1947 г. Август **Т. XXXII, вып. 4**

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

ЗВУКОВЫЕ ВОЛНЫ В ПОМЕЩЕНИЯХ *)

Ф. Морз и Р. Болт

СОДЕРЖАНИЕ

VII. ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ К РАСЧЁТУ ПОМЕЩЕНИЙ РАЗЛИЧНЫХ ОЧЕРТАНИЙ

42. Влияние формы помещения

В двух предыдущих разделах мы изучили случай прямоугольного помещения с однородным распределением поглощающего материала на стенках. Этот случай соответствует разделению переменных. Мы нашли, что точная теория довольно сложна, но что в огромном большинстве случаев (для более высоких частот, не слишком «податливых» стенок и т. п.) нормальные компоненты колебаний могут быть

*) Окончание. См. УФН, т. XXXII, вып. 2, стр. 185, вып. 3, стр. 333. Reviews of Modern Physics, 16, № 2, 69 (1944).

разбиты, по своим показателям затухания, на небольшое число категорий. Большинство колебаний, а именно все или большинство косых колебаний, взаимодействует с материалом стенок так, как это определяется нормальным коэффициентом α_p. Этот коэффициент равен примерно восьмикратной удельной проводимости материала стенок γ. Для колебаний, параллельных данной стенке, действующим коэффициентом будет тангенциальный коэффициент или дополнительный коэффициент, смотря по тому, какая стенка податливее — данная ли или ей противоположная. В предельном случае очень твёрдых стенок как тангенциальный, так и дополнительный коэффициенты приобретают предельное значение, равное половине нормального коэффициента.

Таким образом, в большинстве случаев прямоугольных помещений с однородными стенками сэбиновские предпосылки почти верны, но они неточные как раз настолько, чтобы быть практически непригодными. Бóльшая часть колебаний в заданном диапазоне частот — косые колебания, имеющие почти одинаковый показатель затухания, но показатель затухания других форм колебаний — тангенциальных и аксиальных — сильно отличается. Поэтому итоговая кривая затухания для комбинации всевозможных колебаний не прямолинейна. Получается, что нормальный коэффициент больше, а скользящий коэффициент меньше сэбиновского.

В настоящем разделе мы исследуем помещения более сложных очертаний, по стенкам которых поглощающий материал распределён неравномерно. Для большинства подобных случаев точное решение получить невозможно, но может быть разработан приближённый метод возмущений, дающий большей частью удовлетворительные результаты (для достаточно твёрдых стенок). Эти результаты показывают, что многие формы помещений обладают достаточной правильностью, чтобы в них не все виды стоячих волн имели одинаковый показатель затухания. Они показывают также, какова должна быть степень неправильности очертаний помещения, чтобы сэбиновские допущения стали справедливыми.

Со времён Сэбина твёрдо установлено, что форма помещения оказывает очень большое влияние на его акустические свойства, и были найдены объяснения этому эмпирическому факту, насколько это возможно было сделать, ограничиваясь геометрическим приближением. Хорошую сводку общих соображений о подборе надлежащей формы для аудиторий составили Бигиналь и Вуд [A], Кнудсен [K3] и другие. В основе лежат два общих принципа: а) избегать таких форм, которые дают явные акустические дефекты, например, фокусировку звука вогнутыми поверхностями, эхо и т. д.; б) выбирать такую форму помещений, которая облегчает распространение потока звуковой энергии ко всем слушателям. Для изучения этих вопросов применяются следующие способы: построение звуковых лучей на эскизах разрезов помещений; искровое фотографирование импульсных волн на малых моделях; наблюдение волн на поверхности жидкости, границы которой воспроизводят в малом масштабе форму сечения изучаемого помещения [A]. Применялись также и трёхмерные модели, причём световые лучи отражались от маленьких зеркал, располагаемых надлежащим образом по стенкам модели. Всеми этими методами [A] можно проследить путь звукового луча, возникающего в определённом месте, соответствующем действительному расположению источника звука в помещении, и распространяющегося в помещении, претерпевая ряд последовательных отражений. Таким образом, можно исследовать, как распределяется звуковая энергия в результате многократных отражений по всей площади, занятой местами слушателей, и убедиться, совершенно ли устроена звуковая фокусировка.

Попытки выразить влияние формы аналитически при помощи геометрической апроксимации оказались не особенно плодотворными в силу самого характера задачи. Кнудсен [K3] изучал влияние формы на длительность реверберации путём измерения средней длины свободного пути звука при помощи световых лучей. Ему удавалось проследить путь звукового луча на протяжении до 25 последовательных отражений, для лучей, выходящих из источника в некоторых типичных направлениях. Средний свободный путь луча фигурирует при выводе уравнений реверберации (разделы 7 и 8) и принимается равным $4V/S$, что в точности равно асимптотическому значению при прямоугольных помещениях. Кнудсен измерял его для нескольких дюжин различных форм помещений, в том числе прямоугольных, веерообразных, восьмиугольных с куполом, крестообразных и т. д. Результаты измерений входят в уравнения (2.3) — (2.5) в форме эффективного значения коэффициента K, причём теоретическое значение, соответствующее среднему свободному пути $4V/S$, равно 0,049. Измерения указанных форм дали значения K в пределах от 0,046 до 0,053.

Исследования Кнудсена выяснили также другое обстоятельство, имеющее большее значение, чем малая поправка к длительности реверберации. Он обнаружил, что некоторые поверхности имеют бо́льшую вероятность отразить звук, чем другие поверхности. Это значит, что поглощающие материалы, помещённые на этих поверхностях, дают больший эффект потому, что в среднем на них приходится бо́льшая доля энергии падающего звука. Эта разница оказалась, в частности, очень заметной в помещении с большими горизонтальными размерами и низким потолком — обычная форма больших контор. В комнате размером приблизительно $15 \times 12 \times 3$ *м* с поглотителями, размещёнными исключительно на потолке, длительность реверберации оказалась на 20% короче, чем это следует из уравнения (2.4). Теперь этот результат может быть вычислен из уравнений (6.19) или (6.20).

На этом примере отчётливо выступает основное различие между геометрической и волновой акустикой.

С помощью геометрического метода, исходя из статистических предположений, были предсказаны некоторые результаты [уравнения реверберации (2.3), (4.5)]. В отдельных случаях наблюдаемые результаты оказались иными. Качественные соображения показывают, что не верны исходные предположения: геометрический метод используется для отыскания действительного (не статистического) распределения энергии, и этот результат используется для изменения численного значения множителя в уравнении реверберации при сохранении сэбиновского коэффициента абсорбции. Волновая концепция позволяет аналитически описать компоненты колебания в помещении и вычислить эффективное затухание каждого вида волн в отдельности, для чего требуется учесть форму помещения, распределение в нём поглощающего материала и поглощающие свойства последнего. При этом предполагается, что акустический импеданс является инвариантом, описывающим все акустические свойства поглощающего материала. Компоненты колебаний комбинируются по их видам и, с помощью процессов усреднения, находятся приближённые формулы, приложимые к различным частным практически интересным случаям. При этом, вместо единственного коэффициента в геометрической теории, возникают новые коэффициенты различных видов. Окончательным результатом волновой концепции является видоизменение понятия коэффициента поглощения, между тем как геометрический метод позволяет учесть действительное распределение звуковой энергии только путём введения эмпирических поправочных коэффициентов.

43. Возмущения в граничных условиях

Наиболее соответствующий рассматриваемой проблеме метод возмущений основан на теореме Грина [F1, F2, M2]. Мы начнём с помещения R_0 простой формы с твёрдыми стенками, для которого волновое уравнение имеет точное решение. Собственные функции $\psi_n(x)$ удовлетворяют обычному уравнению

$$\left.\begin{aligned}&\nabla_x^2\psi_N(x)+(\omega_{ON}/c)^2\,\psi_N(x)=0;\quad x=x,\,y,\,z;\\&N=n_x,\ n_y,\ n_z;\quad \omega_{ON}=2\pi\nu_N=2\pi c/\lambda;\\&\iiint\limits_{R_0}\psi_N(x)\,\psi_M(x)\,dV_x=V_0\,\varepsilon_N^0\,\delta_{NM}.\end{aligned}\right\}\qquad(7.1)$$

Здесь V_0 обозначает объём помещения R_0, ε_N^0 представляет среднее значение ψ_N^2 по всему объёму R_0.

Мы ищем для колебаний, вызванных источником с силой, равной единице, и частотой $\nu=\omega/2\pi$, расположенным в точке $X=(X,\ Y,\ Z)$ внутри R_0, решение G, удовлетворяющее уравнениям

$$\left.\begin{aligned}&\nabla_x^2\,G_\omega(x,\ X)+(\omega/c)^2\,G^\omega(x,\ X)=\delta\,(x-X),\\&\nabla_X^2\,G_\omega(x,\ X)+(\omega/c)^2\,G_\omega(x,\ X)=\delta\,(x-X),\end{aligned}\right\}\qquad(7.2)$$

где $\delta(x-X)$ — трёхмерная функция Дирака. Если эта функция Грина удовлетворяет тем же граничным условиям, что и ψ_N, а именно $\partial\psi/\partial n=0$, то её можно разложить в обычный ряд относительно ψ_N:

$$G_\omega(x,X)=\sum_N \frac{c^2\psi_N(x)\,\psi_N(X)}{V_0\varepsilon_N^0\left(\omega^2-\omega_N^2\right)}\,. \tag{7.3}$$

Этот вид принимают уравнения (5.20) и (5.21) в отсутствии поглощения.

В изучении влияния малых изменений граничных условий и формы границ на свойства фундаментальных функций мы будем следовать работе Фешбаха [F2]. Представим себе, что очертания помещения немного изменились так, что приняли новую форму R, причём стенки нового помещения везде расположены внутри первоначального помещения R_0. Равным образом допустим, что новые стенки податливы и имеют импеданс Z, который может иметь на новых стенках значения, изменяющиеся от точки к точке. Для того чтобы обеспечить сходимость принятого приближения, мы должны допустить, что R не сильно отличается от R_0 и что $|Z|$ везде велико сравнительно с ρc. Новые граничные условия для стенок помещения R напишутся поэтому так:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n}=i\omega(\rho/Z)\varphi=i(\omega/c)\beta\varphi=(\omega/c)(\sigma+i\gamma)\varphi. \tag{7.4}$$

Здесь Z, β, σ и γ представляют заданные функции точки на поверхности стенки.

Применение теоремы Грина совместно с уравнением для G даёт возможность написать весьма общее интегральное уравнение

$$\varphi(x)=\int_S\int\left[\varphi(X)\frac{\partial}{\partial n_X}G_\omega(x,X)-G_\omega(x,X)\frac{\partial}{\partial n_x}\varphi(X)\right]dS_X. \tag{7.5}$$

Интегрирование распространено здесь на поверхность S' нового помещения R. Решение φ этого интегрального уравнения представляет собой внутри R решение волнового уравнения $\nabla^2\varphi+(\omega/c)^2\varphi=0$. Это решение вне R равно нулю; в частности, оно равно нулю в промежутке между R_0 и R. Функция Ψ, определяемая уравнением

$$\Psi_N(x)=\int_S\int\left[\psi_N(X)\frac{\partial}{\partial n_X}G_{\omega_N}(x,X)-\right.$$
$$\left.-G_{\omega_N}(x,X)\frac{\partial}{\partial n_x}\psi_N(x)\right]dS_X\,, \tag{7.6}$$

равна ψ_N внутри R и нулю вне R.

Приняв во внимание новые граничные условия (7.4), можно показать, что решение интегрального уравнения

$$\varphi(x)=\int_S\int\varphi(X)\left[\frac{\partial}{\partial n_X}G_\omega(x,X)-i\left(\frac{\omega\beta}{c}\right)G_\omega(x,X)\right]dS_X \tag{7.7}$$

будет повсюду равно нулю почти для всех значений ω. Но для ряда дискретных значений ω, которые мы обозначим через ξ_N, решение φ внутри R не будет равно нулю и будет удовлетворять волновому уравнению при новых граничных условиях на поверхности R. Вне R и оно равно нулю. Таким образом, решения уравнения (7.7) являются искомыми собственными функциями, а величины ξ_N представляют собой характеристические значения для нового помещения R при граничных условиях (7.4).

Уравнение (7.7) также не имеет точного решения как исходное дифференциальное уравнение, если поверхность S объёма имеет сложную форму и если импеданс стенки сложным образом изменяется на поверхности S. Однако найденное решение имеет вид, приспособленный для вычисления возмущений, поскольку интегрирование распространено именно на новую поверхность S и предусматривает новые граничные условия. Достаточно в интеграле заменить $\varphi(X)$ через $\psi_N(X)$ и подставить вместо G выражение (7.3), и мы получим первое приложение для φ. Далее, можно повторно применить теорему Грина[F2] и получить уравнение для приближённого определения значения ξ_n:

$$\xi_N^2 = \omega_N^2 + c^2 \left\{ \int_S\int \varphi \left[\frac{\partial}{\partial n} \psi_N - i\left(\frac{\omega\beta}{c}\right)\psi_N \right] dS \right\} \left\{ \int\int_R\int \varphi\psi_N \, dV \right\}^{-1}. \quad (7.8)$$

Трудность, возникающая при подстановке ψ_N вместо φ в интеграле выражения (7.7), заключается в том, что получающийся при этом ряд очень медленно сходится вследствие того, что φ на поверхности S претерпевает разрыв. Эту трудность можно обойти путём вычитания разрывного значения (или его главной части) посредством уравнения (7.6):

$$\varphi(x) = \Psi_N(x) + \int_S\int \Big\{ \varphi(X) \frac{\partial}{\partial n_X} G_\omega(x, X) - \psi_N(X) \frac{\partial}{\partial n_X} G_{\omega_N}(x, X) - G_\omega(x, X)\left(i\,\frac{\omega\beta}{c}\right)\varphi(X) + G_{\omega_N}(x, X)\frac{\partial}{\partial n_X}\psi_N(X) \Big\} dS_X. \quad (7.9)$$

Здесь Ψ внутри R равно ψ_N и равно нулю вне R.

Теперь можно получить первое приближение для φ, которое вполне удовлетворительно сходится. Подставив в интеграл ψ_N вместо φ, получим:

$$\varphi(x) \approx \Psi_N - \int_S\int G_{\omega_N}(x, X)\left[\frac{i\omega\beta}{c}\psi_N(X) - \frac{\partial}{\partial n_x}\psi_N(x)\right] dS_X \quad (7.10)$$

и, воспользовавшись уравнением (7.3), окончательно найдём:

$$\left.\begin{aligned} \varphi(x) &\approx \Psi_N(x) + c^2 {\sum_M}' A_{MN}\,(\omega_N^2 - \omega_M^2)^{-1}\,\psi_M(x), \\ A_{MN} &= (1/V\varepsilon_M)\iint\limits_S \psi_M\left(\frac{\partial}{\partial n}\psi_N - i\,\frac{\omega_N\beta}{c}\,\psi_N\right)dS, \\ &\iiint\limits_R \psi_N^2\,dV = V\varepsilon_N. \end{aligned}\right\} \qquad (7.11)$$

В этих выражениях V означает объём помещения R, ε_N — среднее квадратичное значение ψ_N внутри R [см. уравнение (5.17)], а штрих у знака суммы означает, что из суммы исключены члены с одинаковыми значками $M = N$.

Соответствующее уравнение для характеристических значений будет:

$$\xi_N^2 \approx \omega_N^2 + c^2 A_{NN} + c^4 {\sum_M}' (\varepsilon_M/\varepsilon_N)\,A_{MN}^2/(\omega_N^2 - \omega_M^2). \qquad (7.12)$$

Здесь в уравнение (7.8) было подставлено выражение (7.11).

44. Возмущения, обусловленные размещением поглощаемого материала

Рассмотрим сначала случай, когда очертания помещения достаточно правильны и единственным возмущением являются граничные условия (7.4). В этом случае R совпадает с R_0, и интеграл A_{MN}, входящий в уравнения (7.11) и (7.12), приобретает вид

$$A_{MN} = -\,i\omega_N\,(1/cV_0\,\varepsilon_M^0)\iint\limits_S [\psi_M\,\beta\,\psi_N]\,dS.$$

Этот случай изучали Маа [M2] и Фешбах и Клогстон [F1, F2].

Первым приближением для частотного параметра ξ_N будет в этом случае следующее выражение, которое следует сопоставлять с уравнением (5.9):

$$\xi_N(-\omega) \approx \omega_N - \frac{1}{2}\,\frac{c}{V_0\,\varepsilon_N^0}\iint(\sigma + i\gamma)\psi_N^2\,dS. \qquad (7.13)$$

Функция φ будет иметь экспоненциальный сомножитель вида

$$\exp(-i\xi_N t) \approx \exp\left\{-i\left[\omega_N - \frac{c}{2V_0\,\varepsilon_M^0}\iint \sigma\psi_N^2\,dS\right]t - \right.$$

$$\left. - \frac{ct}{2V_0\,\varepsilon_N^0}\iint \gamma\psi_N^2\,dS\right\}. \qquad (7.14)$$

Среднее квадратичное значение φ поэтому будет иметь также экспоненциальный фактор спадания обычного вида $\exp[-(ca_N t/4V_0)]$, который полезно сопоставить с уравнением (6.19). Эффективный коэффициент стенки для стенок помещения может быть записан в виде

$$\left.\begin{aligned} \alpha_N = (a_N/S) \approx \frac{8}{2S\varepsilon_N^0}\int\int \gamma\,\psi_N^2\,ds, \\ \gamma = \text{вещественной части } [\rho c/Z]. \end{aligned}\right\} \tag{7.15}$$

Он является функцией от площади стенок S, от ε_N^0 — среднего квадрата волновой функции ψ_N, взятого по объёму V, и интеграла, взятого по поверхности стенок от коэффициента поглощения (8γ), умноженного на весовой фактор ψ_N^2. Уравнение (7.15) полезно сопоставить с уравнениями (5.26) и (5.29). Последние уравнения были выведены для однородной стенки; уравнение же (7.15) обычно (но не всегда) оказывается справедливым для стенки, покрытой поглощающим материалом не сплошь, а отдельными кусками.

Мы видели выше, что это приближение справедливо, если $(|Z|/\rho c\eta) > 2$, где η означает отношение «размеров» помещения к длине полуволны.

Из этого приближения первого порядка можно вывести некоторые интересные заключения. Прежде всего оказывается, что кусок поглощающего материала лучше всего поглощает звук, если он расположен в таком месте на стенках, где большинство волновых функций имеют максимумы. Таким образом, для прямоугольного помещения наиболее эффективным является размещение поглощающего материала в вершинах телесных углов; следующее по качеству размещение — вдоль рёбер помещения. Далее, если нужно распределить материал по нескольким стенкам, то лучше его распределить неправильным образом, чем правильными фигурами. В последнем случае почти невозможно избежать того, что для некоторых волн материал попадёт в минимумы ψ^2, и эти колебания будут очень слабо затушены.

Уравнение (7.15) допускает дальнейшее упрощение, если поглощающий материал на каждой стенке распределён равномерно в пределах областей, бо́льших сравнительно с длиной волны. В этом случае интеграл $\int\int \gamma\psi_N^2\,dS$ приблизительно равен площади S, помноженной на постоянное число β и на среднее квадратичное значение ψ_N на данной стенке. Поэтому в порядке первого приближения можно сказать, что для больших образцов материала (по сравнению с длиной волны) коэффициент стенки, при данном материале на данной стенке, определится так:

$$\alpha_N \approx (8\gamma)\,e_N, \tag{7.16}$$

где

$$e_N = \frac{1}{2}\left[\frac{\text{средн. знач. } \psi_N^2 \text{ в пределах данной стенки}}{\text{средн. знач. } \psi_N^2 \text{ по всему объёму помещения}}\right]$$

(формула справедлива для $|Z|/\lambda > 4\rho c L$, где L — наибольший размер помещения).

Множитель e_N, через который в это первое приближение только и входит тип волны, может быть назван коэффициентом типа колебаний. Необходимо отметить, что α_N обычно не совпадает с сэбиновским коэффициентом. Рассматриваемые здесь помещения имеют слишком правильную форму, чтобы удовлетворять сэбиновским условиям.

Таким образом, даже в порядке первого приближения получается, что коэффициент поглощения материала зависит не только от его акустического импеданса, но и от места стенки, на котором он размещён, а также от частного вида колебаний. Если мы заинтересованы в том, чтобы увеличить начальную крутизну кривой затухания, мы должны разместить наш материал так, чтобы множитель типа колебаний e_N был возможно больше для большинства форм колебаний в заданном диапазоне. Если мы хотим усилить оконечную крутизну кривой затухания, мы должны так разместить наш материал, чтобы ни для одного из собственных колебаний весь поглощающий материал не оказался на стенке с маленьким e_N. Это было установлено в главе VI для прямоугольных помещений с равномерным распределением материала. Здесь мы видим, что это справедливо для любого помещения правильной формы и даже для неравномерного размещения материала (по крайней мере, в порядке первого приближения). Для облегчения практического использования этих результатов мы вычислим значения e_N для различных часто встречаемых форм помещений. Так например, для прямоугольных помещений, учитывая известные свойства косинусоидальных членов при нормальных формах колебаний, получаем:

для всех косых колебаний:

$e_N = 1$ для всех стенок;

для всех тангенциальных колебаний:

$e_N = \frac{1}{2}$ для двух стенок, параллельных направлению движения волны,

$e_N = 1$ для остальных четырёх стенок;

для всех аксиальных колебаний:

$e_N = \frac{1}{2}$ для четырёх стенок, параллельных направлению распространения колебаний,

$e_N = 1$ для остальных двух стенок.

Рекомендуется сопоставить этот результат с соображениями, касающимися уравнений (3.2) и (5.12).

Можно пойти дальше и определить значения всех e для любого помещения, у которого две противолежащие стенки плоские и параллельные, все же остальные стенки перпендикулярны к плоскопараллельной паре. Примером подобного помещения является комната с вертикальными стенками и с плоскими горизонтальными полом и потолком, но с каким-либо сложным планом. Направим ось x перпендикулярно к плоскопараллельным стенкам. Хотя мы не можем разделить волновое уравнение по двум координатам, перпендикулярным к x (назовём их y и z), но можем выделить x-ый множитель в фундаментальной функции для каждого основного колебания

$$\psi_N = \cos(\pi n_x x/L_x) F_{n_y n_z}(y, z).$$

Среднее значение ψ_N^2 по всему объёму будет $(K_{n_y n_z} / 2e_{n_x})$, где e_{n_x} равно единице (если $n_x > 0$) или половине (если $n_x = 0$), а K означает среднее значение F по всем значениям y, z. Поэтому в первом приближении для больших кусков поглощающего материала, размещённого на любой плоско параллельной стенке, получим:

$$e_N = e_{n_x} = \begin{cases} 1 \text{ для волн, падающих на эти стенки,} \\ \frac{1}{2} \text{ для волн, тангенциальных к этим стенкам } (n_x = 0). \end{cases}$$

Для получения более точного ответа необходимо применять методы, разобранные в главе V.

Теперь мы вычислим значение e для цилиндрических и треугольных помещений. Эти помещения были рассмотрены Ро [R8].

45. Цилиндрические помещения

Фундаментальные функции для цилиндрического помещения высотой L и радиуса R имеют вид

$$\psi_N = {\cos \atop \sin}(n_\varphi \varphi) J_{n_\varphi}(\pi \tau_{n_\varphi n_r} r/R) \cos(\pi n_z z/L). \tag{7.19}$$

Здесь τ означает любое число, удовлетворяющее уравнению

$$\frac{d}{d\tau} J_{n_\varphi}(\pi\tau) = 0;$$

наименьшее значение обозначим через $\tau_{n_\varphi 0}$, следующее — через $\tau_{n_\varphi 1}$

и т. д. При больших n_r или n_φ предельные значения суть:

$$\tau_{n_\varphi, n_r} \approx n_r + \frac{1}{2} n_\varphi + \frac{1}{4}; \quad n_r \gg 1, (n_r/n_\varphi) \gg 1;$$

$$\tau_{n_\varphi, n_r} \approx (n_\varphi / \pi) + \frac{1}{2}\left[9\left(n_r + \frac{1}{4}\right)^2 n_\varphi / \pi\right]^{1/3};$$

$$n_\varphi \gg 1, \ (n_\varphi / n_r) \gg 1;$$

$$\tau_{n_\varphi, 0} \approx (n_\varphi / \pi) + 0{,}2575 n_\varphi^{\frac{1}{3}}; \ n_\varphi \gg 1, \ n_r = 0.$$

Среднее значение квадрата множителя, зависящего от φ, равно единице для $n_\varphi = 0$, и равно половине для $n_\varphi > 0$. То же справедливо и для множителя, зависящего от z. Среднее значение квадрата множителя, зависящего от r равно:

$$(2/R^2)\int_0^R J_{n_\varphi}^2(\pi\tau\, r / R)\, r dr = J_{n_\varphi}^2(\pi\tau_{n_\varphi n_r})\,[1 - (n_\varphi / \pi\tau_{n_\varphi, n_r})^2].$$

Поэтому, на основании уравнения (7.16), отношение коэффициента стенки для больших образцов материала к нормальному коэффициенту (8γ) равно:

для материала на обеих торцовых стенках:

$$e_N \begin{cases} \frac{1}{2} \text{ для волн, касательных к этим стенкам } (n_z = 0), \\ 1 \text{ для волн, падающих на эти стенки } (n_z > 0); \end{cases} \qquad (7.20)$$

для материала на цилиндрической боковой поверхности:

$$e_N = \frac{1}{2}[1 - (n_\varphi (\pi\tau_{n_\varphi, n_r})^2]^{-1}.$$

Значение e_N для цилиндрических поверхностей и различных n_r и n_φ даны в табл. 1 и могут быть вычислены посредством следующих асимптотических формул:

$$e_N \approx \frac{1}{2}[1 + (n_\varphi / \pi n_r)^2], \quad n_r \gg 1; \quad (n_r / n_\varphi) \gg 1;$$

$$e_N \approx 0{,}309\, n_\varphi^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{8}, \quad n_\varphi \gg 1; \quad n_r = 0;$$

$$e_N \approx \frac{1}{2}\left[\frac{n_\varphi}{3\pi\left(n_r + \frac{1}{4}\right)}\right]^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{8}; \quad n_\varphi \gg 1; \quad (n_\varphi / n_r) \gg 1.$$

Таблица 1

Значения e_N для цилиндрических помещений

n_r \ n_φ	0	1	2	3
0	0,50	0,70	0,86	1,00
1	0,50	0,52	0,55	0,57
2	0,50	0,51	0,52	0,54
3	0,50	0,51	0,52	0,53

Условия для цилиндрической поверхности совершенно иные, чем для торцовых плоских стенок. Колебания, распространяющиеся по кругу «параллельно» искривленной стенке ($n_r = 0$), имеют коэффициент $\alpha_N = (8\gamma)e_N$, который (при $n_\varphi \gg 1$) больше нормального коэффициента (8γ). Это обусловлено тем обстоятельством, что такие колебания скользят по поверхности наружных стенок, тогда как колебания, касательные к плоским стенкам, имеют вблизи стенок сравнительно мало энергии, и поэтому соответствующие тангенциальные коэффициенты равны только половине нормальных. В цилиндрических помещениях, больших по сравнению с длиной волны (c/ν), бо́льшая часть энергии основных колебаний, для которых как n_z, так и n_r равны нулю, а n_φ велики, сосредоточена в пределах полуволны около стенок, так что эта энергия быстро поглощается. Так, например, для $n_z = n_r = 0$ и $n_\varphi = 20$ коэффициент стенки для материала на цилиндрической поверхности в 2,3 раза превышает нормальный коэффициент (8γ). Для $n_\varphi = 100$ он превышает его в 6,7 раза. Для торцовых же стенок он составляет половину нормального коэффициента.

Впрочем, такие круговые колебания представляют весьма специальный случай. Их трудно возбудить иначе, как помещая источник звука вплотную к цилиндрическим стенкам, и их трудно измерять иначе, как помещая микрофон также вплотную к этим стенкам. Можно заметить, что кривая затухания для цилиндрических помещений весьма сильно зависит от места установки микрофона. Кривая, снятая вплотную у цилиндрической стенки, имеет бо́льшую начальную крутизну, чем кривая, снятая в центре помещения.

В противоположность колебаниям, касательным к плоскости (r, z), для волн, распространяющихся вдоль радиуса r (аксиальные, $n_\varphi = 0$), коэффициент стенки для цилиндрической стенки равен только половине нормального коэффициента. Это происходит потому, что энергия таких колебаний фокусируется на оси помещения, и у стенок она меньше, чем в среднем по объёму. Для волн, коротких по сравнению с размерами помещения, большинство основных колебаний имеют e_N для цилиндрических стенок примерно равным половине. Только те колебания, для которых n_r очень мало, имеют e_N больше единицы. Поэтому для центральной части помещения акустический материал, размещённый по цилиндрической поверхности, примерно вдвое менее эффективен, чем материал, размещённый на плоских торцовых поверхностях. Для звуков, исходящих из периферической части помещения, наоборот, поглощающие свойства материала на цилиндрических стенках много выше.

Аналогичные исследования помещений в форме полуцилиндра с добавочной плоской стенкой, проходящей через ось, а также студий с полусферической стенкой, привели к следующим правилам, справедливым в пределах первого приближения:

для плоских стенок:

$e_N = \frac{1}{2}$ для касательных волн (n_z или n_φ — нуль),

$e_N = 1$ для волн, падающих на стенку (n_z или n_φ больше нуля);

для кривых стенок:

$e_N > 1$ для волн, касательных к стенкам ($n_r \ll n_\varphi$),

$e_N \approx \frac{1}{2}$ для волн, падающих на стенку ($n_r \gg n_\varphi$).

Вообще говоря, кривые поверхности, фокусирующие звуковую энергию в некоторой области вдали от стенок, уменьшают действие акустического материала. Чем бо̀льшая доля стенок занята вогнутостью, тем меньше на стенках таких участков, в которых поглощающий материал может полностью проявить свои поглощающие свойства. Это верно, по крайней мере, для центральной части помещения. Аналогичный анализ для камеры сферической формы выполнил Шустер [S 11].

46. Треугольные помещения

Представим себе помещение с вертикальными боковыми стенками, плоскими горизонтальными полом и потолком, имеющее в плане форму прямоугольного равнобедренного треугольника. Для такого помещения можно получить точное решение для ψ_N, хотя волновое уравнение не разделяется. Можно доказать, что функция следующего вида удовлетворяет граничным условиям как на перпендикулярных стенках-катетах, так и на диагональной стенке-гипотенузе:

$$\psi_N = \left(\frac{1}{2}\right) \cos(\pi n_z z/L)\, T_{n_s n_d}(x,y).$$

Здесь функция T равна:

$$\begin{aligned} T_{n_d n_s}(x,y) = \frac{1}{2}\Big\{ &\cos[\pi(n_d+n_s)x/L]\cos(\pi n_s y/L) + \\ &+(-1)^{n_d}\cos[\pi(n_d+n_s)y/L]\cos(\pi n_s x/L)\Big\} = \\ = \frac{1}{2}\Big\{ &\cos[\pi(n_d+2n_s)\xi/\Lambda]\cos(\pi n_d \eta/\Lambda) + \\ &+\cos[\pi(n_d+2n_s)\eta/\Lambda]\cos(\pi n_s \xi/\Lambda)\Big\}, \quad (n_d \text{ чётное}); \end{aligned} \qquad (7.21)$$

$$T_{n_d, n_s}(x, y) = \frac{1}{2}\Big\{ \sin[\pi(n_d + 2n_s)\xi / \Lambda] \sin(\pi n_d \eta / \Lambda) + \\ + \sin[\pi(n_d + 2n_s)\eta / \Lambda] \sin(\pi n_s \xi / \Lambda) \Big\}, \quad (n_d \text{ нечётное}),$$

где

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(y + x), \quad \eta = \frac{1}{\sqrt{2}}(y - x); \quad \Lambda = \sqrt{2L}.$$

Число собственных частот, меньших, чем ν, для такого помещения равно примерно половине того же числа для квадратного помещения с теми же длинами взаимно перпендикулярных стенок, так как диагональная стенка устраняет двукратное вырождение большинства собственных колебаний (помещение имеет половинный объём).

Интегрирование вышеприведённых волновых функций позволяет вычислить множитель типа колебаний e_N для разных стенок и разных основных колебаний, при нормальном коэффициенте (8γ):

$$\left.\begin{aligned} &\text{для стенок-катетов:} \\ &\qquad e_N = \frac{1}{2} \text{ при } n_s > 0, \\ &\qquad e_N = \frac{3}{4} \text{ при } n_s = 0; \\ &\text{для стенки-гипотенузы:} \\ &\qquad e_N = 1 \text{ при } n_d > 0, \\ &\qquad e_N = \frac{3}{4} \text{ при } n_d = 0; \\ &\text{для пола и потолка:} \\ &\qquad e_N = 1 \text{ при } n_z > 0, \\ &\qquad e_N = \frac{1}{2} \text{ при } n_z = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (7.22)$$

Таким образом, даже в таком помещении имеются колебания, «параллельные» стенке (одно из n равно нулю), и эффективное поглощение материала для таких колебаний уменьшается. Степень снижения эффективности не так велика, как в прямоугольном помещении: e_N снижается только до $^3/_4$ для боковых стенок. Можно считать, что в треугольном помещении колебания, «параллельные» стенкам, не настолько «параллельны», как они могли бы быть в прямоугольном помещении. Это обстоятельство показывает, что помещение с непараллельными стенками не является ещё достаточно нерегулярным, для того чтобы сэбиновские предположения были для него справедливы. Кривые затухания для таких помещений ещё заметно отличаются от прямых линий.

Из рассмотрения рис. 27 вытекает ряд интересных обстоятельств. Узловые поверхности пересекаются со стенками либо под прямым углом, либо под углом 45°. В последнем случае давление будет в фазе по всей площади стенки, соответствующее значение e_N равно $^3/_4$, и можно считать, что колебание происходит «параллельно» этой стенке. Если узловая поверхность пересекает стенку под прямым углом, то давление на одну половину стенки по фазе противоположно давлению на вторую половину, e_N имеет значение единица; можно полагать, что колебание происходит непараллельно этой стенке. Рис. 27 даёт расположение узловых поверхностей и значение e_N для некоторых низших собственных частот, включающих наиболее типичные случаи.

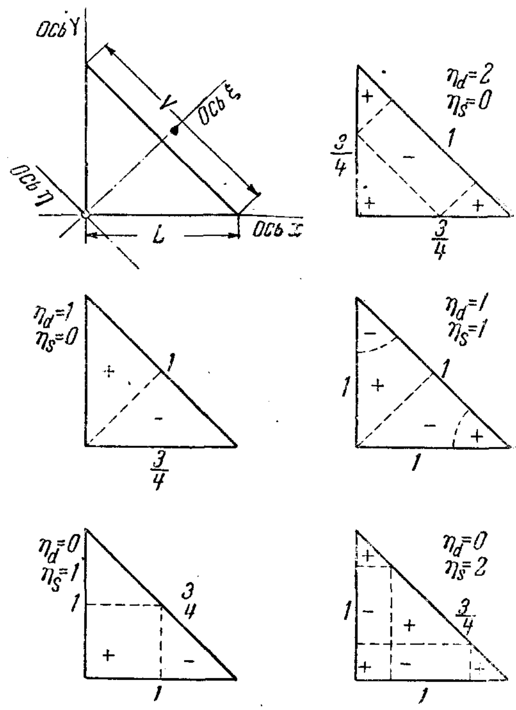

Рис. 27. Расположение узловых фигур давления в треугольном помещении и значения коэффициента типа колебаний e_N. Целые числа — n_d и n_e; соответствующие значения e_N надписаны около каждой стенки.

47. Возмущения второго порядка

До сих пор мы рассматривали только возмущения первого порядка, допуская, что член второго порядка пренебрежимо мал. Конечно, это не всегда верно (это верно только, если $|Z|\lambda/4\rho c$ больше наибольшего размера помещения), и поэтому имеет смысл исследовать также и члены более высокого порядка. Например, мы увидим, что если член второго порядка в уравнении (7.12) недостаточно велик и не состоит, в свою очередь, из ряда членов, то невозможно получить эргодическое распределение звуковой энергии в помещении. Относительная величина члена второго порядка по сравнению с членом первого порядка может служить при заданной частоте приближённым критерием того, справедливы ли для данного помещения сэбиновские предположения или нет.

Сначала разберём случай, когда очертания комнаты R_0 простые, так что единственным возмущением является размещение по стенкам поглощающего материала. Выражение для возмущённой волновой функции будет иметь вид

$$\varphi(x) \approx \Psi_N(x) -$$
$$- i\omega_N(c/V) \sum_M{}' \left[\int\int \psi_M(X)\,\beta(X)\,\psi_N(X)\,dS_X \right] \frac{\psi_M(x)}{\varepsilon_M(\omega_N^2 - \omega_M^2)}. \quad (7.23)$$

Штрих у знака суммы означает, что при суммировании опущен член с одинаковыми значками $M = N$. Применяя методы, описанные в разделе 33, а также уравнение (7.3), можно установить, что вблизи куска поглощающего материала грубым приближением уравнения (7.23) является:

$$\varphi(x) \approx \Psi_N(x) + i\omega_N\rho \int\int [\psi_N(X)/Z(X)] \cdot \frac{\exp(i\omega_N D/c)}{2\pi D} dS_X, \quad (7.24)$$

где интегрирование распространяется на поверхность поглощающего материала вблизи точки x, а D означает расстояние между точкой x (x, y, z) в помещении и точкой X (X, Y, Z) на стенке.

Последняя формула представляет интерес по следующей причине: она показывает, что в первом приближении давление у стенки в точке X равно $-i\omega_N\rho\psi_N(X)$; нормальная составляющая скорости у стенки, в точке с импедансом $Z(X)$ равна $-i\omega_N\rho\psi_N(X)/Z(X)$. Движение элемента поверхности dS стенки вызывает излучение в помещение звука, соответствующее силе элементарного источника: $-(i\omega_N\rho\psi_N/Z)\,dS\,(-\exp[i\omega_N D/c]/2\pi D)$. Результат интегрирования по всем элементарным источникам, расположенным вблизи x, составляет второй член. Таким образом, первой поправкой к волновой функции ψ_N, обусловленной присутствием на стенке поглощающего материала, является излучение, созданное движением самого поглощающего материала[VI] или движением воздуха в порах этого материала, вызванным самой стоячей волной ψ_N. Следствия из этого простого вывода будут исследованы в главе VIII.

С точностью до членов второго порядка относительно β уравнение для частоты и для коэффициента затухания в разбираемом случае будет иметь вид

$$\xi_N^2 \approx \omega_N^2 - \frac{i\omega_N c}{V\varepsilon_N} \int\int \beta\psi_N^2 ds + \left(\frac{c\omega_N}{V\varepsilon_N}\right)^2 \sum_M{}' \frac{\varepsilon_N}{\varepsilon_M} \frac{\left[\int\int \psi_M\beta\psi_N\,ds\right]^2}{(\omega_M^2 - \omega_N^2)}. \quad (7.25)$$

Можно также апроксимировать это уравнение, принимая во внимание одну только когерентную часть возмущения:

$$\xi_N^2 \approx \omega_N^2 - \frac{i\omega_N c}{V\varepsilon_N} \int\int \beta\psi_N^2 d +$$
$$+ \left(\frac{\omega_N^2}{V\varepsilon_N}\right) \int\int dS_x \left\{ \psi_N(x)\,\beta(x) \int\int \psi_N(X)\,\beta(X) \times \right.$$
$$\left. \times [\exp(i\omega_N D/c)/2\pi D]\, dS_X \right\}. \quad (7.26)$$

Здесь двойное интегрирование приходится распространить только на малые значения D. Детальное исследование этого уравнения будет дано в главе VIII.

48. Переход к эргодическому процессу

Следует считать, что при достаточно больших количествах поглощающего материала, достаточно неправильно респределённого по стенкам прямоугольного помещения, волновое движение будет эргодическим, и кривая затухания получится прямолинейной. Это осуществляется, когда стоячие волны нельзя более рассматривать как чисто тангенциальные или аксиальные волны и когда все колебания имеют одинаковый показатель затухания. С точки зрения теории возмущений это получится тогда, когда каждая стоячая волна φ представляет более или менее случайную смесь нескольких различных ψ_N в почти равных пропорциях, так что в каждом φ будет участвовать много косых колебаний. Как очевидно из уравнений (7.23) и (7.25), это произойдёт тогда, когда последний член в каждом выражении будет состоять из многих почти равных друг другу членов, и их сумма окажется того же порядка величины, что и первый член.

В этом случае, разумеется, для получения точных значений волновой функции необходимы ещё более высокие степени приближения, чем вторая. Однако представляется возможным принять относительную величину поправки второго порядка, например, в уравнении (7.25) для ξ, в качестве грубого критерия эргодичности колебаний.

Таким образом, если член второго порядка равен по величине первому члену или больше его и если он состоит из большого числа различных волновых функций, имеющих амплитуды одного порядка, то колебания можно считать эргодическими и сэбиновские допущения — справедливыми. Поэтому интересно получить простые суммарные оценки члена второго порядка в уравнении (7.25), чтобы использовать их как критерии неупорядоченности процесса.

В частности, в уравнении (7.25) решающее значение в члене второго порядка имеет обменный интеграл

$$\beta_{MN} = \int\int \psi_M \beta \psi_N dS.$$

Он измеряет способность данного способа распределения поглощающего материала «рассеивать» колебания, превращая волны M в волны N. Если это рассеяние достаточно велико, то ни одно колебание не будет строго аксиальным или тангенциальным, все постоянные затухания будут стремиться к общему среднему значению и сэбиновские предположения вступят в силу.

Для справедливости этого, конечно, β_{MN} должно отличаться от нуля для большинства значений M и N. В действительности большинство β_{MN} должны иметь примерно одинаковую величину. Это непосредственно показывает, что при равномерном распределении поглощающего материала по одной или нескольким стенкам в помещении правильной формы это неосуществимо: ведь, если β имеет одно и то же значение в пределах всей стенки (например стенки x, y), тогда все β_{MN} будут нули, кроме тех, для которых $n_x = m_x$ и $n_y = m_y$. В результате, большинство членов при суммировании по M обращается в нуль, и стоячие волны не будут беспорядочными.

Аналогичным образом, вообще, любое достаточно симметричное распределение поглощающих материалов приведёт к тому, что многие интегралы β_{MN} обратятся в нуль. Требуется поэтому «совершенно беспорядочное» распределение кусков поглощающего материала. Как этого добиться практически, указано в работах Максфильда и Потвина [M5], Бонера [B11], Мейера [M6] и Фолькмана [V1].

Разберём частный пример. Пусть по стенкам прямоугольной комнаты «беспорядочно» распределены m кусков поглощающего материала с удельной проводимостью $\beta = \rho c/z$, каждый размерами $a \times b$. Общая площадь материала составит тогда $S_a = mab$. Член первого порядка в уравнении (7.25) тогда приобретёт вид

$$-2i\omega_N c\,(\beta S_a/V).$$

Дальше нужно определить среднее квадратичное значение интеграла $\int\int \phi_M \beta \phi_N ds$, где интеграция распространена на площадь одного куска материала, а усреднение ведётся по всем M и N. Если кусок материала размерами $a \times b$ совершенно случайно помещён на стенке, то узловая поверхность пересечёт этот кусок случайным образом, и множитель интеграла, зависящий от x, будет иметь общую форму

$$\beta \int_{-a/2}^{a/2} \sin\left[(\pi n_x x/L_x) + \Phi_x\right] \sin\left[(\pi m_x x/L_x) + \Phi'_x\right] dx.$$

Этот множитель нужно возвысить в квадрат и усреднить по Φ_x, Φ'_x, n_x и m_x.

Усредняя сначала по фазовым углам Φ_x и Φ'_x, получим:

$$\frac{\sin^2[\pi a/2L_x(n_x - m_x)]}{[(\pi/L_x)(n_x - m_x)]^2} + \frac{\sin^2[(\pi a/2L_x)(n_x + m_x)]}{[(\pi/L_x)(n_x + m_x)]^2}.$$

Умножив это выражение на соответствующий множитель, зависящий от y, и усреднив по n_x, m_x, n_y и m_y, можно получить для одного куска такое приближённое выражение:

$$\frac{1}{4}\beta^2 \frac{a^2 b^2}{1 + (4ab/\lambda^2)},$$

а для всех m кусков

$$(\beta^2_{MN})_{\text{ср}} \approx \frac{1}{4}\beta^2 \frac{S_a^2}{1 + (4S_a/m\lambda^2)}.$$

Здесь λ означает среднюю длину звуковой волны для M-го и N-го основных колебаний. Если в сумме членов второго порядка основную роль играют члены с $\omega_M \approx \omega_N$, то эта апроксимация приемлема.

Типичный член суммы второго порядка в уравнении (7.25) приближённо равен:

$$(c^2 \omega_N / V^2)\, \beta^2 \frac{S_a^2}{1 + (4S_a/m\lambda^2)} \cdot \frac{1}{\omega_M - \omega_N}.$$

Как видно из уравнения (3.4), средняя разность между собственными значениями ω равна $(2\pi^2 c^3/V\omega^2)$, поэтому величина дюжины наибольших членов в сумме второго порядка приблизительно выражается:

$$(\omega^3/4\pi^2 cV)\, |\beta|^2 \frac{S_a^2}{1 + (4S_a/m\lambda^2)}.$$

Отношение этих наибольших членов второго порядка к члену первого порядка приблизительно составляет:

$$\Xi_a = \frac{\omega^2}{8\pi^2 c^2} \frac{|\beta|\, S_a}{1 + (4S_a/m\lambda^2)} = \frac{(1/2)\,|\beta|\, S_a}{\lambda^2 + (4S_a/m)}. \tag{7.27}$$

Это число можно назвать коэффициентом неупорядоченности колебаний в прямоугольном помещении с неправильно размещёнными кусками поглощающего материала. Подобные формулы можно вывести для помещений других правильных форм. Если Ξ меньше единицы, то колебательный процесс неэргодичен, имеется заметная разница между показателями затухания различных основных колебаний, и кривая затухания криволинейна. Если Ξ — значительно больше единицы, то ни одна форма колебаний не является чисто аксиальной, показатели затухания стремятся к своему среднему значению, и можно ожидать, что сэбиновские предположения окажутся справедливыми. Остаётся только невыясненным, насколько Ξ должно для этого превышать единицу.

Легко усмотреть, что Ξ гораздо меньше единицы при низких частотах (λ велико). Обычно β имеет для мягких материалов значение порядка 0,2, так что даже для λ^2, меньших чем $4S/m$, Ξ не может намного превышать единицу, если только m невелико, т. е. если поглощающий материал не разделён на много маленьких кусков. Наиболее эффективный размер для каждого куска примерно равен длине полуволны, т. е. $\lambda^2 \approx 4S_a/m$; тогда результирующее значение Ξ равно $m(|\beta|/8)$.

Например, для кубической камеры с ребром 6 *м*, оборудованной квадратными со стороной в полволны кусками мягкого материала, имеющего $|\beta = 0{,}2$, расположенными в среднем на расстоянии $3\lambda/2$ друг от друга, будет приходиться в среднем один кусок на каждые $4\lambda^2$ площади стенок. Коэффициент неупорядоченности в этом случае будет $\Xi = 7{,}5/\lambda^2$. Чтобы получить Ξ больше 4 (что, предположительно, является достаточным критерием неупорядоченности), нужно взять волну короче примерно 0,45 *м* или частоту выше 800 герц. При такой частоте требуется примерно 250 кусков материала; каждый кусок должен приходиться примерно на 0,8 *м*² поверхности стенок.

Эти результаты весьма поучительны; они могут объяснить успех работ Максфильда и Потвина и других исследователей[B11,M5,M6,V1]. Однако куски поглощающего материала, смонтированные на стенах правильной формы, сравнительно малоэффективны для надлежащего рассеяния звука. Изучим теперь вопрос о неправильностях формы помещения и определим влияние этих неправильностей на Ξ.

49. Возмущения, обусловленные изменением формы стенок

Второй член в уравнении (7.10) обусловлен различием формы между S и S_0. Пример такого различия показан на рис. 28, где S_0 представляет плоскость (x, y), а S — выступ стены вовнутрь помещения, ограниченный контуром C. В пределах этого контура уравнение поверхности пусть будет $z = B(x,y)$, причём положительное направление z направлено внутрь помещения и нигде не имеет отрицательных значений в соответствии с нашими первоначальными допущениями. Единичный вектор по нормали к S_0 пусть будет $\boldsymbol{n}_0$; он направлен в сторону отрицательных z. Единичный вектор, нормальный к S, обозначим через $\boldsymbol{n}$; он образует угол $\vartheta(x, y)$ с вектором $\boldsymbol{n}_0$. В рассматриваемом случае в уравнении (7.11) каждый член A_{MN} будет содержать выражения

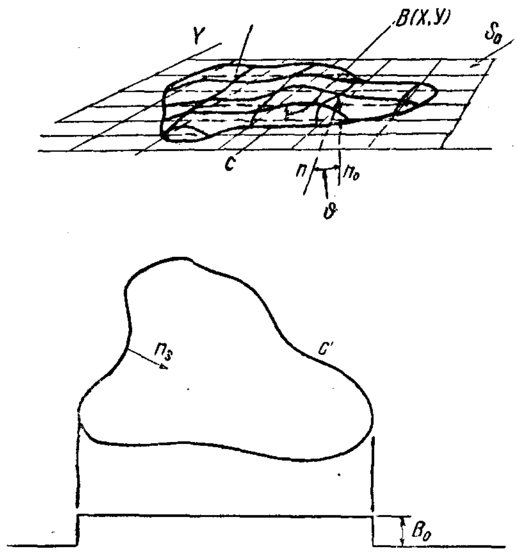

Рис. 28. Неправильности на плоской стенке.

$$\frac{\partial}{\partial n}\psi_N = [\boldsymbol{n}\cdot\operatorname{grad}\psi_N]_s =$$
$$= \{-[d\psi_N/dz]_s + (\operatorname{grad}_{s_0} B)\cdot(\operatorname{grad}_s\psi_N)\}\cos\vartheta.$$

Здесь $\operatorname{grad}_{s_0}$ представляет двухмерный градиент в плоскости (x, y), а

$$\cos^2\vartheta = 1 + \operatorname{grad}^2_{s_0}(B).$$

Площадь dS равна $dx\,dy/\cos\vartheta$, поэтому первый член A_{MN} принимает вид

$$(1/V\varepsilon_M)\left\{\int_S\int \psi_M \operatorname{grad} B\cdot\operatorname{grad}\psi_N dx\,dy - \right.$$

$$\left. - \int_S\int \psi_M \frac{\partial}{\partial z}\psi_N dx\,dy\right\}. \qquad (7.28)$$

Если B меньше четверти волны, $\operatorname{grad}_S\psi_N$ можно заменить $\operatorname{grad}_{S_0}\psi_N$.

Так как мы допустили, что S_0 представляет плоскую стенку, то общий вид выражения для ψ_N вблизи этой стенки (z мало) будет:

$$\psi_N = F(x,\ y)\cos(\pi n_z z/L_z).$$

Приближённое значение выражения $-(\partial\psi_N/\partial z)$ в точке $z=B$, если только B мало по сравнению с $(L_z/\pi n_z)$, будет равно:

$$(\pi n_z/L_z)^2 B[\psi_N]_z = 0.$$

Окончательное приближённое выражение для той части A_{MN}, которая обусловлена рассматриваемым выступом, равно:

$$A_{MN}\approx\frac{1}{V\varepsilon_M}\int_{S_0}\int \psi_M\left\{\operatorname{grad}_{S_0}B\operatorname{grad}_{S_0}\psi_N - \right.$$

$$\left. -\frac{\omega}{c}(\sigma + i\gamma + \sigma_B)\psi_N\right\}\partial x\,\partial y. \qquad (7.29)$$

Здесь $\gamma - i\sigma$ представляет проводимость на выступе, член с $\partial\psi_N/\partial z$ выражен в виде эквивалентной реактивной податливости

$$\sigma_B = -(\lambda/2\pi)(\pi n_z/L_z)^2 B. \qquad (7.30)$$

Эта податливость имеет инерционный характер, поскольку B положительно.

Часть эффекта изменения формы помещения, которая может быть выражена через σ_B, является результатом изменения общего объёма помещения. Чтобы определить этот эффект, разберём случай, когда B_0 — прямоугольное помещение, в котором единственный выступ расположен на стенке (x, y). Пусть её размеры велики по сравнению с длиной волны. В этом случае часть величины A_{MN}, которая обусловлена σ_B, приближённо равна:

$$(2\overline{B}/L_z)(\pi n_z/L_z)^2.$$

Здесь $\overline{B}$ означает среднее значение B по всей стенке. Последнее выражение справедливо для косых колебаний $(n_z>0)$. Изменение частоты, вызванное этим членом в приближении первого порядка:

$$\xi_N^2 = c^2\left[\left(\frac{\pi n_x}{L_x}\right)^2+\left(\frac{\pi n_y}{L_y}\right)+\left(\frac{\pi n_z}{L_z}\right)+c^2\left(\frac{\pi n_z}{L_z}\right)^2\right](2\overline{B}/L_z).$$

Как видим, в первом приближении этот добавочный член эквивалентен уменьшению длины L_z на отрезок $\overline{B}$.

Таким образом, та часть эффекта, которая вызвана изменением формы и которая выражается через σ_B, может трактоваться точно так же, как влияние действительного изменения импеданса, о котором говорилось в предыдущем разделе. Кроме него, имеется ещё новый член, содержащий $\operatorname{grad}_{S_0}\psi_N$. Чтобы осветить роль этого члена, введём ещё дальнейшее упрощение и рассмотрим выступ, изображённый на рис. 28 внизу. Форма его такова, что B меняется от значения нуль скачком до постоянного значения B_0 на контуре C. В этом случае выражение для A_{MN} приобретает вид

$$A_{MN} \approx \frac{1}{V\varepsilon_M}\left\{B_0 \int\limits_C \psi_M \boldsymbol{n}_S \operatorname{grad}_{S_0} \psi_N \, ds - \right.$$

$$\left. - \frac{\omega}{c} \int\limits_{S_0}\int \psi_N (\sigma + i\gamma + \sigma_B) \psi_N \, dx\, dy \right\}. \quad (7.31)$$

Здесь $\boldsymbol{n}_S$ представляет единичный вектор в плоскости (x,y), нормальный к контуру C. Первый интеграл нужно взять по контору C. Этот первый член определяет влияние границ выступа. Мы увидим, что такой выступ является весьма эффективной мерой для рассеяния колебаний.

Если границы выступа имеют очертания прямоугольника со сторонами a и b, параллельными соответственно осям x и y, то можно вычислить среднее квадратичное значение первого члена, воспользовавшись тем же приёмом, который привёл раньше к уравнению (7.26). Предполагая, что ни a, ни b не достигают соответствующих размеров комнаты R_0, получим:

$$\frac{B_0}{2V} \frac{(a+b)\lambda}{[1 + 4(a+b)/\lambda]^{1/2}}.$$

Если же положить $b = L_y$, т. е., что выступ превратился в полоску шириной a, тянущуюся по плоскости (x, y) параллельно оси y от одной стенки (x, z) до противоположной, то приближённое среднеквадратичное значение первого члена выражения для A_{MN} в уравнении (7.29) будет для волн, у которых $m_y = n_y$ и $m_z = n_z$, иметь вид

$$\frac{B_0}{2V} \frac{a/\lambda}{[(1 + 4a)/\lambda]^{1/2}},$$

а при $m_y \neq n_y$ или $m_z \neq n_z$ обращается в нуль.

Стремясь к тому, чтобы все A_{MN} отличались от нуля, мы должны устроить несколько длинных полос на разных стенках так, чтобы по крайней мере одна полоса была перпендикулярна к каждой из трёх осей координат. Если же неоднородности должны занимать только часть стенок, необходимо, чтобы они были распределены по крайней мере на трёх взаимно перпендикулярных стенках. Если выступы распределены достаточно беспорядочно и если их достаточно много, то приближённый ряд в выражении (7.11) не будет сходящимся, и в помещении получится эргодический звуковой процесс.

Теперь мы можем определить критерий перехода к эргодическому процессу из уравнения (7.11). Рассмотрим изменения средней амплитуды коэффициента $\psi_M c^2 A_{MN}/(\omega_N^2 - \omega_M^2)$ при ω_M, близком к ω_N. Если этот коэффициент мал, то φ, главным образом, определяется невозмущённым колебанием ψ_N, и если ψ_N относится к максимальному колебанию, то φ будет иметь показатель затухания, резко отличающийся от такового для других колебаний. С другой стороны, если несколько коэффициентов для разных ψ_M не малы, то φ будет представлять суперпозицию многих невозмущённых ψ_N. Некоторые из этих колебаний ψ_N будут аксиальными, некоторые — косыми, так что *каждая* стоячая волна φ будет смесью аксиальных, тангенциальных и косых колебаний и будет иметь почти одинаковые показатели затухания.

50. Коэффициент неупорядоченности

Пусть у нас имеется m кусков поглощающего материала со средней проводимостью β и средней площадью S_a/m, беспорядочно распределённых по стенкам. Пусть наряду с этим у нас имеется n выступов средней высоты B и размером a, также беспорядочно распределённых по стенкам. Если выступ занимает только часть стенки, то за размер выступа примем его полупериметр, если же он тянется во всю длину стены, то пусть ширина его будет a. Предположим, что средние размеры кусков поглощающего материала и выступов имеют порядок длины волны. Воспользовавшись прежними приближёнными результатами для кусков материала и для выступов, можно получить весьма приближенные значения средней амплитуды коэффициента $c^2 A_{MN}/(\omega_N^2 - \omega_M^2)$ в уравнении (7.11) для частот ψ_M, близких к ψ_N:

$$\Xi = (1/10\lambda^2)\,[nBa + |\beta_e|\,S_a] \tag{7.30}$$

(предполагая, что a^2 или S_a/m имеют порядок λ^2). Здесь

$$\beta_e = \gamma - i\sigma - i\sigma_B \approx \gamma - i\sigma + (2\pi iB/\lambda).$$

Если B меньше полуволны, несколько более гибкая, хотя и не более точная формула, имеет такой вид:

$$\Xi = \frac{1}{2}\left\{\frac{(nBa/\lambda)}{\lambda + 4a} + \frac{|\beta_e|\,S_a}{\lambda^2 + (4S_a/m)}\right\}. \tag{7.31}$$

Она одинаково верна для любых соотношений между λ и размерами неоднородностей, но справедлива тоже только для беспорядочного распределения этих неоднородностей; в ней предположено, что B меньше полуволны.

Если B больше полуволны, то в эти формулы нужно вместо B подставить $\lambda/2$.

Коэффициент неупорядоченности Ξ как для кусков поглощающего материала, так и для выступов совпадает с выражением (7.27) для второго члена. Его можно использовать как весьма грубое мерило того, будет ли звуковое явление эргодическим или нет. Если он значительно меньше единицы, то процесс не может быть эргодическим, и кривая затухания непрямолинейна. Если он значительно больше единицы, то волновой процесс имеет беспорядочный характер, и можно считать, что сэбиновские допущения справедливы. Только в этом случае мы можем говорить о коэффициенте поглощения данного материала, а не о коэффициенте стенки для данной волны, данного места стенки и для данного материала.

Отсюда вытекает несколько интересных следствий. Прежде всего объём помещения в явном виде не входит в выражение для коэффициента неупорядоченности. В этом грубом приближении это означает, что одинакового количества неоднородностей по стенкам помещения достаточно, при заданной частоте, для создания беспорядочного распределения колебаний как в малом, так и в большом помещениях. Но так как заданное число неоднородностей трудно, если не невозможно, разместить в маленькой комнате беспорядочным образом, то при заданной частоте труднее обеспечить выполнение сэбиновских предположений в маленьком помещении, чем в большом. Во-вторых, легче добиться эргодических колебаний в заданном помещении для коротких, чем для длинных волн. Это заключение является обращением первого вывода.

В качестве примера рассмотрим применение материала с акустической проводимостью $|\beta| \approx 1{,}5$. Такой материал является весьма мягким материалом. Выступы возьмём в виде прямоугольных полосок на трёх или более стенках, причём некоторые из полосок вертикальны, другие горизонтальны. Толщину примем равной 150 *мм*. Для частоты 1000 герц ($\lambda = 0{,}3$ *м*) следует взять полоски шириной только 0,3 *м*, а поглощающий материал в виде отдельных кусков размером в 0,3 *м*. Чтобы получить эргодический процесс (Ξ больше 2), необходимо свыше сотни кусков поглощающего материала, разбросанных в беспорядке, или более 40 полосок, нарушающих гладкость стенок.

Для частоты 250 герц ($\lambda = 1{,}2$ *м*) следует наш материал применять кусками размером $1{,}2 \times 1{,}2$ *м*, а полоски должны быть шириной 1,2 *м*. (То и другое можно немного уменьшить, не уменьшая заметно правильности выводов.) Для получения эргодического процесса нам снова понадобится сотня таких кусков поглощающего материала или более 160 полосок. Очевидно, что легко получить эргодический процесс при 1000 герц в комнате умеренных размеров ($3 \times 6 \times 9$ *м*), но было бы трудно оборудовать её достаточно большими кусками или полосками, чтобы добиться того же при 250 герц. Ясно также, что обычно легче получить беспорядочные колебания посредством выступов, чем посредством кусков поглощающего материала. Это неудивительно, так как выступ гораздо лучше рассеивает звук, чем плоский кусок поглощающего материала.

Экспериментальные проверки этой теории носят отрывочный характер. Для проверки общих положений теории возмущений были проделаны некоторые опыты с малыми моделями. В одной серии опытов [B8] камера имела размеры порядка 0,3 *м*, так что даже наинизшие частоты не вызывали затруднений при измерениях. В этой камере возбуждались собственные колебания и исследовалось распределение узлов и пучностей давления. Форма помещения изменялась от прямоугольной до трапецоидальной и на различных стенках создавались выступы и впадины прямоугольной формы. Распределение давления для первых 10—12 собственных колебаний и соответствующие резонансные частоты были сравнены с выводами теории возмущений, изложенной в этой главе [B10].

В общем, между теорией и опытом получилось хорошее согласие, хотя для получения удовлетворительного совпадения пришлось учитывать член второго порядка. На рис. 29 изображён один случай. Вверху приведена форма камеры и изолинии равных давлений для одного из собственных колебаний. Остальные три диаграммы иллюстрируют соответствие между экспериментальными и теоретическими значениями акустического давления. Для этого типа возмущения (трапецоидальная камера) член первого порядка равен нулю, так как объём камеры оставался постоянным. Для других типов изменения формы помещения члены первого порядка становятся важными, а расчёты несколько облегчаются.

Требуется проделать ещё много работы, чтобы получить уверенность в степени пригодности теории возмущений. В настоящее время мы вынуждены ею пользоваться как единственным средством для изучения свойств помещений сложных очертаний, но ещё неизвестно, как велика достоверность этих результатов.

Общие выводы, полученные в этом разделе и обоснованные здесь теоретически при помощи коэффициента неупорядоченности, уже применялись в расчётах по архитектурной акустике многими авторитетами в этой области [B11, M5, V1]. Экспериментальное изучение рассеивающего действия цилиндров было проведено Сэбином [S6]. В этом случае приложения появились раньше теории. Расчёты основывались эмпирически на большом количестве опытных данных, полученных при постройке аудиторий и изучении их свойств. Можно с удовлетворением отметить, что результаты изложенной здесь теории более или менее совпадают с ранее сделанными практическими выводами. Возможно, что теория сможет объяснить эти практические правила и

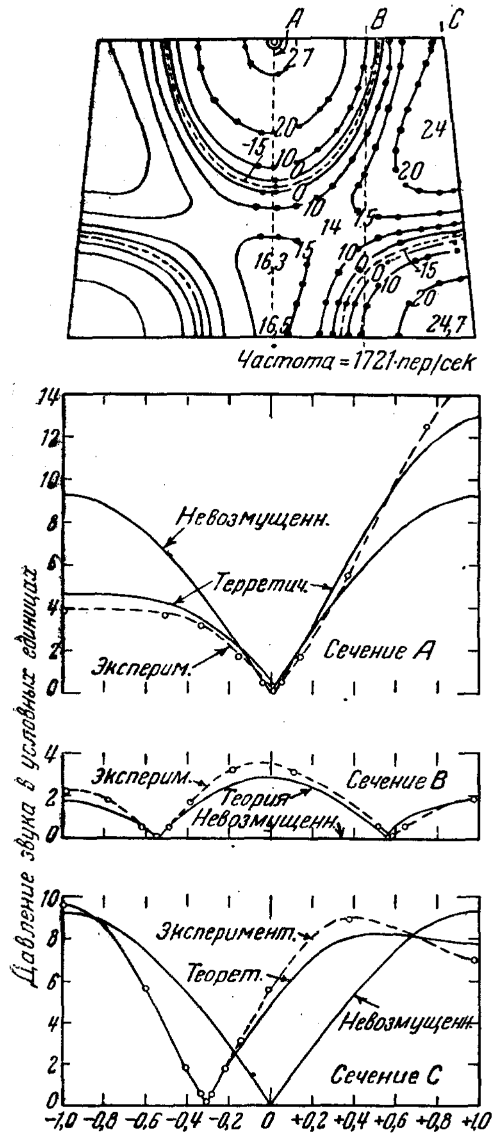

Рис. 29. Распределение давления в стоячей волне по измерениям в трапецоидальном помещении. Нижние кривые сопоставляют экспериментальные результаты (пунктирные линии) с результатами подсчёта возмущений второго порядка (сплошные линии, вычисленные теоретически) B10.

придать им более количественный характер.

Уже давно обнаружено, что два помещения с одинаковой длительностью реверберации не всегда имеют одинаковые акустические качества. Добавочная характеристика получила несколько неопределённое название «жизненности» помещения H2. Это свойство связано со способностью помещения «удерживать» звук и в то же время равномерно его распределять.

В настоящее время наблюдается стремление увеличить длительность реверберации по сравнению с тем значением, которое раньше считали необходимым, но зато сделать его, по возможности, не зависящим от частоты (см. рис. 3,*б*). При этом стараются добиться равномерного распределения звука. Большие плоские поверхности из твёрдых материалов не допускаются. Стены покрывают беспорядочно распределёнными выступами или кусками поглощающего материала. Неоднородности на стенках стараются разместить по возможности нерегулярно. Все эти тенденции находятся в согласии с выводами этой главы. Можно надеяться, что дальнейшие исследования ещё увеличат это согласие.

VIII. МЕТОД ПЛОСКИХ СВОБОДНЫХ ВОЛН ПРИ НЕУПОРЯДОЧЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ

Помещения, достаточно нерегулярные по форме или с нерегулярно размещённым акустическим материалом, при частотах выше определённого предела имеют эргодическое распределение звуковой энергии. При этом каждая стоячая волна состоит из беспорядочной комбинации плоских волн, распространяющихся в различных направлениях, и система узловых фигур и пучностей размещена неправильным образом. Показатель затухания для каждого колебания приблизительно равен показателю для всякого другого колебания близкой к нему резонансной частоты.

Только в этом случае мы можем быть уверены в том, что на каждый участок стенки падает звук со всех возможных направлений. И только тогда можем говорить о «коэффициенте поглощения», не зависящем ни от помещения, ни от формы колебаний, а только от самого материала.

Когда удовлетворены условия эргодичности и можно иметь дело с плоскими волнами, распространяющимися по всем возможным направлениям, то мы получаем новое упрощение задачи. Можно рассматривать поглощение или отражение плоской волны от любого участка стенки и потом определять свойства для случая эргодичности путём усреднения по всем возможным направлениям падающей волны.

51. Отражение плоской волны от однородной стенки

Чтобы иллюстрировать этот приём и одновременно вывести формулы, необходимые для сопоставления сэбиновского коэффициента поглощения с импедансом стенки, мы сначала рассмотрим [K8,H4,O6] отражение плоской волны от плоской стенки, характеризующейся постоянным импедансом $Z=R-iX=\rho c\zeta=\rho c/\beta=|Z|e^{-i\varphi}$. Пусть угол падения будет ϑ, а потенциал скоростей записан в форме

$$\psi=e^{i(\omega/c)(x\sin\vartheta-z\cos\vartheta-ct)}+Ae^{i(\omega/c)(x\sin\vartheta+z\cos\vartheta\,ct)}.$$

В этом выражении z означает расстояние точки от стенки по нормали к ней, x — расстояние вдоль стенки параллельно плоскости падения, A — комплексную амплитуду отражённой волны.

Амплитуда A определяется из того соображения, что на поверхности стенки отношение давления

$$p_S=-i\omega\rho(1+A)e^{i(\omega/c)(x\sin\vartheta-ct)}$$

к отрицательному значению нормальной составляющей скорости

$$u_S=-(i\omega\cos\vartheta/c)(1-A)e^{i(\omega/c)(x\sin\vartheta-ct)}$$

должно равняться импедансу Z стенки. Окончательное выражение для A получается таким:

$$A = \frac{\zeta\cos\vartheta - 1}{\zeta\cos\vartheta + 1} = \frac{\cos\vartheta - \beta}{\cos\vartheta + \beta} = e^{-2\pi\Upsilon(\vartheta)} = e^{2\pi\tau + 2\pi i/\upsilon}. \tag{8.1}$$

Здесь положено

$$\operatorname{cth}[\pi\Upsilon(\vartheta)] = \operatorname{cth}[\pi(\tau - i\upsilon)] = \zeta\cos\vartheta = (|Z|/\rho c)e^{-i\vartheta}\cos\vartheta;$$
$$\operatorname{th}[\pi\Upsilon(\vartheta)] = \beta\sec\upsilon.$$

Число $e^{-2\pi\tau}$ представляет уменьшение амплитуды отражённой волны, $2\pi\upsilon$ равно изменению фазы при отражении.

Если сила звука в падающей волне равна единице, $|p_i|^2/2\rho c = 1$, то амплитуда давления на стенке имеет величину

$$(2\rho c)^{\frac{1}{2}}(1 + A) = (2\rho c)^{\frac{1}{2}}\frac{2\zeta\cos\vartheta}{\zeta\cos\vartheta + 1} =$$
$$= (2\rho c)^{\frac{1}{2}}\frac{2\cos\vartheta}{\cos\vartheta + \beta} = (8\rho c)^{\frac{1}{2}} e^{-\pi\Upsilon}\operatorname{ch}(\pi\Upsilon), \tag{8.2}$$

нормальная составляющая скорости имеет амплитуду

$$(2/\rho c)^{\frac{1}{2}}\cos\vartheta(1 - A) = (2\rho c)^{\frac{1}{2}}\frac{2\cos\vartheta}{\zeta\cos\vartheta + 1} =$$
$$= (2/\rho c)^{\frac{1}{2}}\frac{2\beta\cos\vartheta}{\cos\vartheta + \beta} = (8/\rho c)^{\frac{1}{2}} e^{-\pi\Upsilon}\operatorname{sh}(\pi\Upsilon). \tag{8.3}$$

Если стенка твёрдая ($\beta = 0$, $\Upsilon = 0$), то амплитуда давления равна удвоенной амплитуде в падающей волне, а нормальная составляющая скорости, конечно, нуль. По мере того как стенка делается податливее ($|\beta| > 0$), амплитуда давления у стенки, вообще говоря, уменьшается, а нормальная составляющая скорости увеличивается по амплитуде.

Сила звука в отражённой волне

$$|p_r|^2|2\rho c = |A|^2 = \frac{(\cos\vartheta - \gamma)^2 + \sigma^2}{(\cos\vartheta + \gamma)^2 + \sigma^2} = e^{-4\pi\tau}, \tag{8.4}$$

где $\beta = \gamma - i\sigma$. Для поглощённой энергии звука

$$a(\vartheta) = 1 - |A|^2 = 1 - e^{-4\pi\tau} = \frac{4\gamma\cos\vartheta}{(\cos\vartheta + \gamma)^2 + \sigma^2}. \tag{8.5}$$

Это выражение представляет коэффициент стенки для плоских волн при угле падения ϑ. Величина его может быть легко определена по уравнению (8.5) в функции от $(|Z|/\rho c)$, φ и ϑ. Необходимо отметить, что максимум его лежит при таком угле падения ϑ, что $(|Z|/\rho c)\cos\vartheta = 1$.

Чем твёрже стенка, тем ближе угол максимального поглощения подходит к 90° (скользящее падение). При точном скользящем падении **свободные** звуковые волны, конечно, совершенно не поглощаются *).

Уравнение (8.5) было проверено экспериментально Кремером [C7] и Виллигом [W10] путём измерения силы падающего и отражённого звуков при свободном распространении и применении больших кусков материала. Вариант этого метода свободных волн по предварительным данным дал результаты, в существенных чертах совпадающие с теорией [P6]. Этот вариант состоял в измерениях давления в максимумах и минимумах интерференционной картины на поверхности поглощающего материала, образуемой падающей и отражённой волной при различных углах падения. Уравнение (8.5) было также использовано [H7] для интерпретации затухания различных собственных колебаний в прямоугольном помещении, одна из стенок которого целиком покрыта поглощающим материалом. Ввиду того что каждое собственное колебание, соответствующее определённому углу падения, выражается числами n, можно изучать поглощение для всех таких углов путём надлежащего выбора частоты сигнала в помещении заданных размеров. Теория свободных волн даёт хорошее приближение к этому случаю, с тем существенным исключением, которое соответствует «скользящему» направлению звукового луча. Однако для строгости решения необходимо пользоваться теорией стоячих волн, изложенной в главе V.

Вилли [W10] разработал миниатюрный микрофон градиентов давления для того, чтобы по направленности отделить падающие волны от отражённых. Направленность получилась достаточной для измерения углов падения между 15 и 75°. Он определил также поглощение при нормальном падении посредством метода трубы. Принимая $\sigma = 0$, т. е. считая импеданс вещественным, он подбирал такие значения γ, которые дали бы наилучшее совпадение экспериментальных точек с кривой, вычисленной по уравнению (8.5). Экспериментальные погрешности оказались минимальными при $\alpha = 0{,}75$ и остановились довольно большими при α меньше 0,2 и больше 0,9, так как здесь приходилось определять маленькие разности между большими числами. Результаты совпадали с вычисленными кривыми в пределах экспериментальных погрешностей и дали хорошее подтверждение теории.

*) Это неверно. Вследствие вязкости пограничного слоя воздуха, прилипшего к стенке, и в этом случае часть звуковой энергии превращается в тепло. См. Б. П. Константинов, диссертация, ЛФТИ. «О поглощении звуковых волн при отражении от твёрдой границы», ЖТФ, т. 9, № 3, стр. 226—38, 1939. «О затухании звука в помещении с твёрдыми стенками и о диффузном коэффициенте звукопоглощения», ЖТФ, т. 9, № 5, стр. 424—32, 1939. (*Прим. ред.*)

52. Сэбиновский коэффициент и импеданс стенки

Для того чтобы получить сэбиновский коэффициент поглощения, нужно только вычислить среднее значение коэффициента $\alpha(\vartheta)$, определяемого уравнением (8.5), по всем углам падения. При этом каждое направление должно иметь вес, пропорциональный относительному количеству звуковой энергии, падающей на единицу площади с данного направления. Вычисления дают:

$$\alpha_{\text{стат}} = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \alpha(\vartheta)\cos\vartheta\sin\vartheta\, d\vartheta = 8\gamma\int\limits_0^1 \frac{x^2 dx}{x^2+2\gamma x+\gamma^2+\sigma^2} =$$

$$= 8\gamma\left\{1-\gamma\ln\left[1+\frac{2\gamma+1}{|\beta|^2}\right]+\frac{\gamma^2-\sigma^2}{\sigma}\operatorname{arctg}\left[\frac{\sigma}{|\beta|^2+\gamma}\right]\right\} =$$

$$= 8\frac{\cos\varphi}{w}\left\{1-\frac{\cos\varphi}{w}\ln\left[1+\right.\right.$$

$$\left.\left.+2w\cos\varphi+w^2\right]+\frac{\cos 2\varphi}{w\sin\varphi}\operatorname{arctg}\left[\frac{w\operatorname{tg}\varphi}{w+\sec\varphi}\right]\right\} =$$

$$= \begin{cases} 8\dfrac{\cos\varphi}{w}\left[1-\dfrac{2\cos\varphi}{w}\ln(w)+\dfrac{\varphi}{w}\,\dfrac{\cos 2\varphi}{\sin\varphi}\right] \text{ при } w\to\infty, \\ \dfrac{8}{3}w\cos\varphi\left[1-\dfrac{3}{2}w\cos\varphi\right] \text{ при } w\to 0. \end{cases} \qquad (8.6)$$

Здесь положено $w=|Z|/\rho c$; $\cos\varphi/w=\gamma$; $w\cos\varphi=R/\rho c$; $w\sin\varphi=X/\rho c$.

На рис. 30 дана зависимость $\alpha_{\text{стат}}$ от величины удельного импеданса стенки $w=|Z|/\rho c$ и фазового угла φ.

Уравнение (8.6) и рис. 30 определяют соотношение между импедансом стенки и сэбиновским коэффициентом поглощения. Последнее число определяется из реверберационных измерений *только тогда, когда звуковое движение в помещении совершенно беспорядочно*. В больших залах при обычных частотах звуковое движение по большей части имеет эргодический характер, так что величина $\alpha_{\text{стат}}$ может применяться для большинства архитектурных расчётов. С другой стороны, имеется много данных о том, что эргодический процесс *не имеет места в большинстве акустических измерительных камер при частотах ниже 2000 герц*. При этих, более низких, частотах измерения обычно дают нормальный коэффициент $\alpha_p=8\cos\varphi/w=8\gamma$. Поэтому при расчёте акустического оборудования больших аудиторий *лучше пользоваться величиной $\alpha_{\text{стат}}$, вычисленной из уравнения (8.6) или найденной по рис. 30, по измеренному импедансу материала, чем коэффициентами, измеряемыми в реверберационных камерах* (по крайней мере, при частотах

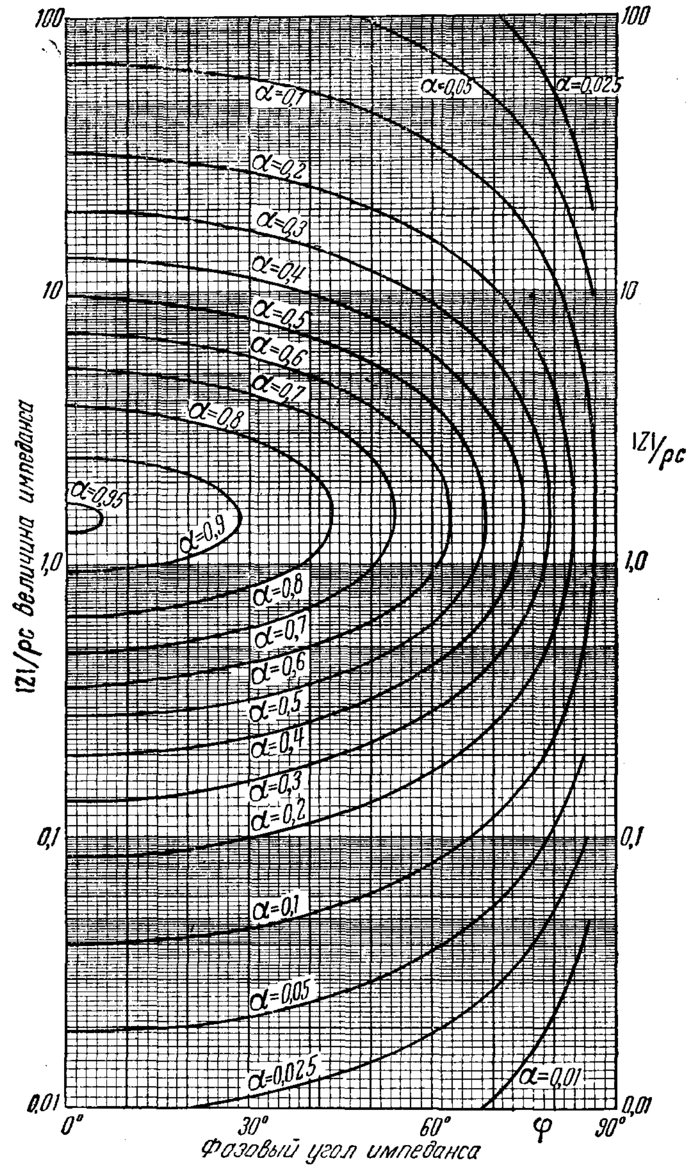

Рис. 30. Сэбиновский коэффициент поглощения $\alpha_{\text{стат}}$ в функции от модуля и аргумента импеданса стенки. Диаграмма относится к случаям, когда имеет место эргодический звуковой процесс.

ниже 2000 герц). Обычно нормальный коэффициент α_p численно больше, чем $\alpha_{стат}$, так что коэффициенты, получаемые в настоящее время из измерений в акустических камерах, получаются больше, чем сэбиновские коэффициенты, характеризующие поглощающую способность материала в больших помещениях неправильной формы [E5, S7, S14].

53. Отражение сферической волны от плоской стенки

Некоторые теоретические исследования по реверберации основывались на применении метода мнимых изображений, позволяющего проследить последовательные отражения сферической волны от стенок прямоугольного помещения. К сожалению, этот полезный метод даёт

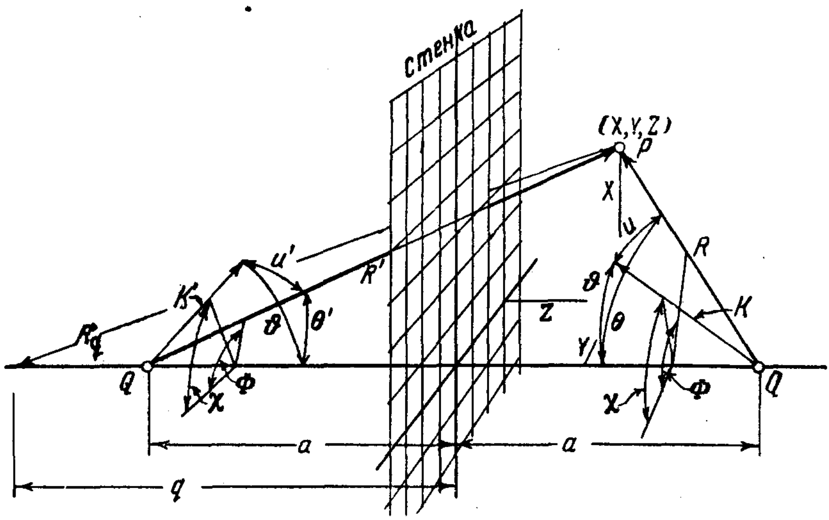

Рис. 31. Обозначения углов и расстояний, принятые при расчёте отражения сферической волны от поглощающей стенки.

точные результаты только при абсолютно твёрдых стенках. Если импеданс стенки не бесконечно велик, то отражённая волна не может быть представлена как результат действия точечного изображения. Для доказательства воспользуемся уравнением

$$\psi_i = \frac{e^{ikR}}{4\pi R} = \frac{k}{4\pi i}\int_0^{i\infty} e^{ikRz}\,dz =$$

$$= \frac{k}{8\pi^2 i}\int_0^{2\pi} d\chi \cdot \int_{i\infty-\pi/2}^{0} e^{ikR\cos u}\sin\vartheta\, d\vartheta = (k/8\pi^2 i)\int\int_S e^{i\mathbf{kR}}d\Omega. \quad (8.7)$$

Здесь $k = \omega/c = 2\pi/\lambda$, углы и расстояния показаны на рис. 31, $d\Omega$ означает элементарный телесный угол для направления k, знак s под двойным интегралом означает, что интегрировать нужно по максимальному углу в пределах от 0 до 2π и по полярному углу в пределах от $i\infty-(\pi/2)$ до 0.

Уравнение (8.7) представляет сферический потенциал скоростей в точке P, обусловленный единичным точечным источником звука в точке Q, в форме интеграла от плоских волн вида $e^{i\mathbf{kR}}$ по всем направлениям вектора $\mathbf{k}$. Теперь мы можем воспользоваться результатами раздела 51, чтобы удовлетворить граничным условиям на стенке $z=0$. Каждая элементарня плоская волна $e^{i\mathbf{kR}}\,d\Omega$ порождает отражённую волну $[(\cos\vartheta-\beta)/(\cos\vartheta+\beta)]\,e^{i\mathbf{kR}}\,d\Omega$. Амплитуда этой отражённой волны зависит от угла падения, поэтому излучение, исходящее от изображения Q', не обладает шаровой симметрией. Это означает, что сила звука в отражённой волне в точке P зависит от угла θ'. Поэтому анализ, основанный на представлении реверберирующего звука, как результата наложения волн, исходящих из мнимых источников, повидимому, может приводить к ошибочным результатам. Это критическое замечание относится к работам Сэбина[S2], Норриса[N1], Ирнига[E3], Майлингтона[M7] и Ситта[S12].

В действительности отражённая волна описывается выражением

$$\psi_r=\frac{k}{8\pi^2 i}\int\limits_S\int\frac{\cos\vartheta-\beta}{\cos\vartheta+\beta}\,e^{i\mathbf{kR}'}\,d\Omega'=$$

$$=\frac{k}{8\pi^2 i}\int\limits_0^{2\pi}d\chi\int\limits_{i\infty-\pi/2}^{0}e^{-2\pi\Upsilon(\vartheta)+ikR'\cos u'}\sin\vartheta\,d\vartheta. \tag{8.8}$$

Этот интеграл не может быть выражен простыми функциями. Если β мало ($|Z|\gg\rho c$), то приближение, годное для R, бо́льших длины волны, имеет вид

$$\psi_r\approx\frac{\cos\theta-\beta e^{ikR}}{\cos\theta'+\beta 4\pi R'}=e^{-2\pi\Upsilon(\theta')+ikR'}/4\pi R'. \tag{8.9}$$

Согласно этому приближению, отражённая волна в точке P настолько же ослаблена отражением, как и плоская волна, падающая под углом θ'. Если точку P удалять от линии QQ', то угол θ' изменяется, а с ним изменяется и множитель $e^{-2\pi\Upsilon(\theta')}$. Это обстоятельство снова иллюстрирует тот факт, что отражённая волна лишена шаровой симметрии.

Когда реактивная часть импеданса стенки отрицательна (X положительно), то отражённая волна может быть представлена как результат совместного действия простого точечного источника Q' и линейного источника протяжением вдоль нормали от Q' до минус бесконечности:

$$\psi_r=\frac{e^{ikR'}}{4\pi R'}+2ik\beta\int\limits_a^{\infty}e^{ik\beta(q-a)}\,\frac{\exp(ikR_q)}{4\pi R_q}\,dq, \tag{8.10}$$

где $\beta=\gamma-i\sigma$; а значения q, R_q и a берутся из рис. 31.

Если $|\beta|$ велико ($|Z| < \rho c$), то отражённую волну можно разложить в сферически гармонический ряд относительно Q:

$$\psi_r = \left[1 - \beta \ln \frac{\beta+1}{\beta-1}\right] \frac{e^{ikR'}}{4\pi R'} - \frac{2kR}{4\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n (2n+1) \times$$
$$\times Q_n(\beta) P_n(\cos\theta') h_n(kR'), \qquad (8.11)$$

где Q_n означает функцию Лежандра второго рода, h_n — сферическую функцию Бесселя третьего рода. Это разложение справедливо для всех значений β, кроме вещественных значений, заключающихся в пределах между $+1$ и -1, однако при не очень больших $|\beta|$ оно сходится медленно.

54. Дифракционные краевые поправки

Уравнение (8.6) устанавливает соотношение между сэбиновским коэффициентом поглощения и импедансом стенки. Для больших помещений, если неоднородности обеспечивают эргодичность звукового движения и импеданс остаётся постоянным на протяжении достаточно больших участков стен, коэффициент затухания может быть вычислен посредством уравнения (2.2). При этом коэффициент $\alpha_{\text{стат}}$ для каждого материала умножается на площадь, занятую этим материалом — в точном соответствии с выводом Сэбина. На самом же деле значение $\alpha_{\text{стат}}$ вычисляется из импеданса в предположении, что стенка бесконечна и имеет постоянный импеданс. Вблизи границ каждого куска материала возникают дифракционные явления. Поэтому поглощение здесь будет *отличаться от поглощения вдали* от границ.

В настоящем разделе мы вычислим приближённую краевую поправку, которую следует ввести в сэбиновскую формулу, чтобы получить более точное выражение для длительности реверберации в помещениях с нерегулярным колебательным процессом. Эти дифракционные поправки неприменимы для помещений, в которых колебания не беспорядочны; в этом случае необходимо пользоваться методами главы VII. Вычисления показывают, что краевые поправки можно истолковывать как добавку к площади куска материала, пропорциональную *периметру куска или длине его границы.* При этом те границы куска, которые совпадают с границами стены (или находятся не дальше $\lambda/2$ от них), не нуждаются в краевой поправке. Эти части границ кусков не следует при подсчёте краевых поправок включать в «периметр». Если стенка сплошь покрыта акустическим материалом, то поправок не требуется.

Для того чтобы показать, каким образом дифракция изменяет поглощение, разберём простейший случай. Пусть плоская волна, соответствующая силе звука единица, падает нормально на плоскую стенку (плоскость x, y). Пусть положительная полуплоскость её имеет импеданс Z_+, а отрицательная полуплоскость ($x < 0$) — импеданс Z_-. Если бы импеданс стенки повсеместно был бесконечно велик, то давление было бы равно:

$$p_0 = (2\rho c)^{\frac{1}{2}} \left[e^{-i(\omega/c)z} + e^{+i(\omega/c)z}\right] e^{-i\omega t} =$$
$$= 2\cdot(2\rho c)^{\frac{1}{2}} \cos(\omega Z/c)\, e^{-i\omega t}. \tag{8.12}$$

Нормальная составляющая скорости в направлении к стенке $u_0 = (i/\rho\omega)(\partial p_0/\partial r)_{z=0}$ была бы равна нулю.

Так как стенка не жёстка, то u_0 не равно нулю. Стенка вибрирует или по крайне мере вибрирует воздух в порах. Это движение порождает волну давления p_1, добавляющуюся к p_0, так что сумма их удовлетворяет граничным условиям. Полное давление в любой точке стенки равно $p_0 + p_1$, и, согласно определению понятия импеданса, скорость $u_0 = (\beta/\rho c)(p_0 + p_1)_{z=0}$. Волна давления p_1 в точке (x, y, z) выражается так:

$$p_1(x, y, z) =$$
$$= i(\omega/c)\int_{-\infty}^{+\infty} dy' \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \left[\beta(x', y')\, e^{i\omega R/c}/2\pi R\right] \left[p_0(x', y', z', 0) +\right.$$
$$\left. + p_1(x', y', z', 0)\right], \tag{8.13}$$

где

$$R^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + z^2.$$

p_1 слагается из элементарных волн, возбуждаемых каждым элементом поверхности $dx'\,dy'$. Уравнение (8.13) является интегральным уравнением относительно p_1. Его точное решение даёт исчерпывающий ответ. Однако обычно можно найти только приближённое решение.

В разбираемом простом случае $\beta(x, y)$ зависит только от x ($\beta = \beta_+$ для $x > 0$; $\beta = \beta_-$ для $x < 0$). Поэтому интегрирование по y можно выполнить непосредственно, причём для давления на поверхности стенки получим:

$$p_1(x) = -(\omega/2c)\int_{-\infty}^{\infty} \beta(x')\left[p_0(x') + p_1(x')\right] \times$$
$$\times \left\{J_0\left[\omega(x - x')/c\right] + iN_0\left[\omega|x - x'|/c\right]\right\} dx'. \tag{8.14}$$

Здесь J_0 и N_0 означают функции Бесселя и Неймана нулевого порядка.

Ввиду того что p_0 при $z = 0$ равно $2\cdot(2\rho c)^{\frac{1}{2}} e^{-i\omega t}$ и не зависит от x, а β изменяет своё значение только при $x = 0$, можно воспользоваться формулой

$$(\omega/c)\int_0^\infty \{J_0\,[\omega\,(x-x')/c]+iN_0\,[\omega\,|x-x'|/c\}\,dx'=$$

$$=(\omega/c)\int_{-\infty}^{+\infty}\{J_0\,\omega v/c]+iN_0\,[\omega\,|v/c|]\}\,dv=$$

$$=\left\{\begin{array}{ll} 1-Ji_0\,(-\omega x/c)-iNi_0\,(-\omega x/c) & (x<0), \\ 1+Ji_0\,(\omega x/c)+iNi_0\,(\omega x/c) & (x>0) \end{array}\right\}=$$

$$=Fr\,(\omega x/c)+iFi\,(\omega x/c), \tag{8.15}$$

где

$$Ji_0(\mu)=\int_0^\mu J_0\,(u)\,du;\ Ji_0(0)=0;\ Ji_0(\infty)=1,$$

$$Ni_0(\mu)=\int_0^\mu N_0\,(u)\,du;\ Ni_0(0)=0;\ Ni_0(\infty)=0.$$

График функций $Fr(z)$ и $Fi(z)$ дан на рис. 32. Заметим следую-

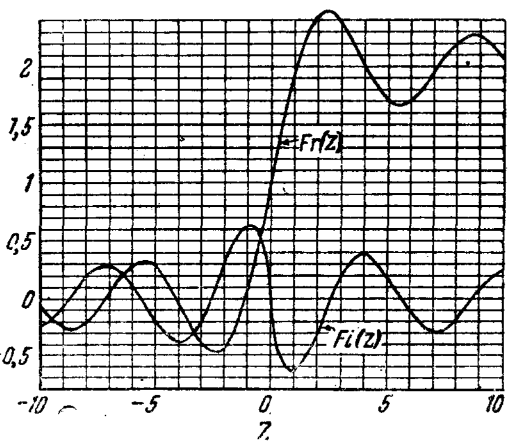

Рис. 32. Дифракционные функции, входящие в расчёт краевых поправок.

щие соотношения, которые понадобятся впоследствии:

$$\int_{-\infty}^0 Fr\,(z)\,dz=0;\qquad \int_0^\infty Fi\,(z)\,dz=-\frac{\pi}{2}.$$

Поэтому интегральное уравнение для $p_1(x)$ при $z=0$ принимает следующий окончательный вид:

$$p_1(x) = -(2\rho c)^{\frac{1}{2}} \{ \beta_+ [Fr(\omega x/c) + iFi(\omega x/c)] + \\ + \beta_- [Fr(-\omega x/c) + iFi(-\omega x/c)]\} e^{-i\omega t} - \\ - (\omega/2c) \int_{-\infty}^{+\infty} \beta(x') p_1(x') \{J_0[\omega(x-x')/c] + \\ + iN_0[\omega|x-x'|/c]\} dx'. \quad (8.16)$$

Здесь принято во внимание соотношение

$$[Fr(-z) + iFi(-z)] = 2 - [Fr(z) + iFi(z)].$$

Если $\omega x/c$ велико по сравнению с единицей ($x \gg \lambda/2\pi$), то $Fr(\omega x/c) \approx 2$, $Fr(-\omega x/c) \approx 0$, $Fi(\pm\omega x/c) \approx 0$. Приближённое решение уравнения (8.16) будет иметь вид

$$\left.\begin{aligned} &p_1 \approx -2\cdot(2\rho c)^{\frac{1}{2}} \beta_+ e^{-i\omega t} - \beta_+ p_1 \\ &\text{или} \\ &p_1 \approx -(2\rho c)^{\frac{1}{2}} [2\beta_+/(1+\beta_+)] e^{-i\omega t}. \end{aligned}\right\} \quad (8.17)$$

Поэтому полное давление на поверхности стенки достаточно далеко вправо от граничной линии $x=0$ равно:

$$p_0 + p_1 \approx (2\rho c)^{\frac{1}{2}} [2/(1+\beta_+)] e^{-i\omega t}.$$

Это выражение следует сравнить с выражением (8.2), имея в виду в данном случае $\vartheta = 0$. Для $-x \gg 2\pi/\lambda$ справедливы аналогичные выражения, если β_+ заменить через β_-.

В первом приближении p_1 равняется этим выражениям, причём по линии $x=0$ существует разрыв:

$$p_1 \approx \begin{cases} -(2\rho c)^{\frac{1}{2}} [2\beta_+/(1+\beta_+)] e^{-i\omega t} & \text{при } x > 0, \\ -(2\rho c)^{\frac{1}{2}} [2\beta_-/(1+\beta_-)] e^{-i\omega t} & \text{при } x < 0. \end{cases} \quad (8.18)$$

В этом приближении дифракционные явления совершенно не учитываются, и в окончательные выражения для поглощения краевые поправки не вошли.

Более точное выражение, учитывающее дифракционные явления в первом приближении, получится, если подставить выражения (8.18) в интеграл в правой части уравнения (8.16). После ряда преобразований это следующее приближение получает вид

$$p_1(x) \approx -(2\rho c)^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{\beta_+}{1+\beta_+} [Fr(\omega x/c) + iFi(\omega x/c)] + \right.$$
$$\left. + \frac{\beta_-}{1+\beta_-} [Fr(-\omega x/c) + iFi(-\omega x/c)] \right\} e^{-i\omega t}, \quad (8.19)$$

$$p_0 + p_1 \approx \begin{cases} (2\rho c)^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{2}{1+\beta_-} + \left[\frac{\beta_-}{1+\beta_-} - \frac{\beta_+}{1+\beta_+} \right] [Fr(\omega x/c) + \right. \\ \left. + iFi(\omega x/c)] \right\} e^{-i\omega t} \quad \text{при } x < 0, \\ (2\rho c)^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{2}{1+\beta_+} + \left[\frac{\beta_+}{1+\beta_+} - \frac{\beta_-}{1+\beta_-} \right] [Fr(-\omega x/c) + \right. \\ \left. + iFi(-x/c)] \right\} e^{-i\omega t} \quad \text{при } x > 0. \end{cases} \quad (8.20)$$

Звуковая мощность, рассеянная на единицу площади стенки и на единицу силы падающего звука на расстоянии x от граничной линии, равна $\gamma|p_0 + p_1|^2/2\rho c = \alpha(0)$. Когда оба значения $|\beta_+|$ и $|\beta_-|$ меньше единицы ($|Z| > \rho c$), то для $\alpha(0)$ хорошим приближением является:

$$\alpha(0) \approx \begin{cases} \frac{4\gamma_-}{(1+\gamma_-)^2 + \sigma_-^2} [1 + (\gamma_- - \gamma_+) Fr(\omega x/c) + \\ + (\sigma_- - \sigma_+) Fi(\omega x/c)] \quad \text{при } x < 0, \\ \frac{4\gamma_+}{(1+\gamma_+)^2 + \sigma_+^2} [1 + (\gamma_+ - \gamma_-) Fr(-\omega x/c) + \\ + (\sigma_+ - \sigma_-) Fi(-\omega x/c)] \quad \text{при } x > 0. \end{cases} \quad (8.21)$$

Здесь первый множитель в точности представляет выражение для коэффициента стенки при нормальном падении ($\vartheta = 0$) на далёком расстоянии вправо или влево от граничной линии $x = 0$. Если усреднить это выражение по всем углам падения, то получится сэбиновский коэффициент. Второе и третье слагаемые в квадратных скобках представляют поправки, обусловленные дифракционными явлениями вблизи границы. Значения функций Fr и Fi делаются малыми на расстояниях от границы, больших примерно длины волны. Для того чтобы определить полное поглощение всей стенки, это выражение нужно интегрировать. Тогда первое слагаемое даст обычный коэффициент, помноженный на полную площадь данного материала. Второе и третье слагаемые дадут краевые поправки, которые нужно прибавить к площади каждого материала, имеющего «свободную» границу. Под «свободной» границей подразумевается такая, которая на большей части своего протяжения удалена от границ помещения. В частности, если кусок материала покрывает половину стенки, вплотную к рёбрам помещения, то свободной будет только граница, проходящая посредине стенки.

Учтя выражения интегралов Fr и Fi, мы получим в конце концов следующие приближённые правила применения краевых поправок в помещениях с беспорядочным звуковым движением. Обычное выражение для полного поглощения сохраняет силу, но сэбиновский коэффициент, определяемый из уравнения (8.6) или по номограмме рис. 31 для каждого куска поглощающего материала, надо умножить на эффективную площадь куска. Эффективная площадь равна действительной площади куска плюс длина его свободной границы, умноженная на

$$(\lambda/4)\ (\sigma_+ - \sigma_-) = \frac{\lambda\rho c}{4}\left[-\frac{X_+}{R_+^2 + X_+^2} + \frac{X_-}{R_-^2 + X_-^2}\right], \tag{8.22}$$

где λ означает длину звуковой волны, $\gamma_+ - i\sigma_+$ — акустическую проводимость данного куска, R_+ и X_+ — соответствующие акустические сопротивления активное и реактивное, $\gamma_- - i\sigma_-$ — проводимость соприкасающегося куска материала. Предполагается, что $|Z| > \rho c$.

Необходимо отметить, что для каждой границы, разделяющей два сорта материала на одной и той же стенке, получается две краевые поправки, равные друг другу, но противоположные по знаку. Одна из них относится к материалу с одной, другая с другой стороны от границы. Предполагается, что граница не проходит слишком близко к ребру помещения. Поправка для материала с большей проводимостью (σ больше) положительна, и наоборот. Сумма эффективных площадей в точности равна суммарной площади стены. Так как $\sigma = -\rho c X/(R^2 + x^2)$ измеряет податливость стенки (обратную величину жёсткости), можно сказать, что эффективная площадь более податливого материала получается несколько увеличенной, и обратно. Уравнение (8.22) выведено для нормального падения. Поправки для косых колебаний несколько отличаются.

В виде примера возьмём кусок материала с активным сопротивлением $R = 1{,}5\,(\rho c)$ и реактивным сопротивлением — $2\,(\rho c)$. Сэбиновский коэффициент поглощения приблизительно равен 0,75, удельная реактивная проводимость — 0,33. Допустим, что кусок этого материала размером 3×3 $м^2$ смонтирован на стенке с импедансом $(14+20i)\,(\rho c)$, $\alpha_{стат} = 0{,}15$, $\sigma = 0{,}03$, причём края его лежат далеко от вершин углов помещения. При 500 герц эффективная площадь куска получится 9,54 $м^2$. Эффект дифракции сказался в том, что приходится прибавить 4,5 сэбина к поглощению куска и вычесть 1 сэбин из поглощения необорудованной части стенки. При более низких частотах, если только импедансы сохраняются теми же (чего на самом деле не бывает), относительная величина поправки увеличивается.

55. Список принятых обозначений

Здесь перечислены наиболее употребительные обозначения со ссылкой на раздел или разделы, где даны их определения. Сюда включены только те обозначения, которые встречаются больше, чем в одном разделе.

Символ	Значение	Единица	Определение дано в разделе
a	коэффициент поглощения помещения	$см^2$	32
a_p	нормальный коэффициент поглощения	$см^2$	33
A	амплитуда ϕ	$см^2/сек$	14, 25
	условная проводимость		37
B	коэффициент в разложении Q	$сек^{-1}$	29
c	скорость звука в воздухе	$см/сек$	10, 17
e	коэффициент типа волны		27, 44
G	нормирующий множитель для ϕ		27, 28
i	мнимая единица	$i=\sqrt{-1}$.	10
I	сила звука	$эрг/сек \cdot см^2$	3, 1
j	отрицательная мнимая единица	$j=-i$	10
J	функция Бесселя		
k	постоянная затухания		6, 16, 27, 32
k_{ON}	постоянная затухания собств. колебаний		3, 7
K	постоянная в формуле реверберации		3·1, 4, 6
	эффективная жёсткость панели		21
L	размеры помещения	$см$	14
	толщина материала стенки	$см$	17
m	коэффициент плотности материала		17
M	эффективная масса панели		21
n	целое число		14
	вещественная часть показателя преломления		17
N	тройка целых чисел	(n_x, n_y, n_z)	27
P	пористость материала (процент объёма, приходящегося на поры)		17
q	мнимая часть показателя преломления		17
	функция распределения источников звука	$сек^{-1}$	29
Q	амплитуда источника		29
Q_0	сила точечного источника	$см^3/сек$	29

Продолжение

Символ	Значение	Единица	Определение дано в разделе
r	коэффициент сопротивления материала	*г/см·сек*	17, 24
R	акустическое сопротивление	давл./скорость	10
S	площадь поверхности стенки	*см*^{2}	
t	время	*сек*	
T	время реверберации	*сек*	3·1, 4
$\mathbf{u}$	вектор акустической скорости		
u	x-компонента акустической скоротти	*см/сек*	14, 25
U	единичная функция		37
v	y-компонента акустической скорости	*см/сек*	14
V	объём помещения	*см*^{3}	
w	z-компонента акустической скорости	*см/сек*	14
W	плотность звуковой энергии	*эрг/см*^{3}	6
x, y, z	прямоугольные координаты	*см*	
X	реактивное акустическое сопротивление	давл./скорость	10
Z	акустический импеданс	давл./скорость	10, 27
α	коэффициент поглощения или коэффициент стенки		4, 10
α_p	нормальный коэффициент стенки		10, 32
α_t	тангенциальный коэффициент стенки		32
α_s	дополнительный коэффициент стенки		32
$\alpha_{стат}$	сэбиновский или статистический коэффициент поглощения		4, 10, 52
β	удельная акустическая проводимость $\frac{\rho c}{Z} = \gamma - i\sigma$		10, 27
γ	удельная активная акустическая. проводимость		10, 27
γ	параметр сопротивления продуванию материала		17

Продолжение

Символ	Значение	Единица	Определение дано в разделе
Γ	параметр импеданса материала		19
	фазовый угол величины ξ		37
Δ	$=4\pi\mu\varkappa$		27
ε	нормирующий множитель	$\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1\right.$	14, 28
ζ	удельный акустический импеданс ($Z/\rho c$)		10
η	параметр частоты ($2L/\lambda$)		25
ϑ	угол падения		51
	нормирующий фазовый угол для ψ		27
$\varkappa$	параметр ослабления		25
λ	длина волны	*см*	
Λ	нормирующая постоянная		28
μ	параметр волнового числа		25
ν	частота	*герц*	14
ξ	характеристическое число ($\omega+ik$)		27, 37
Ξ	коэффициент неупорядоченности		47
π	3,1416		
Π	мощность источника звука	*эрг/сек*	6
ρ	средняя плотность воздуха	*г/см³*	10
σ	удельная реактивная акустическая проводимость		10, 27
	параметр частоты для материала		19
Σ	знак суммы		
τ, υ	параметры отражённой волны		51
Υ	$=\tau-i\upsilon$		51
φ	фазовый угол для Z		10, 27
φ_i	угол падения		17
Φ	фазовый угол потенциала скоростей		25, 37
χ	характеристическое значение ψ		25
ψ	потенциал скоростей	*см²/сек*	14, 25
Ψ	полный потенциал скоростей	*см²/сек*	29, 37
ω	угловая частота		10, 27
ω_{ON}	собственная частота		37
Ω	$=\mu^2-\varkappa^2$		27

ЛИТЕРАТУРА

Нижеследующие ссылки обнимают большую часть материала, затронутого в этом обзоре. Более полный библиографический список по этому вопросу см. Ватсон, Библиография по акустике сооружений, J. Acoust. Soc. Am. 2, 14 (1931) и сводный перечень J. Acoust. Soc. Am. Vols. 1—10 (1939). Эти источники обозначены в тексте ссылкой А.

(A1) E. Aigner, Experimentelle Studie über d. Nachhall, Akad. Wiss. Wien 123, 1489 (1914).
(A2) C. A. Andree, Effect of position on the absorption of materials for the case of a cubical room, J. Acous. Soc. Am. 3, 535 (1932).
(B1) G. v. Bekesy, Über die Horsamkeit kleiner Musikraum, Ann. d. Physik 19, 665 (1934).
(B2) L. L. Beranek, Precision measurement of acoustical impedance, J. Acous. Soc. Am. 12, 3 (1940).
(B3) L. L. Beranek, Acoustical impedance of commercial materials and the performance of rectangular rooms with one treated surface, J. Acous. Soc. Am. 12, 14 (1940).
(B4) L. L. Beranek, Acoustic impedance of porous materials, J. Acous. Soc. Am. 13, 248 (1942).
(B5) N. B. Bhatt, The effect of an absorbing wall on the decay of normal frequencies, J. Acous. Soc. Am. 11, 67 (1939).
(B6) R. H. Bolt, Frequency distribution of eigentones in a three-dimensional continuum, J. Acous. Soc. Am. 10, 228 (Jan. 1939); Angular distribution theory, J. Acous. Soc. Am. 11, 74 (1939).
(B7) R. H. Bolt and. A. A. Petrauskas, An acoustic impedance meter for rapid field measurements, J. Acous. Soc. Am. 15, 79A (1943).
(B8) R. H. Bolt, Normal modes of vibration in room acoustics; Experimental investigations in nonrectangular enclosures, J. Acous. Soc. Am. 11, 184 (1939).
(B9) R. H. Bolt and R. L. Brown, Variable boundary impedance, J. Acous. Soc. Am. 12, 31 (1940).
(B10) R. H. Bolt, H. Feshbach and A. M. Clogston, Perturbation of sound waves in irregular rooms, J. Acous. Soc. Am. 14, 65 (1942).
(B11) C. P. Boner, Performance of broadcast studios designed with convex surfaces of plywood, J. Acous. Soc. Am. 13, 244 (1942).
(B12) R. L. Brown, R. H. Bolt and P. M. Morse, Acoustic impedance and sound-absorption, J. Acous. Soc. Am. 12, 217 (1940).
(B13) R. L. Brown and R. H. Bolt, Measurement of flow resistance of porous acoustic materials, J. Acous. Soc. Am. 13, 337 (1942).
(B14) E. Buckingham, Bull. Stand. 20, 193 (1925).
(C1) V. L. Chrisler, Acoustical work of the National Bureau of Standards, J. Acous. Soc. Am. 7, 79 (1935).
(C2) V. Chrisler, Sound absorption coefficients, J. Acous. Soc. Am. 6, 115 (1934).
(C3) C. W. Clapp and F. A. Firestone, The acoustic wattmeter, an instrument for measuring sound energy flow, J. Acous. Soc. Am. 13, 12 (1941).
(C4) I. B. Crandall, Theory of vibrating systems and sound (D. Van Nostrand Company, New York, 1927).
(C5) H. Cremer and L. Cremer, The theoretical derivations of the laws of reverberation, Akustische Zeits., 2, 225, 296 (1937).
(C6) L. Cremer, The physical basis of room acoustics, Zeits. f. tech. Physik 17, 528 (1936).
(C7) L. Cremer, Nachhallzeit und Dämpfungsmass bei streifendem Einfall, Akustische Zeits. 5, 57 (1940).
(D1) A. H. Davis, Reverberation equations for two adjacent rooms connected by incompletely soundproof partition, Phil. Mag. 50, 75—80 (1925).

(D2) A. H. Davis, The basis of acoustic measurements by reverberation methods, Phil. Mag. **2**, 543 (1926).

(D3) A. H. Davis and E. J. Evans, Measurement of absorbing power of materials by the stationary wave method, Proc. Roy. Soc, A127, 89—110 (1930).

(D4) I. Dreisen, The orientation of natural acoustic vibrations in a room with concentrated absorbents and of anomalous shapes. J. Tech. Phys. USSR **3**, 743 (1936).

(E1) E. A. Eckhardt, Acoustics of rooms, J. Frank. Inst. **195**, 799 (1923).

(E2) L. P. Eisenhart, Separable Euclidean coordinates, Ann. Math. **35**, 284 (1934)

(E3) C. F. Eyring, Reverberation time in «dead» rooms, J. Acous. Soc. Am. **1**, 217—241 (1930).

(E4) C. F. Eyring, Conditions under which residual sound in reverberent rooms may have more than one rate of decay, J. Soc. Mot. Pict. Eng. **15**, 528 (1943).

(E5) C. F. Eyring, Symposium discussion, J. Acous. Soc. Am. **11**, 104 (1939).

(F1) H. Feshbach and A. M. Closton, Perturbation of boundary conditions, Phys. Rev. **59**, 189 (1941).

(F2) H. Feshbach, On the perturbation of boundary conditions, Phys. Rev. **65**, 307 (1944).

(F3) H. Fletcher and J. C. Steinberg, Articulation testing methods, J. Acous. Soc. Am. **1**, **2**, 2 (1930).

(F4) A. D. Fokker, Sabine's formule voor den nagalm, Physica **7**, 198 (1927).

(F5) W. S. Franklin, Derivation of equation of decaying sound in a room, Phys. Rev. **16**, 372 (1903).

(G1) A. Gemant, Resistance to airflow in sound absorbers, Preuss. Akad. Wiss. **17**, 579 (1933).

(H1) W. M. Hall, An acoustic transmission line for impedance measurements, J. Acous. Soc. Am. **11**, 140 (1939).

(H2) R. L. Hanson, Liveness of rooms, J. Acous. Soc. Am. **3**, 318 (1932).

(H3) J. Henry, Acoustics applied to public buildings, Smithsonian Reports (1854 and 1856).

(H4) P. R. Hevl, V. L. Chrisler and W. F. Shyder, The absorption of sound at oblique angles of incidence, Bur. Stand. J. of Research **4**, 289 (1930).

(H5) F. V. Hunt, On frequency modulated signals in reverberations measurements. J. Acous. Soc. Am. **5**, 127 (1933).

(H6) F. V. Hunt, Apparatus und technique for reverberation measurements, J. Acous. Soc. Am. **8**, 34 (1936).

(H7) F. V. Hunt, Investigation of room acoustics by steady state transmission measurements, J. Acous. Soc. Am. **10**, 216 (1939).

(H8) F. V. Hunt, Absorption coefficient problem, J. Acous. Soc. Am. **11**, 38 (1939).

(H9) F. V. Hunt, L. L. Beranek and D. Y. Maa, Analysis of sound decay in rectangular rooms, J. Acous. Soc. Am. **11**, 80 (1939).

(H10) Kodi Husimi. On the asymptotic distribution of frequencies of a hohlraum and the surface tension of an ideal gas, Proc. Phys. Math. Soc. Japan **21**, 759 (1939).

(J1) A. Jager, Zur theorie des Nachhalls, Akad. Wiss. Wien **2a**, 120, 613 (1911).

(J2) J. Jeans, On the partition of energy between matter and aether, Phil. Mag. **10**, 91 (1905).

(J3) R. C. Jones, Theory of fluctuations in decay of sound, J. Acous. Soc. Am. **11**, 324 (1940).

(K1) V. O. Knudsen, Acoustics of music rooms, J. Acous. Soc. Am. **2**, 434 (1931).

(K2) V. O. Knudsen, Absorption of sound in air, J. Acous. Soc. Am. 3, 126 (1931).

(K3) V. O. Knudsen, Architectural Acoustics (John Wiley and Sons, Inc., New York, 1932).

(K4) V. O. Knudsen, Measurement of sound absorption in a room, Phil. Mag 5, 1240 (1928).

(K5) V. O. Knudsen, Resonance in small rooms, J. Acous. Soc. Am. 4, 20—37 (1932).

(K6) V. O. Knudsen, The absorption of sound in air, in oxygen and in nitrogen, J. Acous. Soc. Am. 5, 112 (1933)

(K7) V. O. Knudsen, Recent developments in architectural acoustics, Rev. Mod. Phys. 6, 1 (1934).

(K8) V. Kuhl and E. Meyer, Untersuchungen uber die Winkel- und Frequenz-Abhangigkeit der Shallschluckung von Pyorosen Stoffen, Preuss. Akad Wiss. 26, 416 (1932).

(K9) K. Kurhihara, Distribution of sound energy in an enclosed space, Proc. Phys. Math. Soc. Japan 10, 71 (1928).

(L1) M. von Laue, Die Freiheitsgrade von Strahlenbündeln, Ann. d. Physik 44, 1197 (1914).

(L2) S. Lifschitz, Mean intensity of sound in an auditorium, and optimum reverberation, Phys. Rev. 27, 618 (1926).

(L3) S. Lifschitz, Acoustics of large auditoriums, J. Acous. Soc. Am. 4, 113 (1932).

(L4) S. Lifschitz, Apparent duration of sound perception and musical optimum reverberation, J. Acous Soc. Am 7, 213 (1936).

(L5) D. P. Loye and R. L. Morgan, Acoustic tube for measuring the sound absorption coefficients of small samples, J. Acous. Soc. Am. 13, 261 (1942).

(M1) D. Y. Maa, The distribution of eigentones in a rectangular chamber at lower frequency ranges, J. Acous. Soc. Am. 10, 258 (1939).

(M2) D. Y. Maa, Non-uniform acoustical boundaries in rectangular rooms, J. Acous Soc. Am. 12, 39 (1940).

(M3) D. Y. Maa, Flutter echoes, J. Acous. Soc. Am. 13, 170 (1941).

(M4) W. A. MacNair, Optimum reverberation time for auditoriums, J. Acous. Soc. Am. 1, 242 (1930).

(M5) J. P. Maxfield and C. C. Potwin, A. modern concept of acoustical desing, J. Acous. Soc. Am 11, 48 (1939).

(M6) E. Meyer, Reverberation and absorption of sound, J. Acous. Soc. Am. 8, 155 (1937).

(M7) G. Millington, A modified formula for reverberation, J. Acous. Soc. Am. 4, 69 (1932).

(M8) A. Monna, Absorption of sound by porous substances, Physica 5, 129 (1938), Rev. d'acoustique 7, 126 (1938).

(M9) K. C. Morrical, A modified tube method for measurement of sound absorption, J. Acous. Soc. Am. 8, 162 (1931).

(M10) R. M. Morris, G. M. Nixon and J. S. Parkinson, Variations in absorption coefficients as obtained by the reberberation chamber method, J. Acous. Soc. Am. 9, 234 (1938).

(M11) P. M. Morse. Vibrati n and sound (McGraw-Hill Book Company, Inc, New York, 1936) в частности Chapter VIII.

(M12) P. M. Morse, Some aspects of the theory of room acoustics, J. Acous. Soc. Am. 11, 56 (1939).

(M13) P. M. Morse, Transmission of sound inside pipes, J. Acous. Soc. Am. 11, 205 (1939).

(N1) R. F. Norris, A derivation of the reverberation formula, Appendix II in Architectural Acoustics by V. O. Knudsen (John Wiley and Sons, Inc, New York, 1932).

(O1) H. F. Olsen and B. Kreuzer, The reverberation time bridge, J. Acous. Soc. Am. 2, 78 (1930).
(P1) E. T. Paris, Sound absorption coefficients measured by reverberation ans stationary wave methods, Nature, 120, 806, 880 (1927).
(P2) E. T. Paris, On the reflection of sound from a porous surface, Proc. Phys. Soc. 115, 407—419 (1927).
(P3) E. T. Paris, On the stationary wave method of measuring sound absorption at normal incidence, Proc. Phys. Soc. 39, 269—295 (1927).
(P4) E. T. Paris, Resonance in pipes stopped with imperfect reflectors, Phil. Mag. 4, 907—917 (1927).
(P5) E. T. Paris, On the coefficient of sound-absorption measured by the reverberation method, Phil. Mag. 5, 489—497 (1928).
(P6) E. T. Paris, Oblique reflection of sound, Nature, 9, 126 (1930).
(P7) J. S. Parkinson, Area and pattern effect in the measurement of sound absorption, J. Acous. Soc. Am. 2, 112 (1930).
(P8) H. L. Penman and E. G. Richardson, The absorption of porous materials at normal incidence, J. Acous. Soc. Am. 4, 322 (1933).
(P9) J. R. Power, Measurement of absorption room with sound absorbing ceilings, J. Acous. Soc. Am. 10, 98 (1938).
(R1) A. V. Rabinovich, Effect of distance in the broadcasting studio, J. Acous. Soc. Am. 7, 199 (1936).
(R2) L. G. Ramer, Absorption of strips, effect of width and location, J. Acous. Soc. Am. 12, 323 (1941).
(R3) Rayleigh, The law of complecte radiation, Phil. Mag. 49, 539 (1900).
(R4) Rayleigh, Theory of sound (The Macmillan Company, New York, Chap. 13, 1929).
(R5) M. Rettinger, Note on reverberation characteristics, J. Acous. Soc. Am. 6, 51 (1934).
(R6) M. Rettinger, On the theory of sound absorption of porous materials, J. Acous. Soc. Am. 6, 188 (1935).
(R7) M. Rettinger, Theory of sound absorption of porous materials, flexible and non-flexible, J. Acous. Soc. Am. 8, 53 (1936).
(R8) G. M. Roe, Frequency distribution ot normal modes, J. Acous. Soc. Am. 13, 1 (1931).
(S1) W. C. Sabine, Collected papers on acoustics (Harvard University Press, 192?).
(S2) W. C. Sabine, Collected papers on acoustics (Harvard University Press, 1929) p. 43.
(S3) P. E. Sabine, Diffraction effects in sound absorption measurements, Phys. Rev. 19, 402 (1922).
(S4) P. E. Sabine, What is measured in sound absorption measurements? J. Acous. Soc. Am. 6, 239 (1935).
(S5) P. E. Sabine, The beginnings of architectural acoustics, J. Acous. Soc. Am. 7, 242—248 (1936).
(S6) P. E. Sabine, The effect of cylindrical pillars in a reverberation chamber, J. Acous. Soc. Am. 10, 1 (1938).
(S7) P. E. Sabine, Architectural acoustics: its past ans its future, J. Acous. Soc. Am. 11, 21 (1939).
(S8) P. E. Sabine, Specific normal impedance and sound absorption coefficients of materials, J. Acous. Soc. Am. 12, 317 (1941).
(S9) H. J. Sabine, Notes on acoustic impendance measurements, J. Acous. Soc. Am. 14, 143 (1942).
(S10) K. Schuster and E. Waetzmann, Über den Nachhall in geschlossenen Raumen, Ann. d. Physik, 1667 (1929).
(S11) K. Schuster, Berechnung der Schalldichte in einem Kugelförmigen Raume, Ann. d. Physik 1, 696 (1929).

(S12) W. H. Sette, A new reverberation time formula, J. Acous. Soc. Am. 4, 193 (1933).

(S13) G. T. Stanton, F. C. Schmidt and W. J. Brown, Reverberetion measurements in auditoriums, J. Acous. Soc. Am. 4, 95—105 (1934).

(S14) G. T. Stanton, Correlation of sound absorption coefficients with field measurements, J. Acous. Soc. Am. 11, 45 (1939).

(S15) M. J. O. Strutt, On the acousfics of large rooms, Phil. Mag. 8, 236—250 (1929).

(S16) M. J. O. Strutt, Acoustics of large halls, Zeits. f. angew. Math. u. Mech. 10, 360—368 (1930).

(Tl) H. O. Taylor, A direct method of finding the value of meteriarls as sound absorbers, Phys. Rev. 2, 270 (1913).

(T2) H. O. Taylor and C. W. Sherwin, Sound absorption and attenuation by the flue method, J. Acous. Soc. Am. 9, 331—335 (1938).

(V1) J. E. Volkmann, Polycylindrical diffusers in room acoustical desing, J. Acous. Soc. Am. 13, 234 (1942).

(W1) F. R. Watson, Acoustics of buildings (John Wiley and Sons, Inc., New York, 1941).

(W2) F. R. Watson, Acoustics of auditorium optimum time of reverberation, Arch. 55, 251 (1927).

(W3) R. B. Watson, The modulation on sound decay curves, J. Acous. Soc. Am. 13, 82A (1941).

(W4) E. C. Wente and E. H. Bedell, The measurement of acoustic impedance and the absorption coefficient of porous materials, Bell. Syst. Tech. J. 7, 1—10 (1928).

(W5) E. C. Wente and E. H. Bedell, Chronographic method of measuring reverberation time, J. Acous. Soc. Am. 1, 422 (1930).

(W6) E. C. Wente, E. H. Bedell and K. D. Swartzel, High speed level recorder for acoustic measurements, J. Acous, Soc. Am. 6, 121 (1936); см. также Bedell and Swartzel, J. Acous. Soc. Am. 6, 130 (1935).

(W7) E. C. Wente, Acoustical instruments, J. Acous. Soc. Am. 7 (1935).

(W8) E. C. Wente, Characteristics of sound transmission in rooms, J. Acous. Soc. Am. 7, 123 (1935).

(W9) H. Weyl, Das asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenwerte linearer partieller Differentialgleichungen, Math. Ann. 71, 441 (1911).

(W10) F. J. Willig, Comparison ot sound adsorption coefficients obtained experimentally by different methods, J. Acous. Soc. Am. 10, 293 (1939).

(W11). E. Wintergerst, Theorie der Schalldurchflüssigkeit von einfachen und zusammengesetzten Wängen, Schalltechnik 4, 85 (1931).