1948 УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК Т. XXXIV, вып. 4

ТЕОРИЯ СВЕРХТЕКУЧЕСТИ ГЕЛИЯ II

Е. М. Лифшиц

СОДЕРЖАНИЕ

I. Квантование движения жидкости 512
1. Гелий II — квантовая жидкость (512). — 2. Квантование движения жидкости (513). — 3. Энергетический спектр квантовой жидкости (517). — 4. Энергетический спектр почти идеального бозе-эйнштейновского газа (521). — 5. Вычисление термодинамических величин гелия II (523).
II. Сверхтекучесть гелия II. 525
6. Сверхтекучесть гелия II при абсолютном нуле (525). — 7. Гелий II при температурах выше абсолютного нуля (529). — 8. Вычисление отношения ρ_n/ρ (533). — 9. Перенос тепла в гелии II (536).—10. Термомеханический эффект в гелии II (537). — 11. Поведение атомов примесей в гелии II (539).
III. Макроскопическая гидродинамика гелия II 540
12. Система гидродинамических уравнений гелия II (540).— 13. Гидродинамические уравнения для несжимаемой жидкости (543). — 14. Распространение звука в гелии II (545). — 15. Излучение звука в гелии II (549). — 16. Рассеяние света в гелии II (551). — 17. Вязкость гелия II (552). — 18. Работы Л. Тиссы по теории гелия II (556).

I. КВАНТОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ

1. Гелий II — квантовая жидкость

Как известно, при температуре 2,19° К жидкий гелий имеет так называемую λ-точку (фазовый переход второго рода); при температурах ниже этой точки жидкий гелий (гелий II) обладает рядом удивительных свойств, связанных с квантовой природой этой жидкости.

Действительно, по мере понижения температуры увеличивается де-бройлевская длина волны, соответствующая тепловому движению атомов. В жидком гелии де-бройлевская длина волны атомов гелия становится сравнимой с междуатомными расстояниями при температурах порядка 2—3° К. Соответственно этому, в этой области температур свойства жидкого гелия связаны с квантовыми явлениями; в этом смысле можно говорить о гелии при очень низких температу-

рах, как о «квантовой жидкости». В частности, квантовым свойством является и тот факт, что гелий остаётся жидким (при обычном давлении) при всех температурах, вплоть до абсолютного нуля, между тем как согласно классической механике всякое тело при абсолютном нуле должно быть твёрдым кристаллом.

Жидкий гелий является единственной существующей в природе квантовой жидкостью; все другие жидкости затвердевают значительно раньше, чем в них становятся заметными квантовые эффекты.

Наиболее существенным из особых свойств гелия II является открытая П. Л. Капицей его сверхтекучесть *). Рациональное объяснение и количественная теория этого явления были даны Л. Ландау [1, 2, 3], который впервые построил последовательную теорию квантовой жидкости. Изложению этой теории и посвящена в основном эта статья.

Из других попыток построения теории сверхтекучести упомянем работы Ф. Лондона [4, 5, 6] и Л. Тиссы [7, 8] (о более поздних работах Тиссы [9, 10] см. ниже, § 18). В этих работах для объяснения поведения гелия II привлекаются свойства вырожденного идеального бозе-эйнштейновского газа, причём предполагается, что атомы, находящиеся в нормальном состоянии (состояние с нулевой энергией), движутся через вещество, не испытывая трения. Такое представление, однако, не может быть признано удовлетворительным. Прежде всего гелий II не имеет ничего общего с идеальным газом, и нет никаких оснований переносить на него результаты, получающиеся для газа. Но и в идеальном газе находящиеся в нормальном состоянии атомы отнюдь не стали бы вести себя как «сверхтекучие»; напротив, ничто не мешало бы им сталкиваться с возбуждёнными атомами, обмениваясь при этом импульсом, т. е. при своём движении в веществе они испытывали бы трение, и сверхтекучесть отсутствовала бы. Таким образом, такое объяснение сверхтекучести не только не имеет достаточно солидного основания, но по существу ещё и находится в прямом противоречии с исходными предположениями.

2. Квантование движения жидкости

Произвольная система взаимодействующих частиц (жидкость) может быть описана в классической теории посредством плотности ρ и потока массы $\mathbf{j}$, которые определяются следующим образом. Пусть $\mathbf{R}$ есть радиус-вектор произвольной точки пространства, а $\mathbf{r}_a$ — радиус-вектор частицы с массой m_a. Тогда плотность определяется, как

$$\rho = \sum_a m_a \delta(\mathbf{R} - \mathbf{r}_a), \tag{2,1}$$

*) Обзор относящихся сюда экспериментальных результатов дан в статье Э. Л. Андроникашвили, У.Ф.Н. 33, вып. 4, 469 (1947).

где δ — трёхмерная δ-функция, а суммирование производится по всем частицам в системе. Интеграл по объёму $\int \rho\, dv$ даёт полную массу системы. Аналогично, плотность потока массы определяется, как

$$\mathbf{j} = \sum_a m_a \mathbf{v}_a \delta(\mathbf{R} - \mathbf{r}_a) = \sum \mathbf{p}_a \delta(\mathbf{R} - \mathbf{r}_a),$$

где $\mathbf{v}_a$, $\mathbf{p}_a$ — скорость и импульс частицы m_a.

Подчеркнём, что при таком описании жидкости не производится никакого усреднения в том смысле, как оно производится в статистике. Описание исходит из микроскопической картины, поскольку все частицы обладают (в данный момент) определёнными координатами $\mathbf{r}_a$ и скоростями $\mathbf{v}_a$.

При переходе к квантовой теории надо рассматривать ρ и $\mathbf{j}$ как некоторые операторы; определим вид этих операторов. Для простоты рассуждений предположим, что система состоит всего из одной частицы. Тогда классическая плотность $\rho = m\delta(\mathbf{R} - \mathbf{r})$. Оператор ρ должен быть определён таким образом, чтобы его математическое ожидание $\int \psi^*(\mathbf{r})\rho\psi(\mathbf{r})dV$ (где $\psi(\mathbf{r})$ — волновая функция частицы) было равно плотности массы в точке $\mathbf{R}$, т. е. $m|\psi(\mathbf{R})|^2$. Отсюда следует, что оператор ρ должен иметь тот же вид $\rho = m\delta(\mathbf{R} - \mathbf{r})$, а в случае произвольной системы частиц — соответственно вид (2,1).

Классическая плотность потока для одной частицы $\mathbf{j} = \mathbf{p}\,\delta(\mathbf{R} - \mathbf{r})$. Легко видеть, что соответствующий ей квантовый оператор есть

$$\mathbf{j} = \frac{1}{2}\{\mathbf{p}\,\delta(\mathbf{R} - \mathbf{r}) + \delta(\mathbf{R} - \mathbf{r})\,\mathbf{p}\},$$

где $\mathbf{p}$ есть обычный оператор импульса

$$\mathbf{p} = \frac{\hbar}{i}\nabla$$

(∇ означает дифференцирование по $\mathbf{r}$). Действительно, математическое ожидание $\mathbf{j}$

$$\int \psi^*(\mathbf{r})\,\mathbf{j}\,\psi(\mathbf{r})dV =$$
$$= \frac{\hbar}{2i}\int \psi^*\nabla\delta(\mathbf{R} - \mathbf{r})\psi\, dV + \frac{\hbar}{2i}\int \psi^*\delta(\mathbf{R} - \mathbf{r})\nabla\psi\, dV,$$

или, интегрируя в первом члене по частям,

$$\int \psi^*\mathbf{j}\psi\, dV = \frac{\hbar}{2i}\int \{-\psi\delta(\mathbf{R} - \mathbf{r})\nabla\psi^* + \psi^*\delta(\mathbf{R} - \mathbf{r})\nabla\psi\}\, dV =$$
$$= \frac{\hbar}{2i}\{\psi^*(\mathbf{R})\nabla\psi(\mathbf{R}) - \psi(\mathbf{R})\nabla\psi^*(\mathbf{R})\},$$

т. е. как раз то, что и должно было быть. Для произвольной системы частиц имеем аналогично

$$\mathbf{j} = \frac{1}{2}\sum_a \{ \mathbf{p}_a \delta(\mathbf{R} - \mathbf{r}_a) + \delta(\mathbf{R} - \mathbf{r}_a)\mathbf{p}_a \}, \qquad \mathbf{p}_a = \frac{\hbar}{i}\nabla. \quad (2,2)$$

Вместо оператора $\mathbf{j}$ более удобно пользоваться оператором скорости движения жидкости $\mathbf{v}$, определяемым естественным образом согласно $\mathbf{j} = \frac{1}{2}(\rho\mathbf{v} + \mathbf{v}\rho)$, или

$$\mathbf{v} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho}\mathbf{j} + \mathbf{j}\frac{1}{\rho}\right) \quad (2,3)$$

(в классической теории $\mathbf{j} = \rho\mathbf{v}$).

Правила коммутации между введёнными таким образом операторами могут быть получены непосредственным, хотя и довольно длинным, вычислением. Опуская здесь эти вычисления, приведём получающиеся в результате соотношения. Обозначая индексами 1 и 2 значения операторов, взятые соответственно в точках пространства $\mathbf{R}_1$ и $\mathbf{R}_2$, будем иметь

$$\rho_1\rho_2 - \rho_2\rho_1 = 0, \quad (2,4)$$

$$\mathbf{v}_1\rho_2 - \rho_2\mathbf{v}_1 = -i\hbar\nabla\delta(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2), \quad (2,5)$$

$$v_{1i}v_{2k} - v_{2k}v_{1i} = -i\hbar\delta(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2)\frac{1}{\rho_1}(\mathrm{rot}\,\mathbf{v})_{ik} \quad (2,6)$$

(в последнем соотношении $i, k = x, y, z$, а $(\mathrm{rot}\,\mathbf{v})_{ik}$ обозначает разность $\frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{\partial v_i}{\partial x_k}$). Если применить к обеим сторонам уравнения (2,5) операцию rot (с дифференцированием по координатам $\mathbf{R}$), то получим соотношение

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{v}_1\cdot\rho_2 - \rho_2\,\mathrm{rot}\,\mathbf{v}_1 = 0. \quad (2,7)$$

Легко убедиться в том, что при применении полученных соотношений к макроскопическому движению жидкости получаются, как и должно было быть, обычные гидродинамические уравнения, написанные в операторном виде. Энергия единицы объёма классической жидкости, рассматриваемой макроскопическим образом, есть $\frac{\mathbf{v}\rho\mathbf{v}}{2} + \rho E(\rho)$, где $E(\rho)$ есть внутренняя энергия единицы массы жидкости. Энергия E предполагается зависящей только от плотности ρ жидкости, — в этом проявляется макроскопичность рассмотрения, связанная со статистическим усреднением. При микроскопическом рассмотрении такое предположение, конечно, несправедливо.

Соответствующий написанному классическому выражению квантовый оператор есть

$$\frac{\mathbf{v}\rho\mathbf{v}}{2} + \rho E(\rho).$$

Функция Гамильтона H жидкости есть интеграл по объёму

$$H=\int\left\{\frac{1}{2}\mathbf{v}\rho\mathbf{v}+\rho E(\rho)\right\}dV. \tag{2,8}$$

Для определения производной $\dot{\rho}$ от плотности по времени мы должны, согласно общим правилам квантовой механики, вычислить результат коммутирования операторов ρ и H:

$$\dot{\rho}=\frac{i}{\hbar}(H\rho-\rho H).$$

Обозначим временно координаты точки, в которой берётся ρ, индексом 1, а координаты переменной точки в области интегрирования в (2,8) — индексом 2. Тогда

$$\dot{\rho}_1=\frac{i}{\hbar}\int\left\{\frac{1}{2}[\mathbf{v}_2\rho_2\mathbf{v}_2\rho_1-\rho_1\mathbf{v}_2\rho_2\mathbf{v}_2]+[\rho_2E(\rho_2)\rho_1-\rho_1\rho_2E(\rho_2)]\right\}dV.$$

В силу (2,4) второй член под знаком интеграла исчезает, а первый можно написать в виде

$$\frac{1}{2}[\mathbf{v}_2\rho_2(\mathbf{v}_2\rho_1-\rho_1\mathbf{v}_2)+(\mathbf{v}_2\rho_1-\rho_1\mathbf{v}_2)\rho_1\mathbf{v}_2]$$

или, подставляя (2,5):

$$\frac{\hbar}{2i}\nabla\delta(\mathbf{R}_2-\mathbf{R}_1)\cdot(\mathbf{v}_2\rho_2+\rho_2\mathbf{v}_2)=-i\hbar\nabla\delta(\mathbf{R}_2-\mathbf{R}_1)\cdot\mathbf{j}_2.$$

Таким образом,

$$\dot{\rho}=\int\nabla\delta(\mathbf{R}_2-\mathbf{R}_1)\cdot\mathbf{j}_2\,dV_2=-\int\delta(\mathbf{R}_2-\mathbf{R}_1)\operatorname{div}\mathbf{j}_2\cdot dV_2=-\operatorname{div}\mathbf{j}_1,$$

т. е. мы приходим к уравнению непрерывности в операторном виде

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}\frac{\rho\mathbf{v}+\mathbf{v}\rho}{2}=0. \tag{2,9}$$

Аналогичным образом можно вычислить производную

$$\dot{\mathbf{v}}=\frac{i}{\hbar}(H\mathbf{v}-\mathbf{v}H).$$

Вычисление приводит к уравнению

$$\frac{\partial v_i}{\partial t}=-\frac{1}{2}\sum_k\left(v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial v_i}{\partial x_k}v_k\right)-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{dE}{d\rho}, \tag{2,10}$$

т. е. получается уравнение Эйлера в операторном виде ($dE/d\rho$ есть давление P жидкости).

Подчеркнём ещё раз, что уравнения (2,9 — 10) являются менее общими, чем условия коммутации (2,4 — 7), которые применимы и при точном, микроскопическом, рассмотрении жидкости.

3. Энергетический спектр квантовой жидкости

В классической гидродинамике идеальной жидкости показывается, что если в некоторый момент времени движение является потенциальным ($\mathrm{rot}\,\mathbf{v}=0$) во всём объёме жидкости, то оно будет потенциальным и во все другие моменты времени (так называемая теорема Лагранжа). Оказывается, что в квантовой гидродинамике имеется аналог этой теоремы.

Согласно правилу коммутации (2,7) $\mathrm{rot}\,\mathbf{v}$ всегда коммутирует с плотностью ρ. Компоненты $\mathrm{rot}\,\mathbf{v}$, однако, не коммутируют, вообще говоря, ни друг с другом, ни с компонентами скорости v (при применении операции rot к уравнению (2,6) правая сторона равенства не исчезает). Поэтому $\mathrm{rot}\,\mathbf{v}$ не коммутирует, вообще говоря, и с оператором Гамильтона; как известно из квантовой механики, это означает, что $\mathrm{rot}\,\mathbf{v}$ не сохраняется.

Исключение составляет случай, когда во всём объёме жидкости $\mathrm{rot}\,\mathbf{v}=0$. В этом случае в правой стороне (2,7) стоит нуль, так что $\mathrm{rot}\,\mathbf{v}$ коммутирует как с ρ, так и с $\mathbf{v}$, а следовательно, и с оператором Гамильтона *).

Таким образом, равный нулю ротор скорости сохраняется. Другими словами, квантовая жидкость всегда обладает такими стационарными состояниями, в которых $\mathrm{rot}\,\mathbf{v}$ равен нулю во всём объёме. Такие состояния могут быть названы, по аналогии с классической гидродинамикой, состояниями потенциального движения жидкости.

По поводу этого результата полезно провести аналогию (правда, чисто формальную) с моментом количества движения $\mathbf{M}$ в квантовой механике. Коммутирование двух компонент $\mathbf{M}$ друг с другом приводит к третьей компоненте; в результате компоненты момента коммутируют друг с другом, а потому существуют одновременно, только если все они равны нулю. Известно также, что не существует состояний со сколь угодно малыми значениями момента, — первые отличные от нуля его собственные значения порядка $\hbar$. Это является следствием неоднородности условий коммутации, — левая сторона их квадратична по $\mathbf{M}$, а правая линейна.

Аналогичное утверждение можно высказать и по поводу ротора скорости в квантовой гидродинамике. Именно, не может существовать таких состояний, в которых ротор скорости был бы отличен от нуля, но сколь угодно мал во всём объёме жидкости.

Отсюда можно сделать существенное заключение об основных свойствах энергетического спектра жидкости (подчеркнём, что речь идёт не об уровнях для отдельных атомов гелия, а об уровнях, соответствующих состояниям всей жидкости в целом). Именно, не может существовать уровней энергии, сколь угодно близких к нор-

*) Причём не только с гамильтонианом (2,8), но и со всяким другим, содержащим $\rho\mathbf{v}$ и их производные любого порядка по координатам.

мальному, которые соответствовали бы вихревому движению жидкости. Другими словами, достаточно близкие к нормальному возбуждённые состояния должны соответствовать потенциальному движению жидкости.

Необходимо подчеркнуть, что в этом рассуждении предполагается, что нормальное состояние жидкости — безвихревое. Принципиально, однако, логически допустимы обе возможности — вихревое и безвихревое нормальное состояние. Мы увидим ниже, что к свойству сверхтекучести приводит энергетический спектр с безвихревым нормальным состоянием; поэтому следует принять, что в жидком гелии имеет место именно этот случай. Надо, впрочем, иметь в виду, что поскольку в природе существует всего лишь одна квантовая жидкость — жидкий гелий, то вопрос о том, является ли такой энергетический спектр, а потому и сверхтекучесть, общим свойством квантовых жидкостей, не может быть решён экспериментально. Теоретически же вполне допустимо существование и несверхтекучих квантовых жидкостей.

Рассмотрим возбуждённый уровень, расположенный не слишком высоко над началом спектра (нормальным уровнем). Всякое слабо возбуждённое состояние макроскопического тела может рассматриваться в квантовой механике, как совокупность отдельных «элементарных возбуждений». Эти «элементарные возбуждения» ведут себя, как некоторые «квази-частицы», движущиеся в занимаемом телом объёме и обладающие определёнными энергиями и импульсами. Так, например, тепловое возбуждение твёрдого тела (кристалла), в котором атомы совершают малые колебания вокруг своих положений равновесия, может рассматриваться, как известно, как совокупность движущихся в теле «звуковых квантов» (фононов).

Обозначим посредством $\varepsilon(p)$ энергию «элементарного возбуждения» в жидком гелии как функцию его импульса p. Вид зависимости ε от p представляет собой основную характеристику энергетического спектра жидкости. На основании сказанного выше не представляет труда установить вид этой функции при достаточно малых значениях импульса (длинные волны). Действительно, достаточно малые энергии возбуждения соответствуют потенциальным движениям жидкости. Но потенциальное внутреннее движение представляет собой не что иное, как продольные звуковые волны. Поэтому соответствующие элементарные возбуждения представляют собой просто звуковые кванты, т. е. фононы. Энергия же фононов является, как известно, линейной функцией их импульса, т. е.

$$\varepsilon = cp, \tag{3,1}$$

где c — скорость звука. Таким образом, в своей начальной части кривая зависимости ε от p прямолинейна.

По мере увеличения импульса p кривая $\varepsilon = \varepsilon(p)$ отклоняется от линейности. Однако представляется невозможным определить в общем

виде зависимость ε от p для квантовой жидкости из одних только теоретических соображений, и для определения вида энергетического спектра гелия II приходится привлечь также и имеющиеся экспериментальные данные; речь идёт об измерениях различных термодинамических величин гелия II (энтропии, теплоёмкости), а также скорости распространения так называемого «второго звука» в гелии II (см. § 14). Анализ этих данных показывает (Л. Ландау[5]), что они могут быть естественным образом объяснены, если предположить, что кривая $\varepsilon = \varepsilon(p)$ имеет вид, изображённый на рис. 1. После начального линейного участка (фононы) энергия ε достигает максимума, затем начинает уменьшаться и при некотором значении импульса $p = p_0$ функция $\varepsilon(p)$ имеет минимум.

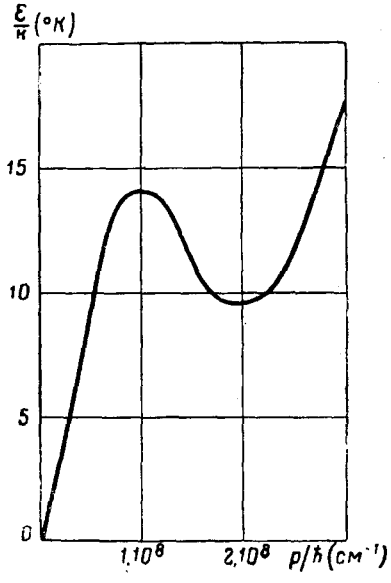

Рис. 1. Энергетический спектр гелия II.

В тепловом равновесии имеющиеся в жидкости элементарные возбуждения распределены в основном вблизи минимумов энергии, т. е. в области малых ε (область вблизи $\varepsilon = 0$) и в области вблизи значения $\varepsilon(p_0)$. Поэтому именно эти области особенно существенны. Вблизи точки $p = p_0$ функцию $\varepsilon(p)$ можно разложить в ряд по степеням $p - p_0$. Поскольку $\left.\frac{d\varepsilon}{dp}\right|_{p=p_0} = 0$, то линейный член в разложении отсутствует, и с точностью до члена второго порядка имеем

$$\varepsilon = \Delta + \frac{(p - p_0)^2}{2\mu}, \tag{3,2}$$

где $\Delta = \varepsilon(p_0)$ и μ — постоянные.

Элементарные возбуждения этого второго типа соответствуют, в противоположность фононам, вихревым движениям жидкости (движение с отличным от нуля $\operatorname{rot} \mathbf{v}$). Их можно называть «ротонами», а о постоянной μ в (3,2) говорить соответственно как об «эффективной массе» ротона. Надо, впрочем, иметь в виду, что при энергетическом спектре описанного типа нельзя, строго говоря, различать фононы и ротоны как два качественно различных типа элементарных возбуждений, так как от одних к другим имеется непрерывный переход. Более правильно было бы говорить просто о длинноволновых (малые p) и коротковолновых (p вблизи p_0) квантах возбуждения.

Имея в виду эту оговорку, мы, однако, будем всё же пользоваться удобными терминами — фононы и ротоны *).

Зная вид энергетического спектра жидкости, можно вычислить все её термодинамические величины (§ 5). Полученные таким образом формулы оказываются, при соответствующем выборе постоянных Δ, p_0, μ, в превосходном согласии с имеющимися экспериментальными данными о теплоёмкости гелия II (измерения Кеезома; см., впрочем, сноску на стр. 525), его энтропии (измерения П. Л. Капицы) и скорости «второго звука» в нём, измеренной В. П. Пешковым. Значения постоянных, определяющих энергетический спектр гелия II, оказываются при этом следующими:

$$\Delta/k = 9{,}6\,^\circ\mathrm{K}, \quad p_0/\hbar = 1{,}95\cdot 10^8\ \text{см}^{-1}, \quad \mu = 0{,}75\ m_{\mathrm{He}}. \qquad (3{,}3)$$

Обратим внимание на то, что эффективная масса ротона оказывается порядка величины массы m_{He} атома гелия, а длина волны $\hbar/p_0$ оказывается весьма малой, меньшей даже, чем атомные размеры **).

*) В первоначальном варианте теории Л. Ландау рассматривал энергетический спектр, в котором функция $\varepsilon(p)$ состоит из двух ветвей — фононной (3,1) и ротонной $\varepsilon = \Delta + \frac{p^2}{2\mu}$; обе начинались от $p = 0$, так что между наиболее низкими состояниями потенциального и вихревого движений имелась „энергетическая щель" Δ. Не говоря уже о том, что такой спектр приводит к недостаточно хорошему согласию с экспериментальными данными, он по существу является внутренне противоречивым. Последнее проявляется в том, что ротоны в этом спектре могли бы самопроизвольно распадаться на фононы, т. е. были бы неустойчивыми; так, например, ротон с энергией Δ и импульсом $p = 0$ мог бы распадаться на два движущихся в противоположных направлениях фонона с импульсами $p = \Delta/2c$ и энергиями $\varepsilon = \Delta/2$. Упомянем также, что энергетический спектр жидкого гелия исследовался А. Байлем [11], который пришёл к выводу о существовании „энергетической щели" между нормальным и всеми возбуждёнными состояниями. Этот результат, однако, представляется весьма сомнительным уже потому, что он означал бы, в частности, невозможность распространения в жидкости звуковых волн малых частот.

**) Это, разумеется, вовсе не означает, что ротоны можно в какой-либо степени отождествлять с отдельными атомами гелия! Подчеркнём лишний раз, что фононы и ротоны отнюдь не связаны с какими-либо определёнными атомами или группами атомов, а являются, по существу, лишь способом описания коллективного движения всех атомов жидкости.

Отметим по этому поводу следующее обстоятельство. Если ввести „скорость ротона" $v = d\varepsilon/dp$, то из (3,2) мы получим $v = (p - p_0)/\mu$. В частности, при $p = p_0$ получается $v = 0$, т. е. при равном p_0 импульсе ротон не имеет скорости. Это обстоятельство, разумеется, не содержит в себе никаких внутренних противоречий, и для его уяснения полезно привести следующую „классическую аналогию". Представим себе волновой пакет, распространяющийся в какой-либо среде. Скорость v его перемещения определяется законом дисперсии волн $\omega = \omega(k)$ (ω — частота, k — волновой вектор), согласно известной формуле для групповой скорости $v = d\omega/dk$, и при некоторых значениях k может обратиться в нуль. Это будет означать, что весь волновой пакет в целом, т. е. вся картина движения в среде, остаётся неподвижной в пространстве, что, конечно, не мешает тому, что в среде происходит при этом внутреннее движение, которое может сопровождаться переносом массы в некотором направлении.

Если число ротонов и фононов (отнесённое к единице объёма жидкости) сравнительно невелико, то их совокупность можно рассматривать как смесь двух идеальных газов — фононного газа и ротонного газа. Такое положение имеет место при температурах, не слишком близких к λ-точке.

Как фононный газ, так и ротонный газ должны подчиняться статистике Бозе. В этом можно убедиться на основании следующих очень общих соображений. По свойствам описанного энергетического спектра, при возбуждении жидкости фононы и ротоны могут появляться поодиночке. С другой стороны, момент количества движения всякой квантово-механической системы (в данном случае—всей жидкости) может испытывать изменения лишь на целое число. Поэтому возникающие поодиночке «элементарные возбуждения» должны обладать целочисленным моментом и, следовательно, подчиняться статистике Бозе.

По поводу ротонного газа надо, впрочем, заметить, что поскольку его энергия всегда содержит величину Δ, большую по сравнению с kT (при низких температурах, когда только и можно говорить о ротонном газе), то в применении к нему распределение Бозе может быть с достаточной точностью заменено распределением Больцмана.

4. Энергетический спектр почти идеального бозе-эйнштейновского газа

Как уже отмечалось, задачу о полном теоретическом определении энергетического спектра реальной жидкости можно считать безнадёжной. Ввиду этого приобретает интерес рассмотрение какой-либо значительно более простой модели макроскопического тела, хотя бы и не имеющей непосредственного отношения к жидкому гелию, с целью уяснения того, каким образом может действительно возникнуть энергетический спектр со свойствами, аналогичными описанным выше.

В качестве такой модели наиболее естественно выбрать бозе-эйнштейновский «почти идеальный» газ, т. е. газ со слабым взаимодействием между частицами. Последовательное квантово-механическое рассмотрение такой задачи было произведено впервые Н. Н. Боголюбовым[12], которому удалось, путём остроумного применения метода вторичного квантования, полностью определить энергетический спектр слабовозбуждённых состояний такого газа.

Отсылая за подробным проведением вычислений к оригинальной работе Боголюбова, мы опишем здесь лишь получающиеся результаты. Оказывается, что слабо возбуждённое состояние газа можно, действительно, описать как совокупность («идеальный газ») не взаимодействующих друг с другом «элементарных возбуждений», так что полная энергия газа складывается из энергии основного состоя-

ния и суммы энергий отдельных «квази-частиц» — элементарных возбуждений. Каждому элементарному возбуждению можно приписать некоторый импульс p, а его энергия как функция импульса выражается формулой

$$\varepsilon(p)=\frac{1}{2m}\sqrt{4\rho\,\nu(p)\,p^2+p^4}, \tag{4,1}$$

где m — масса отдельной частицы газа, ρ — его плотность, а функция $\nu(p)$ определяется как интеграл

$$\nu(p)=\int U(r)\,e^{-i\mathbf{pr}/\hbar}\,dV, \tag{4,2}$$

взятый по всему пространству, причём $U(r)$ есть потенциальная энергия взаимодействия двух частиц газа (предполагаемая зависящей только от взаимного расстояния r между частицами).

Для того чтобы подкоренное выражение в (4,1) было всегда положительным (в том числе и для малых импульсов), необходимо, чтобы было

$$\nu(0)=\int U(r)\,dV>0. \tag{4,3}$$

В противном случае при достаточно малых p энергия $\varepsilon(p)$ окажется комплексной, что означало бы неустойчивость рассматриваемых возбуждённых состояний газа. Можно показать, что $\rho\nu(0)/m^2=\partial P/\partial\rho$ (P — давление газа), так что условие (4,3) эквивалентно известному условию термодинамической устойчивости газа ($\partial P/\partial\rho>0$). С механической точки зрения, условие (4,3) означает, что между частицами газа действуют отталкивательные силы. Необходимость этого условия в рассматриваемой модели заранее очевидна, так как в случае притягивательных сил при температуре абсолютного нуля и вблизи него (чему соответствует рассмотрение слабовозбуждённых состояний) вещество не могло бы существовать в виде газа и сконденсировалось бы в жидкость. Заметим, что это обстоятельство в известном смысле отдаляет рассматриваемую модель от реального гелия, в котором между атомами действуют притягивательные силы.

При малых импульсах энергия (4,1) принимает вид

$$\varepsilon(p)\cong\frac{\sqrt{\rho\nu(0)}}{m}\,p=\sqrt{\frac{\partial P}{\partial\rho}}\,p=cp$$

($c=\sqrt{\partial P/\partial\rho}$ — скорость звука в газе). Таким образом, в начальной части кривой $\varepsilon=\varepsilon(p)$ мы, действительно, имеем дело с фононами. При больших импульсах функция $\nu(p)$ стремится к нулю (так как содержит в подинтегральном выражении быстро осциллирующий экспоненциальный множитель). Поэтому при достаточно больших p имеем

$$\varepsilon(p)\cong\frac{p^2}{2m},$$

т. е. ε переходит в кинетическую энергию отдельной частицы газа.

5. Вычисление термодинамических величин гелия II

Описанные в § 3 особенности энергетического спектра гелия II позволяют сделать определённые заключения о температурной зависимости его термодинамических величин (энтропии, теплоёмкости и т. п.). Производимые ниже вычисления относятся к температурам, не слишком близким к λ-точке, когда можно говорить о фононном и ротонном газах в жидкости. В этих условиях все термодинамические величины складываются из двух частей, связанных соответственно с каждым из этих газов; мы будем говорить о них, как о фононной и ротонной частях.

Фононные части термодинамических величин определяются непосредственно формулами известной дебаевской теории теплоёмкости твёрдых тел (тепловое возбуждение которых рассматривается как совокупность фононов). Так, для свободной энергии (отнесённой к 1 *г* жидкости) имеем

$$F_{\text{ф}} = -\frac{\pi^2 k^4}{90\hbar^3 c^3 \rho} T^4 \tag{5,1}$$

(ρ — плотность гелия). Фононная часть энтропии получается отсюда дифференцированием по температуре

$$S_{\text{ф}} = \frac{2\pi^2 k^4}{45\hbar^3 c^3 \rho} T^3, \tag{5,2}$$

а фононная часть теплоёмкости $C_{\text{ф}} = T\dfrac{\partial S_{\text{ф}}}{dT}$ равна

$$C_{\text{ф}} = \frac{2\pi^2 k^4}{15\hbar^3 c^3 \rho} T^3. \tag{5,3}$$

Таким образом, фононная часть теплоёмкости пропорциональна кубу температуры *).

Для вычисления ротонной части термодинамических величин воспользуемся тем, что при рассматриваемых температурах ротонный газ с достаточной точностью описывается больцмановским распределением. При этом надо помнить, что число частиц в ротонном газе не остаётся неизменным, а является функцией температуры и определяется условием минимальности свободной энергии. Согласно известной формуле статистической физики, свободная энергия идеального газа с числом частиц N в объёме V есть

$$F = -NkT \ln \frac{eV}{N} \int e^{-\varepsilon/kT} \frac{d\tau_{\text{р}}}{(2\pi\hbar)^3}, \quad (d\tau_{\text{р}} = dp_x dp_y dp_z).$$

*) Написанные формулы получаются в дебаевской теории при наличии одних только продольных звуковых волн и соответствуют температурам, малым по сравнению с дебаевской температурой. Последнее условие можно считать выполненным, так как в данном случае дебаевская температура

$$\Theta = \frac{\hbar c}{k}\left(\frac{18\pi^2\rho}{m_{\text{He}}}\right)^{1/3} = 30^\circ \text{ K}.$$

Приравнивая нулю производную $\partial F/dN$, найдём для числа частиц в ротонном газе формулу

$$N_p = \frac{1}{\rho(2\pi\hbar)^3}\int e^{-\epsilon/kT}d\tau_p;$$

мы положили здесь $V = 1/\rho$, соответственно тому, что мы относим всё величины к единице массы гелия. Соответствующее значение свободной энергии есть

$$F_p = -\frac{kT}{\rho(2\pi\hbar)^3}\int e^{-\epsilon/kT}d\tau_p. \qquad (5,4)$$

В эти формулы надо подставить выражение (3,2) для энергии ротона. Ввиду того, что $p_0^2 \gg \mu kT$, при интегрировании по dp можно, с достаточной точностью, заменить p в предэкспоненциальном множителе на p_0. Интегрирование же экспоненциального множителя по разности $p - p_0$ можно, ввиду его быстрого убывания с увеличением $|p - p_0|$, производить в пределах от $-\infty$ до $+\infty$. Поэтому

$$\int p^2 e^{-(p-p_0)^2/2\mu kT}dp \simeq p_0^2\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2/2\mu kT}d\xi = p_0^2\sqrt{2\pi\mu kT}.$$

Таким образом, получим следующие формулы для числа ротонов и ротонной части свободной энергии:

$$N_p = \frac{2(\mu kT)^{1/2}p_0^2}{(2\pi)^{3/2}\rho\hbar^3}e^{-\Delta/kT}, \qquad (5,5)$$

$$F_p = -\frac{2\mu^{1/2}(kT)^{3/2}p_0^2}{(2\pi)^{3/2}\rho\hbar^3}e^{-\Delta/kT}. \qquad (5,6)$$

Для ротонной части энтропии $S_p = -\frac{\partial F_p}{\partial T}$ и теплоёмкости $C_p = T\frac{\partial S_p}{\partial T}$ находим отсюда

$$S_p = \frac{2(k\mu)^{1/2}p_0^2\Delta}{(2\pi)^{3/2}\rho T^{1/2}\hbar^3}\left(1+\frac{3kT}{2\Delta}\right)e^{-\Delta/kT}, \qquad (5,7)$$

$$C_p = \frac{2\mu^{1/2}p_0^2\Delta^2}{(2\pi)^{3/2}\rho k^{1/2}T^{3/2}\hbar^3}\left[1+\frac{kT}{\Delta}+\frac{3}{4}\left(\frac{kT}{\Delta}\right)^2\right]e^{-\Delta/kT}. \qquad (5,8)$$

Таким образом, температурная зависимость ротонной части термодинамических величин имеет в основном экспоненциальный характер ($\sim e^{-\Delta/kT}$). Поэтому при достаточно низких температурах ротонная часть термодинамических величин должна стать меньше фононной части, между тем как при более высоких температурах имеет место обратное положение и ротонная часть преобладает над фононной. Вычисление показывает, что фактически обе части теплоёмкости и энтропии сравниваются при температуре около 0,8 — 0,9° К.

На рис. 2 и 3 (стр. 526 и 527) приведены кривые энтропии и теплоёмкости гелия II, вычисленные по полученным формулам (вычисления произведены И. Халатниковым и О. Крамер). Для параметров μ, Δ, p_0 приняты значения (3,3), скорость звука положена равной 235 *м/сек*, а плотность гелия — 0,145 *г/см*^{3}. При температурах, близких к λ-точке, теоретические формулы могут дать значительную погрешность; поэтому верхние части кривых (выше примерно 1,8° К) экстраполированы по имеющимся экспериментальным данным *).

II. СВЕРХТЕКУЧЕСТЬ ГЕЛИЯ II

6. Сверхтекучесть гелия II при абсолютном нуле

Покажем теперь, что сверхтекучесть гелия II следует из описанных выше свойств энергетического спектра. Начнём с рассмотрения жидкого гелия при абсолютном нуле; при этой температуре жидкость находится в своём нормальном, невозбуждённом, состоянии.

Рассмотрим гелий, текущий по капилляру с постоянной скоростью **v**. Наличие вязкости проявилось бы в том, что благодаря трению о стенки трубки и трению внутри самой жидкости происходили бы диссипация кинетической энергии жидкости и постепенное замедление потока.

Нам будет удобнее рассматривать течение в системе координат, движущейся вместе с жидкостью. В этой системе гелий покоится, а стенки капилляра движутся со скоростью —**v**. При наличии вязкости покоящийся гелий тоже должен начать двигаться. Физически очевидно, что увлечение жидкости стенками трубки не может привести с самого начала к движению жидкости как целого. Появление движения должно начаться с возбуждения внутренних движений в близких к стенке слоях жидкости, т. е. с появления в жидкости квантов возбуждения.

---

*) Необходимо отметить следующее обстоятельство. Внимательное изучение результатов измерений теплоёмкости (Кеезом и мисс Кеезом) и энтропии гелия II (П. Капица) обнаруживает, что между этими данными, самими по себе, имеется заметное противоречие. Это расхождение, нарушающее термодинамическое соотношение $C=T(\partial S/\partial T)$, сказывается при попытке более точного определения параметров, входящих в теоретические формулы.

Есть основания полагать, что измерения энтропии в опытах Капицы были произведены с большей точностью, чем измерения теплоёмкости Кеезомом (прежде всего, измерения теплоёмкости, как величины дифференциального характера, по самому существу более трудны; надо также иметь в виду, что интервалы температуры, в которых измерялась теплоёмкость в опытах Кеезома, были сравнительно велики). Поэтому при сравнении теории с экспериментом в качестве основы были выбраны именно данные об энтропии гелия II. Кривая же для теплоёмкости (рис. 3) вычислена затем во всей области температур по теоретической формуле (причём для температур выше $\sim$ 1,8° К учтена поправка на неидеальность ротонного газа — см. § 17).

Предположим, что в жидкости возбуждается квант с импульсом $\mathbf{p}$ и энергией $\varepsilon(p)$. Тогда энергия E_0 жидкости (в системе отсчёта, в которой она первоначально покоилась) сделается равной энергии ε этого кванта, а её импульс $\mathbf{P}_0$ — импульсу $\mathbf{p}$ кванта. Перейдём теперь обратно к системе координат, в которой капилляр покоится. Согласно

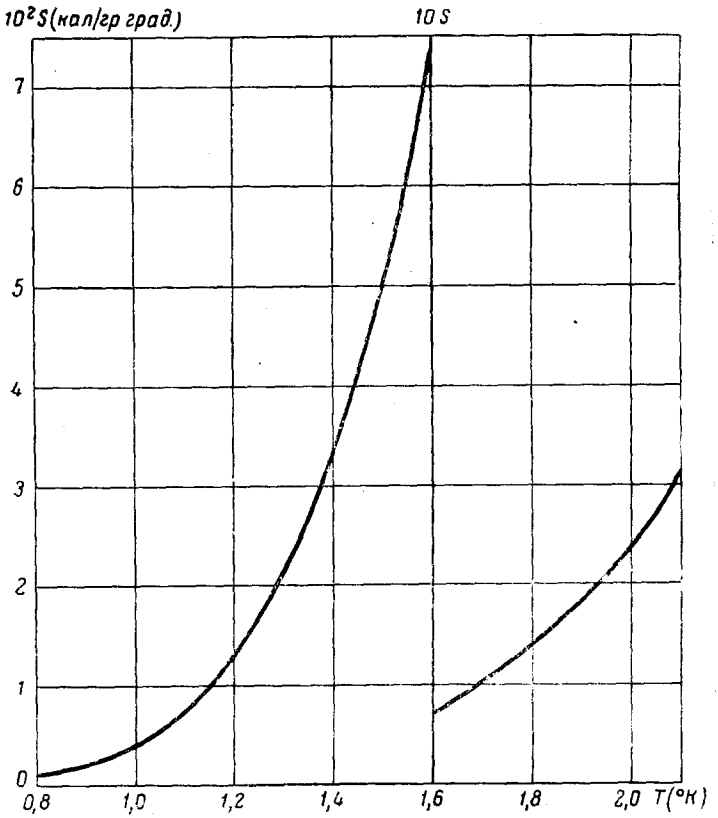

Рис. 2. Энтропия гелия II.

известным формулам преобразования энергии и импульса в классической механике, имеем для энергии E и импульса $\mathbf{P}$ жидкости в этой системе

$$E = E_0 + \mathbf{P}_0\mathbf{v} + \frac{Mv^2}{2}, \quad \mathbf{P} = \mathbf{P}_0 - M\mathbf{v}$$

(M — масса жидкости). Подставляя ε, $\mathbf{p}$ вместо $E_0, \mathbf{P}_0$, напишем

$$E = \varepsilon + \mathbf{p}\mathbf{v} + \frac{1}{2}Mv^2.$$

Член $\frac{1}{2} Mv^2$ представляет собой первоначальную кинетическую энергию текущего гелия; выражение же $\varepsilon + \mathbf{pv}$ есть изменение энер-

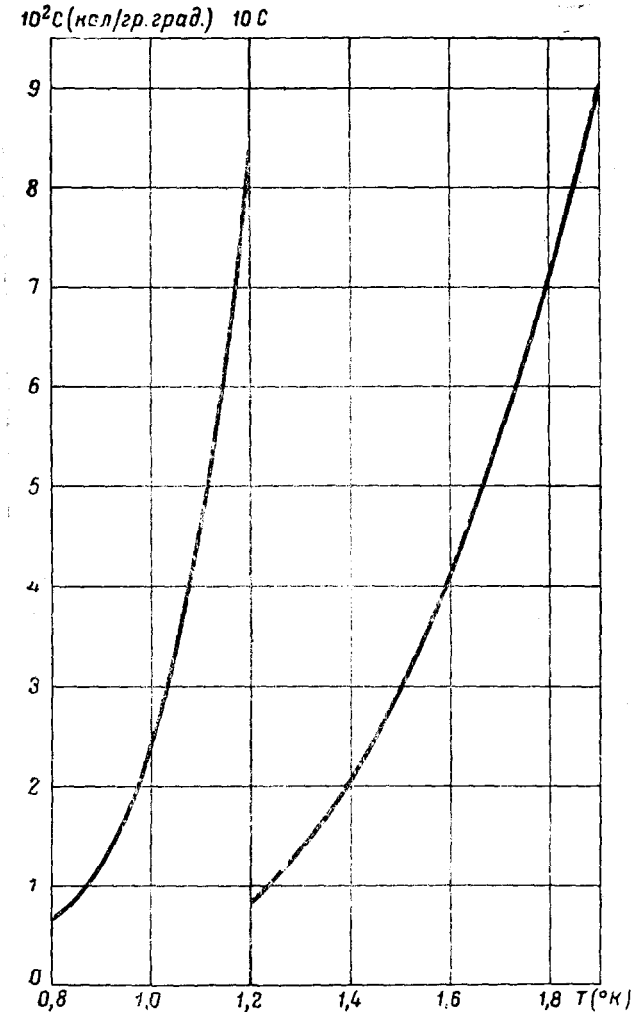

Рис. 3. Теплоёмкость гелия II.

гии благодаря возбуждению кванта. Это изменение должно быть отрицательно, поскольку энергия движущейся жидкости должна уменьшаться

$$\varepsilon + \mathbf{pv} < 0.$$

При заданном значении p величина, стоящая в левой стороне неравенства, имеет наименьшее значение при антипараллельных $\mathbf{p}$ и $\mathbf{v}$; поэтому должно быть во всяком случае $\varepsilon - pv < 0$, т. е.

$$v > \varepsilon/p.$$

Это неравенство должно выполняться при всех значениях импульса p кванта возбуждения. Поэтому окончательное условие возможности появления возбуждений в движущейся по капилляру жидкости мы получим, найдя минимум величины ε/p. Равенство

$$\frac{d}{dp}\left(\frac{\varepsilon}{p}\right) = \frac{1}{p}\frac{d\varepsilon}{dp} - \frac{\varepsilon}{p^2} = 0,$$

т. е. $\frac{\varepsilon}{p} = \frac{d\varepsilon}{dp}$, определяет на кривой $\varepsilon(p)$ точку, в которой проведённая из начала координат прямая касательна к кривой. Обозначая соответствующее значение p посредством p_m, имеем окончательно

$$v > \left(\frac{d\varepsilon}{dp}\right)_{p=p_m}. \tag{6,1}$$

Мы видим, что при скоростях течения, меньших определённого предела [определяемого наклоном проведённой из начала координат касательной к кривой $\varepsilon = \varepsilon(p)$], в гелии не могут появиться возбуждения. Это значит, что течение жидкости не будет замедляться, т. е. гелий обнаружит явление сверхтекучести.

При скоростях течения, удовлетворяющих условию (6,1), сверхтекучесть гелия во всяком случае должна исчезнуть. Надо, однако, иметь в виду, что эти скорости очень велики $\left(\text{по порядку величины } \frac{d\varepsilon}{dp_m} \cong \frac{1}{\mu}\left(\sqrt{2\mu\Delta + p_0^2} - p_0\right) \sim 60\frac{\text{м}}{\text{сек}}\right)$ — значительно больше фактически наблюдаемых «критических скоростей» исчезновения сверхтекучести. Поэтому последние должны иметь какую-то другую физическую природу.

Заметим, что условие, при котором энергетический спектр приводит к свойству сверхтекучести, заключается, согласно (6,1), в том, чтобы стоящая в правой стороне неравенства производная имела отличное от нуля значение. Это условие по существу сводится к требованию, чтобы кривая $\varepsilon = \varepsilon(p)$ не была касательна к оси абсцисс в начале координат (отвлекаясь от маловероятного касания ею этой оси в своём дальнейшем ходе). Поэтому к сверхтекучести приводит по существу всякий спектр, в котором достаточно малые возбуждения сводятся к одним только фононам.

7. Гелий II при температурах выше абсолютного нуля

Рассмотрим теперь гелий при температуре, отличной от абсолютного нуля. Тогда гелий не находится в основном состоянии, в нём имеются возбуждения, о которых, при достаточно низкой температуре, можно сказать, что они образуют газ, состоящий из квантов возбуждения. Проведённый выше вывод сам по себе остаётся в силе и теперь, поскольку в нём не было использовано непосредственно то обстоятельство, что жидкость находилась первоначально в основном состоянии. Поэтому и при температурах, отличных от 0° К, движение гелия относительно стенок трубки не может привести к появлению в нём квантов возбуждения. Необходимо, однако, выяснить, каким образом будет проявляться наличие квантов, которые имеются в жидкости самой по себе.

Для этого рассмотрим жидкий гелий, находящийся в аксиально-симметрическом сосуде, вращающемся вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью Ω. Перейдём к системе координат, вращающейся вместе с сосудом. В этой системе сосуд неподвижен, т. е. внешние условия, в которых находится жидкость, стационарны. Поэтому в ней имеет место распределение Гиббса, т. е. вероятность нахождения жидкости в том или ином возбуждённом состоянии определяется формулой

$$\mathrm{const}\cdot e^{-E'/kT},$$

где E' — энергия возбуждённого состояния жидкости во вращающейся системе координат. Перейдём теперь обратно к неподвижной системе отсчёта. Как известно, энергия E' тела во вращающейся системе отсчёта связана с энергией E в неподвижной системе соотношением

$$E' = E - \mathbf{M}\boldsymbol{\Omega},$$

где $\mathbf{M}$ — момент количества движения тела в данном возбуждённом состоянии (в нормальном состоянии $\mathbf{M}=0$). Таким образом, распределение Гиббса в неподвижной системе отсчёта есть

$$\mathrm{const}\cdot e^{-(E-\mathbf{M}\boldsymbol{\Omega})/kT}. \tag{7,1}$$

Для наглядности предположим, что температура достаточно низка, так что можно говорить о возбуждённом состоянии, как об идеальном газе квантов возбуждения. Тогда энергию E и момент $\mathbf{M}$ возбуждённого состояния можно написать в виде

$$E=\sum\varepsilon, \qquad \mathbf{M}=\sum\mathbf{m}, \tag{7,2}$$

где ε, $\mathbf{m}$ — энергия и момент отдельных квантов.

Как известно, при подстановке в распределение Гиббса $e^{-E/kT}$ энергии в виде $\Sigma\varepsilon$ можно перейти к распределению для отдельных «частиц» газа — в данном случае к распределению Бозе

$$(e^{\varepsilon/kT}-1)^{-1}$$

(впрочем, какое именно распределение — несущественно для дальнейшего).

Аналогично, при подстановке (7,2) в (7,1) мы получим тем же способом распределение для квантов возбуждения во вращающемся сосуде, с той только разницей, что вместо ε будет стоять $\varepsilon-\Omega\mathbf{m}$; так, распределение Бозе примет вид

$$(e^{(\varepsilon-\Omega\mathbf{m})/kT}-1)^{-1}.$$

Но такое распределение представляет собой не что иное, как распределение во вращающемся как целое (с угловой скоростью Ω) газе. Таким образом, мы приходим к результату, что во вращающемся сосуде с гелием II устанавливается статистическое равновесие, которое отличается от равновесия в покоящемся сосуде только тем, что газ квантов возбуждения вращается вместе с сосудом, как бы увлекаясь его стенками.

Если вычислить из написанного распределения момент количества движения гелия во вращающемся сосуде при данной температуре, т. е. величину

$$\overline{\mathbf{M}}=\frac{1}{(2\pi\hbar)^3}\int\int\frac{\mathbf{m}\,d\tau_{\mathbf{p}}\,dV}{e^{(\varepsilon-\Omega\mathbf{m})/kT}-1}, \tag{7,3}$$

то при абсолютном нуле, т. е. при полном отсутствии квантов возбуждения, мы получили бы, очевидно, нуль. При более высоких температурах момент количества движения будет отличен от нуля, но момент инерции (т. е. коэффициент пропорциональности между $\overline{\mathbf{M}}$ и Ω) будет при достаточно низких температурах ещё гораздо меньше обычного (соответствующего вращению вместе с сосудом всей массы жидкости).

Мы приходим, таким образом, к фундаментальному результату, что при движении стенок сосуда только часть массы жидкого гелия увлекается ими, а другая часть как бы остаётся неподвижной. Поэтому можно наглядно рассматривать жидкий гелий так, как если бы он представлял собой смесь двух жидкостей — одной сверхтекучей, не обладающей вязкостью и не увлекающейся стенками сосуда, и другой — нормальной, «зацепляющейся» при движении о стенки и ведущей себя, как нормальная жидкость. При этом весьма существенно, что между обеими этими движущимися «друг через друга» жидкостями «нет трения», т. е. не происходит передачи импульса от одной из них к другой. Действительно, самое наличие такого взаимного движения мы получили при рассмотрении статистического равновесия в равномерно вращающемся сосуде. Но если какое-либо

относительное движение может иметь место в состоянии статистического равновесия, то это значит, что оно не может сопровождаться трением.

Подчеркнём, что рассмотрение гелия как «смеси» двух жидкостей является не больше, чем способом выражаться, удобным для описания явлений, происходящих в гелии II. Как и всякое описание квантовых явлений в классических терминах, оно не является вполне адэкватным. В действительности надо говорить, что в квантовой жидкости, каковой является гелий II, может существовать одновременно два движения, каждое из которых связано со своей «эффективной массой» (так, что сумма обеих этих масс равна полной истинной массе жидкости). Одно из этих движений «нормально», т. е. обладает теми же свойствами, что и движение обычной жидкости; другое же — «сверхтекуче». Оба эти движения происходят без передачи импульса от одного к другому. Особенно подчеркнём, что здесь нет никакого разделения реальных частиц жидкости на «сверхтекучие» и «нормальные». В определённом смысле можно говорить о «сверхтекучей» и «нормальной» массах жидкости, как о массах, связанных с обоими одновременно возможными движениями; но это отнюдь не означает возможности реального разделения жидкости на две части.

Имея в виду все эти оговорки относительно истинного характера происходящих в гелии II явлений, удобно всё же пользоваться терминами «сверхтекучая жидкость» и «нормальная жидкость», как удобным способом краткого описания этих явлений.

При вращении сосуда с гелием сверхтекучая часть жидкости, как указывалось, остаётся неподвижной. Можно сказать, что сверхтекучая жидкость не способна к вращению. Математически это означает, что ротор скорости сверхтекучего движения равен нулю. Таким образом, движение сверхтекучей жидкости всегда является потенциальным. Напротив, нормальная часть жидкости может совершать как потенциальное, так и вихревое движение.

В частности, отсюда вытекает следующее интересное свойство движения гелия II. Как известно из гидродинамики, при потенциальном течении жидкость не оказывает давления на обтекаемые ею тела (так называемый парадокс Эйлера). Поэтому сверхтекучая часть жидкости не будет оказывать при своём движении никакого давления на погруженное в гелий II тело; оно будет испытывать давление только со стороны нормальной части жидкости.

Важнейшим параметром, определяющим свойства гелия при каждой данной температуре, является отношение между массами сверхтекучей и нормальной частей жидкости. Введём плотность ρ_n нормальной жидкости и плотность ρ_s сверхтекучей; сумма $\rho = \rho_n + \rho_s$ есть полная истинная плотность жидкости.

При абсолютном нуле отношение ρ_n/ρ равно нулю. По мере повышения температуры оно растёт, пока не сделается равным единице, после чего, конечно, будет оставаться постоянным. Температура, при которой ρ_n/ρ обращается в единицу, и представляет собой точку

перехода гелия II в гелий I. Таким образом, фазовый переход в жидком гелии связан с исчезновением сверхтекучей части жидкости. Это исчезновение происходит постепенно, т. е. ρ_n/ρ обращается в единицу непрерывным образом, без скачка. Поэтому переход является фазовым переходом второго рода (не сопровождается выделением или поглощением скрытой теплоты). Наличие же скачка теплоёмкости является, как известно, непосредственным термодинамическим следствием фазового перехода второго рода.

Отношение ρ_n/ρ может быть непосредственно измерено на опыте путём определения момента инерции J цилиндрического сосуда, наполненного гелием II и вращающегося вокруг своей оси. Отношение J к моменту инерции J_0, вычисленному в предположении, что вся масса гелия вращается вместе с сосудом, даёт отношение ρ_n/ρ при данной температуре. Подобные измерения были произведены Э. Андроникашвили и привели к значениям ρ_n/ρ, находящимся в очень хорошем согласии с теоретическими (и со значениями, которые можно вычислить по скорости «второго звука» — см. § 14).

Развитые представления позволяют дать простое объяснение наблюдающимся на опыте свойствам течения гелия II. П. Л. Капица показал, что при протекании по капилляру или по тонкой узкой щели гелий II не обнаруживает вязкости. С точки зрения излагаемой теории это объясняется тем, что при вытекании гелия II из сосуда по тонкой щели, через щель протекает сверхтекучая «часть» жидкости, не обнаруживающая трения; нормальная же «часть» задерживается в сосуде, протекая через щель несравненно медленнее, со скоростью, соответствующей её вязкости и ширине щели.

Не менее естественным образом объясняется тот факт, что при измерении вязкости гелия II по затуханию крутильных колебаний погруженного в жидкость диска получаются отличные от нуля значения. Действительно, при вращении диска в жидкости, содержащей как сверхтекучую, так и нормальную части, он будет останавливаться уже благодаря трению о нормальную жидкость. Таким образом, в опытах с протеканием по капилляру обнаруживается наличие сверхтекучей части жидкости, в опытах же с вращением диска в гелии II обнаруживается его нормальная часть.

Известное свойство гелия II образовывать движущиеся по твёрдой поверхности плёнки является эффектом, родственным свойству его перетекания по тонким капиллярам. Сам по себе факт образования плёнки не является особым свойством, присущим только гелию II. Плёнки образуются всякой жидкостью, смачивающей твёрдую поверхность. В обычных жидкостях, однако, образование плёнки и её распространение на большой участок поверхности происходят чрезвычайно медленно благодаря наличию вязкости; образование же и движение плёнки у гелия II происходят быстро благодаря его сверхтекучести. (Я. И. Френкель[13]; в этой работе дан количественный анализ плёнки, образующейся на вертикальной стенке).

8. Вычисление отношения ρ_n/ρ

При достаточно низких температурах отношение ρ_n/ρ может быть вычислено. Как было выше указано, «идеальный газ» квантов возбуждения в гелии II можно рассматривать как состоящий из «частиц» двух родов — фононов и ротонов. Соответственно этому, ρ_n складывается при низких температурах из двух независимых частей — эффективной массы идеального газа фононов и массы газа ротонов.

Представим себе, что газ квантов возбуждения движется как целое поступательно со скоростью $\mathbf{v}$. Как известно, функция распределения для газа, движущегося как целое, получается из функции распределения неподвижного газа просто путём замены энергии частицы ε величиной $\varepsilon - \mathbf{pv}$, где $\mathbf{p}$ — импульс частицы. Поэтому полный импульс газа (отнесённый к единице объёма) будет

$$\mathbf{P} = \int \mathbf{p} n (\varepsilon - \mathbf{pv}) \cdot d\tau_p,$$

где под $n(\varepsilon)$ надо понимать распределение Бозе в случае фононов или распределение Больцмана в случае ротонов.

Предположим, что скорость $\mathbf{v}$ мала, и разложим подинтегральное выражение по степеням $\mathbf{pv}$. Член нулевого порядка исчезает при интегрировании по направлениям вектора $\mathbf{p}$, и остаётся

$$\mathbf{P} = -\int \mathbf{p} (\mathbf{pv}) \frac{\partial n(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} d\tau_p. \tag{8,1}$$

Рассмотрим сначала фононный газ. Поскольку для фононов $\varepsilon = cp$, то

$$\frac{c\mathbf{p}}{p} \frac{\partial n}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial n}{\partial \mathbf{p}},$$

так что можно написать

$$\mathbf{P} = -\frac{1}{c} \int p (\mathbf{pv}) \frac{\partial n}{\partial \mathbf{p}} d\tau_p.$$

Интегрируя по частям, имеем

$$\mathbf{P} = \frac{1}{c} \int \left\{ p\mathbf{v} + \frac{\mathbf{p}}{p} (\mathbf{pv}) \right\} n \, d\tau_p.$$

Усредним подинтегральное выражение по направлениям вектора $\mathbf{p}$. При таком усреднении $\mathbf{p}(\mathbf{pv})$ даёт $\frac{1}{3} p^2 \mathbf{v}$, так что получаем

$$\mathbf{P} = \frac{4}{3c} \mathbf{v} \int pn \, d\tau_p = \frac{4}{3c^2} \mathbf{v} \int \varepsilon n(\varepsilon) \, d\tau_p.$$

Но стоящий здесь интеграл представляет собой не что иное, как энергию $\rho E_ф$ единицы объёма фононного газа, так что

$$\mathbf{P} = \frac{4E_ф}{3c^2} \rho \mathbf{v}.$$

Коэффициент при $\mathbf{v}$ представляет собой искомую эффективную массу единицы объёма фононного газа, т. е. фононную часть $(\rho_n)_\Phi$ плотности ρ_n:

$$(\rho_n)_\Phi = \frac{4E_\Phi}{3c^2}\rho = \frac{2\pi^2 k^4}{45\hbar^3 c^5} T^4 \tag{8,2}$$

(для энергии $E_\Phi = F_\Phi + TS_\Phi$ использованы формулы (5,1 — 2)). Таким образом, фононная часть ρ_n пропорциональна T^4.

Для вычисления ротонной части ρ_n замечаем, что для распределения Больцмана

$$\frac{\partial n(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} = -\frac{n}{kT};$$

производя также усреднение подинтегрального выражения в (8,1) по направлениям $\mathbf{p}$, получим

$$\mathbf{P} = \frac{\mathbf{v}}{3kT}\int p^2 n(\varepsilon)\, d\tau_p = \mathbf{v}\frac{\overline{p^2}}{3kT}\rho N_p,$$

где $\overline{p^2}$ есть среднее значение квадрата импульса ротона.

Таким образом, получаем формулу

$$(\rho_n)_p = \frac{\overline{p^2}}{3kT}\rho N_p. \tag{8,3}$$

Ввиду того, что $p_0^2 \gg \mu kT$, можно с достаточной точностью положить $\overline{p^2} = p_0^2$, и мы приходим к окончательной формуле

$$(\rho_n)_p = \frac{p_0^2}{3kT}\rho N_p = \frac{2\mu^{1/2} p_0^4}{3(2\pi)^{3/2}(kT)^{1/2}\hbar^3} e^{-\Delta/kT}. \tag{8,4}$$

[N_p из (5,5)]. Таким образом, ротонная часть ρ_n зависит от температуры экспоненциально.

Фононная часть ρ_n становится существенной лишь при самых низких температурах. Ещё при 1° К фононная часть в 60 раз меньше ротонной части; они сравниваются при температуре около 0,6 ° К.

Близкая к λ-точке часть кривой $\rho_n(T)$ не может, разумеется, быть вычислена точно. Можно, однако, ожидать, что благодаря очень быстрому росту ρ_n по формуле (8,4) самое значение температуры λ-точки можно приближённо получить, полагая $\rho_n/\rho = 1$ и используя при этом формулу (8,4) для ρ_n. Такое вычисление даёт для температуры λ-точки значение 2,38 °К в хорошем согласии с действительным значением 2,19° К.

На рис. 4 приведена кривая температурной зависимости ρ_n/ρ, вычисленная по полученным формулам (вычисления произведены И. Халатниковым и О. Крамер). Верхняя часть кривой получена интерполированием с помощью экспериментальных данных.

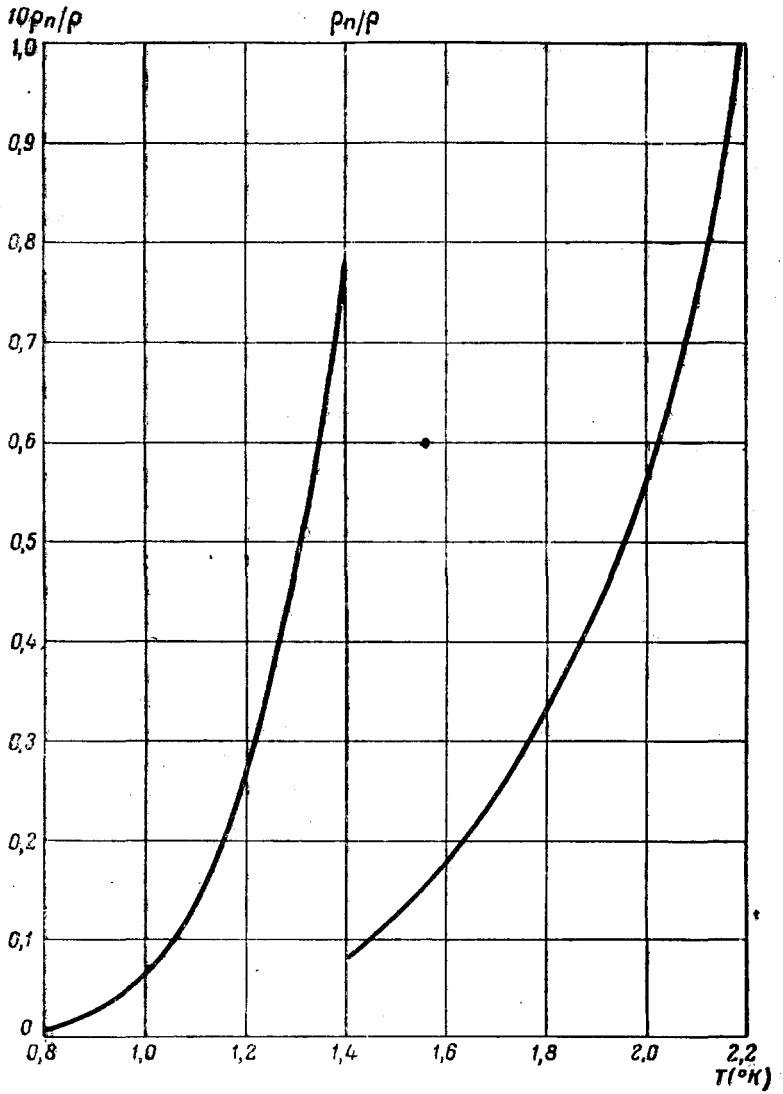

Рис. 4. Температурная зависимость отношения ρ_n/ρ.

9. Перенос тепла в гелии II

Энтропия гелия II определяется статистическим распределением квантов возбуждения. Поэтому при всяком движении жидкости, при котором «газ» квантов возбуждения остаётся неподвижным, не возникает никакого макроскопического переноса энтропии. Мы приходим, таким образом, к весьма важному результату, что при течении сверхтекучей жидкости не происходит никакого переноса энтропии. Другими словами, сверхтекучая жидкость не переносит при своём движении тепла. Отсюда, в свою очередь, следует, что движение гелия II, в котором принимает участие только его сверхтекучая часть, является термодинамически обратимым.

Как было уже указано, при протекании гелия II по тонким капиллярам или щелям мы имеем дело именно с таким течением сверхтекучей жидкости. Поэтому такое протекание должно быть обратимым (вернее, тем более близким к полной обратимости, чем тоньше капилляр и чем меньше проникает в него нормальной жидкости). Это обстоятельство было действительно обнаружено в опытах П. Л. Капицы.

Далее, поскольку протекающий через тонкий каппиляр гелий не переносит с собой тепла, мы можем сделать ещё один вывод. Именно, жидкий гелий, вытекающий из сосуда через тонкий капилляр, должен находиться при температуре абсолютного нуля (вернее, при температуре более низкой, чем температура гелия в сосуде, и равной нулю лишь в идеальном случае бесконечно тонкого капилляра).

Перенос тепла движущейся нормальной частью жидкости представляет собой механизм теплопередачи в гелии II. Он имеет, таким образом, своеобразный конвективный характер и принципиально отличен от обычной теплопроводности. Всякая разность температур в гелии II немедленно приводит к возникновению в нём внутренних движений нормальной и свехтекучей частей «друг через друга»; при этом никакого реального макроскопического течения, сопровождающегося переносом массы, в жидкости может и не быть.

Такого рода случай имеет место при теплопередаче в капилляре, большая величина которой была открыта Кеезомом и мисс Кеезом и которая была подробно изучена Капицей. При нагревании гелия в одном из концов капилляра в гелии возникают два противоположно направленных потока. От нагретого конца к холодному идёт поток нормальной жидкости, переносящей тепло; переносимого таким образом тепла с избытком хватает для объяснения экспериментально наблюдающихся больших величин теплопередачи. В обратном направлении идёт поток сверхтекучей жидкости. Оба потока по количеству переносимой ими массы в точности компенсируют друг друга, так что никакого реального макроскопического течения в гелии в действительности не возникает.

П. Л. Капица наблюдал отклонение листка, подвешенного перед открытым концом капилляра при нагревании гелия в закрытом его конце. Это явление получает следующее естественное объяснение. Втекающий в капилляр поток сверхтекучей жидкости не производит на обтекаемый ею листок никакого давления (благодаря потенциальности движения — см. § 7). Напротив, вытекающий из капилляра поток нормальной жидкости оказывает на листок давление, отклоняющее его в направлении от конца капилляра. Заметим, что мы приходим к весьма своеобразной картине — на погруженное в гелий II тело может действовать сила, в то время как никакого движения жидкости, как целого, не происходит.

10. Термомеханический эффект в гелии II

Так называемый термомеханический эффект в гелии II заключается, как известно, в том, что при вытекании гелия из сосуда через тонкий капилляр в сосуде наблюдается нагревание; наоборот, в месте втекания гелия из капилляра в сосуд наблюдается охлаждение. Само по себе наличие термомеханического эффекта свойственно не одному только гелию; аномальным у гелия II является только большая величина эффекта. Термомеханический эффект в обычных жидкостях представляет собой необратимое явление типа термоэлектрического эффекта Пельтье.

Такого рода эффект должен существовать и в гелии II, однако в этом случае он перекрывается значительно превосходящим его другим эффектом, специфическим для гелия II и не имеющим ничего общего с необратимыми явлениями типа эффекта Пельтье. Именно, нагревание при вытекании происходит просто по той причине, что вытекающий через капилляр гелий не уносит с собой тепла, и поэтому имеющееся в сосуде тепло распределяется на меньшее количество гелия II. При втекании гелия в сосуд имеет место обратное явление.

Легко написать, чему равно количество тепла Q, поглощающегося при втекании в сосуд через капилляр 1 *г* гелия. Поскольку втекающая жидкость не содержит квантов возбуждения, её энтропия равна нулю. Для того чтобы находящийся в сосуде гелий остался при своей температуре T, надо было бы сообщить ему количество тепла TS (S — энтропия 1 *г* гелия при температуре T) так, чтобы скомпенсировать уменьшение приходящейся на единицу массы энтропии благодаря введению 1 *г* гелия с равной нулю энтропией. Это значит, что при втекании 1 *г* гелия в сосуд с гелием при температуре T поглощается количество тепла

$$Q = TS. \tag{10,1}$$

Наоборот, при вытекании 1 *г* гелия из сосуда с гелием при температуре T выделяется количество тепла TS.

Рассмотрим теперь два сосуда с гелием II при температурах T_1 и T_2, причём сосуды соединены друг с другом тонким капилляром. Благодаря возможности свободного перетекания сверхтекучей жидкости по капилляру, быстро установится механическое равновесие гелия в обоих сосудах. Поскольку, однако, сверхтекучая жидкость не переносит тепла, тепловое равновесие (при котором температуры гелия в обоих сосудах сравниваются) установится лишь значительно медленнее.

Условие механического равновесия гелия легко написать, воспользовавшись тем, что установление этого равновесия происходит, согласно предыдущему, при постоянной энтропии S_1 и S_2 гелия в обоих сосудах. Если E_1 и E_2 — внутренние энергии единицы массы гелия при температурах T_1 и T_2, то условие механического равновесия (т. е. минимума энергии), осуществляемого переносом сверхтекучей жидкости, будет

$$\left(\frac{\partial E_1}{\partial N}\right)_{S_1} = \left(\frac{\partial E_2}{\partial N}\right)_{S_2},$$

где N — число атомов в 1 *г* гелия. Но производная $(\partial E/\partial N)_S$ есть химический потенциал ζ. Поэтому мы получаем условие равновесия в виде

$$\zeta(P_1, T_1) = \zeta(P_2, T_2)$$

(P_1, P_2 — давление в первом и втором сосудах) или

$$\Phi(P_1, T_1) = \Phi(P_2, T_2),$$

где Φ — термодинамический потенциал гелия II.

Если давления P_1, P_2 малы, то, разлагая по их степеням и помня, что $\partial\Phi/\partial P$ есть удельный объём V, получаем

$$V\Delta P = \Phi(T_1) - \Phi(T_2) = \int_{T_1}^{T_2} S\,dT$$

($\Delta P = P_2 - P_1$). Если мала также и разность температур $\Delta T = T_2 - T_1$, то, разлагая по степеням ΔT и замечая, что $\partial\Phi/\partial T = -S$, получаем

$$\frac{\Delta P}{\Delta T} = \frac{S}{V}. \qquad (10,2)$$

Поскольку $S > 0, V > 0$, то и $\Delta P/\Delta T > 0$ в согласии с экспериментом. Формулы (10,1) и (10,2) полностью подтверждаются опытами П. Л. Капицы.

Формулы (10,1) (10,2) были получены ещё Г. Лондоном[14], исходя из представлений Тиссы, словесная формулировка которых в этом пункте совпадает с результатами теории Ландау.

Отметим, что описанные явления можно наглядно представлять себе как осмотические явления в «растворе» квантов возбуждения в жидком гелии, причём роль полупроницаемой перегородки играют тонкие капилляры или щели.

11. Поведение атомов примесей в гелии II

Представляет интерес вопрос о поведении атомов растворённых в гелии II посторонних веществ; речь может итти, в частности, об атомах изотопа гелия (He^3), примешанного в ничтожной концентрации к основному изотопу (He^4); изложенные ниже соображения принадлежат Л. Ландау и И. Померанчуку [15].

Для теоретического подхода к этому вопросу надо рассмотреть энергетический спектр системы гелий II + атом примеси (концентрация примеси предполагается настолько малой, что её атомы можно считать не взаимодействующими друг с другом). Наличие постороннего атома в жидкости приведёт к появлению новой ветви энергетического спектра, соответствующей движению этого атома через жидкость; разумеется, ввиду сильного взаимодействия атома примеси с атомами жидкости это движение является в действительности «коллективным» эффектом, в котором принимают участие также и атомы гелия. Этому движению можно приписать некоторый результирующий сохраняющийся импульс p'.

Таким образом, в жидкости появятся «элементарные возбуждения» нового типа (в числе, равном числу атомов примеси), энергия ε' которых является определённой функцией от импульса p'. При статистическом равновесии эти возбуждения будут иметь значения энергии, сконцентрированные вблизи наименьшего из минимумов функции $\varepsilon'(p')$. Вблизи минимума функция $\varepsilon'(p')$ имеет вид $\varepsilon' = (p' - p_0')^2/2\mu'$ (ε' отсчитывается от своего минимального значения), где p_0' может быть в частных случаях равным нулю; μ' есть эффективная масса, связанная с движением атома примеси.

Эти новые «элементарные возбуждения» будут взаимодействовать с фононами и ротонами, сталкиваясь с ними, и, таким образом, войдут в состав «нормальной части» жидкости. Поэтому например, при пропускании гелия II через тонкую щель атомы примеси вместе со всей «нормальной жидкостью» отфильтруются *). Подчеркнём, что это обстоятельство не имеет никакого отношения к вопросу о том, обнаружило ли бы само по себе вещество примеси (в частности, чистый изотоп He^3) свойство сверхтекучести, в противоположность высказывавшемуся в литературе [6, 10] неправильному взгляду.

---

*) Такое „отфильтровывание" изотопа He^3 действительно было обнаружено недавно Доунтом, Ниром и др.

III. МАКРОСКОПИЧЕСКАЯ ГИДРОДИНАМИКА ГЕЛИЯ II

12. Система гидродинамических уравнений гелия II

Исходя из развитых выше представлений о микроскопическом механизме явления сверхтекучести, можно построить полную систему гидродинамических уравнений, которые описывали бы гелий II макроскопическим (феноменологическим) образом.

Исходным положением является фундаментальное обстоятельство, что в квантовой жидкости — гелии II — происходят одновременно два движения и, соответственно этому, движение гелия II должно описываться в каждой точке не одной, как в обычной гидродинамике, а двумя скоростями. Мы обозначим посредством $\mathbf{v}_s$ и $\mathbf{v}_n$ скорости соответственно «сверхтекучего» и «нормального» движений. Поскольку сверхтекучее движение всегда потенциально, то

$$\operatorname{rot} \mathbf{v}_s = 0. \tag{12,1}$$

Оказывается, что уравнения гидродинамики с двумя скоростями $\mathbf{v}_s$ и $\mathbf{v}_n$ могут быть получены совершенно однозначным образом из одного только требования, чтобы удовлетворялись все необходимые законы сохранения. Эти уравнения для общего случая произвольных скоростей довольно сложны, и мы не станем приводить их здесь, а ограничимся лишь упрощенным выводом уравнений, применимых к движению с не слишком большими скоростями $\mathbf{v}_s$ и $\mathbf{v}_n$.

Обозначим посредством $\mathbf{j}$ макроскопический поток массы жидкости. Он является функцией обеих скоростей $\mathbf{v}_s$, $\mathbf{v}_n$ и при малых скоростях может быть разложен по их степеням. В первом приближении

$$\mathbf{j} = \rho_s \mathbf{v}_s + \rho_n \mathbf{v}_n. \tag{12,2}$$

Коэффициенты ρ_s и ρ_n являются, очевидно, тем, что мы назвали плотностями сверхтекучей и нормальной «частей» жидкости. Их сумма равна плотности ρ гелия II:

$$\rho = \rho_s + \rho_n; \tag{12,3}$$

ρ_s и ρ_n являются, конечно, функциями температуры. Заметим, что поток массы $\mathbf{j}$ есть в то же время не что иное, как плотность импульса, т. е. импульс единицы объёма жидкости.

Плотность ρ и поток $\mathbf{j}$ должны удовлетворять уравнению непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0. \tag{12,4}$$

Будем рассматривать пока только такие движения жидкости, при которых не играет роли вязкость её нормальной части. Тогда уравнения сохранения количества движения напишутся в виде

$$\frac{\partial j_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} = 0, \tag{12,5}$$

где Π_{ik} есть тензор плотности потока импульса, равный

$$\Pi_{ik}=P\delta_{ik}+\rho_s v_{si}v_{sk}+\rho_n v_{ni}v_{nk}, \tag{12,6}$$

где P — давление (напомним, что в обычной гидродинамике $\Pi_{ik}=P\delta_{ik}+\rho v_i v_k$).

При отсутствии эффектов вязкости нормальной части жидкости движение гелия II обратимо. Соответственно этому должно выполняться уравнение сохранения энтропии

$$\frac{\partial(\rho S)}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho S\mathbf{v}_n)=0 \tag{12,7}$$

(S — энтропия единицы массы гелия II). «Поток энтропии» равен $\rho S\mathbf{v}_n$, поскольку энтропия переносится только нормальной частью жидкости. Поток тепла $\mathbf{q}$ равен, соответственно,

$$\mathbf{q}=\rho TS\mathbf{v}_n. \tag{12,8}$$

Наконец, последнее уравнение полной системы гидродинамических уравнений мы получим, приравняв ускорение $d\mathbf{v}_s/dt$ силе, действующей на единицу «сверхтекучей» массы. Для определения этой силы представим себе, что единица массы жидкости переносится из точки *1* в точку *2*, причём так, что распределение квантов возбуждения в жидкости не меняется. Другими словами, можно сказать, что при переносе смещается только «сверхтекучая жидкость», а распределение «нормальной» остаётся неизменным. Энергия E жидкости меняется при таком переносе на

$$\left(\frac{\partial E}{\partial M}\right)_1-\left(\frac{\partial E}{\partial M}\right)_2$$

(M — масса жидкости). Производные должны браться здесь при постоянной энтропии (поскольку энтропия связана только с нормальной жидкостью) и при постоянном импульсе движения нормальной массы жидкости относительно сверхтекучей *); кроме того, постоянным считается, конечно, и объём жидкости.

Из написанного выражения для изменения энергии видно, что величину $\partial E/\partial M$ можно рассматривать как «потенциальную энергию» сверхтекучей жидкости, так что действующая на неё сила есть

$$-\operatorname{grad}\frac{\partial E}{\partial M}.$$

Для вычисления производной $\partial E/\partial M$ замечаем, что производная от энергии при постоянных энтропии и объёме равна производной

*) Движение сверхтекучей жидкости можно рассматривать как внешние условия, в которых движутся кванты возбуждения. Поэтому функция Лагранжа для движения нормальной части жидкости зависит не просто от её скорости $\mathbf{v}_n$, а от разности скоростей $\mathbf{v}_n-\mathbf{v}_s$. Сохраняющимся импульсом является поэтому производная от функции Лагранжа по $\mathbf{v}_n-\mathbf{v}_s$, т. е. указанный импульс относительного движения.

от термодинамического потенциала при постоянных температуре и давлении. Термодинамический потенциал жидкости $M\Phi$ (Φ — потенциал единицы массы) можно написать в виде суммы термодинамического потенциала неподвижной жидкости и кинетической энергии $\mathbf{P}^2/2M_n$ относительного движения сверхтекучей и нормальной «частей»:

$$M\Phi = M\Phi_0 + \frac{\mathbf{P}^2}{2M_n}.$$

Здесь $\mathbf{P}$ — импульс движения нормальной массы относительно сверхтекучей. Дифференцируя $M\Phi$ по M при постоянных P, T, $\mathbf{P}$ и помня, что нормальная масса M_n пропорциональна (при заданных P и T) полной массе M, получаем

$$\Phi_0 - \mathbf{P}^2/2M_nM.$$

Подставляя сюда $\mathbf{P} = M(\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)$ и заменяя отношение масс отношением плотностей, находим окончательно для искомой производной $(\partial E/\partial M)_{S,V,\mathbf{P}}$ выражение

$$\Phi_0 - \frac{\rho_n}{2\rho}(\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)^2.$$

Следовательно, искомое гидродинамическое уравнение имеет вид

$$\frac{d\mathbf{v}_s}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} + (\mathbf{v}_s\nabla)\mathbf{v}_s = -\operatorname{grad}\left\{\Phi - \frac{\rho_n}{2\rho}(\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)^2\right\}$$

(индекс у Φ_0 опускаем). Его можно написать иначе, заметив, что поскольку всегда $\operatorname{rot}\mathbf{v}_s = 0$, то

$$(\mathbf{v}_s\nabla)\mathbf{v}_s = \operatorname{grad}\frac{v_s^2}{2}.$$

Таким образом,

$$\frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} = -\operatorname{grad}\left\{\Phi + \frac{\mathbf{v}_s^2}{2} - \frac{\rho_n}{2\rho}(\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)^2\right\}. \qquad (12,9)$$

Уравнения (12,1 — 9) составляют полную систему гидродинамических уравнений гелия II. Остаётся написать граничные условия к этим уравнениям. Прежде всего, на всякой (неподвижной) твёрдой поверхности должна обращаться в нуль перпендикулярная к этой поверхности компонента потока массы $\mathbf{j}$. Далее, надо всегда помнить, что «нормальная часть» жидкости есть в действительности совокупность тепловых возбуждений в ней. При движении вдоль твёрдой поверхности кванты возбуждения взаимодействуют с ней, что должно быть описано макроскопически как «прилипание» нормальной части жидкости к стенке подобно тому, как это имеет место для обычных вязких жидкостей. Таким образом, на твёрдой поверхности должна обращаться в нуль тангенциальная компонента скорости $\mathbf{v}_n$.

Что касается перпендикулярной к стенке компоненты $\mathbf{v}_n$, то надо иметь в виду, что кванты возбуждения могут поглощаться твёрдым телом — это соответствует просто теплопередаче от жидкости к твёрдому телу. Поэтому перпендикулярная к стенке компонента скорости $\mathbf{v}_n$ не должна непременно обращаться в нуль; граничное условие требует лишь непрерывности перпендикулярной к стенке компоненты потока тепла $\mathbf{q}$ (12,8). Наконец, должна быть непрерывной температура.

Таким образом, граничные условия на поверхности неподвижного твёрдого тела могут быть написаны в следующем виде (выбираем систему координат с осью x, перпендикулярной к поверхности в данной точке):

$$\rho_s v_{sx} + \rho_n v_{nx} = 0, \qquad v_{ny} = v_{nz} = 0, \tag{12,10}$$

$$\rho T S v_{nx} = -\varkappa\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{\text{тв}}, \qquad T = T_{\text{тв}}, \tag{12,11}$$

где $\varkappa$ есть коэффициент теплопроводности твёрдого тела.

Фактически, однако, вплоть до самых низких температур теплопередача в твёрдом теле чрезвычайно медленна по сравнению с теплопередачей в гелии II, и эффекты, обусловленные теплопроводностью твёрдого тела, оказываются очень малыми. В этих случаях можно положить $\varkappa$ равным нулю, и граничные условия приобретут тогда вид

$$v_{sx} = 0, \quad \mathbf{v}_n = 0. \tag{12,12}$$

Другими словами, мы получим обычные граничные условия идеальной жидкости для $\mathbf{v}_s$ и вязкой жидкости — для $\mathbf{v}_n$.

13. Гидродинамические уравнения для несжимаемой жидкости

Рассмотрим такие движения гелия II, при которых его можно считать несжимаемой жидкостью, как это обычно имеет место для всякого рода обтеканий (Л. Ландау [2]). Будем при этом учитывать также и вязкость нормальной части жидкости.

Для того чтобы учесть вязкость нормальной части жидкости в уравнении (12,5), надо прибавить в тензоре Π_{ik} члены, выражающиеся обычным образом через коэффициент вязкости и производные от скорости $\mathbf{v}_n$ по координатам. Для несжимаемой жидкости

$$\Pi_{ik} = P\delta_{ik} + \rho_s v_{si} v_{sk} + \rho_n v_{ni} v_{nk} - \eta\left(\frac{\partial v_{ni}}{\partial x_k} + \frac{\partial v_{nk}}{\partial x_i}\right), \tag{13,1}$$

где η — коэффициент вязкости нормальной жидкости *). Учёт вязко-

*) Для сжимаемой жидкости в Π_{ik} входит ещё один член, пропорциональный $\operatorname{div} \mathbf{v}_n$ с коэффициентом «второй вязкости». Кроме того, для сжимаемой жидкости дополнительные члены, пропорциональные $\operatorname{div} \mathbf{v}_n$, должны быть добавлены и в уравнении (12,9) (к выражению, стоящему под знаком grad). Таким образом, в гидродинамику гелия II должны, вообще говоря, входить не один, а несколько различных коэффициентов «второй вязкости».

сти приводит также к появлению дополнительных членов в правой части уравнения (12,7), выражающих увеличение энтропии в результате необратимых процессов вязкого трения. Эти члены, однако, вообще говоря, оказываются малыми более высокого порядка, чем дополнительные члены в (12,5), и потому могут быть попрежнему опущены.

Считая плотности ρ_s, ρ_n и энтропию S постоянными, имеем из уравнения (12,7): $\operatorname{div}\mathbf{v}_n=0$, а из уравнения (12,4) $\operatorname{div}\mathbf{j}=0$, или, иначе,

$$\operatorname{div}\mathbf{v}_n=\operatorname{div}\mathbf{v}_s=0. \tag{13,2}$$

Имея в виду эти равенства и подставляя (13,1) в (12,5), получим уравнение

$$\rho_s\frac{\partial\mathbf{v}_s}{\partial t}+\rho_n\frac{\partial\mathbf{v}_n}{\partial t}+\rho_s(\mathbf{v}_s\nabla)\mathbf{v}_s+\rho_n(\mathbf{v}_n\nabla)\mathbf{v}_n=-\nabla P+\eta\Delta\mathbf{v}_n. \tag{13,3}$$

Уравнение же (12,9) остаётся неизменным.

Поскольку сверхтекучее движение потенциально, то можно ввести потенциал φ_s скорости $\mathbf{v}_s$ согласно

$$\mathbf{v}_s=\operatorname{grad}\varphi_s. \tag{13,4}$$

Ввиду $\operatorname{div}\mathbf{v}_s=0$ потенциал φ_s должен удовлетворять уравнению Лапласа

$$\Delta\varphi_s=0. \tag{13,5}$$

Вводя φ_s в уравнение (13,3) и написав $(\mathbf{v}_s\nabla)\mathbf{v}_s=\nabla\frac{v_s^2}{2}$, получим

$$\rho_n\frac{\partial\mathbf{v}_n}{\partial t}+\rho_s\frac{\partial\mathbf{v}_s}{\partial t}+\rho_n(\mathbf{v}_n\nabla)\mathbf{v}_n+\rho_s\operatorname{grad}\frac{v_s^2}{2}+\rho_s\operatorname{grad}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=$$
$$=-\nabla P+\eta\Delta\mathbf{v}_n.$$

Введём в качестве двух вспомогательных величин «давления» нормального и сверхтекучего потока P_n и P_s согласно уравнению

$$P=P_0+P_n+P_s, \tag{13,6}$$

где P_0 есть давление на бесконечности, а P_s определяется обычной для идеальной жидкости формулой

$$P_s=-\rho_s\frac{\partial\varphi_s}{\partial t}-\frac{\rho_s v_s^2}{2}. \tag{13,7}$$

Уравнение движения для скорости $\mathbf{v}_n$ приобретает тогда вид

$$\frac{\partial\mathbf{v}_n}{\partial t}+(\mathbf{v}_n\nabla)\mathbf{v}_n=-\frac{1}{\rho_n}\nabla P_n+\frac{\eta}{\rho_n}\Delta\mathbf{v}_n. \tag{13,8}$$

Это уравнение совпадает формально с уравнением Навье-Стокса

для жидкости плотности ρ_n и вязкости η (и, соответственно, с кинематической вязкостью η/ρ_n).

Таким образом, задача о движении несжимаемого гелия II оказывается сведённой к двум задачам обычной гидродинамики для идеальной и для вязкой жидкостей. Именно, распределение сверхтекучей скорости $\mathbf{v}_s$ определяется решением уравнения Лапласа (13,5) с граничным условием для $\partial\varphi_s/\partial n$, как в обычной задаче о потенциальном обтекании идеальной жидкостью. Далее, распределение нормальной скорости $\mathbf{v}_n$ определяется решением уравнения Навье-Стокса (13,8) с таким же граничным условием для $\mathbf{v}_n$, как в обычной задаче об обтекании вязкой жидкостью. Распределение давления определяется затем по формуле (13,6).

Наконец, выведем формулу, определяющую распределение температуры в движущемся гелии II. Написав в уравнении (12,9) $\mathbf{v}_s=\nabla\varphi_s$ и интегрируя, получим

$$\Phi+\frac{v_s^2}{2}-\frac{\rho_n}{2\rho}(\mathbf{v}_n-\mathbf{v}_s)^2+\frac{\partial\varphi_s}{\partial t}=\text{const}. \tag{13,9}$$

Изменения температуры и давления в несжимаемой жидкости малы, и поэтому термодинамический потенциал может быть разложен по степеням $T-T_0$ и $P-P_0$ (T_0, P_0 — температура и давление на бесконечности). С точностью до членов первого порядка имеем

$$\Phi-\Phi_0=-S(T-T_0)+\frac{1}{\rho}(P-P_0).$$

Подставляя это выражение в (13,9), получим

$$-S(T-T_0)+\frac{1}{\rho}(P-P_0)+\frac{v_s^2}{2}-\frac{\rho_n}{2\rho}(\mathbf{v}_n-\mathbf{v}_s)^2+\frac{\partial\varphi_s}{\partial t}=0.$$

Вводя P_s и P_n, получим окончательно

$$T-T_0=\frac{\rho_n}{\rho S}\left\{\frac{P_n}{\rho_n}-\frac{P_s}{\rho_s}-\frac{(\mathbf{v}_n-\mathbf{v}_s)^2}{2}\right\}. \tag{13,10}$$

14. Распространение звука в гелии II

Применим уравнения гидродинамики гелия II к распространению звука в этой жидкости. Как обычно, в звуковой волне скорости движения предполагаются малыми, а плотность, давление, энтропия — почти равными своим постоянным равновесным значениям. Тогда систему гидродинамических уравнений можно линеаризовать — в (12,6) и в (12,9) пренебрегаем квадратичными по скорости членами, а в уравнении (12,7) можно вынести в члене $\operatorname{div}(S\rho\mathbf{v}_n)$ энтропию ρS из-под знака div (поскольку этот член уже содержит малую величину $\mathbf{v}_n$).

Таким образом, система гидродинамических уравнений приобретает вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \tag{14,1}$$

$$\frac{\partial (S\rho)}{\partial t} + S\rho \operatorname{div} \mathbf{v}_n = 0, \tag{14,2}$$

$$\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} + \nabla P = 0, \tag{14,3}$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} + \nabla \Phi = 0. \tag{14,4}$$

Дифференцируя (14,1) по времени и подставляя в (14,3), получаем

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = \Delta P. \tag{14,5}$$

Для термодинамического потенциала имеет место соотношение

$$d\Phi = -S\,dT + V\,dP = -S\,dT + \frac{1}{\rho}\,dP$$

(V — удельный объём). Отсюда имеем

$$\nabla P = \rho S \nabla T + \rho \nabla \Phi,$$

или, подставляя ∇P из (14,3) и $\nabla \Phi$ из (14,4),

$$\rho_n \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s) + \rho S\, \Delta T = 0.$$

Применяем к этому уравнению операцию div, а для $\operatorname{div}(\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_n)$ подставляем выражение

$$\operatorname{div}(\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_n) = \frac{\rho}{\rho_s S} \frac{\partial S}{\partial t},$$

следующее из равенства

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial (S\rho)}{\partial t} - \frac{S}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} = -S \operatorname{div} \mathbf{v}_n + \frac{S}{\rho} \operatorname{div} \mathbf{j} =$$

$$= \frac{S\rho_s}{\rho} \operatorname{div}(\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_n).$$

В результате получаем уравнение

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = \frac{\rho_s S^2}{\rho_n}\, \Delta T. \tag{14,6}$$

Уравнения (14,5—6) определяют распространение звука в гелии II. Уже из того факта, что этих уравнений — два, видно, что в гелии II должны существовать две скорости распространения звука.

Напишем S, P, ρ, T в виде $S = S_0 + S'$, $P = P_0 + P'$ и т. д., где величины со штрихом представляют собой обусловленные звуковой волной малые изменения соответствующих величин, а величины с индексом 0 — их постоянные равновесные значения. Тогда можно написать

$$\rho' = \frac{\partial \rho}{\partial P} P' + \frac{\partial \rho}{\partial T} T', \qquad S' = \frac{\partial S}{\partial P} P' + \frac{\partial S}{\partial T} T',$$

и уравнения (14, 5—6) принимают вид

$$\frac{\partial\rho}{\partial P}\frac{\partial^2 P'}{\partial t^2}-\Delta P'+\frac{\partial\rho}{\partial T}\frac{\partial^2 T'}{\partial t^2}=0,$$

$$\frac{\partial S}{\partial P}\frac{\partial^2 P'}{\partial t^2}+\frac{\partial S}{\partial T}\frac{\partial^2 T'}{\partial t^2}-\frac{S^2\rho_s}{\rho_n}\Delta T'=0.$$

Ищем решение этих уравнений в виде плоской волны, в которой P' и T' пропорциональны множителю $e^{i\omega(t-x/u)}$ (u — скорость звука). В качестве условия совместности обоих уравнений получаем уравнение

$$u^4\frac{\partial(S,\rho)}{\partial(T,P)}-u^2\left(\frac{\partial S}{\partial T}+S^2\frac{\rho_s}{\rho_n}\frac{\partial\rho}{\partial P}\right)+\frac{\rho_s S^2}{\rho_n}=0$$

(где

$$\frac{\partial(S,\rho)}{\partial(T,P)}$$

обозначает якобиан преобразования от S,ρ к T,P).

Путём простого преобразования с использованием термодинамических соотношений этому уравнению можно придать вид

$$u^4-u^2\left[\left(\frac{\partial P}{\partial\rho}\right)_S+\frac{\rho_s T S^2}{\rho_n c_v}\right]+\frac{\rho_s T S^2}{\rho_n c_v}\left(\frac{\partial P}{\partial\rho}\right)_T=0 \qquad (14,7)$$

(c_v — теплоёмкость, отнесённая к единице массы). Это квадратное (по u^2) уравнение определяет две скорости распространения звука в гелии II.

При $\rho_s=0$, т. е. в λ-точке, один из корней уравнения (14,7) обращается в нуль, и мы получаем, как и должно было быть, всего одну обычную скорость звука $u=\sqrt{(\partial P/\partial\rho)_S}$ (которую мы выше обозначали посредством c).

Практически, при всех температурах теплоёмкости c_p и c_v близки друг к другу. Согласно известной термодинамической формуле, при этих условиях близки друг к другу также и изотермическая и адиабатическая сжимаемости:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial\rho}\right)_T\cong\left(\frac{\partial P}{\partial\rho}\right)_S.$$

Обозначив общее значение c_p и c_v посредством C, а общее значение $(\partial P/\partial\rho)_T$ и $(\partial P/\partial\rho)_S$ просто как $\partial P/\partial\rho$, получим из уравнения (14,7) следующие два выражения для скоростей звука:

$$u_1=\sqrt{\frac{\partial P}{\partial\rho}},\quad u_2=\sqrt{\frac{T S^2\rho_s}{C\rho_n}}. \qquad (14,8)$$

Таким образом, одна из скоростей (u_1) почти постоянна, а другая (u_2) сильно зависит от температуры, обращаясь в нуль в λ-точке*).

Вблизи абсолютного нуля, где $(\rho_n)_\Phi \gg (\rho_n)_P$, для теплоёмкости и энтропии можно пользоваться их «фононными» выражениями (5,3)

*) Элементарный вывод формулы для скорости u предложен Гогейтом и Патаком [17].

и (5,2), а отношение ρ_n/ρ определяется формулой (8,2). Подставляя эти выражения в формулу (14,8) для u_2, найдём

$$u_2 = \frac{u_1}{\sqrt{3}}. \tag{14,9}$$

Таким образом, при стремлении температуры к нулю скорость u_2

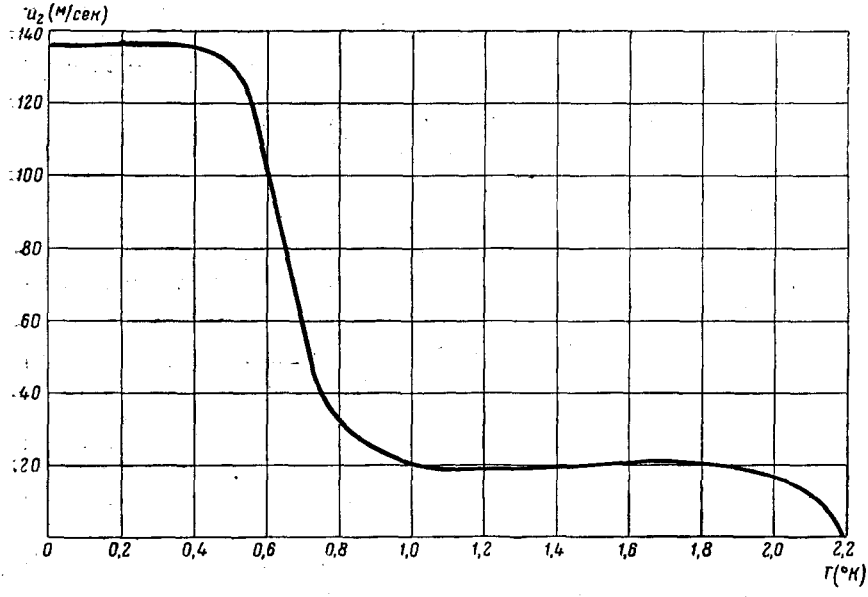

Рис. 5. Скорость «второго звука» в гелии II.

(как и u_1) стремится к постоянному пределу, причём так, что их отношение стремится к $1/\sqrt{3}$.

График температурной зависимости скорости «второго звука» изображён на рис. 5.

Для лучшего выяснения физической природы обоих видов звуковых волн в гелии II рассмотрим плоскую звуковую волну. В такой волне скорости v_s, v_n и переменные части T', P' температуры и давления пропорциональны друг другу. Введём коэффициенты пропорциональности согласно

$$\mathbf{v}_n = a\mathbf{v}_s, \quad P' = bv_s, \quad T' = cv_s. \tag{14,10}$$

Простое вычисление с помощью уравнений (14,1 — 6), произведённое с должной степенью точности (Е. Лифшиц[18]), даёт для «первого звука»

$$a_1 = 1 + \frac{\alpha\rho}{S\rho_s}\frac{u_1^2 u_2^2}{(u_1^2 - u_2^2)}, \quad b_1 = \rho u_1, \quad c_1 = \frac{\alpha T}{C}\frac{u_1^3}{(u_1^2 - u_2^2)}, \tag{14,11}$$

а для «второго звука»

$$a_2 = -\frac{\rho_s}{\rho_n} + \frac{\alpha\rho}{S\rho_n}\frac{u_1^2 u_2^2}{(u_1^2 - u_2^2)}, \quad b_1 = \frac{\alpha\rho u_1^2 u_2^3}{S(u_1^2 - u_2^2)}, \quad c_2 = -\frac{u_2}{S} \qquad (14,12)$$

($\alpha = \frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial T}$ — коэффициент теплового расширения). Величины, содержащие α, малы по сравнению с соответствующими величинами, не содержащими α.

Мы видим, что в звуковой волне первого типа $\mathbf{v}_n \cong \mathbf{v}_s$, т. е. в такой волне в каждом элементе объёма жидкость колеблется, в первом приближении, как целое; нормальная и сверхтекучая части движутся вместе. Естественно, что эти волны соответствуют обычным звуковым волнам в обычных жидкостях.

В волне же второго типа имеем $\mathbf{v}_n \cong -\frac{\rho_s}{\rho_n}\mathbf{v}_n$, т. е. полная плотность потока вещества

$$\mathbf{j} = \rho_s \mathbf{v}_s + \rho_n \mathbf{v}_n \cong 0.$$

Таким образом в волне «второго звука» сверхтекучая и нормальная части жидкости колеблются «навстречу друг другу», так что в первом приближении их «центр инерции» в каждом элементе объёма остаётся неподвижным и суммарный поток вещества отсутствует. Ясно, что этот вид волн специфичен для гелия II.

Существенным отличием обоих видов волн является также и то, что в волне второго звука амплитуда колебаний давления относительно мала, а амплитуда колебаний температуры велика [как это видно из формул (14,12)], между тем как в волне «обычного звука» имеет место обратное положение.

15. Излучение звука в гелии II

Вопрос о различных способах возбуждения звуковых волн в гелии II был рассмотрен Е. М. Лифшицем[18]. Оказалось, что обычные механические способы возбуждения звука (колеблющимися твёрдыми телами) крайне невыгодны для получения «второго звука» в том смысле, что интенсивность излучаемого «второго звука» ничтожна по сравнению с интенсивностью одновременно излучаемого обычного звука.

Рассмотрим, для примера, излучение звуковых волн плоскостью, совершающей колебания в перпендикулярном себе направлении (которое выбираем в качестве направления оси x). Ищем скорости $\mathbf{v}_s$ (направленные по оси x) в «первой» и «второй» излучаемых волнах, соответственно, в виде

$$v_s^{(1)} = A_1 \cos\omega\left(t - \frac{x}{u_1}\right), \quad v_s^{(2)} = A_2 \cos\omega\left(t - \frac{x}{u_2}\right)$$

(ω — частота колебаний плоскости). Граничные условия на поверхности твёрдого тела требуют равенства скорости тела перпендикулярным к его поверхности компонентам скоростей $\mathbf{v}_s$, $\mathbf{v}_n$ (ср. условия (12,10) на неподвижном теле). В данном случае это даёт уравнения

$$A_1 + A_2 = v_0, \quad A_1 a_1 + A_2 a_2 = v_0$$

($v_0 \cos \omega t$ — скорость колебаний твёрдой плоскости), откуда

$$\frac{A_2}{A_1} = -\frac{1-a_1}{1-a_2}.$$

Как при всяких малых колебаниях, средняя (по времени) потенциальная энергия равна средней кинетической энергии. Поэтому полная плотность энергии в звуковой волне в гелии II равна

$$\rho_s \overline{v_s^2} + \rho_n \overline{v_n^2} = \frac{1}{2} A^2 (\rho_s + \rho_n a^2);$$

поток энергии (интенсивность) получается последующим умножением на соответствующую скорость звука u. С помощью значений a_1, a_2 из (14,11—12) получаем, таким образом, для отношения интенсивностей излучаемых волн «второго» и «первого» звуков

$$\frac{I_2}{I_1} \simeq \frac{\alpha^2 T}{C} \frac{u_2^3}{u_1} \tag{15,1}$$

(здесь предположено, что $u_2 \ll u_1$, что справедливо вплоть до очень низких температур). При 2° К, например, это отношение равно $2 \cdot 10^{-6}$, т. е. «второй звук» практически не излучается.

В гелии II возможны, однако, ещё и другие, специфические для него способы возбуждения звуковых волн, невозможные в обычных жидкостях. Таковы излучение звука пластинкой, совершающей колебания в своей плоскости и при этом «увлекающей» собой нормальную часть жидкости *), а также излучение от поверхности с периодически меняющейся со временем температурой. Этот второй способ в особенности выгоден для получения «второго звука».

Пусть температура плоской твёрдой поверхности меняется по закону $T' = T_0' \cos \omega_0 t$. Условия непрерывности температуры и обращения в нуль перпендикулярной к плоскости компоненты полного потока вещества $\mathbf{j}$ [см. (12,10—11)] дают

$$\rho_s (A_1 + A_2) + \rho_n (a_1 A_1 + a_2 A_2) = 0, \quad c_1 A_1 + c_2 A_2 = T_0'.$$

Для отношения A_2/A_1 имеем

$$\left|\frac{A_2}{A_1}\right| = \frac{\rho_n a_1 + \rho_s}{\rho_n a_2 + \rho_s} \simeq \frac{S}{\alpha u_2^2}.$$

Отсюда находим для отношения интенсивностей

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{C}{T\alpha^2 u_1 u_2}. \tag{15,2}$$

*) Этот способ был предложен П. Л. Капицей.

При 2° К эта величина равна $5\cdot10^3$, а при более низких температурах — ещё больше. Таким образом, в отношении интенсивности здесь излучается практически лишь второй звук. Для отношения амплитуд давления и температуры имеем

$$\frac{P_2'}{P_1'}=\frac{b_2A_2}{b_1A_1},\quad \frac{T_2'}{T_1'}=\frac{c_2A_2}{c_1A_1},$$

откуда

$$\frac{P_2'}{P_1'}=\frac{u_2}{u_1},\quad \frac{T_2'}{T_1'}=\frac{C}{\alpha^2Tu_1u_2}. \tag{15,3}$$

При 2° К $P_2'/P_1'=0{,}1$, так что условия для наблюдения «второго звука» по изменению давления всё ещё неблагоприятны. Условия же наблюдения «второго звука» по изменению температуры, напротив, весьма благоприятны.

16. Рассеяние света в гелии II

Рассеяние света в гелии II должно обнаруживать некоторые особенности по сравнению с рассеянием света в обычных жидкостях (В. Л. Гинзбург [19]). Хотя эти явления и находятся, повидимому, вне пределов экспериментальных возможностей, они представляют всё же определённый теоретический интерес.

Прежде всего необходимо отметить, что высказывавшееся в литературе [20,21,22] ожидание аномально сильного рассеяния света в гелии II совершенно не обосновано. Его связывали с рассеянием света идеальным бозе-эйнштейновским газом, который вблизи точки конденсации должен рассеивать свет чрезвычайно сильно. Поскольку, однако, бозе-эйнштейновская конденсация не имеет отношения к свойствам гелия II, то нет оснований и для перенесения на гелий II оптических свойств такого газа.

Полная интенсивность рассеяния света в гелии II определяется известной общей формулой для рассеяния, связанного с флуктуациями плотности в любом изотропном теле (жидкости или газе)

$$I=\frac{\pi^2V}{2\lambda^4}\left(\rho\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)^2\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial P}\right)_T kT(1+\cos^2\varphi).$$

Здесь I — отношение интенсивности рассеянного света (рассчитанной на единицу телесного угла) к плотности потока падающего света, V — рассеивающий объём, λ — длина световой волны в вакууме, $\varepsilon=n^2$ — квадрат показателя преломления, φ — угол рассеяния (свет предполагается неполяризованным). Оценка с помощью этой формулы показывает, что для гелия вблизи λ-точки получается $I\sim2\cdot10^{-8}$ (при $V=1$ *см*^{3}, $\lambda=4\cdot10^{-5}$ *см*), что примерно равно интенсивности рассеяния света воздухом при комнатной температуре *).

*) Отсутствие аномально большого рассеяния было действительно установлено на опыте Мак-Леннаном и др.

Как известно, флуктуации плотности можно разделить на адиабатические и изобарические *). Флуктуации первого типа распространяются в жидкости со скоростью звука. Рассеяние на этих флуктуациях приводит к расщеплению линии рассеяния на так называемый дублет Мандельштама-Бриллюена с относительным расстоянием между компонентами $\frac{\Delta\omega}{\omega} \sim \frac{u}{c}$ (c — скорость света, u — скорость звука). Изобарические же флуктуации (флуктуации энтропии) в обычной жидкости не распространяются и рассеиваются благодаря теплопроводности. Рассеяние на этих флуктуациях не меняет частоты света. В результате линия рассеяния представляет собой триплет с несмещённой компонентой посредине.

В гелии II положение меняется, так как флуктуации энтропии тоже распространяются в жидкости со скоростью второго звука u_2. Поэтому наряду с обычным дублетом (с относительным расщеплением $\frac{\Delta\omega_1}{\omega} \sim \frac{u_1}{c}$) должен наблюдаться ещё один дублет, расположенный внутри первого, с относительным расщеплением $\frac{\Delta\omega_2}{\omega} \sim \frac{u_2}{c}$. Таким образом в результате линия рассеяния должна представлять собой квадруплет. Надо, однако, иметь в виду, что не только интервал между компонентами «аномального» дублета очень мал, но и его интенсивность (как показывает соответствующая оценка) ничтожно мала по сравнению с интенсивностью нормального дублета.

17. Вязкость гелия II

Особой проблемой теории гелия II является вопрос о вычислении его вязкости (вязкости его «нормальной части»). Он был рассмотрен в самое последнее время Л. Ландау и И. Халатниковым. Мы изложим здесь кратко результаты их работы, опустив весьма сложные и длинные вычисления.

В вопросе о вязкости мы сталкиваемся с явлением кинетического характера, связанным с процессами установления равновесия в фононном и ротонном «газе». Вычисление вязкости требует в первую очередь исследования различных типов элементарных процессов столкновений между частицами этого газа и вычисления их эффективных сечений **).

*) Написав малое изменение плотности в виде

$$\Delta\rho = (\partial\rho/\partial P)_S \Delta P + (\partial\rho/\partial S)_P \Delta S$$

и помня, что флуктуации давления и энтропии независимы ($\overline{\Delta P \Delta S} = 0$), найдём, что средняя квадратичная флуктуация $\overline{(\Delta\rho)^2}$ представляется в виде суммы адиабатической флуктуации давления и изобарической флуктуации энтропии (с соответствующими коэффициентами).

**) Упомянем, что А. Ахиезер и И. Померанчук[23] рассматривали столкновения медленных нейтронов с ротонами и фононами с целью определения интенсивности рассеяния нейтронов в гелии II (оказалось, что гелий II практически «прозрачен» для медленных нейтронов).

Перенос количества движения в гелии II (при наличии в нём градиента скорости) осуществляется как фононами, так и ротонами. Соответственно этому, вязкость можно условно представить в виде суммы двух частей — фононной и ротонной. Рассмотрим сначала ротонную часть вязкости.

Согласно известной формуле кинетической теории газов, порядок величины вязкости газа определяется формулой

$$\eta \sim mvln,$$

где m — масса молекулы газа, v — её средняя тепловая скорость, l — длина свободного пробега молекул, n — их число в единице объёма. Из формулы (8,3) видно, что роль массы частицы в ротонном газе играет величина $p_0^2/3kT$ (ротонная часть плотности ρ_n получается умножением этой величины на число ротонов). Средняя тепловая скорость ротона определяется из $v^2 \sim \overline{(p-p_0)^2}/\mu^2 \sim kT/\mu$. Таким образом для ротонной вязкости имеем

$$\eta_{\text{р}} \sim \frac{p_0^2}{\sqrt{\mu kT}} ln_{\text{р}}. \qquad (17,1)$$

Для определения длины свободного пробега ротонов надо рассмотреть различные типы столкновений, испытываемых ротонами: 1) упругие столкновения ротонов друг с другом, 2) упругие столкновения ротонов с фононами, 3) различного рода неупругие столкновения ротонов с ротонами, сопровождающиеся испусканием (или поглощением) новых ротонов или фононов. Вычисления показывают, что вероятность различных процессов неупругого рассеяния ротонов ротонами значительно меньше вероятности упругого рассеяния, как это, впрочем, и можно было ожидать заранее. Что же касается столкновений ротонов с фононами, то при не слишком низких температурах вероятность этих процессов значительно меньше вероятности упругого рассеяния ротонов ротонами, в связи с тем, что число фононов очень мало по сравнению с числом ротонов. Лишь при достаточно низких температурах (начиная примерно от 0,5° К), вследствие резкого уменьшения числа ротонов по сравнению с числом фононов, начинают преобладать столкновения ротонов с фононами. Надо, однако, иметь в виду, что при температурах ниже 0,5° К обычное понятие вязкости практически вообще теряет смысл, так как длины свободного пробега фононов и ротонов становятся, как показывает вычисление, порядка 1 *см*, т. е. сравниваются с размерами приборов и сосудов, с помощью которых обычно производятся измерения вязкости.

Оставляя поэтому в стороне область очень низких температур, мы можем, следовательно, сказать, что длина свободного пробега ротонов определяется в основном их упругими столкновениями друг с другом. Обозначая эффективное сечение этих столкновений по-

средством σ_{pp}, имеем $l \sim 1/n_p \sigma_{pp}$. Эффективное сечение σ_{pp} для ротонов со средней тепловой скоростью оказывается обратно пропорциональным $\sqrt{T}$; подставляя в формулу (17,1), мы приходим к выводу, что ротонная часть вязкости есть не зависящая от температуры постоянная величина *)

$$\eta_p = \text{const}. \tag{17,2}$$

Вычисление фононной части вязкости в особенности сложно. Тщательный анализ различных процессов упругих и неупругих столкновений фононов друг с другом и с ротонами приводит к следующим результатам.

При температурах выше примерно чем 0,8° К основную роль в переносе импульса играют упругие столкновения фононов с ротонами. Эффективное сечение $\sigma_{фр}$ этих столкновений (для фононов со средней тепловой энергией **)) может быть вычислено, и оказывается пропорциональным T^4. Качественно эту зависимость можно получить, если заметить, что благодаря большой величине импульса ротонов по сравнению со средним импульсом фононов ($p_0 \gg kT/c$) рассеяние фононов на ротонах должно происходить аналогично рассеянию звуковых волн на неподвижном твёрдом шарике. Как известно, эффективное сечение такого рассеяния пропорционально четвёртой степени частоты звука. Поэтому мы можем заключить, что эффективное сечение рассеяния фонона на ротоне пропорционально четвёртой степени волнового вектора (т. е. импульса) фонона, откуда (ввиду соотношения $p \sim kT/c$) получается указанная выше температурная зависимость.

В газокинетической формуле $\eta \sim mvln$ надо заменить теперь произведение mn фононной частью плотности ρ_n [формула (8,2)],

---

*) Для точного вычисления вероятности столкновений ротонов с ротонами необходимо было бы знать закон их взаимодействия друг с другом. Существующая теория не даёт возможности сделать по этому поводу каких-либо определённых заключений. Однако для определения температурной зависимости эффективного сечения можно обойтись с помощью приёма, известного из теории рассеяния нейтронов, написав энергию взаимодействия U двух ротонов в виде δ-функции от разностей их координат: $U = U_0 \delta(r_2 - r_1)$, где U_0 — некоторая постоянная.

Вычисленная с помощью теории возмущений вероятность столкновения двух ротонов (находящихся в некотором объёме Ω) оказывается постоянной величиной, выражающейся только через p_0, μ, U_0 (и $\hbar$). Это, впрочем, можно было заранее ожидать на основании того, что импульсы ротонов близки по абсолютной величине к постоянной величине p_0 (что и учитывается при вычислении). Эффективное сечение получается умножением полученной вероятности на Ω/v, откуда и получается указанный в тексте закон.

Точное выражение для вязкости (через постоянные p_0, μ, U_0) может быть получено путём решения соответствующего кинетического уравнения.

**) Существенно, что процессы обмена энергией фононов друг с другом и установление равновесия по энергии происходят, как показывает исследование, очень быстро.

а скорость v — скоростью звука c. Написав также для длины свободного пробега $l \sim 1/\sigma_{\text{фр}} n_{\text{р}}$, получим

$$\eta_{\text{ф}} \sim \frac{k^4 T^4}{\hbar^3 c^4 \sigma_{\text{фр}} n_{\text{р}}}.$$

Число ротонов, согласно формуле (5,5), зависит от температуры по закону $\sqrt{T} e^{-\Delta/kT}$. Учитывая также, что $\sigma_{\text{фр}} \sim T^4$, найдём следующий закон температурной зависимости фононной вязкости (при $T \gtrsim 0{,}8°$ K):

$$\eta_{\text{ф}} \sim T^{-1/2} e^{\Delta/kT}. \tag{17,3}$$

При температурах ниже $\sim 0{,}8°$ K, вследствие резкого уменьшения числа ротонов, основную роль начинает играть рассеяние фононов фононами. В этой области температур вычисления приводят к следующей температурной зависимости вязкости:

$$\eta_{\text{ф}} \sim T^{-5}. \tag{17,4}$$

Таким образом мы видим, что фононная часть вязкости возрастает с уменьшением температуры по очень быстрому закону — сначала экспоненциально, а затем, как $1/T^5$. Существенно, что в обеих указанных областях температуры оказывается возможным не только определение температурной зависимости фононной вязкости, но и полное вычисление её абсолютной величины, причём в получающиеся выражения не входят никакие неопределённые постоянные (вроде постоянной U_0, характеризующей взаимодействие двух ротонов — см. примечание на стр. 554). Это обстоятельство позволяет произвести сравнение теоретических результатов с экспериментом без введения новых параметров. Следует, однако, иметь в виду, что в выражение для вязкости входят не только такие величины, как μ, Δ, p_0, c, но и их производные по плотности жидкости. Эти производные могут быть определены с помощью имеющихся экспериментальных данных об изменении скоростей первого и второго звуков с давлением; такое определение, однако, может быть сделано в настоящее время лишь со сравнительно небольшой точностью.

Систематические измерения вязкости гелия II были произведены в последнее время Э. Андроникашвили. Он нашёл, что в области от 1,9° K до 1,6° K вязкость остаётся почти постоянной, а при дальнейшем понижении температуры быстро возрастает (измерения производились до 1,3° K) *). Если вычесть из экспериментальных значений вязкости значения $\eta_{\text{ф}}$, вычисленные по теоретической формуле,

*) В области от λ-точки до 1,9° K вязкость падает с уменьшением температуры. В этой области, однако, теряют уже смысл понятия ротонного и фононного газов и теоретическое вычисление вязкости становится вообще невозможным.

то получается примерно постоянная величина, которую можно отождествить с ротонной частью вязкости *). Таким образом обнаруживается вполне удовлетворительное согласие между теорией и экспериментом.

18. Работы Л. Тиссы по теории гелия II

Как уже указывалось в § 1, в своих первых работах Л. Тисса, следуя Ф. Лондону, рассматривал гелий II как идеальный бозе-эйнштейновский газ. В его более поздних работах[9, 10] речь идёт о «квантовой бозе-эйнштейновской жидкости», но приходится констатировать, что это отличие имеет в работах Тиссы скорее фразеологический, чем физический, характер. Оно сводится к нескольким бессодержательным утверждениям о волновой функции системы из многих частиц, после чего попрежнему говорится об атомах (!), «конденсированных» на наиболее низком состоянии, и о возбуждённых атомах (энергия возбуждения которых называется автором «трансляционными квантами»). Между тем такое рассмотрение движения отдельных атомов в системе сильно взаимодействующих частиц (жидкости) полностью противоречит основным принципам квантовой механики. Напротив, неизбежным следствием квантовой механики является, как известно, возможность введения для любой слабовозбуждённой макроскопической системы понятия об элементарных возбуждениях (лежащего в основе микроскопической теории Л. Ландау), описывающих «коллективное» движение частиц, причём каждому такому возбуждению могут быть приписаны определённая энергия ε и эффективный импульс p (вне зависимости от конкретной функциональной связи $\varepsilon(p)$, т. е. от вида спектра).

Хотя, таким образом, микроскопическая теория в работах Тиссы по существу вовсе отсутствует, необходимо в то же время отметить его несомненную заслугу, заключающуюся во введении, независимо от Л. Ландау **), идеи о макроскопическом описании гелия II с помощью разделения его плотности на две части и введения двух полей скоростей. На основании этих представлений он предсказал

*) Сравнивая получающееся таким образом значение вязкости с её теоретическим выражением, можно определить постоянную U_0, характеризующую взаимодействие ротонов. С другой стороны, через эту же постоянную можно выразить коэффициент в «ван-дер-ваальсовской поправке», которую можно ввести с целью учесть неидеальность ротонного газа, возникающую при приближении к λ-точке (ρ_n пишется при этом в виде $\rho_n = (\rho_n)_p\,[1 + \alpha(\rho_n)_p]$, где $(\rho_n)_p$ есть «идеально-газовое» выражение (8,3), а α — постоянная). Это даёт возможность независимого определения U_0, исходя из данных об отношении ρ_n/ρ при температурах около 1,9 — 2,0° K. Полученные обоими способами значения U_0 оказываются одинакового порядка величины.

**) Подробная статья Тиссы 1940 г.[9] была получена в СССР, в силу условий военного времени, только в 1943 г., а короткая заметка[8] в Докладах Парижской Академии наук осталась в своё время незамеченной.

ещё в 1938 г., существование второго вида звуковых волн в гелии II (названных им температурными волнами).

Однако Тиссе не удалось построить количественно правильной и последовательной гидродинамической и термодинамической теории гелия II. Макроскопической теории посвящена в основном также и его последняя статья[10]. Но чтение этой статьи создаёт явное впечатление, что при её составлении существенную роль играло стремление автора приписать себе также и не принадлежащие ему результаты. Термодинамический вывод гидродинамических уравнений, граничные условия к ним, термодинамическая формула для скорости второго звука, обсуждение опытов по измерению вязкости и т. д. излагаются автором без всякого упоминания того, что всё это было сделано Ландау (между тем как в предыдущих статьях Тиссы[9] этих формул не было) *).

В то же время в статье Тиссы[10] содержится много неправильных утверждений; ввиду того что эти утверждения могут дать повод к недоразумениям, мы остановимся на них подробнее.

Основная ошибка Тиссы заключается в непонимании им роли фононов. Тисса исключает фононы из нормальной части плотности гелия II, аргументируя тем, что фононы «связаны с жидкостью как целым», в противоположность «возбуждённым атомам гелия в трансляционных состояниях блоховского типа» (составляющих в его теории нормальную часть жидкости). Это утверждение, как и его аргументация, в корне неправильны. Фононы, как и ротоны, в равной степени относятся к «коллективному» движению атомов жидкости (хотя фононы и обладают большей длиной волны, чем ротоны) и, согласно квантовой механике, в равной степени могут рассматриваться как некоторые «квази-частицы», обладающие импульсами. Не говоря уже о том, что неизбежность увлечения фононов (как и ротонов) движущимися стенками доказывается строгими термодинамическими рассуждениями § 7 **), уже a priori очевидно, что, например, при проте-

*) Характерно, что Тисса использует всю предложенную Ландау терминологию опять-таки без всяких ссылок. Так, он пользуется нормальной и сверхтекучей плотностями ρ_n и ρ_s (и соответствующими скоростями), между тем как в предыдущих статьях речь шла о плотности вырожденных и возбуждённых атомов ρ_{deg} и ρ_{exc}.

) Замечание Тиссы о неубедительности этих рассуждений (так как они «используются для получения сведений о кинетическом коэффициенте (вязкости), исходя из соображений равновесия») является чистым недоразумением. Общеизвестно, что равномерное вращение допускает строго термодинамическое рассмотрение, и в рассуждениях § 7 оно применяется лишь для доказательства увлечения вращающимся сосудом жидкости как **целого, откуда, конечно, никаких заключений о величине вязкости не может быть сделано и не делается.

Недоразумением является также и замечание о том, что ротоны следует «ассоциировать с определённой массой, заключённой в объёме, в котором ротор скорости отличен от нуля»; неправильность такого утверждения достаточно ясна из предыдущего.

кании гелия через узкую щель фононы неизбежно будут рассеиваться её стенками, т. е. будут задерживаться ими.

Далее, неправильным является утверждение Тиссы о пропорциональности между энтропией и нормальной плотностью гелия (формула (12) его статьи). Такое соотношение не может быть получено термодинамическим путём, и из формул §§ 5, 8 видно, что оно фактически не имеет места*).

При выводе гидродинамических уравнений Тисса допускает ряд неточностей, в результате чего оказываются правильными лишь уравнения первого приближения (совпадающие с уравнениями Ландау). Для скорости второго звука получается, естественно, формула, совпадающая с формулой Ландау (14,8). Однако в связи с упомянутым выше толкованием роли фононов Тисса исключает из энтропии S, входящей в эту формулу, её фононную часть. Для температурной зависимости остающейся части энтропии Тисса постулирует соотношение

$$S = S_0 (T/T_0)^r$$

(T_0 — температура λ-точки, показатель r выбирается равным 5,5 для получения согласия с эмпирическими значениями энтропии) **). Используя также предполагаемую им пропорциональность энтропии и нормальной плотности, Тисса получает следующую формулу для скорости второго звука:

$$u_2 = 26 \sqrt{\frac{T}{T_0}\left[1 - \left(\frac{T}{T_0}\right)^{5,5}\right]} \; м/сек.$$

При $T \to 0$ эта формула даёт $u_2 \to 0$, т. е. скорость второго звука стремится к нулю вместо конечного значения $c/\sqrt{3}$, следующего из теории Ландау.

В статье Тиссы содержатся также некоторые соображения по поводу вязкости гелия II. Однако его рассуждения по этому, в действительности в высшей степени сложному, вопросу (см. § 17) отличаются крайней наивностью. Они ограничиваются замечаниями о необходимости различать между вязкостью «жидкостного типа» и «газового типа», в результате которых Тисса приходит к выводу о падении вязкости с уменьшением температуры, находящемуся в полном противоречии с последними измерениями Э. Андроникашвили.

---

*) По случайным причинам температурные зависимости ротонных частей ρ_n и энтропии оказываются похожими [ср. формулы (5,7) и (8,4)]. С этим связано то обстоятельство, что Тиссе удалось добиться хорошей подгонки формул под экспериментальные значения энтропии и скорости второго звука в области температур выше, примерно, 1,3° K.

**) Теоретическое вычисление температурной зависимости термодинамических величин гелия II не могло быть произведено Тиссой в связи с отсутствием у него микроскопической теории.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Ландау, ЖЭТФ, **11**, 592, 1941.
2. Л. Ландау, ЖЭТФ, **14**, 112, 1944.
3. Л. Ландау, J. of Physics, **11**, 91, 1947.
4. F. London, Nature, **141**, 643, 1938.
5. F. London, Phys. Rev., **54**, 947, 1938.
6. F. London, J. Phys. Chem., **43**, 49, 1940.
7. L. Tisza, Nature, **141**, 913, 1938.
8. L. Tisza, C. R. Paris, **207**, 1035, 1186, 1938.
9. L. Tisza, J. de Phys. et Rad., **1**, 165, 350, 1940.
10. L. Tisza, Phys. Rev., **72**, 838, 1947.
11. A. Bijl, Physica, **7**, 869, 1940.
12. Н. Боголюбов, Изв. АН СССР, сер. физ., **11**, 67, 1947.
13. Я. Френкель, ЖЭТФ, **10**, 650, 1940.
14. F. London, Proc. Roy. Soc., A, **171**, 484, 1939.
15. Л. Ландау и И. Померанчук, ДАН СССР, **59**, 669, 1948.
16. Y. Frank, Phys. Rev., **70**, 261, 1946.
17. D. Gogate, P. Pathak. Proc. Phys. Soc., **59**, 457, 1947.
18. Е. Лифшиц, ЖЭТФ, **14**, 116, 1944.
19. В. Гинзбург, ЖЭТФ, **13**, 213, 1943.
20. А. Галанин, ЖЭТФ, **10**, 1267, 1940.
21. L. Goldstein, Phys. Rev., **57**, 241, 457, 1940.
22. L. Schiff. Phys. Rev., **57**, 844, 1940.
23. А. Ахиезер и И. Померанчук, ЖЭТФ, **16**, 391, 1936.