s \cong -\frac{cH_0}{4\pi\delta} \sqrt{\frac{R}{r}}\, e^{-\frac{(R-r)}{\delta}}. \tag{2,28а}$$

В случае достаточно тонкого цилиндра

$$R \ll \delta: \; H \cong H_0 \frac{1 + \left(\frac{r}{2\delta}\right)^2}{1 + \left(\frac{R}{2\delta}\right)^2}; \quad j_s \cong -\frac{cH_0}{4\pi\delta} \frac{\frac{r}{2\delta}}{1 + \left(\frac{R}{2\delta}\right)^2}. \tag{2,28б}$$

Если в однородное магнитное поле помещён сверхпроводящий шарик радиуса R, то вне его поле является суммой внешнего поля H_0 и поля магнитного диполя с моментом

$$\left.\begin{aligned} &\vec{\mu} = -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{3\delta}{R}\operatorname{cth}\frac{R}{\delta} + \frac{3\delta^2}{R^2}\right) R^3 \mathbf{H}_0, \\ &R \gg \delta: \; \vec{\mu} \cong -\frac{R^3}{2}\mathbf{H}_0, \\ &R \ll \delta: \; \vec{\mu} \cong -\frac{R^5}{30\delta^2}\mathbf{H}_0. \end{aligned}\right\} \tag{2,29}$$

Формул для распределения поля и тока в самом шарике мы приводить не будем; их можно найти в [1, 3]; там же приведено решение ряда других задач (цилиндр в перпендикулярном поле, цилиндр в параллельном поле, по которому течёт ток и др.; помимо [1, 3] укажем на новые работы в области феноменологической теории [77–85]). Один из экспериментальных методов определения δ основан на измерении магнитного момента сверхпроводника малых размеров в магнитном поле [17]. В случае сверхпроводящих шариков магнитная восприимчивость, отнесённая к одному шарику, определяется формулой (2,29). Для любого цилиндра в параллельном его оси поле H_0 магнитный момент, отнесённый к единице длины, равен

$$\mu = \int \frac{H(s) - H_0}{4\pi}\, dS, \tag{2,30}$$

где $H(s)$ — поле в цилиндре и dS — элемент площади сечения цилиндра. Векторы $\vec{\mu}$, $\mathbf{H}(s)$ и $\mathbf{H}_0$, разумеется, коллинеарны и, так как $H(s) \leqslant H_0$, момент $\vec{\mu}$ антипараллелен полю $\mathbf{H}_0$. К формуле

(2, 30) мы приходим, учитывая, что поле в сверхпроводнике играет роль индукции **B** в магнитном материале. При этом, если бы наш цилиндр был сделан из магнетика, то магнитное поле **H** в нём было бы равно внешнему полю $\mathbf{H}_0$ (так как тангенциальные компоненты **H** непрерывны). Отсюда следует, что в сверхпроводнике роль магнитного поля феноменологической теории магнетиков играет поле $\mathbf{H}_0$ и, таким образом, в сверхпроводнике намагничение $\mathbf{M} = \frac{\mathbf{B}-\mathbf{H}}{4\pi}$ как раз равно $\frac{\mathbf{H}-\mathbf{H}_0}{4\pi}$.

Для пластинки, используя (2,27), имеем

$$\mu = -\left(1 - \frac{\delta}{d}\,\mathrm{th}\,\frac{d}{\delta}\right)\frac{d\cdot H_0}{2\pi}, \tag{2,31}$$

где момент отнесён к единице поверхности пластинки.

В случае круглого цилиндра момент на единицу длины равен

$$\left.\begin{aligned} \mu &= -\left[1 - \frac{2\delta}{R}\,\frac{I_1\left(\frac{R}{\delta}\right)}{I_0\left(\frac{R}{\delta}\right)}\right]\frac{R^2}{4}\,H_0, \\ R &\gg \delta:\quad \mu \cong -\left(1 - \frac{2\delta}{R}\right)\frac{R^2}{4}\,H_0, \end{aligned}\right\} \tag{2,32}$$

где при подстановке решения (2,28) в (2,30) учтено, что

$$\int_0^x I_0(x)\,x\,dx = xI_1(x).$$

Остановимся теперь на вопросе о разрушении сверхпроводимости магнитным полем. Для нахождения критического поля, при котором происходит переход в нормальное состояние, рассмотрим цилиндрический образец в магнитном поле, параллельном его оси. Пусть вначале внешнее магнитное поле H_0 больше поля $H_к$, отвечающего данной температуре. Образец в этом случае весь находится в нормальном состоянии. При уменьшении поля до значения $H_к$ начнётся фазовый переход, который, если поддерживать температуру постоянной, закончится полным переходом цилиндра в сверхпроводящее состояние. Поскольку этот переход при достаточно медленном его проведении можно считать обратимым, изменение свободной энергии тела при превращении равно работе A_{12}, которая производится над телом электромагнитным полем

$$F_2 - F_1 = A_{12}, \tag{2,33}$$

где все свободные энергии и работу A_{12} мы относим к единице объёма цилиндра, $F_1 = F_{n0} + \frac{H_к^2}{8\pi}$ — свободная энергия тела (F_{n0}) и поля $\left(\frac{H_к^2}{8\pi}\right)$ до перехода, т. е. в нормальном состоянии, и $F_2 = F_{s0} + W$ — свободная энергия после перехода, причём W —

энергия, связанная с полем и током в сверхпроводнике. Величины F_{n0} и F_{s0} суть свободные энергии единицы объёма нормальной и сверхпроводящей фаз в отсутствии поля. F_{n0} и F_{s0} считаются неизменяющимися и при наличии поля, так как магнитная проницаемость $\mu = 1$. Таким образом, влияние поля в F_1 и F_2 учитывается лишь членами $\frac{H_к^2}{8\pi}$ и W. Как ясно из (2,22)

$$W = \frac{1}{V}\int\left(\frac{H_{(s)}^2}{8\pi} + \frac{\Lambda j_s^2}{2}\right)dV = \frac{1}{S}\int\left(\frac{H_{(s)}^2}{8\pi} + \frac{\Lambda j_s^2}{2}\right)dS,$$

где V — объём цилиндра, а S — площадь его поперечного сечения. Работа A_{12} равна изменению энергии образца во внешнем магнитном поле. В нормальном состоянии эта энергия равна нулю, а в сверхпроводящем равна $-\mu(H_к)\cdot H_к$; таким образом, согласно (2,30)

$$A_{12} = \mu(H_к)\cdot H_к = -\frac{H_к^2}{4\pi} + \frac{H_к}{4\pi S}\int H(s)\,dS. \qquad (2,34)$$

Это выражение можно также получить прямым вычислением электромагнитной энергии, протекающей при переходе через поверхность рассматриваемого цилиндра (см. [2]).

Учитывая сказанное, окончательно получаем

$$F_{n0} - F_{s0} = \frac{H_к^2}{8\pi} + \frac{1}{S}\int\left(\frac{H_{(s)}^2}{8\pi} + \frac{\Lambda j_s^2}{2} - \frac{H_к H(s)}{4\pi}\right)dS. \qquad (2,35)$$

Для массивного цилиндра интегральный член в (2,35) мал, так как поле $H(s)$ и ток j_s отличны от нуля или, точнее, не слишком малы лишь в поверхностном слое с толщиной порядка δ. Поэтому для массивного сверхпроводника

$$F_{n0} - F_{s0} = \frac{H_{км}^2}{8\pi}, \qquad (2,36)$$

где $H_{км}$ — критическое поле для массивных образцов. Эта формула уже приводилась в § 1 (см. (1,2)), где были опущены индексы 0 и M)*).

*) Ввиду важности соотношения (2,36) укажем, что оно сразу же получается из (2,33), так как для массивного металла $W = 0$, $A_{12} = \mu H_{км} = \frac{-H_{км}^2}{4\pi}$ и $F_2 - F_1 = F_{s0} - F_{n0} - \frac{H_{км}^2}{8\pi} = \frac{-H_{км}^2}{4\pi}$. Заметим также, что для получения всех формул можно не говорить о работе сил поля, а просто приравнять при $H = H_к$ полные энергии сверхпроводника и нормального металла в магнитном поле, учитывая при этом и энергию сверхпроводника во внешнем поле, равную $-\mu\cdot H_к$. Действительно, при этом $F_{n0} + \frac{H_к^2}{8\pi} = F_{s0} + W - \mu\cdot H_к$, что эквивалентно (2,33), так как $A_{12} = \mu\cdot H_к$.

Из (2, 36) сразу же ясна связь теплоты перехода Q и скачка теплоёмкости Δc с $H_{\text{км}}$. Именно, поскольку энтропия $S = -\frac{\partial F}{\partial T}$ и теплоёмкость $c = T\frac{\partial S}{\partial T}$,

$$Q = T(S_n - S_s) = -\frac{TH_{\text{км}}}{4\pi}\frac{dH_{\text{км}}}{dT},$$

$$\Delta c = c_s - c_n = \frac{T}{4\pi}H_{\text{км}}\frac{d^2H_{\text{км}}}{dT^2} + \frac{T}{4\pi}\left(\frac{dH_{\text{км}}}{dT}\right)^2. \qquad (2,37)$$

При

$$T = T_{\text{к}}:\ H_{\text{к}} = 0,\ Q = 0 \text{ и } \Delta c = \frac{T_{\text{к}}}{4\pi}\left(\frac{dH_{\text{км}}}{dT}\right)^2_{T_{\text{к}}}.$$

Выше предполагалось, что переход из нормального состояния в сверхпроводящее происходит не только при постоянной температуре, но также при постоянном объёме. Обычно это допущение вполне законно, но для определения влияния давления на $H_{\text{км}}$, нахождения изменения удельного объема при переходе $\Delta V = V_n - V_s$ и т. п. нужно, разумеется, рассмотреть переход при постоянном давлении, а не постоянном объёме. В этом случае разность термодинамических потенциалов $\Phi = F \cdot V + pV$, отнесённых к единице массы, равна ($V \simeq V_n \simeq V_s$ — удельный объём)

$$\Phi_n - \Phi_s = \frac{H^2_{\text{км}}}{8\pi} \cdot V. \qquad (2,38)$$

Так как $V = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial p}\right)_T$ — изменение удельного объёма при разрушении сверхпроводимости

$$\Delta V = V_n - V_s = \frac{H_{\text{км}}}{4\pi}\left(\frac{\partial H_{\text{км}}}{\partial p}\right)_T \cdot V, \qquad (2,39)$$

причём в (2,38) V не дифференцируется по p, так как получающийся при этом член $\frac{H^2_{\text{км}}}{8\pi}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T$ учитывает изменение объёма сверхпроводящей фазы под влиянием электромагнитного давления $\frac{H^2_{\text{км}}}{8\pi}$; если же мы интересуемся изменением объёма ΔV_n в поле $H_{\text{км}}$, связанным только с разрушением сверхпроводимости, то изменения объёма V_s под влиянием магнитного поля учитывать не нужно*). Изменение ΔV очень мало и им обычно смело можно пренебречь $\left(\frac{\Delta V}{V} \sim 10^{-7}\right.$ при $H_{\text{км}} \sim 100$ и $\left.\frac{\partial H_{\text{км}}}{\partial p} \sim 10^{-8}\right)$.

*) Это обстоятельство, как любезно обратил внимание автора И. М. Лифшиц, не было учтено в[2]; поэтому формула (4,18) в § 19 в[2] определяет изменение объёма, связанное и с разрушением сверхпроводимости и со сжатием (стрикцией) сверхпроводника в магнитном поле.

Дифференцируя (2,39) по давлению и температуре, можно определить связанное с разрушением сверхпроводимости изменение сжимаемости β и коэффициента теплового расширения α (см. [2]; новые экспериментальные работы [32—35, 47]).

Феноменологическая теория, основные стороны которой мы осветили, находится, конечно, в согласии с тем опытным фактом, что магнитное поле не проникает в толщу сверхпроводников. Но для проверки теории этого ещё мало, так как можно предложить большое число других уравнений, приводящих к такому же качественному результату (к нему приводит, например, то же уравнение (2,6), но с величиной Λ, зависящей от H и j_s; правда, эта зависимость не может быть произвольной, но отнюдь не определена однозначно). Истинная проверка полученных уравнений могла бы в первую очередь базироваться на экспериментальном определении закона затухания поля в сверхпроводнике, т. е. на сравнении с опытом формул (2,26) — (2,32) и им подобных. Однако, измерение магнитного момента тонких образцов, таких как коллоидные частицы, тонкие проволочки и т. д., весьма затруднительно. Поэтому, хотя этот метод и применялся с успехом для определения изменений глубины проникновения δ с температурой, он ещё не был использован для достаточно точных абсолютных измерений.

Помимо измерения момента теорию можно проверить ещё и другим способом, который к тому же важен сам по себе и основан на относительно легко проводимых экспериментах. Дело в том, что критическое поле $H_к$ зависит от размеров сверхпроводника, причём эта зависимость, как ясно из (2,35), определяется характером распределения поля и тока в образце. Так, в случае пластинки (плёнки) с толщиной $2d$, подставляя в (2,35) решение (2,27), имеем

$$F_{n0} - F_{s0} = \frac{H_{км}^2}{8\pi} = \frac{H_к^2}{8\pi} + \frac{\sigma}{d},$$

$$\sigma = \int_0^d \left(\frac{H^2(z)}{8\pi} + \frac{\Lambda j_s^2(z)}{2} - \frac{H_к \cdot H(z)}{4\pi} \right) dz =$$

$$= -\frac{H_к^2}{8\pi}\, \delta \operatorname{th} \frac{d}{\delta}, \qquad (2,40)$$

где величина σ может быть интерпретирована, как свободная энергия, связанная с единицей поверхности. Такая терминология оправдана тем, что при отсутствии границ $\frac{H_к^2}{8\pi} = \frac{H_{км}^2}{8\pi}$ и член $\frac{\sigma}{d}$ равен как раз отнесённой к единице объёма энергии, обусловленной наличием поверхности. Известная условность интерпретации σ как поверхностной энергии ясна из того, что $\sigma < 0$, в то время как поверхностная энергия при обычном её введении всегда поло-

жительна. Независимо от употребляемого термина, согласно (2,35) и (2,40) изменение $H_к$ для тонких сверхпроводников можно рассматривать как результат существования некоторой энергии σ, связанной с наличием сверхпроводящего тока и частичным проникновением в металл магнитного поля. Из (2,40) сразу ясно, что

$$\left(\frac{H_к}{H_{км}}\right)^2 = \frac{1}{1-\frac{\delta}{d}\,\mathrm{th}\,\frac{d}{\delta}}. \tag{2,41}$$

Это соотношение не находится, однако, в согласии с опытом[21]. Так, если при данной температуре по измеренным значениям $\frac{H_к}{H_{км}}$ определять для разных d постоянную δ по формуле (2,41), то эта «постоянная» δ сильно меняется с изменением d (например, при $T=4°$ и $d=0{,}3\cdot10^{-5}$, $\delta=3{,}4\cdot10^{-5}$, а при $d=1{,}2\cdot10^{-5}$ $\delta=2{,}0\cdot10^{-5}$). В[86] было указано на возможность исправить положение, если учесть изменение поверхностной энергии на границе металла с вакуумом в зависимости от того, находится ли металл в сверхпроводящем или в нормальном состояниях. При этом вместо (2,41) получается

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{H_к}{H_{км}}\right)^2 &= \frac{1+\frac{\beta}{d}}{1-\frac{\delta}{d}\,\mathrm{th}\,\frac{d}{\delta}},\\ \beta &= \frac{\sigma_n'-\sigma_s'}{\frac{H_{км}^2}{8\pi}},\end{aligned}\right\} \tag{2,42}$$

где σ_n' и σ_s' — несвязанные с магнитным полем поверхностные энергии на границе вакуума с металлом, находящимся соответственно в нормальном и сверхпроводящем состояниях. Сама «полная поверхностная энергия» σ, фигурирующая теперь в (2,40), имеет при этом вид

$$\sigma = -\left(\sigma_n'-\sigma_s'\right) - \frac{H_к^2}{8\pi}\cdot\delta\,\mathrm{th}\,\frac{d}{\delta}. \tag{2,43}$$

Если принять формулу (2,42), то из сравнения с опытом следует[86], что $\beta>0$ (т. е. $\sigma_n'>\sigma_s'$) и при этом $\beta\sim\delta\sim10^{-5}$ *см*. Однако введение поверхностной энергии $\sigma_n'-\sigma_s'=\beta\frac{H_{км}^2}{8\pi}\sim\delta\frac{H_{км}^2}{8\pi}$ представляется в данном случае по меньшей мере натянутым. В самом деле, поверхностная энергия обычно по порядку величины равна объёмной свободной энергии, умноженной на длину порядка атомных расстояний; таким образом, в нашем случае, где разность объёмных свободных энергий равна $\frac{H_{км}^2}{8\pi}$, можно было бы ожидать нали-

чия разности поверхностных энергий порядка $(10^{-8} \div 10^{-7}) \frac{H_{\text{км}}^2}{8\pi}$, но не порядка $10^{-5} \cdot \frac{H_{\text{км}}^2}{8\pi}$. Ещё более ярко это противоречие выступает в случае границы раздела между сверхпроводящей и нормальной фазами металла. В этом случае, как ясно хотя бы из (2,43), если не учитывать какой-то добавочной поверхностной энергии, $\sigma = \sigma_{ns}^H = -\frac{H_{\text{к}}^2}{8\pi} \delta \operatorname{th} \frac{d}{\delta} < 0$ (в случае границы массивного сверхпроводника с нормальной фазой отсюда или непосредственно из выражения для σ_{ns}^H ясно, что

$$\sigma_{ns}^H = \int_0^\infty \left(\frac{H^2(z)}{8\pi} + \frac{\Lambda j_s^2}{2} - \frac{H_{\text{к}} \cdot H(z)}{4\pi} \right) dz = -\delta \cdot \frac{H_{\text{км}}^2}{8\pi},$$

так как в качестве $H(z)$ и $j_s(z)$ здесь нужно использовать выражение (2,26)). Но при $\sigma_{ns}^H < 0$ образование поверхностей раздела только выгодно и, как нетрудно видеть[87, 86], разрушение сверхпроводимости массивного образца при $H = H_{\text{км}}$ не имело бы места (вместо этого образец распадался бы на чередующиеся сверхпроводящие и нормальные слои). Для того, чтобы избежать этих явных противоречий, необходимо принять, что на границе сверхпроводящей и нормальной фаз должна иметься ещё, так сказать, «локализованная» поверхностная энергия σ_{ns}', которая для обеспечения положительности полной поверхностной энергии σ_{ns} должна удовлетворять неравенству

$$\sigma_{ns}' = \sigma_{ns} - \sigma_{ns}^H > \delta \cdot \frac{H_{\text{км}}^2}{8\pi}. \tag{2,44}$$

Из опыта следует (см., например,[37]), что $\sigma_{ns} \sim \delta \frac{H_{\text{км}}^2}{8\pi}$. Вместе с тем на границе нормальной и сверхпроводящей фаз одного и того же металла совсем уже противоестественно появление такой относительно огромной, несвязанной с распределением магнитного поля «локализованной» поверхностной энергии σ_{ns}'. Напротив, нужно думать, что всякая рациональная теория сверхпроводимости должна автоматически приводить к возможности выразить поверхностную энергию σ_{ns} через постоянные, характеризующие сверхпроводник. Тоже относится к энергии $\sigma_n' - \sigma_s'$ в (2,42). Заметим также, что скудность опытных данных не позволяет утверждать, что даже формула (2,42) и выражение $\sigma_{ns} = \sigma_{ns}' - \frac{H_{\text{к}}^2}{8\pi} \delta \operatorname{th} \frac{d}{\delta}$ с постоян-

ными при данной температуре β и σ_{ns} позволяют количественно правильно описать разрушение сверхпроводимости и все особенности промежуточного состояния.

Теория, основанная на уравнении (2,6), даже с введением дополнительной поверхностной энергии не даёт также возможности рассмотреть разрушение сверхпроводимости плёнок током [88], так как эта задача не носит термодинамического характера *). И, наконец, в развитой схеме глубина проникновения поля в сверхпроводник δ не зависит от напряжённости поля и от размеров образца. Между тем, теоретические соображения (см. [70, 4] и ниже) приводят к заключению, что глубина проникновения поля в сверхпроводник, в особенности при $H \sim H_к$, должна зависеть от H, причём этот эффект в первую очередь должен быть заметен для тонких образцов. Некоторые указания на существование такого эффекта уже, повидимому, имеются [17].

Резюмируя, мы можем сказать, что феноменологическая теория сверхпроводимости, базирующаяся на уравнении (2,6), которую мы называем «старой теорией», является неудовлетворительной. Точнее, старая теория заведомо неприменима для рассмотрения разрушения сверхпроводимости тонких объектов, границы раздела между нормальной и сверхпроводящей фазами и, вообще, в сильных полях, когда $H \sim H_к$. В слабых полях $H \ll H_к$ и при токах I, намного меньших критического тока $I_к$, использование старой теории не противоречит никаким известным фактам, хотя и не может считаться достаточно обоснованным в экспериментальном отношении. Как явствует из излагаемой ниже более общей теоре-

*) Получение формул для критического тока и критического магнитного поля плёнки на основе рассмотрения равновесия границы нормальной и сверхпроводящей фаз металла [3] для тонких, плёнок неправильно, так как сама эта граница, в силу сказанного выше, не может быть рассмотрена на базе уравнения (2,6). Поэтому мы считаем, что критика формулы (2,42), предпринятая Лауе [89], неосновательна. В непригодности же предлагаемой Лауе формулы [3] $H_к = H_{км} \operatorname{ctg} \frac{d}{\delta}$ легко убедиться сразу же из того, что она вообще не может объяснить факта разрушения сверхпроводимости. Действительно, согласно этой формуле сверхпроводимость должна начать разрушаться на границе плёнки в поле $H_к = H_{км} \operatorname{ctg} \frac{d}{\delta}$. При разрушении сверхпроводимости будет образовываться нормальная фаза, а толщина сверхпроводящей «сердцевины» станет уже меньше $2d$. Но при уменьшении d критическое поле возрастает и сверхпроводящая «сердцевина», а значит и сверхпроводимость плёнки вообще, по Лауе будет исчезать лишь при $H_к \to \infty$ (!). Поэтому в рамках теории, опирающейся на уравнение (2,6), разрушение сверхпроводимости можно трактовать только термодинамически, рассматривая переход всей плёнки в целом, что и приводит к формуле (2,42). Наша критика этой формулы идёт в совсем другом направлении — она указывает на непригодность самого исходного уравнения (2,6).

тической схемы, именуемой для краткости просто «новой феноменологической теорией», старая теория в слабых полях должна быть применима и просто является предельным случаем более сложной системы уравнений, определяющих поле **H** и ток $\mathbf{j}_s$ в сверхпроводниках. Новая теория[4] позволяет, по крайней мере в принципе, устранить все указанные недостатки старой теории, но, в свою очередь, ещё *недостаточно проверена на опыте*. Вопрос о проверке новой теории, которая, в случае её успеха, позволит говорить об известном завершении построения феноменологической теории сверхпроводимости, имеет сейчас, по нашему мнению, важнейшее значение. Поэтому мы перейдём к довольно подробному изложению этой новой теории.

§ 3. НОВАЯ ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ *)

Непригодность старой теории особенно ярко проявляется в том что она приводит к отрицательному поверхностному натяжению σ_{ns}^{H} Поэтому, в первую очередь, нужно найти причину, которая могла бы изменить это положение. В этом отношении можно убедиться, что изменение уравнения (2,6) в направлении учёта возможной *зависимости* Λ *от* H *или* j_s *не приводит к положительным результатам*. Напротив, к ним может, по крайней мере в принципе, привести учёт квантового эффекта[10]. В самом деле, локализация электронов, участвующих в переносе сверхпроводящего тока (т. е. локализация «сверхпроводящих электронов»), в поверхностном слое с толщиной порядка δ делает неопределённым их импульс по оси z на величину $\sim \frac{\hbar}{\delta}$; соответствующая этому разбросу значений импульса «нулевая энергия» сверхпроводящих электронов в поверхностном слое $\sim \frac{\hbar^2 n_s}{m\delta^2} \sim 10^4 \frac{эрг}{см^3}$, при $m \sim 10^{-27}$, $\delta \sim 10^{-5}$ и $n_s \sim 10^{21}$, где n_s — концентрация сверхпроводящих электронов, а m — их эффективная масса. Вместе с тем, магнитная энергия $\frac{H^2}{8\pi} \sim 10^4 \frac{эрг}{см^3}$ только при $H \sim 5 \cdot 10^2$ гаусс и, таким образом, нулевая энергия в обычных условиях во всяком случае не меньше, а скорее больше магнитной энергии. Эта положительная нулевая энергия и может, в принципе, обеспечить положительность σ_{ns}. Смысл сделанного замечания состоит, очевидно, в том, что квантовые эффекты в сверхпроводнике ввиду относительной малости глубины проникновения δ могут быть весьма существенны. Отсюда становится понятной ограниченная область применимости старой феноменологической теории, имеющей в своей основе классическую гидродинамику, дополненную требованием «жёсткости» (2,17), которое отбирает лишь часть возможных в классике решений.

*) Содержание §§ 3, 4 основано на работе[4].

Для перехода к количественной теории с учётом квантовых эффектов нужно выразить энергию сверхпроводника через характеризующие сверхпроводящее состояние величины. Основной такой величиной является уже упомянутое число или, точнее, концентрация сверхпроводящих электронов n_s, которое играет роль, аналогичную числу свободных электронов в элементарной теории электронного газа в металлах. Величина n_s, как ясно из (2,14), а также из дальнейшего, выражается через измеряемый на опыте параметр сверхпроводника. При отсутствии магнитного поля естественно предположить, что свободная энергия сверхпроводника F_{s0} зависит только от числа n_s, которое в свою очередь, меняется с температурой так, что при $T \geqslant T_к$, где $T_к$ — критическая температура, $n_s = 0$ и при $T < T_к$, $n_s > 0$.

Это заключение о температурном ходе n_s является очевидным следствием того факта, что при $T = T_к$ имеет место фазовый переход 2-го рода из сверхпроводящей фазы в нормальную *). Величина n_s играет таким образом роль того положительного параметра, который входит в общую теорию фазовых переходов 2-го рода [90] и, например, в случае сегнетоэлектриков равен квадрату спонтанной поляризации P_s^2, а в случае ферромагнетиков — квадрату спонтанного намагничения M_s^2 [91]. Свободная энергия $F_{0s}(n_s)$, которую мы относим к единице объёма, при $T < T_к$ должна иметь минимум при $n_s \neq 0$, а при $T \geqslant T_к$ — при $n_s = 0$. Однако, прежде чем записать F_{s0} в виде функции n_s, заметим, что в духе теории переходов 2-го рода удобно, а для дальнейшего практически необходимо, вместо величины n_s использовать величину Ψ, определяемую соотношением

$$|\Psi|^2 = n_s \tag{3,1}$$

и играющую роль некоторой «эффективной» волновой функции сверхпроводящих электронов. Разумеется, выразить Ψ через точную волновую функцию электронов в металле можно лишь на основе микроскопической теории (см. также [4]). Нормировку нашей Ψ-функции мы выберем несколько ниже.

Учитывая, что при $T = T_к$ $|\Psi|^2 = 0$ и допуская, что функция $F_{s0}(|\Psi|^2)$ разлагается около этой точки в ряд, мы можем вблизи $T_к$ записать F_{s0} в виде **)

$$F_{s0} = F_{n0} + \alpha |\Psi|^2 + \frac{\beta}{2} |\Psi|^4. \tag{3,2}$$

*) Указанная температурная зависимость n_s находится также в соответствии с температурным ходом $\delta = \sqrt{\frac{mc^2}{4\pi e^2 n_s}}$; см. (2,14) и (2,23).

**) Заметим, что не учитывая явно какой либо электростатической энергии, мы тем самым считаем сверхпроводящий заряд $ne_s = e|\Psi|^2$ полностью скомпенсированным всеми другими зарядами металла, что в стационарном состоянии вполне естественно.

В состоянии равновесия

$$\frac{\partial F_{s0}}{\partial |\Psi|^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 F_{s0}}{\partial^2 |\Psi|^2} > 0$$

и должно быть $|\Psi|^2 = 0$ при $T \geqslant T_к$ и $|\Psi|^2 > 0$ при $T < T_к$. Отсюда следует, что $\alpha(T_к) = 0$, $\beta(T_к) > 0$ и при $T < T_к$ $\alpha < 0$. Поэтому в состоянии равновесия при $T \leqslant T_к$

$$\left.\begin{aligned} |\Psi|^2 = |\Psi_\infty|^2 = -\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\left(\frac{d\alpha}{dT}\right)_к (T_к - T)}{\beta_к}, \\ F_{s0} = F_{n0} - \frac{\alpha^2}{2\beta} = F_{n0} - \frac{\left(\frac{d\alpha}{dT}\right)^2_к (T_к - T)^2}{2\beta_к}, \end{aligned}\right\} \qquad (3,3)$$

где учтено, что в пределах справедливости разложения (3,2) $\alpha(T) = \left(\frac{d\alpha}{dT}\right)_к (T - T_к)$ и $\beta(T) = \beta(T_к) \equiv \beta_к$. Выбор значка ∞ у Ψ в (3,3) продиктован соображениями, ясными из дальнейшего. Величина F_{n0} в (3,2)—(3,3) есть, очевидно, свободная энергия нормальной фазы, которую в области применимости формулы (3,3) можно считать независящей от температуры. Поэтому, как ясно из (2,36) и (3,3),

$$H^2_{км} = \frac{4\pi\alpha^2}{\beta} = \frac{4\pi\left(\frac{d\alpha}{dT}\right)^2_к (T_к - T)^2}{\beta_к}. \qquad (3,4)$$

Эта формула, как известно, полностью подтверждается опытными данными (см. (1,2а)), что и служит обоснованием сделанных выше предположений.

Рассмотрим теперь сверхпроводник, находящийся в постоянном во времени магнитном поле.

В этом случае для получения плотности свободной энергии F_{sH} к F_{s0} нужно прибавить энергию поля $\frac{H^2}{8\pi}$ и энергию, связанную с возможным при наличии поля появлением градиента функции Ψ. Эта последняя энергия, по крайней мере пока величина $|\nabla\Psi|^2$ мала, может быть в результате разложения в ряд по $|\nabla\Psi|^2$, представлена в виде $\text{const}\cdot|\nabla\Psi|^2$, т. е. выглядит так же, как плотность кинетической энергии в квантовой механике. Поэтому запишем соответствующее выражение в виде $\frac{\hbar^2}{2m}|\nabla\Psi|^2$, где m — некоторый коэффициент, который можно назвать эффективной массой. При этом, однако, ещё не учтено взаимодействие тока, связанного с наличием $\nabla\Psi$, с магнитным полем. В силу сказанного и исходя из требования, чтобы вся схема была градиентно инвариантна, для учёта влияния поля нужно сделать обычную замену $-i\hbar\nabla$ на $-i\hbar\nabla - \frac{e}{c}\mathbf{A}$, где $\mathbf{A}$ — векторный потенциал

поля и e — заряд, который нет оснований считать отличным от заряда электрона. Таким образом, плотность энергии, связанной с наличием $\nabla\Psi$ и поля $\mathbf{H} = \operatorname{rot}\mathbf{A}$, имеет вид:

$$\frac{H^2}{8\pi} + \frac{1}{2m}\left|-i\hbar\nabla\Psi - \frac{e}{c}\mathbf{A}\Psi\right|^2.$$

В результате

$$F_{sH} = F_{s0} + \frac{H^2}{8\pi} + \frac{1}{2m}\left|-i\hbar\nabla\Psi - \frac{e}{c}\mathbf{A}\Psi\right|^2. \qquad (3,5)$$

Уравнение для Ψ может быть теперь найдено из требования, чтобы полная свободная энергия тела $\int F_{sH}\,dV$ была минимальна.

Таким образом, варьируя полную свободную энергию по Ψ^*, получаем:

$$\frac{1}{2m}\left(-i\hbar\nabla - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2\Psi + \frac{\partial F_{s0}(\Psi^*\cdot\Psi)}{\partial\Psi^*} = 0, \qquad (3,6)$$

причём на границе сверхпроводника, ввиду произвольности вариации $\delta\Psi^*$, должно соблюдаться условие

$$\mathbf{n}\cdot\left(-i\hbar\nabla\Psi - \frac{e}{c}\mathbf{A}\cdot\Psi\right) = 0, \qquad (3,7)$$

где $\mathbf{n}$ — вектор нормали к границе (об основаниях для выбора такого граничного условия ещё будет сказано ниже).

Что касается уравнения для $\mathbf{A}$, то, полагая $\operatorname{div}\mathbf{A} = 0$ и варьируя свободную энергию по $\mathbf{A}$, получаем обычное выражение:

$$\Delta\mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{j} = \frac{2\pi ie\hbar}{mc}(\Psi^*\nabla\Psi - \Psi\nabla\Psi^*) + \frac{4\pi e^2}{mc^2}\mathbf{A}\cdot\Psi^*\cdot\Psi, \qquad (3,8)$$

где $\mathbf{j} = -\frac{ie\hbar}{2m}(\Psi^*\nabla\Psi - \Psi\nabla\Psi^*) - \frac{e^2}{mc}\mathbf{A}\cdot\Psi^*\cdot\Psi$ есть обычное по форме квантовомеханическое выражение для плотности тока. Учитывая, что выражение, аналогичное (3,7), получается и для сопряжённой величины, легко видеть, что на границе $\mathbf{n}\cdot\mathbf{j} = 0$, как это и должно быть.

Решение задачи о распределении поля и тока в сверхпроводнике сводится к совместному интегрированию уравнений (3,6) и (3,8).

Ниже мы будем рассматривать только одномерную задачу, причём ось z направим нормально к границе раздела сверхпроводящей фазы с нормальной фазой или вакуумом, поле $\mathbf{H}$ считаем направленным по оси y, а ток $\mathbf{j}$ и векторный потенциал $\mathbf{A}$ по оси x $\left(\text{при этом } H_y = \frac{dA_x}{dz} \text{ или просто } H = \frac{dA}{dz}\right)$. В одномерной задаче $|\Psi|^2$ естественно считать зависящим только от z и значит, $\Psi = e^{i\varphi(x,y)}\cdot\Psi(z)$. Но тогда, учитывая градиентную инвариантность используемых уравнений, можно выбором соответствующего потенциала $\mathbf{A}$ достигнуть того, что $\Psi = \Psi(z)$ и, таким образом, $\mathbf{j} = -\frac{e^2}{mc}\mathbf{A}\cdot\Psi^*\cdot\Psi$ (из условий $\operatorname{div}\mathbf{j} = \frac{dj_z}{dz} = 0$ и $\mathbf{j}\cdot\mathbf{n} = 0$ сле-

дует, что $j_z = 0$). Кроме того, в данном случае уравнения не содержат мнимой единицы i (так как $\mathbf{A}\cdot\nabla\Psi = 0$) и функция Ψ может считаться вещественной, что мы и будем предполагать. В результате уравнения (3,6) и (3,8) принимают вид:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2\Psi}{dz^2} + \frac{2m}{\hbar^2}|\alpha|\left(1 - \frac{e^2}{2mc^2|\alpha|}A^2\right)\Psi - \frac{2m}{\hbar^2}\beta\Psi^3 = 0, \\ &\frac{d^2A}{dz^2} - \frac{4\pi e^2}{mc^2}\Psi^2\cdot A = 0, \end{aligned}\right\} \tag{3,9}$$

где использовано выражение (3,2) и учтено, что $\alpha < 0$. Выпишем также выражение для поверхностной энергии; оно отличается от (2,40) заменой энергии $\frac{H^2}{8\pi} + \frac{\Lambda j_s^2}{2}$, присутствующей в старой теории, выражением $F_{sH} - F_{s0}$, ясным из (3,2), (3,3) и (3,5):

$$\sigma = \int_0^d \left(\alpha\Psi^2 + \frac{\beta}{2}\Psi^4 + \frac{\alpha^2}{2\beta} + \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{d\Psi}{dz}\right)^2 + \frac{e^2}{2mc^2}A^2\Psi^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{H^2}{8\pi} - \frac{H_\kappa H}{4\pi}\right)dz. \tag{3,10}$$

Из условия минимальности σ, являющейся свободной энергией единицы поверхности, мы, конечно, также получаем как первое уравнение (3,9), варьируя (3,10) по Ψ, так и второе уравнение (3,9), варьируя (3,10) по A. При этом, поскольку функция Ψ при $z = 0$ не задана, необходимо, чтобы соблюдалось условие

$$z = 0, \quad \frac{d\Psi}{dz} = 0, \tag{3,11}$$

получающееся и непосредственно из (3,7). Наличие последнего члена в (3,10) приводит к тому, что на поле при $z = 0$ не накладывается никаких добавочных условий, кроме обычных электродинамических требований непрерывности A и H (значения A и H при $z = 0$ в общем случае, когда $H \neq H_\kappa$, обозначим через A_0 и $H_0 = \left(\frac{dA}{dz}\right)_0$).

Введём теперь следующие параметры $H_{\text{км}}$, δ_0 и $\varkappa$, а также новые переменные z', Ψ', A' и H'.

$$\left.\begin{aligned} &\Psi'^2 = \frac{\Psi^2}{\Psi_\infty^2} = \frac{\Psi^2}{\frac{|\alpha|}{\beta}}, \quad z' = \frac{z}{\delta_0}, \quad A' = \sqrt{\frac{e^2}{2mc^2|\alpha|}}\,A = \frac{A}{\sqrt{2}H_{\text{км}}\cdot\delta_0}, \\ &H' = \frac{dA'}{dz'} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{H}{H_{\text{км}}}, \\ &\delta_0^2 = \frac{mc^2\beta}{4\pi e^2|\alpha|}, \quad H_{\text{км}}^2 = \frac{4\pi\alpha^2}{\beta}, \\ &\varkappa^2 = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{mc}{e\hbar}\right)^2\beta = \frac{2e^2}{\hbar^2c^2}H_{\text{км}}^2\delta_0^4. \end{aligned}\right\} \tag{3,12}$$

Тогда уравнения (3,9) приобретают вид

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2\Psi'}{dz} &= \varkappa^2\left[-(1-A'^2)\Psi' + \Psi'^3\right],\\ \frac{d^2A'}{dz'^2} &= \Psi'^2 A'.\end{aligned}\right\} \qquad (3,13)$$

Используя эти переменные, выражение (3,10) нужно записать в виде:

$$\sigma = \frac{H_{\text{км}}^2}{4\pi}\cdot\delta_0\int\limits_0^{d'}\left\{\frac{1}{2} - (1-A'^2)\Psi'^2 + \frac{\Psi'^4}{2} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\varkappa^2}\left(\frac{d\Psi'}{dz}\right)^2 + H'^2 - 2H'\cdot H'_{\text{к}}\right\}dz'. \qquad (3,10\text{а})$$

Если $\varkappa = 0$, то в силу (3,13) и (3,11) $\Psi^2 = n_s = \text{const}$ и наши уравнения переходят в уравнения старой теории с $\delta^2 = \delta_0^2 = \frac{mc^2}{4\pi e^2 n_s}$ (ср. (2,25) со вторым уравнением (3,9)). То же имеет место в общем случае: если положить в (3,8) $\nabla\Psi = 0$, то это уравнение, если применить к нему операцию rot, эквивалентно уравнению (2,26) или же, как сразу ясно, при $\nabla\Psi = 0$ $\mathbf{j} = -\frac{e^2}{mc}|\Psi|^2\mathbf{A}$, что приводит к уравнению (2,6). Условие $\varkappa \to 0$ отвечает случаю $\hbar \to \infty$ (см. 3,12). Но и при $\hbar \to 0$ тоже получается уравнение (2,6), но с $|\Psi|^2$, зависящим от $\mathbf{A}$; последнее ясно из (3,6). Отсюда также видно, что не содержащее $\hbar$ уравнение (2,6) не может тем не менее считаться классическим, также как соотношение $\mathbf{j} = -\frac{e^2}{mc}|\Psi|^2\mathbf{A}$. Как указано в § 2, это заключение ясно и из общих соображений. Хотя при $\varkappa = 0$ наша схема переходит, с точки зрения вида уравнений, в обычную теорию, она существенно отлична от последней и в этом предельном случае. Дело в том, что в старой теории величина $\Lambda = \frac{4\pi\delta^2}{c^2}$ при данной температуре фиксирована и не зависит от поля. В нашем же случае, даже при $\varkappa = 0$, величина Ψ^2, эквивалентная δ (см. (3,12) — (3,12а)), определяется из условия минимальности свободной энергии, что при наличии поля приводит для сверхпроводников конечных размеров к зависимости глубины проникновения δ от H (см. § 4).

Из предельного случая $\varkappa = 0$, а также из дальнейшего, ясно, что измеримой на опыте величиной является параметр

$$\delta_0^2 = \frac{mc^2\beta}{4\pi e^2|\alpha|} = \frac{mc^2}{4\pi e^2|\Psi_\infty|^2} = \frac{mc^2}{4\pi e^2 n_s}$$

(δ_0 есть глубина проникновения слабого магнитного поля). Именно эта величина входит также в выражение для диэлектрической постоянной $\varepsilon = \varepsilon_0 - \frac{4\pi e^2 n_s}{m\omega^2}$ сверхпроводника в переменном поле не

слишком высокой частоты (ε_0 — некоторая постоянная, соответствующая вкладу в ε всех частиц кроме «сверхпроводящих электронов», см. § 5). Сам же параметр $\Psi_\infty^2 = n_s$ не является измеримой величиной, так же как число «свободных электронов» в обычной квантовой теории металлов. Поэтому в обоих этих случаях речь может итти только об «эффективном числе электронов», которое можно определить из значения ε или δ_0^2, полагая в соответствующих выражениях величины e и m имеющими то же значение, что и для свободного электрона (подробнее см. § 6). Поступая таким образом, мы свяжем $n_s = |\Psi_\infty|^2$ с наблюдаемой величиной δ_0^2 ($e = 4{,}8 \cdot 10^{-10}$, $m = 9{,}1 \cdot 10^{-28}$):

$$\delta_0^2 = \frac{mc^2\beta}{4\pi e^2 |\alpha|} = 2{,}84 \cdot 10^{11} \frac{\beta}{|\alpha|} = \frac{2{,}84 \cdot 10^{11}}{|\Psi_\infty|^2} \text{ см}^2. \quad (3{,}12а)$$

Из (3,12а) и из измерений критического поля $H_{\text{км}} = \frac{\sqrt{4\pi}\,|\alpha|}{\sqrt{\beta}}$ можно найти α и β. Помимо δ_0 и $H_{\text{км}}$ (или α и β) в теорию входит ещё безразмерный параметр

$$\varkappa^2 = \frac{2e^2}{\hbar^2 c^2} H_{\text{км}}^2 \cdot \delta_0^4. \quad (3{,}14)$$

Входящий в теорию заряд e был введён в исходное уравнение (3,5) путём обычной замены $-i\hbar\nabla$ на $-i\hbar\nabla - \frac{e}{c}\mathbf{A}$. Можно думать, что заряд e совпадает с зарядом электрона, так как в отношении заряда, в отличие от массы, не видно оснований для его отличия от истинного заряда носителей тока. В этом случае

$$\varkappa^2 = 4{,}64 \cdot 10^{14} H_{\text{км}}^2 \cdot \delta_0^4, \quad (3{,}14а)$$

где δ_0 измеряется в *см* и $H_{\text{км}}$ — в эрстедах.

Из экспериментальных данных, обсуждаемых в § 4, следует, что для ртути

$$\varkappa^2 = 0{,}027, \quad \varkappa = 0{,}165, \quad \sqrt{\varkappa} = 0{,}406. \quad (3{,}14б)$$

§ 4. НОВАЯ ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ. КОНКРЕТНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Переходя к применению полученных уравнений для решения конкретных задач, рассмотрим раньше всего случай сверхпроводящего полупространства, граничащего с вакуумом (сверхпроводник при $z > 0$, граница $z = 0$). Соответствующее решение будет, конечно, относиться и к достаточно толстой пластине, полутолщина которой $d \gg \delta_0$.

При $z'=0$, $H'=H'_0$; при $z'=\infty$ $H'=A'=0$ (выбор в данном случае значения $A'(\infty)=0$ вполне естествен и, главное, возможен). Далее, при $z'=\infty$ мы имеем дело со сверхпроводником без поля и вдали от всяких границ и, следовательно, должно иметь место решение (3,3), т. е. $\Psi'_\infty=1$, $\frac{d\Psi'}{dz'}=0$. Таким образом при $z'=\infty$:

$$\Psi'^2_\infty=1,\quad \frac{d\Psi'}{dz'}=0,\quad H'=A'=0. \tag{4,1}$$

Это решение, разумеется, удовлетворяет уравнениям (3,13). Что касается границы с вакуумом при $z'=0$, то на ней должно выполняться условие (3,11), полученное непосредственно из вариационного принципа. Здесь, однако, нужно сделать несколько замечаний. Условие (3,11) получается, если не накладывать на Ψ на границе никаких дополнительных требований (естественные граничные условия); если же с самого начала потребовать, чтобы на границе с вакуумом $\Psi=0$, то условие (3,11) уже не получится. Однако условие $\Psi=0$ или $\Psi=\mathrm{const}$ в рамках развиваемой схемы недопустимо, так как при этом задача о сверхпроводящей пластине не имеет решения за исключением отдельных частных значений толщины пластины $2d$. Поэтому мы не накладываем на Ψ на границе с вакуумом никаких дополнительных условий и приходим, таким образом, к (3,11). При отсутствии поля, когда $H\equiv A\equiv 0$, из (3,11), (4,1) и уравнений (3,13) следует, что

$$H'\equiv A'\equiv 0;\quad \Psi'^2\equiv\Psi^2_\infty\equiv 1, \tag{4,2}$$

т. е. наличие границы с вакуумом не оказывает влияния на Ψ. На первый взгляд этот результат может показаться неприемлемым, так как естественно требовать, чтобы Ψ-функция на границе металла обращалась в нуль. Дело, однако, в том, что наша Ψ-функция является некоторой усреднённой величиной, причём усреднение проводится по областям, большим по сравнению с постоянной решётки, но малым по сравнению с глубиной проникновения δ_0. Поэтому наша Ψ-функция должна отражать распределение средней плотности «сверхпроводящих электронов», считать которую при отсутствии поля постоянной, если и не необходимо, то во всяком случае вполне естественно.

При наличии магнитного поля решение (4,2), конечно, уже места не имеет и нужно проинтегрировать уравнения (3,13) с граничным условием (4,1) при $z'=\infty$ и условием при $z'=0$:

$$H'=H'_0;\quad \left(\frac{d\Psi'}{dz'}\right)_0=0. \tag{4,3}$$

Значения A'_0 и Ψ'_0 заранее неизвестны. Уравнения (3,13), к со-

жалению, не интегрируются в квадратурах, и мы можем указать лишь один их интеграл:

$$(1-A'^2)\Psi'^2-\frac{\Psi'^4}{2}+\left(\frac{dA'}{dz'}\right)^2+\frac{1}{\varkappa^2}\left(\frac{d\Psi'}{dz'}\right)^2=\text{const}. \qquad (4,4)$$

Для интересующей нас сейчас задачи в силу (4,1) $\text{const}=\frac{1}{2}$ и, таким образом,

$$H'^2=\left(\frac{dA'}{dz'}\right)^2=\frac{1}{2}-\frac{1}{\varkappa^2}\left(\frac{d\Psi'}{dz'}\right)^2-(1-A'^2)\Psi'^2+\frac{\Psi'^4}{2}. \qquad (4,5)$$

Как сказано, решить уравнения (3,13) в общем виде не представляется возможным, и мы приведём здесь приближённое решение, справедливое для малых $\varkappa$ (точнее, решение будет справедливо, если мало́ произведение $\varkappa H_0'^2$). Для нахождения этого решения положим, что

$$\Psi'=\Psi'_\infty+\varphi'=1+\varphi', \quad |\varphi'|\ll 1. \qquad (4,6)$$

Тогда в первом приближении, с точностью до членов порядка $\varphi' A'$ и φ'^2, система (3,13) приобретает вид

$$\frac{d^2\varphi'}{dz'^2}=\varkappa^2(2\varphi'+A'^2), \quad \frac{d^2A'}{dz'^2}=A'. \qquad (4,7)$$

Эта система сразу же интегрируется и её решение может быть использовано для нахождения следующего приближения и т. д. Приведём решение задачи с условиями (4,1) и (4,3) с точностью до членов порядка H_0^3 включительно:

$$\left.\begin{aligned}
\Psi'&=1+\frac{\varkappa H_0'^2}{\sqrt{2}(\ \ -\varkappa^2)}\left(\frac{\varkappa}{\sqrt{2}}e^{-2z}-e^{-\sqrt{2}\varkappa z}\right),\\
A'&=-H_0e^{-z}-\frac{\varkappa H_0'^3}{\sqrt{2}(2-\varkappa^2)}\left\{\frac{\varkappa}{4\sqrt{2}}e^{-3z}-\frac{e^{-(\sqrt{2}\varkappa+1)z}}{\varkappa(\varkappa+\sqrt{2})}-\right.\\
&\qquad\left.-\frac{3\varkappa^3+3\sqrt{2}\,\varkappa^2+8\varkappa-4\sqrt{2}}{4\sqrt{2}\,\varkappa(\varkappa+\sqrt{2})}e^{-z}\right\},\\
H'&=\frac{dA'}{dz'}.
\end{aligned}\right\} \qquad (4,8)$$

При $z'=0$, разумеется, $\frac{d\Psi'}{dz}=0$, $H'=H_0'$ и

$$\Psi'_0=1-\frac{\varkappa H_0'^2}{2(\varkappa+\sqrt{2})},$$

$$A'_0=-H'_0-\frac{\varkappa(\varkappa+2\sqrt{2})}{4(\varkappa+\sqrt{2})}H_0'^3. \qquad (4,9)$$

Наибольшие невыписанные в (4,8) члены в выражении для Ψ' имеют порядок $\varkappa^2H_0'^4$ и в выражении для A' — порядок $\varkappa^3H_0'^5$; при $\varkappa=\sqrt{2}$ никакой существенной особенности в решении нет, но оно имеет несколько другой вид, на

чём мы останавливаться не будем. Поле H'_0 в равновесном состоянии меньше или равно критическому полю для массивного проводника, которое в новых переменных равно $H'_{\text{км}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (см. (3,12)). Поэтому, согласно (4,9), при $\varkappa = 0{,}165$ (см. (3,14б)) $\Psi''_0 \geqslant 0{,}974$ $\left(\text{равенство имеет место при } H'_0 = H'_{\text{км}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ и, таким образом, применение формул (4,8) в этом случае вполне допустимо, если достаточна точность порядка одного или нескольких процентов. В настоящее время такая точность в отношении измерения δ_0 ещё далеко не достигнута. Как показывает исследование исходных уравнений (3,13), при $\varkappa > \frac{1}{\sqrt{2}}$ возникает своеобразная неустойчивость нормальной фазы металла, которая при $\varkappa < \frac{1}{\sqrt{2}}$ в поле $H'_0 \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$ является устойчивой (подробнее см. [4]). В силу этого обстоятельства все наши результаты, вообще говоря, пригодны лишь при $\varkappa < \frac{1}{\sqrt{2}}$. Это ограничение не является, повидимому, существенным, так как из имеющихся экспериментальных данных следует, что $\varkappa \ll 1$.

Используя решение (4,8), легко выяснить зависимость от напряжённости поля глубины проникновения магнитного поля в массивный сверхпроводник. В согласии с экспериментальным методом измерения[18,19], определим глубину проникновения поля в массивный сверхпроводник выражением

$$\delta = \frac{\int\limits_0^\infty H dz}{H_0} = \delta_0 \frac{\int\limits_0^\infty H' dz'}{H'_0} = \delta_0 \frac{|A'_0|}{H_0}, \qquad (4,10)$$

где H_0 — внешнее поле (поле при $z = 0$) и в первом выражении используются обычные, а во втором и в третьем новые (приведённые) единицы для H, H_0, A_0 и z. Подставляя поле (4,8) в (4,10), имеем (в обычных единицах)

$$\delta = \delta_0 \left(1 + \frac{\varkappa(\varkappa + 2\sqrt{2})}{8(\varkappa + \sqrt{2})^2}\left(\frac{H_0}{H_{\text{км}}}\right)^2\right) = \delta_0 \left(1 + f(\varkappa)\left(\frac{H_0}{H_{\text{км}}}\right)^2\right),$$

$$\frac{d\delta}{dT} = \frac{d\delta_0}{dT} + f(\varkappa)\left(\frac{H_0}{H_{\text{км}}}\right)^2\left(\frac{d\delta_0}{dT} - \frac{2\frac{dH_{\text{км}}}{dT}}{H_{\text{км}}}\delta_0\right). \qquad (4,11)$$

Отсюда ясно, что величина δ_0, как уже упомянуто, представляет собой глубину проникновения в слабом поле. Функция $f(\varkappa)$ мо-

нотонно растёт с $\varkappa$ так, что $f(0)=0$, $f(\infty)=\frac{1}{8}$ и, при $\varkappa \ll 1$, $f(\varkappa) \simeq \frac{\varkappa}{4\sqrt{2}}$. Таким образом, при $H_0 = H_{\text{км}}$ даже для $\varkappa = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\delta = 1{,}07\,\delta_0$, а для $\varkappa = 0{,}165$ $\delta = 1{,}028\,\delta_0$. Мы видим, что ожидаемое изменение δ с H_0 для ртути, для которой по нашей оценке $\varkappa = 0{,}165$, весьма мало и лежит за пределами точности измерений, осуществлённых в [18] (данные [18] в отношении зависимости δ от H_0, вероятно, по причинам, указанным в [19], неверны; это видно также из того, что в [18] в ряде случаев δ пропорционально H_0, а не H_0^2, в то время как в слабом поле во всяком случае $\delta \sim H_0^2$, поскольку δ есть чётная функция H_0). Как мы увидим ниже, для тонких сверхпроводников зависимость δ от H_0 значительно больше, чем для массивных, и может наблюдаться в опытах типа описанных в [17] (поэтому возможно, что отмечаемая в [17] зависимость δ от H_0 реальна, что не противоречит отсутствию заметного эффекта в [19]).

Перейдём к определению поверхностной энергии σ_{ns} на границе, отделяющей сверхпроводящую фазу от нормальной.

Для вычисления σ_{ns} нужно найти решение уравнений (3,13) для сверхпроводящего полупространства, граничащего с полупространством, заполненным нормальной фазой того же металла. Нет никаких оснований предполагать, что на границе сверхпроводящей и нормальной фаз будет соблюдаться условие (4,3) для границы сверхпроводника с вакуумом. Более того, поскольку всё отличие обеих фаз формально сводится к тому, что в одной из них $\Psi \neq 0$, а в другой $\Psi = 0$, нужно думать, что переход между фазами совершается непрерывно так, что на границе $\Psi = 0$ *).

Можно показать, что уравнения задачи не допускают решения, в котором Ψ обращается в нуль в какой-либо точке, находящейся на конечном расстоянии. Напротив, уравнения имеют решение, отвечающее случаю, когда функция Ψ плавно, непрерывно меняется от значения $\Psi' = 1$ при $z = \infty$ до значения $\Psi' = 0$ при $z = -\infty$. Таким образом, переход от сверхпроводящей фазы

*) Скачок Ψ был бы связан с бесконечно большой кинетической энергией, так как при этом $\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{d\Psi}{dz}\right)^2 \to \infty$; фактически, конечно, скачок нашей функции Ψ означает её изменение на расстоянии порядка атомных размеров $a \sim 10^{-8}$ и $\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{d\Psi}{dz}\right)^2 \sim \frac{\hbar^2 \Psi^2}{2ma^2} = \frac{\hbar^2 n_s}{2ma^2}$. На границе сверхпроводящей фазы с вакуумом эта энергия является частью поверхностной энергии металла, которую мы не рассматриваем (она на много порядков больше σ_{ns} или $\sigma_n' - \sigma_s$). В случае же границы сверхпроводящей и нормальной фаз никакой поверхностной энергии, кроме σ_{ns}, нет и появление скачка Ψ, а значит, и энергии $\sim \frac{\hbar^2 n_s}{2ma^2} a \sim$ $\sim 10^3 \frac{\text{эрг}}{\text{см}^2}$ (при $n_s \sim 10^{21}$) совершенно недопустимо.

к нормальной совершается в переходном слое и отвечает решению уравнений (3,13) с граничными условиями

$$\begin{aligned} z \to \infty: \quad & \Psi' = \Psi'_\infty = 1, \quad H' = A' = \frac{d\Psi'}{dz'} = 0, \\ z \to -\infty: \quad & \Psi' = 0, \ \frac{d\Psi'}{dz'} = 0, \quad H' = H'_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ & A' = H'_0 z' + \text{const}. \end{aligned} \tag{4,12}$$

Фактически, конечно, переходный слой не бесконечен, а имеет глубину порядка δ_0 (точнее, порядка $\frac{\delta_0}{\varkappa}$; см. [4]), так же как магнитное поле проникает в сверхпроводник практически на глубину порядка δ_0, хотя строго равно нулю лишь при $z = \infty$. Поверхностная энергия σ_{ns} равна (см. (3,10а)

$$\sigma_{ns} = \frac{H^2_{\text{км}}}{2\pi} \cdot \delta_0 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{1}{2} - \left(1 - A'^2\right) \Psi'^2 + \frac{\Psi'^4}{2} - H'_0 H' \right\} dz' =$$

$$= \frac{H^2_{\text{км}}}{2\pi} \cdot \delta_0 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{1}{\varkappa^2} \left(\frac{d\Psi'}{dz'}\right)^2 + H'^2 - H'_0 H' \right\} dz', \tag{4,13}$$

где использовано соотношение (4,5), $H'_0 = H'_{\text{км}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ и все величины под интегралами выражены в приведённых единицах.

Ввиду того, что система (3,13) в общем случае не интегрируется, мы можем дать аналитическое выражение для σ_{ns} лишь при достаточно малом $\varkappa$. Именно, можно показать (см. [4]), что с точностью до членов порядка $\frac{1}{\sqrt{\varkappa}}$

$$\sigma_{ns} = \frac{\delta_0 H^2_{\text{км}}}{\sqrt{2} \cdot 3\pi\varkappa}; \quad \Delta = \frac{\sigma_{ns}}{\frac{H^2_{\text{км}}}{8\pi}} = \frac{1{,}89}{\varkappa} \delta_0 \tag{4,14}$$

$$(\text{при } \sqrt{\varkappa} \ll 1).$$

Особенно важно подчеркнуть, что при малых $\varkappa$ $\sigma_{ns} > 0$, что совершенно необходимо и достижение чего являлось главной нашей целью. При достаточно больших $\varkappa$, напротив, $\sigma_{ns} < 0$ (это ясно сразу из (4,13), так как $H'^2 < H' H'_0$), что также указывает на недопустимость таких больших $\varkappa$. Принимаемое нами для ртути значение $\varkappa$ (3,14б), весьма малое со всех других точек зрения, может оказаться ещё недостаточно малым для применимости формулы (4,14), так как в этом случае $\sqrt{\varkappa} = 0{,}407$. Если всё же воспользоваться в этом случае формулой (4,14), то $\Delta = 11{,}4\,\delta_0$. Более точные вычисления ещё не проведены. Согласно весьма грубой экспери-

ментальной оценке[37] для ртути $\Delta \sim \delta_0$. Толщина переходного слоя, как оказывается[4], порядка $\frac{\delta_0}{\varkappa} \sim 10\,\delta_0$.

Помимо полупространства задача является одномерной для плоских пластин и плёнок. Здесь представляет интерес вычисление критического поля $H_к$ для разрушения сверхпроводимости плёнки и магнитного момента плёнки μ в любом поле; кроме того в случае, когда по плёнке течёт результирующий ток I, нужно найти критическое значение тока $I_к$, разрушающего сверхпроводимость, а также зависимость $I_к$ от наложенного дополнительного поля H_0.

Поле $H_к$ определяется формулами (2,40) и (3,10а):

$$\frac{H_{км}^2}{8\pi} = \frac{H_к^2}{8\pi} + \frac{\sigma}{d},$$

$$\sigma = \frac{H_{км}^2}{4\pi}\,\delta_0 \int_0^{d'} \left\{ \frac{1}{2} - (1 - A'^2)\,\Psi'^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{\Psi'^4}{2} + \frac{1}{\varkappa^2}\left(\frac{d\Psi'}{dz'}\right)^2 + H'^2 - 2\,H'\,H'_к \right\} dz', \qquad (4,15)$$

где толщина пластины равна $2d$ и под знаком интеграла все величины выражены в приведённых единицах (ось z перпендикулярна плёнке и $z = 0$ в её средине). Магнитный момент плёнки, отнесённый к единице её поверхности, во внешнем поле H_0, параллельном плёнке, равен (см. (2,30))

$$\mu = \int_{-d}^{d} \frac{H(z) - H_0}{4\pi}\,dz = \frac{1}{2\pi}\left[A(d) - H_0\,d\right], \qquad (4,16)$$

где при переходе ко второму выражению учтено, что для плёнки (без результирующего тока) во внешнем поле $H(z) = H(-z)$ и положено $A(d) = \int_0^d H(z)\,dz$, так как ниже потенциал A выбран так, что $A(0) = 0$.

Для нахождения $H_к$, μ и $I_к$ нужно найти решение уравнений (3,13) с граничными условиями при $z' = \pm d'$:

$$\frac{d\Psi'}{dz'} = 0,\ H' = H'_0 \pm H'_I,\ H'_I = \frac{2\pi}{c}\,I', \qquad (4,17)$$

где H'_0 — внешнее магнитное поле, направленное по оси y, I' — полный ток $\left(I' = \int j'\,dz',\ j' \text{ — плотность тока}\right)$, текущий по плёнке в направлении отрицательной оси x, и $2\,H'_y = \frac{4\pi}{c}\,I'$ — разность между значениями полного поля на обеих сторонах плён-

ки, связанная с наличием тока I' $\left(\text{так как } H'_I = \frac{H_I}{\sqrt{2}H_{\text{км}}}, \text{ то очевидно } I' = \frac{I}{\sqrt{2}H_{\text{км}}}\right)$. Если ток I и поле H_0 не взаимно перпендикулярны, то отличны от нуля две компоненты потенциала **A** (компоненты A_x и A_y) вместо одной компоненты A_x в рассмотренном выше случае. При этом вместо (3,13) имеем систему исходных уравнений в виде

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2\Psi'}{dz'^2} = \varkappa^2\left[-(1-A'^2_x-A'^2_y)\Psi' + \Psi'^3\right], \\ &\frac{d^2A'_x}{dz'^2} = \Psi'^2 A'_x, \qquad \frac{d^2A'_y}{dz'^2} = \Psi'^2 A'_y. \end{aligned}\right\} \tag{4,18}$$

Эти уравнения нужно решать при условиях для $z' = \pm d'$:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\Psi'}{dz'} = 0, \quad H'_x = H'_{x0}, \\ &H'_y = H'_{y0} \pm H'_I, \quad H'_I = \frac{2\pi}{c} I', \end{aligned}\right\} \tag{4,19}$$

где оси выбраны таким образом, что полный ток имеет слагающую лишь по оси x и, следовательно, поле H_I направлено по оси y; H_{x0} и H_{y0} — слагающие внешнего поля по осям x и y.

Для достаточно толстых пластинок, т. е. если $d \gg \delta_0$, значение $H_{\text{к}}$ можно получить сразу же, подставляя в (4,15) решение (4,8) и полагая в интеграле $d \to \infty$. В результате имеем для $d \gg \delta_0$:

$$\frac{H_{\text{к}}}{H_{\text{км}}} = 1 + \frac{\delta_0}{2d}\left(1 + \frac{f(\varkappa)}{2}\right), \tag{4,20}$$

где $f(\varkappa) = \frac{\varkappa(\varkappa + 2\sqrt{2})}{8(\varkappa + \sqrt{2})^2}$ — та же функция, что и в (4,11) и формула (4,20) верна с точностью до членов порядка $\left(\frac{\delta_0}{d}\right)^2$. В том же приближении в старой феноменологической теории получается выражение (4,20) с $\varkappa = 0$ (см. (2,41)).

Для плёнок произвольной толщины решение уравнений (3,13) нужно провести заново*). При этом решение (4,8) позволяет думать, что и для тонких плёнок при малых $\varkappa$ функция Ψ' слабо меняется с изменением z'. Исходя из этого предположения, которое post factum оправдывается, положим

$$\Psi' = \Psi'_0 + \varphi', \quad |\varphi'| \ll \Psi'_0, \quad \varphi'(z' = 0) = 0. \tag{4,21}$$

*) При отсутствии поля для плёнок, в силу условия (4,17), попрежнему имеет место решение (4, 2), т. е. $\Psi'^2 = 1$. Но, разумеется, введение нашей функции Ψ' возможно лишь, если $d \gg a$, где a — атомные размеры. Это условие вместе с тем необходимо, чтобы можно было говорить о сверхпроводящей плёнке с теми же параметрами ($H_{\text{км}}$, $T_{\text{к}}$, δ_0, $\varkappa$), как у массивного металла. Мы рассматриваем только плёнки, удовлетворяющие этому условию.

Тогда уравнения (3,13) в первом приближении принимают вид

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2\varphi'}{dz'^2} &= \varkappa^2\left\{\Psi_0'^3 - \Psi_0' + (3\Psi_0'^2 - 1)\varphi' + A'^2\Psi_0'\right\},\\ \frac{d^2A'}{dz'^2} &= \Psi_0'^2 A'.\end{aligned}\right\} \quad (4,22)$$

Из второго уравнения (4,22) с учётом граничных условий (4,17) находим значения A' и H':

$$\left.\begin{aligned}A' &= \frac{H_0'\operatorname{sh}\Psi_0' z'}{\Psi_0'\operatorname{ch}\Psi_0' d'} + \frac{H_I'\operatorname{ch}\Psi_0 z'}{\Psi_0'\operatorname{sh}\Psi_0' d'},\\ H' &= \frac{dA'}{dz'} = \frac{H_0'\operatorname{ch}\Psi_0' z'}{\operatorname{ch}\Psi_0' d'} + \frac{H_I'\operatorname{sh}\Psi_0' z'}{\operatorname{sh}\Psi_0' d'}.\end{aligned}\right\} \quad (4,23)$$

Подставляя (4,23) в первое уравнение (4,22), находим φ, причём из требования, чтобы при $z' = \pm d'$ $\frac{d\varphi'}{dz'} = 0$, получается трансцендентное уравнение, определяющее Ψ_0'.

Как мы увидим, практически интересен лишь предельный случай $\varkappa = 0$. Поэтому мы не будем выписывать функции φ, которая при $\varkappa = 0$ равна нулю. При этом, если $\varkappa = 0$ *):

$$\Psi_0'^2(\Psi_0'^2 - 1) =$$

$$= \frac{H_0'^2\left(1 - \frac{\operatorname{sh} 2\Psi_0' d'}{2\Psi_0' d'}\right)}{2\operatorname{ch}^2\Psi_0' d'} - \frac{H_I'^2\left(1 + \frac{\operatorname{sh} 2\Psi_0' d'}{2\Psi_0' d'}\right)}{2\operatorname{sh}^2\Psi_0' d'}. \quad (4,24)$$

Если $\varkappa \neq 0$, уравнение для Ψ_0' более сложное; для иллюстрации приведём его для случая, когда $H_I' = 0$:

$$\Psi_0'^2 - 1 = \frac{2H_0'^2\left\{1 - \frac{\operatorname{sh} 2\Psi_0' d'}{2\Psi_0' d'}\cdot\frac{\varkappa\sqrt{3\Psi_0'^2 - 1}\cdot d}{\operatorname{sh}(\varkappa\sqrt{3\Psi_0'^2 - 1}\, d)}\right.}{\operatorname{ch}^2\Psi_0' d'\left\{4\Psi_0'^2 - \varkappa^2(3\Psi_0'^2 - 1)\right\}}. \quad (4,25)$$

---

*) При $\varkappa = 0$ уравнение для $\Psi' = \Psi_0' = \text{const}$ можно получить сразу же из условия минимума свободной энергии, т. е. из условия $d\sigma/d\Psi = 0$. Как ясно из (4,15), это условие даёт $\Psi'^2 - 1 = \frac{-\int_0^{d'} A'^2 dz'}{d'}$.

Остановимся теперь несколько подробнее на разрушении сверхпроводимости плёнок внешним полем при отсутствии полного тока. Если $\varkappa = 0$, то $\Psi'' = \Psi''_0 = \text{const}$ и для поля справедливо решение (4,23) с $H'_I = 0$. Подставляя это решение в (4,15), без труда находим

$$\left(\frac{H_к}{H_{км}}\right)^3 = \frac{\Psi_0'^2 (2 - \Psi_0'^2)}{1 - \frac{\operatorname{th} \Psi'_0 d'}{\Psi'_0 d'}}. \tag{4,26}$$

В том же случае ($\varkappa = 0$, $H'_I = 0$) уравнение (4,24) или (4,25) при $H_0 = H_к$ или $H'_0 = \frac{H_к}{\sqrt{2} H_{км}}$ даёт

$$\left(\frac{H_к}{H_{км}}\right)^2 = \frac{4 \Psi_0^2 (\Psi_0^2 - 1) \operatorname{ch}^2 \Psi'_0 d'}{1 - \frac{\operatorname{sh} 2 \Psi'_0 d'}{2 \Psi'_0 d'}}. \tag{4,27}$$

Из (4,26) — (4,27) по измеренным значениям $\frac{H_к}{H_{км}}$ и зная d, можно определить Ψ''_0 и $\delta_0 = \frac{d}{d'}$. Легко видеть, что при малых значениях

$$\Psi''_0 d' = \Psi''_0 \frac{d}{\delta_0} \text{ для } H = H_к \ \Psi''_0 = 0 \text{ и}$$

$$\frac{H_к}{H_{км}} = \frac{\sqrt{6}\,\delta_0}{d}. \tag{4,28}$$

Таким образом, в этом случае имеет место фазовый переход 2-го рода: с ростом поля Ψ''_0 падает и в точке перехода $\Psi''_0 = 0$. Как ясно из (4,24), при $H_I = 0$ с точностью до членов порядка d'^2 (учитывая, что $H_0'^2 d'^2$ может быть порядка единицы), имеем

$$\Psi_0''^2 = \frac{1 - \left(\frac{H_0}{H_{км}}\right)^2 \frac{d^2}{6\delta_0^2}}{1 - \frac{2}{15}\left(\frac{H_0}{H_{км}}\right)^2 \frac{d^4}{\delta_0^4}}. \tag{4,29}$$

Переход в нормальное состояние является переходом 2-го рода при $d \leqslant d_к$, где, как легко показать исходя из (4,26) — (4,27),

$$d_к = \frac{\sqrt{5}}{2}\,\delta_0. \tag{4,30}$$

Точка $d = d_к$ есть своего рода критическая точка Кюри[90] и при $d > d_к$ имеет место переход 1-го рода, т. е. при $H_0 \geqslant H_к$ $\Psi''_0 > 0$ и имеет место выделение скрытой теплоты перехода (при $d < d_к$, при $H = H_к$ имеет место скачок теплоёмкости; теплоёмкость тонких плёнок, очевидно, зависит от H_0).

Глубина проникновения поля, как ясно из (4,23), равна

$$\delta = \frac{\delta_0}{\Psi_0'}, \tag{4,31}$$

и мы видим, что для достаточно тонких образцов при $H_0 \sim H_к$ глубина проникновения может быть значительно больше, чем для массивного металла. При этом (см. (4,16) и (4,23) с $H_f' = 0$):

$$\mu = -\frac{H_0 d}{2\pi}\left(1 - \frac{\delta}{d}\,\mathrm{th}\,\frac{d}{\delta}\right) =$$

$$= -\frac{H_0 \cdot d}{2\pi}\left\{\frac{1}{3}\left(\frac{d}{\delta}\right)^2 - \frac{2}{15}\left(\frac{d}{\delta}\right)^4 + \ldots\right\}. \tag{4,32}$$

Измеряя μ, можно найти глубину δ, которая согласно (4,31) и (4,24) зависит от H_0. Таким образом, как уже указывалось, даже при $\varkappa = 0$ новая феноменологическая теория в случае тонких сверхпроводников существенно отличается от старой теории.

При $\varkappa \neq 0$ все выражения становятся в общем случае весьма громоздкими. Однако, при малых $\varkappa$, которые только нас и интересуют, и не слишком больших d, можно разлагать все выражения в ряд по $\varkappa d$. В результате, в области толщин, где имеет место переход 2-го рода, вместо (4,28) имеем

$$\left(\frac{H_к}{H_{км}}\right)^2 = 6\left(\frac{\delta_0}{d}\right)^2 - \frac{7}{10}\varkappa^2 + \frac{11}{1400}\varkappa^4\left(\frac{d}{\delta_0}\right)^2 - \ldots \tag{4,33}$$

Значение $d_к$ теперь равно:

$$d_к^2 = \frac{5}{4}\left(1 - \frac{7}{24}\varkappa^2 + \ldots\right)\delta_0^2. \tag{4,34}$$

Если для $\varkappa^2$ принять значение (3,14б), то учитывать члены с $\varkappa^2$ в (4,33)—(4,34), а также в других аналогичных выражениях, практически не нужно.

Пригодные для количественной обработки экспериментальные данные о разрушении сверхпроводимости плёнок во внешнем поле имеются лишь в [21] и относятся к ртути. Однако и в этом случае разброс точек при измерениях был довольно велик и, кроме того, ввиду отсутствия в [21] таблиц, значения $\frac{H_к}{H_{км}}$ пришлось брать с графика; главный же источник неточности состоит в том, что толщина плёнок, указанная в [31], представляет собой некоторое среднее значение и может, особенно для тонких плёнок, существенно отличаться от толщины d, входящей в наши формулы, в которых предполагается, конечно, что плёнка является идеально однородной.

В таблице II приведены сразу значения δ_0, полученные с помощью формулы (4,28) на основании данных с $\frac{H_к}{H_{км}}$ и d,

Таблица II

Значения δ_0 для ртути (значения δ_0 и d в 10^{-5} *см*)

T \ $2d$	0,596	0,840	1,178	1,423	1,690	2,400	4,390	10,880	$2d_к = \sqrt{5}\,\delta_{0min}$
4,13	5,13	4,61	4,07	4,17	3,80	3,37	3,08	(3,72) 3,56	6,9
4,12	4,12	4,06	3,47	3,36	3,27	3,11	2,72	(3,52) 3,30	6,1
4,10	3,47	3,38	2,87	3,02	2,79	2,53	2,28	(3,21) 2,50	5,1
4,05	2,66	2,62	2,32	2,27	2,08	1,86	(1,80) 1,80	(2,86) 1,95	4,0
4,00	2,28	2,31	1,92	1,82	1,76	1,56	(1,57) 1,57	(2,72) 1,70	3,5
3,80	1,69	1,62	1,40	1,28	1,24	1,10	(1,31) 1,15	(2,63) 1,39	2,5
3,50	1,27	1,24	1,08	0,99	0,98	(0,87) 0,87	(1,23) 0,99	(2,50) 1,16	1,95
3,00	1,10	1,10	0,92	0,84	(0,83) 0,83	(0,77) 0,72	(1,16) 0,84	—	1,61
2,50	0,92	0,94	0,86	0,80	(0,75) 0,75	(0,73) 0,66	(1,13) 0,78	(2,45) 1,0	1,48

приведённых в [21]; при этом в скобки помещены значения, для вычисления которых формула (4,28) уже непригодна, так как

$d > d_к$. Под этими величинами в скобках снизу приведены значения, полученные непосредственно по формулам (4,26) — (4,27).

В последнем столбце приведены значения $2d_к$, полученные по формуле (4, 30), используя минимальное значение δ_0, указанное в соответствующей строке. Из таблицы II, так же как непосредственно из графика зависимости $\ln \frac{H_к}{H_{км}}$ от $\ln 2d$ в [21], ясен резкий излом в ходе этой зависимости, который наступает как раз при переходе d за $d_к$ (в табл. II одиночные значения δ_0 и значения в скобках согласно (4,28) суть просто величины, пропорциональные $\frac{H_к}{H_{км}} d$; это произведение падает до $d_к$, а при $d > d_к$ начинает резко расти). В этом обстоятельстве мы склонны видеть подтверждение вывода о разном характере перехода при $d < d_к$ и $d > d_к$. Падение значений δ_0 с ростом d, ясно выраженное в табл. II, при $d < d_к$ вполне может объясняться уже упомянутым отличием значений d, указанных в [21], от эффективных значений $d_{эфф.}$. Качественно ясно, что чем тоньше плёнка, тем $d_{эфф.}$ сильнее отличается от d, причём $d_{эфф.} < d$. Наблюдаемая зависимость δ_0 от d при $d < d_к$ происходит в согласии с этой картиной. Что же касается роста значений δ_0, вычисленных по формулам (4, 26) — (4, 27), с ростом d при $d > d_к$, то для него мы, напротив, не видим оснований. Нужно, однако, иметь в виду два обстоятельства: во-первых, вся наша схема, основанная на разложении F_{s0} в (3, 6) в ряд по степеням Ψ^2 с точностью до членов Ψ^4, вообще говоря, пригодна лишь вблизи $T_к$, пока имеет место соотношение (3, 4) и

$$\delta_0^2 = \frac{\text{const}}{T_к - T} = \frac{\delta_{00}^2}{1 - \frac{T}{T_к}}, \qquad (4, 35)$$

где δ_{00}—некоторая постоянная (см. (3, 3) и (3, 12)).

Для Hg область, где справедливо соотношение (3,4) и, в этой связи, нужно ожидать пригодности формулы (4, 35), лежит между $T_к$ и $T \simeq 3{,}80 \div 4{,}0°$. При меньших значениях T, вообще говоря, следует учитывать члены $\sim \Psi^6$ в F_{s0}, т. е. члены $\sim \Psi^5$ в (3, 13) и применение всех полученных формул без замены $\frac{|\alpha|}{\beta}$ на $\left(\frac{d\alpha}{dT}\right)_к \frac{(T_к - T)}{\beta_к}$ возможно лишь, если нелинейная зависимость $\frac{|\alpha|}{\beta}$ от $T_к - T$ более существенна, чем влияние членов с Ψ^6. Такая ситуация возможна, но будет оправдана лишь на основе анализа достаточно обширных экспериментальных данных, чего мы сейчас сделать не можем, ввиду отсутствия последних. В силу сказанного, данные таблицы II для $T < 3{,}80°$ при $d > d_к$ могут быть искажены.

Второе обстоятельство, которое нужно иметь в виду, состоит в том, что $T_к$ существенно варьирует от плёнки к плёнке; в [21] все данные приводились к $T_к = 4{,}167°$, и эта операция, заведомо неточная при $T = 4{,}12°$ и $T = 4{,}13°$, может повлиять на данные таблицы II и при меньших температурах. Весь вопрос, очевидно, нуждается в детальном экспериментальном исследовании, сейчас же мы в качестве δ_0 примем наименьшие значения в табл. II и сопоставим их с данными, полученными другими методами [17, 19]. При этом нужно иметь в виду, что в работе [19] непосредственно измеряются лишь величины $\delta_0(T) - \delta(2{,}5°)$, величины же δ_0 вычисляются в результате экстраполяции, которая не представляется a priori законной. Значения δ_0, полученные в [17], основываются на предшествующих измерениях с коллоидами и также неточны; на опыте же

Таблица III

T	δ_0 из таб. 2	$\delta_0-\delta_0(2{,}5°)$ из таб. 2	δ_0 из [17]	$\delta_0-\delta_0(2{,}5)$ из [17]	δ_0 из [19]	$\delta_0-\delta_0(2{,}5°)$ из [19]
4,13	3,08	2,42	4,08	3,28	2,28	1,82
4,12	2,72	2,06	3,57	2,77	2,04	1,58
4,10	2,28	1,62	2,80	2,00	1,72	1,26
4,05	1,80	1,14	2,34	1,54	1,31	0,85
4,00	1,56	0,90	1,95	1,15	1,10	0,64
3,80	1,10	0,44	1,38	0,58	0,77	0,31
3,50	0,87	0,21	—	—	0,61	0,15
3,00	0,72	0,06	—	—	0,50	0,04
2,50	0,66	0,00	0,80	0,00	0,46	0,00

и в этом случае измеряется $\delta_0(T) - \delta_0(2{,}5°)$. Как видно из таблицы III, где все величины нужно умножить на 10^{-5} *см*, в пределах достигнутой в настоящее время точности, данные таблицы II совпадают с полученными другими методами (нужно особо подчеркнуть, что данные [19] относятся к массивным образцам). Значения $\delta_0(T) - \delta_0(2{,}5°)$ по данным [4, 21] (кривая *II*), [17] (кривая *I*) и [19] (кривая *III*) приведены также на рис. 3.

Принимая для δ_0 значения, указанные во втором столбце табл. II, с помощью формулы (3,14а) и учитывая, что вблизи $T_к$ для ртути $H_{км} = 187(T_к - T)$, находим $\varkappa^2$. При этом, если использовать, как наиболее надёжное, значение δ_0 при 4°, получаем результат (3,14б). Используя значения δ_0, указанные в [19] и для ртути и для олова, получаем $\varkappa^2 \cong 0{,}015$.

Перейдём к вопросу о разрушении сверхпроводимости плёнки током. При $\varkappa = 0$ функция Ψ_0' при наличии тока определяется формулой (4,24), которая при $d' \ll 1$ принимает вид

$$\Psi_0'^2 = 1 - \frac{H_0' d'^2}{3} - \frac{H_I'^2}{\Psi_0'^4 d'^2}. \qquad (4,36)$$

Поле H_I' как функция Ψ_0' имеет максимум, обращаясь в нуль при $\Psi_0' = 0$ и при некотором $\Psi_0' \neq 0$ (если $H_0' = 0$, то $H_I' = 0$ при $\Psi_0' = 1$); другими словами, функция Ψ_0' при данном H_I' может согласно (4,36) иметь два значения. Легко видеть, что сверхпроводимость плёнки устойчива, лишь пока поле H_I' растёт с падением Ψ_0' (в этом случае свободная энергия меньше, чем при том же H_I', но меньшем Ψ_0'). Критическое поле $H_{I_к}$ определяется из условия $\frac{dH_I'}{d\Psi_0'} = 0$, которое приводит к соотношению

$$\left(\frac{H_{I_к}}{H_{км}}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} \frac{d}{\delta_0} \left[1 - \left(\frac{H_0}{H_к}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}, \qquad (4,37)$$

где $H_к$ — критическое поле для данной плёнки в отсутствии тока, а H_0 — внешнее поле.

При отсутствии поля H_0

$$\frac{H_{I_к}}{H_{км}} = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} \frac{d}{\delta_0}, \qquad H_{I_к} = \frac{2\pi}{c} I_к, \qquad (4,38)$$

где $I_к$ — критический ток, разрушающий сверхпроводимость. В случае произвольной ориентации H_0 и H_I, когда нужно использовать уравнения (4,18) с граничными условиями (4,19), легко видеть, что получаются прежние формулы (4,24), (4,36) и (4,37), где $H_0^2 = H_{0x}^2 + H_{0y}^2$ (ток I направлен по отрицательной оси x, поле H_I — по оси y). В случае тока, текущего по плёнке на поверхности круглого цилиндра, попрежнему справедлива формула (4,38), но нужно помнить, что магнитное поле на внешней поверхности плёнки равно $2H_I = \frac{4\pi}{c} I$, где $I = \frac{J}{2\pi R}$ (J — полный ток по плёнке и R — её радиус).

Заметим, что как следует из (4,28) и (4,38) для достаточно тонких плёнок

$$H_к \cdot H_{I_к} = \frac{4}{3} H_{км}^2. \qquad (4,39)$$

Таким образом, в то время как сами значения $H_к$ и $H_{I_к}$ для тонких плёнок могут очень сильно отличаться от $H_{км}$, произве-

дение $H_к H_{1к}$, равное для толстого образца $H^2_{км}$, для самых тонких плёнок возрастает лишь в $^4/_3$ раза.

Соотношения (4,37) — (4,38) находятся в качественном согласии с экспериментами[88], извлечь из которых количественные данные не представляется возможным.

Резюмируя, можно указать, что для экспериментальной проверки теории представляется целый ряд возможностей: измерение критического поля и критического тока для плёнок (формулы (4,26) — (4,27), (4,28) и (4,38)), измерение влияния поля на критический ток (см. (4, 37)), измерение магнитного момента (см. (4,31) — (4,32)), измерение σ_{ns} и, наконец, измерение $\delta(H_0)$ для массивных сверхпроводников (см. (4,11) и (4,20)). При этом, работая с плёнками, определить $\varkappa$ непосредственно, если значение $\varkappa$ действительно мало, практически, повидимому, невозможно. Поэтому, для определения $\varkappa$, не пользуясь формулой (3,14а), нужно либо определять σ_{ns} — величину особенно чувствительную к $\varkappa$, либо проводить точные измерения (с точностью до $\sim 1\%$) δ в зависимости от $H_0 \sim H_к$ для массивных сверхпроводников.

Всесторонняя экспериментальная проверка новой феноменологической теории, конечно, совершенно необходима. Однако уже сейчас можно констатировать, что все имеющиеся данные говорят в её пользу, и при этом новая теория, в отличие от старой, лишена внутренних противоречий (именно, как мы видели, новая теория приводит к положительному поверхностному натяжению σ_{ns}). Поэтому, до тех пор, пока не появились экспериментальные данные, заставляющие сомневаться в справедливости полученных уравнений, определяющих в конечном итоге поле и ток в сверхпроводнике, можно считать, что феноменологическая теория сверхпроводимости в основном построена.

(Окончание в следующем выпуске)