1948 УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК Т. XXXIV, вып. 3

ОБ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ И МЕХАНИЧЕСКОМ ФЕРРОРЕЗОНАНСЕ

А. Е. Саломонович

I. ВВЕДЕНИЕ

Учение о колебаниях выделяется среди других разделов физики по признакам, отличным от тех, согласно которым физика делится на механику, акустику, оптику, учение об электричестве и магнетизме и т. д. В то время как последнее деление основано на объединении явлений по признаку единства их физической природы, учение о колебаниях объединяет физические явления, одинаковые по форме управляющих ими закономерностей.

В каждой области науки, по словам акад. Л. И. Мандельштама [1], «желательно выделить те руководящие точки зрения, которые позволяют нам объединить целый класс проблем». С этой точки зрения оказывается весьма плодотворным совместное рассмотрение целого ряда колебательных явлений из механики, оптики, теории электромагнетизма и т. д. При таком рассмотрении результаты, полученные в одной области, например, в механике, могут служить не только для обогащения самой теории колебаний, но и для продвижения в другой области, например, в радиотехнике. Поэтому одной из руководящих идей современной теории колебаний является идея «колебательной взаимопомощи различных областей физики и техники» [2].

Ярким и наиболее типичным примером, иллюстрирующим такой «колебательный подход» к явлениям из разных областей физики и техники, имеющим одинаковую форму закономерностей, служат явления резонанса (см., например [3]).

Понятие резонанса получило чрезвычайно большое углубление и расширение в теории нелинейных колебаний, развитие которой за последние двадцать лет обязано, главным образом, советским учёным и, в большой мере, Л. И. Мандельштаму, Н. Д. Папалекси и созданной ими школе советских физиков [4,5].

С одной из своеобразных разновидностей резонансных явлений мы встречаемся, в частности, при исследовании поведения механической или электрической нелинейной системы под воздействием внешней периодической силы. В том случае, когда в этой системе, предоставленной самой себе, могут протекать (в отсутствие затухания) периодические процессы, частота их, в отличие от линейного случая, зависит не только от свойств системы, но и от размахов колебаний. Как мы увидим ниже, такого рода резонансные явления, известные в электротехнике под названием феррорезонансных, имеют место и в других областях физики и техники, и поэтому представляется целесообразным рассматривать их наряду с собственно феррорезонансом.

Такому совместному рассмотрению явлений, тождественных, в указанном смысле, феррорезонансу, посвящён наш обзор.

2. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ В КОНТУРЕ С ЖЕЛЕЗНЫМ СЕРДЕЧНИКОМ

К задаче о феррорезонансе в собственном смысле слова приводит рассмотрение вынужденных колебаний тока в электрическом контуре, состоящем из конденсатора, омического сопротивления и катушки самоиндукции, внутри которой помещён железный сердечник (рис. 1). Предполагая, что на такой контур действует внешняя э. д. с., зависящая от времени по синусоидальному закону (что практически часто имеет место), мы решим задачу, определив, как зависит сила тока в контуре от времени. При этом должна выявиться зависимость силы тока от параметров внешней силы — её частоты и амплитуды, а также от параметров контура.

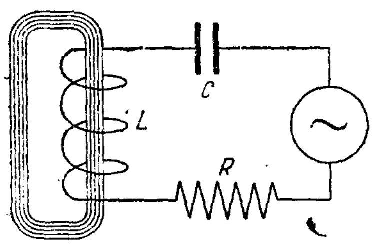

Рис. 1.

Уравнение Кирхгофа для контура, изображённого на рис. 1, получим в таком виде:

$$R\dot{q}+\frac{q}{C}=E_0\sin pt-\frac{d\Phi}{dt}, \qquad (1)$$

где $\dot{q}$ — заряд на обкладках конденсатора, C—ёмкость, R—сопротивление, p—частота внешней э. д. с. и Φ—магнитный поток через катушку самоиндукции.

Если ток, протекающий в контуре, достаточно мал, т. е. практически отсутствует подмагничивание сердечника постоянным током, а явлениями гистерезиса в сердечнике можно пренебречь, то магнитный поток, пересекающий катушку, можно считать пропорциональным протекающему току, т. е. считать

$$\Phi(\dot{q})=L\dot{q} \quad \text{и} \quad \frac{d\Phi(\dot{q})}{dt}=L\ddot{q}$$

где L—коэффициент самоиндукции.

В этом случае уравнение Кирхгофа (1) линейно:

$$L\ddot{q}+R\dot{q}+\frac{q}{C}=E_0 \sin pt \tag{2}$$

и, соответственно, описываемая этим уравнением система—электрический контур—называется линейной. Решение такой линейной задачи показывает, что в контуре протекает синусоидальный ток, период которого совпадает с периодом внешней э. д. с., а амплитуда пропорциональна амплитуде внешней силы. Коэффициент пропорциональности зависит от параметров контура (L, C, R) и от частоты э. д. с. Что касается фазы тока, то она отличается от фазы внешней э. д. с. на величину, также зависящую от параметров контура и частоты источника.

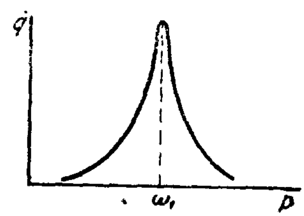

Рис. 2.

Кривая, показывающая изменение амплитуды тока в контуре при изменении частоты внешней э. д. с.—так называемая резонансная кривая, приведена на рис. 2. При совпадении частоты источника с частотой ω_1, характерной для данного контура, амплитуда колебаний резко возрастает. Если сопротивление контура становится всё более малым, амплитуда колебаний с резонансной частотой неограниченно возрастает, а сама резонансная частота сливается с частотой собственных колебаний контура, происходящих в нём при пренебрежении сопротивлением, т. е. с $\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$. Мы получаем классический линейный резонанс. Он присущ линейным системам, в которых частота собственных колебаний (при $R=0$) является постоянной величиной, не зависящей от амплитуды происходящих в системе колебаний.

Когда катушка самоиндукции контура свободна от железного сердечника, закон пропорциональности между магнитным потоком и током хорошо соблюдается в пределах, интересных для практики. Однако при наличии сердечника дело меняется. Ток, протекающий по катушке, образует внутри неё магнитное поле, порождающее, в свою очередь, поток магнитной индукции (магнитный поток) $\Phi=BS=\mu HS$, где S—площадь сечения катушки, а μ—магнитная проницаемость сердечника (мы считаем его замкнутым, и рассеянием пренебрегаем). До тех пор пока $\mu=\text{const}$ и не зависит от магнитного поля, поток пропорционален полю H, а значит и току.

Опыт показывает, однако, что μ меняется с изменением магнитного поля. Одна из кривых, полученных экспериментально[6] для сердечника, в котором гистерезис пренебрежимо мал, приведена на рис. 3. При соответствующем подборе коэффициентов ход экспериментальных кривых типа, приведённого на рис. 3, удаётся передать аналитически[7] с достаточной точностью формулой

$$\Phi(\dot{q}) = A\dot{q} + B \operatorname{arctg}(a\dot{q}), \tag{3}$$

где A, B, a—постоянные.

При такой зависимости магнитного потока от тока пропорциональность нарушается, и уравнение становится нелинейным. В самом деле, после дифференцирования (3) и подстановки в (1) мы получаем

$$\left(A + \frac{Ba}{1+(a\dot{q})^2}\right)\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = E_0 \sin pt. \tag{4}$$

Вместо постоянного коэффициента самоиндукции L у нас появился множитель, зависящий от тока. На рис. 4 показано, как меняется теперь $L(\dot{q})$ при изменении $\dot{q}$. Вследствие нелинейности системы, описываемой уравнением (4), нельзя ожидать, что результаты, полученные при анализе такой системы, будут совпадать с результатами исследования системы линейной — при $L=\mathrm{const}$.

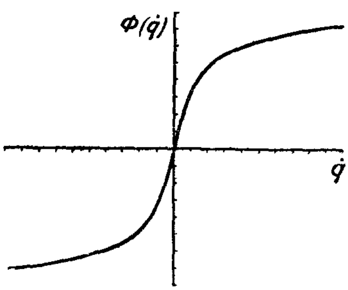

Рис. 3.

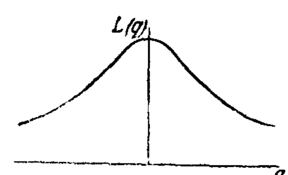

Рис. 4.

В частности, мы не можем теперь утверждать, что при воздействии на наш контур синусоидальной э. д. с. сила тока в контуре останется синусоидальной. Напротив, следует ожидать появления гармоник. «Амплитуда» тока также может оказаться не пропорциональной амплитуде э. д. с., а резонансная кривая—потерять свой симметричный вид при изменении частоты воздействия в обе стороны от резонанса.

Этого можно ожидать потому, что в нашей нелинейной системе частота собственных незатухающих колебаний (при $R=0$) зависит от размаха колебаний. Система перестала быть изохронной. В ней происходят ангармонические колебания, называемые, весьма неудачно, псевдогармоническими. В нашем случае «средний коэффициент самоиндукции» уменьшается с увеличением размахов тока (см. рис. 4), а значит, «средняя собственная частота» контура растёт с ростом колебаний. Контур становится более «быстрым».

Вблизи резонанса амплитуды колебаний резко возрастают с изменением частоты воздействия. По мере приближения к резонансу контур, вследствие изменения его «собственной частоты», либо «уклоняется» от резонанса, либо «идёт к нему навстречу», смотря по тому, со стороны более высоких или более низких частот мы приближаемся к резонансу.

Эти предварительные рассуждения, носящие качественный характер, будут подтверждены результатами исследования полученного выше нелинейного уравнения нашей задачи.

3. ОЦЕНКА МАЛОСТИ ПАРАМЕТРОВ

Чтобы перейти к количественному рассмотрению задачи о феррорезонансе, необходимо сделать некоторые допущения о малости входящих в уравнение (4) параметров. Имея в виду применить в дальнейшем для решения нелинейного уравнения способ, пригодный в случае систем, мало отличающихся от линейных и консервативных, мы предположим прежде всего, что нелинейность функции, выражающей зависимость магнитного потока от тока, мала.

Однако прежде чем проводить сравнение отдельных членов уравнений (3) и (4), необходимо сделать коэффициенты независящими от единиц измерения (сделать их одинаковой размерности). В противном случае, сравнивая между собой величины разных размерностей, мы получим различные результаты, смотря по тому, какими единицами измерения мы пользуемся[8]. Но чтобы все коэффициенты получили одинаковую размерность, необходимо сделать безразмерными переменные величины, фигурирующие в (3) и (4).

Поэтому примем за переменную не заряд на обкладках конденсатора, а его отношение к наибольшему накопляемому при колебаниях заряду: $z = \frac{q}{q_0}$. Время также будем измерять в безразмерных единицах, положив $pt = \tau$. Период внешней э. д. с. при этом будет равен единице.

После указанных изменений уравнение (4) переходит в

$$\left[A + \frac{Baq_0p^2}{1 + (aq_0p\dot{z})^2}\right]\ddot{z} + q_0pR\dot{z} + \frac{q_0}{C}z = E_0 \sin\tau. \qquad (5)$$

Теперь мы можем сформулировать требование малости нелинейности. Оно выглядит так:

$$\varkappa = a^2p^2q_0^2 \ll 1 \qquad (6)$$

и означает, что квадрат произведения величины наибольшего тока, протекающего в контуре, на коэффициент нелинейности много меньше единицы.

Именно этот случай мы и рассмотрим в дальнейшем. Следует указать, что большинство авторов, изучавших явление ферроренанса ([6, 9] и др.), по существу ограничиваются именно этим случаем.

При выполнении условия (6)

$$\frac{1}{1+\varkappa\dot{z}^2} \approx 1-\varkappa\dot{z}^2,$$

и после несложных преобразований получаем вместо (5):

$$\ddot{z}+\frac{\omega^2}{p^2}z=\frac{E'}{L'}(1+l\dot{z}^2)\sin\tau-\frac{R'}{pL'}\dot{z}-\frac{R'l}{pL'}\dot{z}^3-\frac{\omega^2 l}{p^2}\dot{z}^2 z, \tag{7}$$

где введены обозначения:

$$q_0(1+Ba)=L'; \quad Rq_0=R'; \quad \frac{q_0}{C}=\frac{1}{C'}; \quad \frac{Ba\varkappa}{L'}=l; \quad \frac{E_0}{p^2}=E';$$

$$\frac{1}{L'C'}=\omega^2.$$

Рассматривая контур вблизи резонанса, положим, далее, $\frac{\omega^2-p^2}{p^2}=a_0$. Здесь a_0 — малая относительная «расстройка» между частотой воздействия и «собственной частотой» контура, совпадающей с частотой его собственных колебаний в отсутствии затухания и нелинейности. При $a_0>0$ имеем воздействие с частотой, меньшей чем «собственная», а при $a_0<0$ - с большей.

Поскольку явление резонанса становится отчётливым только при уменьшении сопротивления, рассматриваем случай, когда затухание в контуре мало: $\frac{R'}{pL'}=\mu\ll 1$. Вблизи резонанса амплитуда колебаний, при малом затухании, значительно превышает амплитуду воздействия, и естественно принять, что $\frac{E'}{L'}=A_0\ll 1$.

Мы будем считать, что все эти малые величины, а именно l, a_0, A_0 и μ одного порядка, т. е. что отношение первых трёх из них к μ порядка единицы. Такое допущение позволяет получить решение задачи с достаточным для многих случаев практики приближением и во всяком случае дать полную качественную картину характерных особенностей, имеющих место при феррорезонансе.

Уравнение (7) заменяем приближённым, в котором сохранены члены порядка малости не большего, чем μ:

$$\ddot{z}+z=\mu\left[A'\sin\tau-az-\dot{z}-\frac{l}{\mu}\dot{z}^2 z\right], \tag{8}$$

где

$$A'=\frac{A}{\mu} \quad \text{и} \quad a=\frac{a_0}{\mu}.$$

Чтобы несколько упростить полученное уравнение, положим $z=Cz_1$ и выберем C так, чтобы обратить в единицу множитель при $\dot{z}^2 z$. Вследствие однородности остальных членов уравнения, получим окончательно

$$\ddot{z}_1 + z_1 = \mu\,[A'' \sin\tau - a z_1 - \dot{z}_1 - \dot{z}_1^2 z_1], \tag{9}$$

где $A'' = \frac{A'}{C}$ — амплитуда внешней силы, $C^2 = \frac{\mu}{l}$, μ — малый параметр и a — расстройка. В дальнейшем индекс при z опускаем.

Мы получили, таким образом, уравнение задачи о феррорезонансе в «каноническом» виде.

4. ЗАДАЧА О ВИБРАЦИОННОМ ГАЛЬВАНОМЕТРЕ

Прежде чем приступить к решению сформулированной в предыдущих параграфах задачи, рассмотрим задачу теории вибрационного гальванометра. Исследованию такого гальванометра посвящена работа Эппльтона[10]. Допущенные им ошибки были исправлены в статье А. Г. Любиной[11], рассмотревшей с исчерпывающей полнотой весь вопрос, используя методы нелинейной теории колебаний.

Уравнение движения подвижной системы вибрационного гальванометра, измеряющего синусоидальный ток, амплитуда которого i_0, имеет вид

$$I\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + b\,\frac{d\vartheta}{dt} + M(\vartheta) = G i_0 \sin pt, \tag{10}$$

где ϑ — угол отклонения подвижной системы, а постоянные I, b, G характеризуют механические и электрические свойства гальванометра. $M(\vartheta)$—восстанавливающий момент гальванометра — только при весьма малых углах может считаться пропорциональным углу отклонения от положения равновесия. При бóльших углах ϑ, как показывают измерения, справедлива зависимость

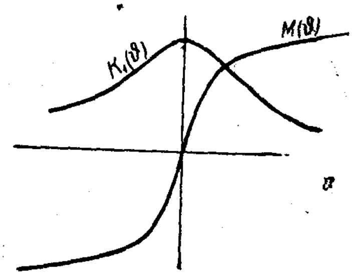

Рис. 5.

$$M(\vartheta) = k\vartheta - \gamma\vartheta^3 = k\vartheta(1 - \lambda\vartheta^2) = k_1(\vartheta)\vartheta. \tag{11}$$

С увеличением отклонения упругость подвеса убывает (рис. 5). «Собственная частота» системы уменьшается. Система становится более «мягкой». При сближении частоты измеряемого тока с «собственной частотой» гальванометра должны наступать явления, аналогичные феррорезонансу, причём несимметрия резонансных кривых в обоих случаях должна быть обращена в противоположные стороны, так как «собственная частота» с ростом амплитуды колебаний меняется по-разному.

Используя выражение (11) и повторив, с очевидными изменениями, ход рассуждений § 2, получим уравнение вибрационного гальванометра вблизи резонанса в «каноническом» виде *):

$$\ddot{z} + z = \mu\left[A \sin \tau - \dot{z} - az + z^3\right], \tag{12}$$

где A — амплитуда внешней силы, μ — малый параметр, пропорциональный затуханию системы, и a — расстройка.

Уравнение (12) весьма сходно с (9), полученным для феррорезонанса. Оно отличается только нелинейным членом: $+z^3$ вместо $-\dot{z}^2 z$.

К подобному же уравнению, при соответствующих допущениях о малости параметров, приводится целый ряд задач о вынужденных колебаниях в системах с нелинейной упругостью [12-16]. Здесь возможен случай характеристики упругой силы, изображённый на рис. 5, а также противоположный случай, когда жёсткость увеличивается с ростом амплитуды колебаний (рис. 6). В этом последнем случае знак нелинейного члена в (12) изменяется на обратный. В более общем случае, рассмотренном в 1943 г. Б. В. Булгаковым [17], упругая сила принимается равной $f(x) = m(\omega^2 + \mu)x - U'(x)$, где первый член передаёт линейное приближение, а U', представляющая собой производную некоторой функции U, — нелинейную поправку. Решение такой задачи вполне аналогично решению А. Г. Любиной (метод ван-дер-Поля, исследование уравнений методом Пуанкаре). Для не слишком больших значений x функцию $U'(x)$ можно, обычно, представить в виде первых двух или трёх членов степенного ряда, что приводит этот случай к рассмотренному выше.

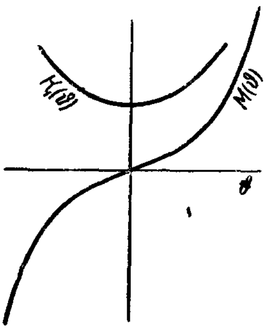

Рис. 6.

5. КОНТУР С СЕГНЕТОЭЛЕКТРИЧЕСКИМ КОНДЕНСАТОРОМ

Исследования И. В. Курчатова и Кобеко показали [18], что сегнетова соль обладает электрическими свойствами, аналогичными магнитным свойствам железа. Вследствие особенностей поляризации сегнетовой соли, заряд на обкладках заполненного ею конденсатора не пропорционален приложенному напряжению. Диэлектрическая проницаемость (подобно μ железа) перестаёт быть постоянной (рис. 7). Она меняется вместе с полем, и ёмкость конденсатора оказывается

*) Ошибка Эппльтона состояла в том, что, не оценив порядка малости различных членов уравнения (10), он получил лишнее условие устойчивости решения «в малом». Устойчивость же «в большом» исследована только у А. Г. Любиной (см. ниже).

зависящей от приложенной разности потенциалов. Ёмкостью в этом случае мы называем $C(q)=\frac{q}{V}$, где q — заряд на обкладках конденсатора, а V — вызываемая этим зарядом разность потенциалов. На рис. 8 показана полученная экспериментально зависимость определённой таким образом ёмкости конденсатора от заряда на его обкладках.

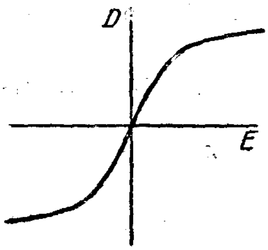

Рис. 7.

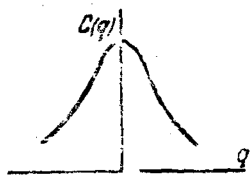

Рис. 8.

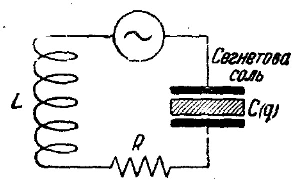

Рис. 9.

Пренебрегая потерями в сегнетовой соли, получим уравнение изменения заряда на обкладках сегнетоэлектрического конденсатора, включённого в контур (рис. 9) вместе с синусоидальным источником э. д. с.:

$$L\ddot{q}+R\dot{q}+\frac{q}{C(q)}=E_0\sin pt. \tag{13}$$

Для умеренных q кривая рис. 8 может быть удовлетворительно выражена аналитически в виде

$$C(q)=\frac{C_0}{1+C_1q^2}, \tag{14}$$

где C_0 и C_1 — постоянные. После несложных преобразований, аналогичных проведённым в §§ 3 и 4, получим упрощенное уравнение в «каноническом» виде:

$$\ddot{z}+z=\mu[A\sin\tau-\dot{z}-az-z^3]. \tag{15}$$

Как и следовало ожидать, уравнение (15) тождественно уравнению задачи о нелинейной пружине, жёсткость которой растёт с амплитудой колебаний.

6. РЕЗОНАНСНЫЕ ЯВЛЕНИЯ ПРИ ДВИЖЕНИИ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ЧАСТИЦЫ В ЦИКЛОТРОНЕ

Чтобы исчерпать класс «феррорезонансных» задач механики и электродинамики (для систем с одной степенью свободы), обратимся к задаче о движении заряжённой частицы под действием постоянного магнитного и переменного электрического полей — случаю, имеющему место в циклотроне.

Частица массы m и заряда e под действием постоянного магнитного поля $\mathbf{H}$, перпендикулярного её скорости в некоторый начальный момент времени, совершает круговое движение, подчинённое уравнению $m\dot{\mathbf{v}} = \frac{e}{c}[\mathbf{vH}]$, где c — скорость света. Записанное в декартовых координатах, уравнение это распадается на два:

$$(a) \quad m\ddot{x} = \frac{eH}{c}\dot{y} \quad \text{и} \quad (b) \quad m\ddot{y} = -\frac{eH}{c}\dot{x}. \tag{16}$$

После интегрирования получаем, с точностью до несущественной постоянной,

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$

где $\omega_0 = \frac{eH}{cm}$ — угловая частота вращения, не зависящая от радиуса орбиты, определяемого начальными условиями. Под действием приложенного к щели переменного электрического поля (рис. 10), совпадающего по частоте с ω_0 и находящегося в фазе с частицей, скорость частицы возрастает, и радиус её орбиты увеличивается. Однако неучтённые нами потери энергии вследствие излучения и соударений с другими частицами могут привести к установлению стационарного радиуса орбиты.

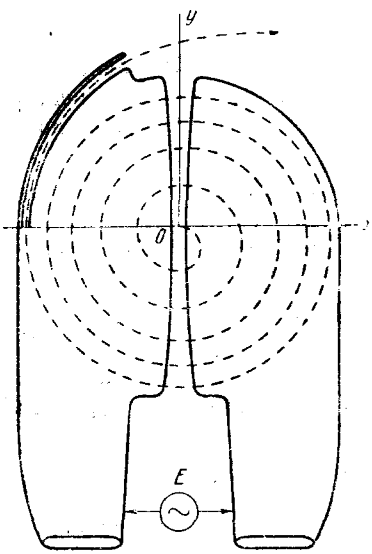

Рис. 10.

Как указали А. А. Андронов и Г. С. Горелик[19], даже в случае частицы постоянной массы имеет место не обычный линейный резонанс, а резонанс нелинейный, так как электрическое поле действует только в щели между дуантами, и, следовательно, периодическая внешняя сила зависит от координаты, и притом нелинейно. Не рассматривая эту задачу в общем виде (для случая бесконечно узкой щели это сделано в упомянутой работе Андронова и Горелика), ограничимся случаем, когда энергия, сообщаемая электрическим полем, мала сравнительно с энергией, запасённой частицей. В этом случае сила, действующая со стороны электрического поля, может приближённо считаться не зависящей от координаты частицы, и, вводя затухание, пропорциональное скорости, мы получим уравнение движения частицы по оси x вблизи от резонанса в виде

$$\ddot{x} + \omega_0 x + h\dot{x} = E_0 \sin pt. \tag{17}$$

При этом, конечно, мы лишаемся возможности рассмотреть явления, обязанные указанной зависимости силы от координаты (резонанс при $\omega_0 = \frac{p}{2}, \frac{p}{3}, \ldots$).

Если скорость частицы настолько велика, что оказывается необходимым учитывать релятивистское изменение массы, то мы получаем уравнение, характерное для феррорезонанса. Действительно, полагая $m = m_0\left(1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}\right)^{-1/2} \approx m_0(1 + \alpha\dot{x}^2)$, где m_0 — масса покоя, и, считая затухание, расстройку и амплитуду действующей силы малыми порядка μ, получим уравнение в «каноническом» виде

$$\ddot{z} + z = \mu[A\sin\tau - \dot{z} - az + \dot{z}^2 z]. \qquad (18)$$

7. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ФЕРРОРЕЗОНАНСЕ

Напишем снова в «каноническом» виде четыре полученных уравнения задач, подобных задаче о феррорезонансе:

$$\text{I}\ \ddot{z} + z = \mu\,[A\sin\tau - \dot{z} - az - \dot{z}^2 z] \quad \text{(феррорезонанс)}, \qquad (9)$$

$$\text{II}\ \ddot{z} + z = \mu\,[A\sin\tau - \dot{z} - az + z^3] \quad \text{(вибрац. гальв.)}, \qquad (12)$$

$$\text{III}\ \ddot{z} + z = \mu\,[A\sin\tau - \dot{z} - az - z^3] \quad \text{(сегнетоэлектр.)}, \qquad (15)$$

$$\text{IV}\ \ddot{z} + z = \mu\,[A\sin\tau - \dot{z} - az + \dot{z}^2 z] \quad \text{(релятив. част.)}. \qquad (18)$$

Решим первое из них, следуя, в основном, работе Любиной [11], рассмотревшей уравнение (12).

Согласно методу Мандельштама и Папалекси [20], перейдём от уравнения (9) к соответствующим уравнениям ван-дер-Поля.

На фазовой плоскости, т. е. на плоскости $z, \dot{z}$, возьмём систему координат x, y, начало которой совпадает с началом системы $z, \dot{z}$ (рис. 11), и будем вращать её по часовой стрелке с угловой скоростью, равной 1 (время мы измеряем в единицах τ).

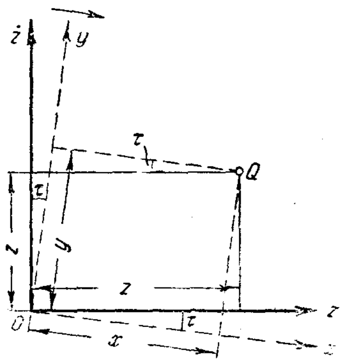

Рис. 11.

Формулы перехода от координат $z, \dot{z}$ к координатам x, y будут

$$z = x\cos\tau + y\sin\tau,$$

$$\dot{z} = -x\sin\tau + y\cos\tau. \qquad (19)$$

При $\mu = 0$ колебаниям гармонического осциллятора соответствует движение изображающей точки на плоскости $z, \dot{z}$ по окружности, имеющей центр в начале координат, с угловой скоростью 1. Значит, при $\mu=0$ изображающая точка неподвижна относительно вращающейся плоскости x, y, и каждая точка этой плоскости при $\mu=0$ соответствует состоянию равновесия.

При $\mu \neq 0$ $x=x(\tau)$ и $y=y(\tau)$. Подставим в (9) $z, \dot{z}$ и $\ddot{z}$, вычисленные с помощью (19), и будем искать $x(\tau)$ и $y(\tau)$, удовлетворяющие этому уравнению.

Получим

$$-\dot{x}\sin\tau+\dot{y}\cos\tau=\mu\left[A\sin\tau-\dot{z}-az-\dot{z}^2 z\right],$$

$$\dot{x}\cos\tau+\dot{y}\sin\tau=0, \tag{20}$$

откуда

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}&=-\mu\left[A\sin\tau-\dot{z}-az-\dot{z}^2 z\right]\sin\tau,\\ \dot{y}&=\mu\left[A\sin\tau-\dot{z}-az-\dot{z}^2 z\right]\cos\tau. \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Разлагая правые части в ряды Фурье по $\cos\tau$ и $\sin\tau$, получим

$$\begin{aligned} \dot{x}&=-\mu\left[\frac{\varphi_0(x, y)}{2}+\varphi_2(x, y)\cos 2\tau+\overline{\varphi}_2(x, y)\sin 2\tau+\ldots\right],\\ \dot{y}&=\mu\left[\frac{\psi_0(x, y)}{2}+\varphi_2(x, y)\cos 2\tau+\overline{\psi}_2(x, y)\sin 2\tau+\ldots\right]. \end{aligned} \tag{22}$$

Отбрасывая члены с $\cos 2\tau, \ldots,$ $\sin 2\tau, \ldots,$ получим вспомогательные или «укороченные» уравнения ван-дер-Поля с отброшенными «осциллирующими» членами ([8] стр. 435):

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau}&=\frac{\mu}{2}P(x, y)=-\frac{\mu}{2}\left\{A+x-y\left[a+\frac{1}{4}(x^2+y^2)\right]\right\}\\ \frac{dy}{d\tau}&=\frac{\mu}{2}Q(x, y)=-\frac{\mu}{2}\left\{y+x\left[a+\frac{1}{4}(x^2+y^2)\right]\right\}. \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Чтобы исследовать движение, описываемое укороченными уравнениями (23), рассмотрим прежде всего особые точки на фазовой плоскости x, y, соответствующие состояниям равновесия в системе координат x, y и, следовательно, периодическим колебаниям с частотой внешней силы.

Каждой особой точке x_0, y_0 соответствует периодическое решение $z=x_0\cos\tau+y_0\sin\tau$. Исследование особых точек позволит, таким образом, разыскать амплитуды возможных периодических движений и решить вопрос об их устойчивости. Координаты особых точек найдём, решив совместно уравнения

$$P(x, y)=0, \qquad Q(x, y)=0. \tag{24}$$

Получаем $x_0=-\frac{\rho}{A}$, $y_0=\frac{\rho}{A}\left(a+\frac{\rho}{4}\right)$, где $\rho=x_0^2+y_0^2$ определяется уравнением

$$\rho\left(a+\frac{\rho}{4}\right)^2+\rho=A^2. \tag{25}$$

При $A=\mathrm{const}$ уравнение (25) определяет на плоскости a, ρ резонансную кривую. При $a=\mathrm{const}$ это же уравнение даёт «характеристику» контура, т. е. кривую зависимости амплитуды напряжения на конденсаторе от амплитуды внешней э. д. с. (на плоскости A^2, ρ). Переписав (25) в виде

$$a = -\frac{\rho}{4} \pm \sqrt{\frac{A^2}{\rho} - 1},$$

легко построить резонансную кривую на плоскости a, ρ (рис. 12).

Мы видим, что резонансная кривая отличается от кривой линейного резонанса (рис. 2) своей несимметричностью, заметной тем более, чем больше амплитуда внешней э. д. с. При достаточно большом A^2 одна из ветвей кривой становится неоднозначной, что является характерной особенностью феррорезонанса.

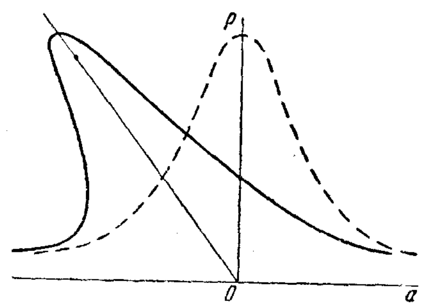

Рис. 12.

Исследование уравнений II, III и IV приводит, естественно, к аналогичным выражениям. Решение для случая III тождественно, с точностью до коэффициентов, решению случая I, а случаи II и IV отличаются от рассмотренного нами, кроме того, знаком при $\frac{\rho}{4}$. Следовательно, резонансные кривые в этих случаях наклонены не в сторону высоких, а в сторону низких частот. Физически этот результат вполне понятен. В случаях I и III «собственная частота» системы растёт с амплитудой — система становится более «жёсткой» (в случае I за счёт уменьшения индуктивности, в случае III — за счёт уменьшения ёмкости). В случаях же II и IV — с ростом амплитуды «собственная частота» системы уменьшается — система становится более «мягкой» (в случае II — вследствие уменьшения жёсткости подвеса, в случае IV — вследствие увеличения массы частицы). Что именно явилось причиной изменения собственной частоты системы — «упругий» или «инерционный» член — не играет существенной роли в резонансных свойствах системы.

8. ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ. ГИСТЕРЕЗИС РЕЗОНАНСНЫХ КРИВЫХ

Найдя амплитуды возможных периодических движений с частотой внешней силы, выясним характер устойчивости этих движений. Реально осуществимы только устойчивые периодические движения. Устойчивость периодических решений $z = x_0 \cos\tau + y_0 \sin\tau$ определяется устойчивостью особых точек, заданных системой (24), т. е. устойчивостью положений равновесия на плоскости x, y. Равновесие устойчиво по Ляпунову, если характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} P'_x(x_0, y_0) - S, & P'_y(x_0, y_0) \\ Q'_x(x_0, y_0), & Q'_y(x_0, y_0) - S \end{vmatrix} = 0 \tag{26}$$

для системы линейных уравнений первого приближения Ляпунова

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\xi}{d\tau} &= \frac{\mu}{2}\left[P'_x(x_0, y_0)\,\xi + P'_y(x_0, y_0)\,\eta\right] \\ \frac{d\eta}{d\tau} &= \frac{\mu}{2}\left[Q'_x(x_0, y_0)\,\xi + Q'_x(x_0, y_0)\,\eta\right] \end{aligned}\right\}$$

($\xi = x - x_0$, $\eta = y - y_0$ — малые отклонения от положения равновесия, соответствующего особой точке с координатами x_0, y_0) имеет корни, действительная часть которых отрицательна. Если хотя бы один из корней уравнения (26) имеет положительную действительную часть, положение равновесия неустойчиво. В самом деле, в первом случае отклонения затухают, во втором — нарастают. Вычисления для нашего случая дают следующее характеристическое уравнение:

$$S^2 + 2S + \frac{3\rho^2}{16} + a\rho + a^2 + 1 = 0. \tag{27}$$

Корни этого уравнения

$$S_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{3\rho^2}{16} + a\rho + a^2 + 1\right)}$$

имеют отрицательную действительную часть при

$$\frac{3\rho^2}{16} + a\rho + a^2 + 1 > 0,$$

и один из корней имеет положительную действительную часть при

$$\frac{3\rho^2}{16} + a\rho + a^2 + 1 < 0.$$

Следовательно, гипербола $\frac{3\rho^2}{16} + a\rho + a^2 + 1 = 0$ с асимптотами $a = -\frac{\rho}{4}$ и $a = -\frac{3\rho}{4}$ разделяет на плоскости a, ρ области устойчивых и неустойчивых (типа седла) особых точек, а значит, и области устойчивых и неустойчивых вынужденных колебаний. В свою очередь, прямые $a = -\frac{\rho}{4}$ и $a = -\frac{3\rho}{4}$ внутри устойчивой области отделяют область устойчивых фокусов $\left(\frac{3\rho^2}{16} + a\rho + a^2 > 0\right)$ от области устойчивых узлов $\left(\frac{3\rho^2}{16} + a\rho + a^2 < 0\right)$. На плоскости a, ρ получаем картину, изображённую на рис. 13.

При $A^2 = \frac{13}{9}\sqrt{3}$ резонансная кривая касается границы области неустойчивости и при $A^2 > \frac{13}{9}\sqrt{3}$ кривые становятся неоднозначными. На кривых, пересекающих гиперболу (рис. 13), некоторым значениям расстройки a соответствуют три амплитуды вынужденных колебаний. При этом среднее значение амплитуды оказывается неустойчивым.

Исследование общей картины интегральных кривых на фазовой плоскости x, y показывает [11], что когда $A^2 < \frac{13}{9}\sqrt{3}$, при любом a имеется единственная особая точка (устойчивый фокус или узел). В связи с тем, что предельные циклы в нашей системе невозможны и бесконечность неустойчива (оба положения можно доказать), картина фазовой плоскости в этом случае имеет вид, изображённый на рис. 14.

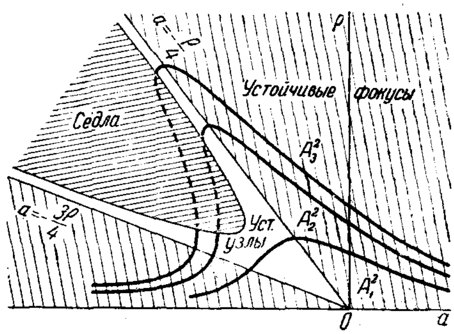

Рис. 13.

При $A^2 > \frac{13}{9}\sqrt{3}$ картина на фазовой плоскости существенно меняется в зависимости от величины расстройки. Если обозначить абсциссы точек пересечения резонансной кривой с гиперболой (рис. 13) через a_1 и a_2 ($a_1 < a_2$), то при $a < a_1$ или $a > a_2$ качественно картина фазовой плоскости не меняется (рис. 14): имеется одна устойчивая особая точка, и, значит, возможно вынужденное колебание лишь с одной определённой амплитудой. Если же $a_1 < a < a_2$, то на плоскости существуют три особые точки — две устойчивые (фокус или узел) и одна неустойчивая (седло). Картина на фазовой плоскости имеет вид, изображённый на рис. 15 *).

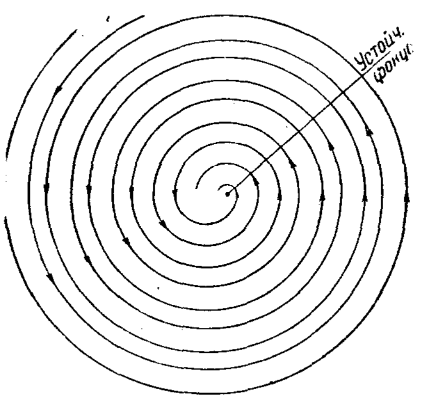

Рис. 14.

В этом случае плоскость разбивается интегральными кривыми, идущими в седло (сепаратриссами) на две спиралевидные «области притяжения» двух устойчивых особых точек. Представляющая точка, попавшая вследствие начальных условий в ту или иную область, будет двигаться к одному из узлов. В контуре, в зависи-

*) Исследование фазовой плоскости для этого случая, проведённое И. С. Жуковой, устранило неточность в размещении особых точек на фазовой плоскости, допущенную в [11], и показало переход к консервативному случаю (см. дальше).

мости от начальных условий, могут установиться вынужденные колебания двух различных амплитуд.

При изменении расстройки, когда a становится равным a_1 или a_2, неустойчивая особая точка сливается с одной из устойчивых и «заражает» её своей неустойчивостью. Изображающая точка, бывшая в ней, переходит в другую устойчивую особую точку. Обращаясь к резонансной кривой, легко понять, как будет меняться амплитуда колебаний при изменении расстройки. Если частота э. д. с. приближается к «собственной частоте» контура со

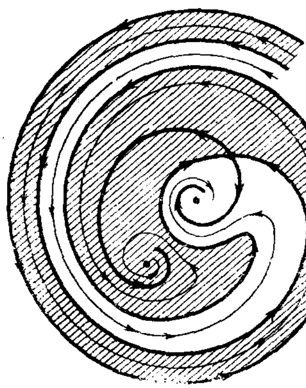

Рис. 15.

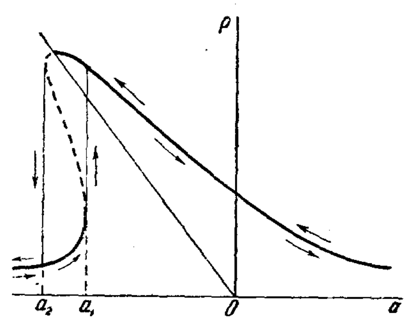

Рис. 16.

стороны больших частот ($a < 0$), амплитуда вынужденных колебаний растёт вплоть до точки a_1 (рис. 16), где происходит скачкообразное изменение амплитуды. При дальнейшем уменьшении частоты амплитуда плавно убывает. Заметим, что точка совпадения частоты внешней э. д. с. с «собственной частотой» контура ничем не замечательна. При обратном увеличении частоты амплитуда растёт плавно вплоть до частоты, при которой происходит вторичный скачок, на этот раз вниз, после чего амплитуда продолжает убывать плавно. Такой «гистерезисный» характер резонансных кривых при феррорезонансе неоднократно наблюдался экспериментально в ряде перечисленных выше случаев (I, II, III) при достаточно большой амплитуде внешней силы. Для примера на рис. 17 приведена кривая из работы Мартинсена[9]. На рис. 18 показана осциллограмма тока в контуре в момент скачка. Отклонение кривой от синусоиды иллюстрирует появление гармоник вследствие нелинейности колебательной системы, для которой принцип суперпозиции уже не имеет места. Рассмотренный нами метод позволяет легко рассчитать лишь основную гармонику вынужденного колебания [мы отбросили «осциллирующие» члены в уравнении (22)].

Строгий анализ показывает, что исходное уравнение (9) имеет устойчивые периодические решения, тем более близкие к полученным нами решениям укороченных уравнений, чем меньше μ (см., например [8], стр. 455); процесс установления стационарных колебаний происходит так, что при достаточно малом μ полученное решение укороченных

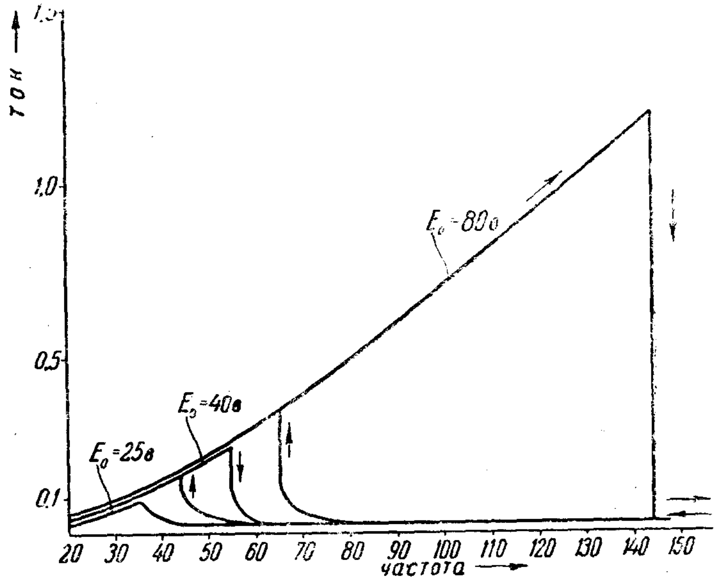

Рис. 17.

уравнений отличается от решения неукороченного уравнения, удовлетворяющего тем же начальным условиям, сколь угодно мало на протяжении сколь угодно большого отрезка времени [20].

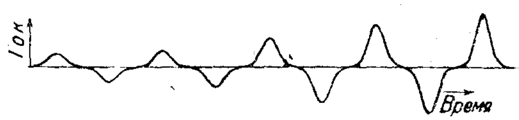

Рис. 18.

Чтобы учесть влияние омического сопротивления контура на его феррорезонансные свойства, достаточно положить малое затухание контура равным не μ, а $h\mu$, где $h \sim 1$. При этом уравнение резонансной кривой (25) преобразуется в

$$\rho\left(a+\frac{\rho}{4}\right)^2+h^2\rho=A^2, \tag{25a}$$

а характеристическое уравнение (27) в

$$S^2+2hS+\frac{3\rho^2}{16}+a\rho+a^2+h^2=0, \tag{27a}$$

что приводит к выражению для границы области неустойчивости

$$\frac{3\rho^2}{16}+a\rho+a^2=-h^2.$$

С ростом затухания контура несимметрия резонансных кривых сглаживается, и появление неустойчивого режима происходит при бо́льших амплитудах внешней силы.

При уменьшении затухания спиралевидная область на фазовой плоскости (рис. 15) суживается и в пределе при $h=0$ картина превращается в полученную Б. В. Булгаковым для рассмотренного им случая вынужденных колебаний в нелинейной консервативной системе и изображённую на рис. 19.

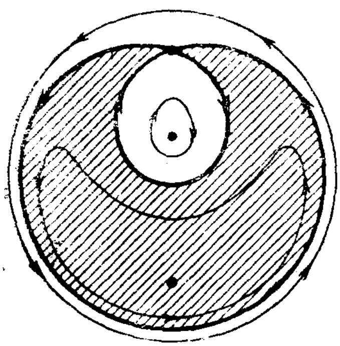

Рис. 19.

Замкнутые кривые на фазовой плоскости рис. 19 соответствуют в этом случае биениям между вынужденными и свободными колебаниями. Последние не затухают вследствие отсутствия сопротивления в контуре. В зависимости от начальных условий, биения происходят около одного из двух возможных значений амплитуды вынужденных колебаний, которым соответствуют на фазовой плоскости x, y особые точки типа центра. Изображающая точка при этом находится либо в заштрихованной области, либо вне её.

9. ФЕРРОРЕЗОНАНС ПРИ НАЛИЧИИ ПОДМАГНИЧИВАНИЯ

Представляет интерес рассмотреть явление феррорезонанса в том случае, когда сердечник подмагничивается постоянным током.

На рис. 20 показана схема контура с подмагничиванием. В отличие от выражения (3) магнитный поток задаётся формулой

$$\Phi(\dot{q}) = A\dot{q} + B \operatorname{arctg}(a\dot{q} + bI), \tag{28}$$

где I — сила постоянного тока подмагничивания. При такой зависимости потока от тока

$$\frac{d\Phi}{dt} = \left[A + \frac{Ba}{1 + (a\dot{q} + bI)^2}\right]\ddot{q} = L_1(\dot{q})\ddot{q}, \tag{29}$$

и дело сводится к сдвигу кривой $L(\dot{q})$ (рис. 4) вправо от оси ординат на величину, пропорциональную I (рис. 21). Поскольку мы рассматриваем основную гармонику вынужденного периодического колебания тока и не интересуемся гармониками высшего порядка, для нашего исследования существенна только симметричная часть этой кривой ([8], стр. 502), т. е. кривая $\frac{L_1(\dot{q}) + L_1(-\dot{q})}{2}$, изображённая на рис. 22. В самом деле, все нечётные члены разложения $L_1(\dot{q})$

в степенной ряд выпадают из укороченных уравнений ван-дер-Поля и не накладывают отпечатка на окончательный результат для основной гармоники. Симметричная же часть кривой $L_1(\dot q)$ с достаточной

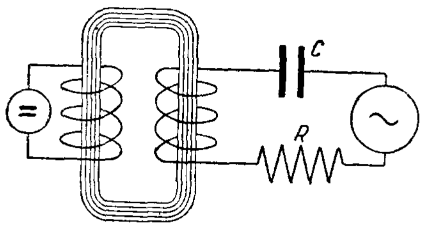

Рис. 20.

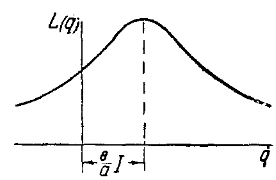

Рис. 21.

степенью точности аппроксимируется в нашем случае выражением $L_1^*(\dot q) = L'(1 + l'\dot q^2 - m'\dot q^4)$.

Подставляя его в (29) *) и повторяя все рассуждения § 3, получим, после отбрасывания членов порядка малости большего чем μ,

$$\ddot z + z = \mu\left[A\sin\varkappa - \dot z - az + \dot z^2 z - m\dot z^4 z\right], \tag{30}$$

где $m \sim 1$. При $m = 0$ получаем случай IV.

Это уравнение характерно для всех случаев «несимметричной нелинейности». К подобному же уравнению приводится задача о сег-

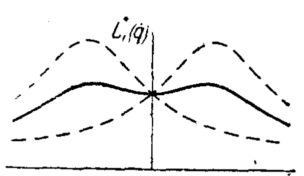

Рис. 22.

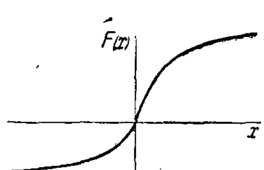

Рис. 23.

нетоэлектрическом конденсаторе с постоянной «подэлектризацией» (см., например [8], стр. 133) или задача о нелинейной упругости, имеющей квадратичный член в разложении силы по смещению (рис. 23). Системы с нелинейностями подобного вида ведут себя так, что при возрастании размахов колебаний их «средняя частота» сначала уменьшается, а потом снова возрастает (сердечник с подмаг-

*) Вместо исходного контура мы рассматриваем другой, для которого „коэффициент самоиндукции" равен $\overset{*}{L_1}(\dot q)$, зная заранее, что конечные результаты для обоих контуров совпадают.

ничиванием), или, наоборот, сначала возрастает, а затем падает (пружина на рис. 23). Мы можем, следовательно, ожидать, что резонансные кривые в этих случаях будут обнаруживать несимметрию дважды — при малых амплитудах в одну сторону, при больших — в другую. Области неустойчивости также могут раздваиваться с появлением скачков по обе стороны от резонанса. Исследование с помощью уравнений ван-дер-Поля подтверждает эти предположения.

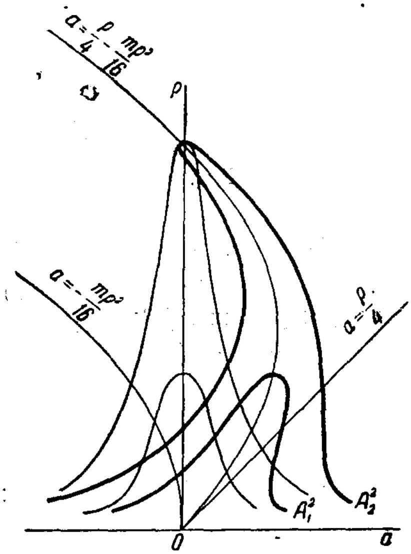

Рис. 24.

Для амплитуд периодического движения получаем соотношение

$$\rho\left(a-\frac{\rho}{4}+\frac{m\rho^2}{16}\right)^2+\rho=A^2, \qquad (31)$$

где, как и прежде, $\rho=x_0^2+y_0^2$. При $A^2=\mathrm{const}$ получаем резонансную кривую

$$a=\frac{\rho}{4}-\frac{m\rho^2}{16}\pm\sqrt{\frac{A^2}{\rho}-1}. \qquad (32)$$

На плоскости a, ρ (рис. 24) две такие кривые для различных A^2 изображены жирными линиями. При малых амплитудах A^2 кривые скошены в сторону низких частот; затем появляется (при определённом значении параметра m) область неустойчивости. При дальнейшем возрастании A^2 неустойчивость ликвидируется, зато появляется скос резонансных кривых в сторону высоких частот. При достаточно больших A^2 снова появляется область неустойчивости, на этот раз не исчезающая.

Исследование фазовой плоскости, проводимое указанным выше способом, показывает, что в этом случае характеристическое уравнение имеет вид

$$S^2+2S+\left(a-\frac{\rho}{4}+\frac{m\rho^2}{16}\right)\left(a-\frac{3\rho}{4}+\frac{5m\rho^2}{16}\right)+1=0, \qquad (33)$$

и, значит, граница области неустойчивости представлена на плоскости a, ρ кривой четвёртого порядка

$$\left(a-\frac{\rho}{4}+\frac{m\rho^2}{16}\right)\left(a-\frac{3\rho}{4}+\frac{5m\rho^2}{16}\right)+1=0. \qquad (34)$$

Граница же между областями устойчивых фокусов и устойчивых узлов

$$\left(a-\frac{\rho}{4}+\frac{m\rho^2}{16}\right)\left(a-\frac{3\rho}{4}+\frac{5m\rho^2}{16}\right)=0 \qquad (35)$$

представляет собой две параболы, пересекающиеся в точках с координатами $a_1 = 0$, $\rho_1 = 0$ и $a_2 = \frac{1}{4m}$, $\rho_2 = \frac{2}{m}$. Координаты точек кривой (34), в которых касательная к этой кривой горизонтальна, находятся совместным решением уравнения (34) и уравнения кривой $\frac{d\rho}{da} = 0$, приводящего к квадратному относительно ρ уравнению

$$a - \frac{\rho}{2} + \frac{3m\rho^2}{16} = 0, \quad (36)$$

т. е. к уравнению параболы, пересекающейся с параболами (35) в их общих точках. Три действительных положительных корня ρ_1, ρ_2, ρ_3 (имеющих физический смысл) уравнения

$$\rho^2\left(1 - \frac{m\rho}{2}\right)^2 - 16 = 0, \quad (37)$$

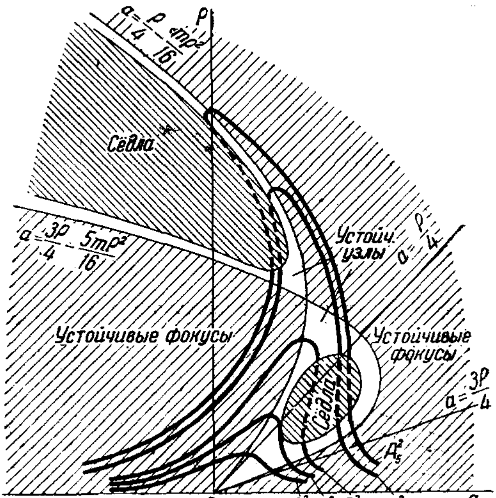

Рис. 25.

получающегося в результате исключения a из (34) и (35), представляют искомые ординаты

$$\rho_1 = \frac{1}{m} + \sqrt{\frac{1}{m^2} + \frac{8}{m}}; \quad \rho_{2,3} = \frac{1}{m} \pm \sqrt{\frac{1}{m} - \frac{8}{m}},$$

последние два только при $m < \frac{1}{8}$. Подобным же образом можно найти ординаты точек кривой (34), в которых касательные к кривой вертикальны. Результаты анализа показывают, что при малых $m \left(m < \frac{1}{8}\right)$ имеем две отдельные области неустойчивости — одну замкнутую, а другую с бесконечными ветвями.

При больших $m \left(m > \frac{1}{8}\right)$ первая область стягивается в точку, а вторая своей вершиной приближается к оси абсцисс. При $m \to 0$ вторая область уходит в бесконечность, а первая, расширяясь, переходит (при $m = 0$) в гиперболическую с асимптотами $a = \frac{\rho}{4}$ и $a = \frac{3\rho}{4}$.

На плоскости a, ρ получаем для не слишком больших m картину, изображённую на рис. 25. На рис. 26 приведены экспериментально снятые кривые феррорезонанса при наличии подмагничивания постоянным током[6]. Их форма хорошо согласуется с кривыми, полученными в результате нашего рассмотрения. В аналогичных задачах вся картина либо качественно вовсе не меняется, либо поворачивается вокруг оси ординат, в зависимости от того, как изменяется «средняя частота» системы с ростом амплитуды колебаний.

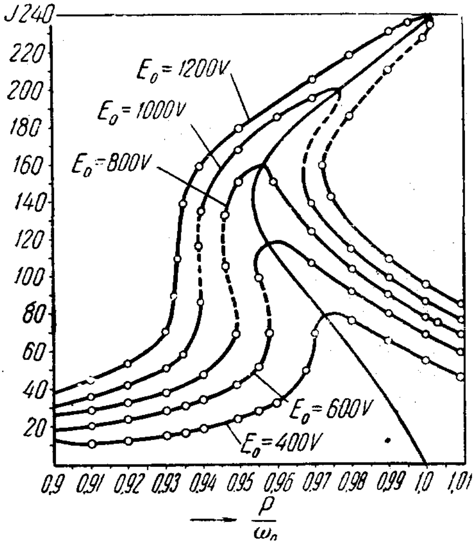

Рис. 26.

10. ФЕРРОРЕЗОНАНСНЫЕ СТАБИЛИЗАТОРЫ

В заключение рассмотрим физические принципы работы феррорезонансных стабилизаторов напряжения, получивших широкое распространение.

Феррорезонансный стабилизатор представляет собой устройство, основным элементом которого является контур с дросселем, работающим вблизи от насыщения сердечника. В зависимости от способа включения контура (по схеме резонанса напряжений или по схеме резонанса токов), получают две различные конструкции стабилизатора. Первая, так называемая схема Кейната, описанная В. В. Ковалевской[21], приведена на рис. 27. Вторая, использующая резонанс токов, была рассмотрена в работах Е. В. Сазанова[22, 23] и показана на рис. 28.

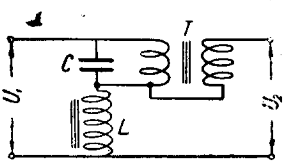

Рис. 27.

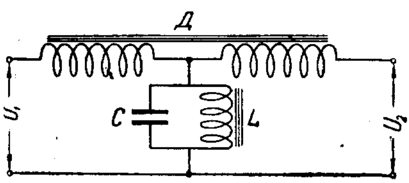

Рис. 28.

Чтобы выяснить принцип работы феррорезонансных стабилизаторов этих типов, обратимся к формуле (25) § 7, выражающей зависимость квадрата амплитуды напряжения на конденсаторе контура (рис. 1) от квадрата амплитуды внешней э. д. с. и от расстройки (в относительных единицах).

В отличие от линейного резонанса, при котором ρ всегда пропорционально A^2 (при постоянной расстройке), в случае феррорезонанса с ростом A^2 резонансные кривые сдвигаются в сторону бóльших частот, и ρ (при $a = \mathrm{const}$) возрастает очень мало. Чем больше отрицательная расстройка, тем заметнее эта особенность.

Однако при достаточно большом фиксированном $a < 0$ при уменьшении A^2 мы попадаем в область неустойчивости, и это кладёт предел использованию феррорезонанса для стабилизации. Особенно наглядно вся картина видна при рассмотрении кривой (25) на плоскости A^2, ρ при постоянной расстройке a.

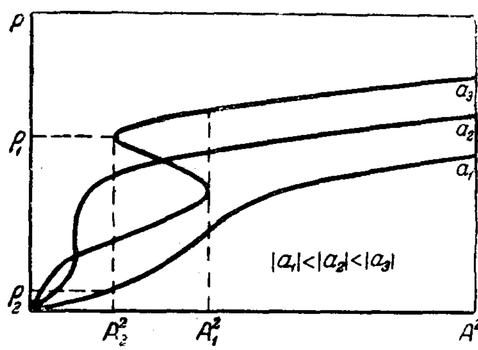

Рис. 29.

Для различных фиксированных расстроек кривые (25) дают семейство характеристик контура (рис. 29). В схеме рис. 27 входное напряжение U_1, подлежащее стабилизации, играет роль внешней э. д. с. последовательного контура. Снимаемое с контура напряжение U_2 складывается из разности напряжения, снимаемого с дросселя, и небольшой части (10—20%) напряжения, снимаемого с конденсатора (трансформатор T понижающий). Таким образом, U_2 в первом приближении пропорционально току в контуре, т. е. пропорционально $\sqrt{\rho}$.

При определённой расстройке (например, a_3, рис. 29) снимаемое напряжение ($\approx \sqrt{\rho}$), начиная с некоторого минимального входного напряжения ($\approx A_1$), называемого «критическим», очень мало зависит от изменений A_1, т. е. от изменений U_1. Например, при колебаниях U_1 на 10—20% U_2 в некоторых схемах меняется в пределах 0,2—0,5%. Небольшое возрастание U_2 компенсируется при помощи трансформатора T. Понижение входного напряжения до значения ниже критического приводит к неустойчивости стабилизатора и скачкам напряжения: при $A = A_2$ снимаемое напряжение скачком падает с $\sqrt{\rho_1}$ до $\sqrt{\rho_2}$.

Стабилизатор может устойчиво работать только при входных напряжениях, бóльших критического. С увеличением нагрузки это критическое напряжение возрастает и при некотором её значении оказывается больше номинального напряжения, подлежащего стабилизации.

В работе схемы рис. 28 существенным является включение дросселя с воздушным зазором, в котором самоиндукция может считаться постоянной. В рабочей части характеристики (рис. 29) увеличение общего тока через феррорезонансный контур почти не приводит к возрастанию напряжения, падающего на нём, что эквивалентно уменьшению сопротивления контура с ростом входного напряжения. Избыточное входное напряжение падает поэтому на дросселе с воздушным зазором. Добавочная обмотка этого дросселя играет роль, аналогичную роли трансформатора T в схеме рис. 27.

Серьёзным недостатком феррорезонансных стабилизаторов является сильная зависимость их характеристик от частоты стабилизуемого напряжения. Поэтому применение их в сетях со значительными колебаниями частоты (маломощные альтернаторы) нецелесообразно. Необходимо также учитывать, что форма снимаемого с феррорезонансного контура напряжения сильно отличается от синусоидальной вследствие появления гармоник. В некоторых случаях амплитуда третьей гармоники достигает 35% [21]. Для улучшения формы стабилизованного напряжения, когда это необходимо, гармоники приходится отфильтровывать, включая настроенные на частоту этих гармоник контуры.

Ряд схем стабилизаторов напряжения, основанных на использовании феррорезонанса, описан в значительном числе работ ([24–29] и др.).

Для целей стабилизации используются также схемы без конденсаторов, представляющие собой случай вырожденных нелинейных систем. Возможны также стабилизаторы, в которых нелинейным элементом схемы является не насыщенный дроссель, а конденсатор с сегнетоэлектрическим диэлектриком (см. § 5).

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Л. И. Мандельштам, УФН, 13, вып. 2, 1933.
2. А. А. Андронов, Изв. АН, серия физич., 9, № 1–2, 1945.
3. Г. С. Горелик, там же.
4. Л. И. Мандельштам, Н. Д. Папалекси и др., Новые исследования нелинейных колебаний, Связьиздат, 1936 г.
5. Н. Д. Папалекси, Эволюция понятия резонанса, УФН, 31, 447 (1947); „Нелинейные колебания", Юбилейный сборник АН СССР, посвящённый 30-летию Великой Окт. соц. революции.
6. H. Schunk u. J. Zenneck, Jahrbuch d. drahtl. Telegr., 19, 170, 1922.
7. L. Dreyfuß, Arch. f. Electrotechnik, 2, 343, 1913.
8. А. А. Андронов и С. Э. Хайкин, „Теория колебаний", ГТТИ, 1937.
9. O. Martienssen, Phys. Zeits., 11, № 10, 448, 1910.
10. E. Appleton, Phyl. Mag. [6], 47, 609, 1924.
11. А. Г. Любина, ЖЭТФ, вып. 8, 1934.
12. G. Duffing, Erzwungene Schwingungen bei veränderl. Eigenfrequenz und ihre techn. Bedeutung, Braunschweig, 1918.
13. J. Horn, Arch. f. Math. u. Phys., 28, 1920.
14. Rüdenberg, Zeits. f. angew. Math. u. Mech., 3, H. 6, 1923.
15. J. P. Den Hartog a. S. J. Mikina, Trans. ASME, 54, 1932.
16. J. P. Den Hartog, J. of the Frankl. Inst., 216, 1933.
17. Б. В. Булгаков, Прикладная матем. и механика, 7, № 1, 1943.
18. И. В. Курчатов, Сегнетоэлектрики. Серия „Проблемы новейшей физики", ГТТИ, 1933.

19. А. А. Андронов и Г. С. Горелик, ДАН, 49, 664, 1945.
20. Л. И. Мандельштам и Н. Д. Папалекси, ЖЭТФ, 4, вып. 2, 1934.
21. В. В. Ковалевская, Изв. Электропром. Сл. Тока, 8—9, 63, 1938.
22. Е. В. Сазанов, Изв. Электропром. Сл. Тока, 12, 30, 1937.
23. Е. В. Сазанов, Изв. Электропром. Сл. Тока, 1, 44, 1939.
24. G. Keinath, Die Technik electrischer Messgeräte, т. 2, 1928.
25. A. Sonlier, Rev. Gén. El., № 4, 196, 1928.
26. И. Песис, Радиофронт, № 2, 1934.
27. R. Grener, EFZ, 18, 489, 1936.
28. Way, Electronics, 7, 14, 1937.
29. А. Шпиглер, Техника связи, № 1, 44, 1937.