1947 г. Июль

Т. XXXII, вып. 3

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ*)

Д. Иваненко

СОДЕРЖАНИЕ

§ 11. КОСМИЧЕСКИЕ ЛУЧИ

Как известно, по всем направлениям из мирового пространства на Землю падают космические лучи, обладающие огромными энергиями, в среднем в несколько миллиардов электрон-вольт в верхних слоях атмосферы. Первичные частицы, повидимому являющиеся в основном протонами, порождают мезотроны, далее—прямо или косвенно—электроны, позитроны, фотоны. Таким образом, в потоке космических лучей мы имеем вещество в максимально раздробленном состоянии, вплоть до элементарных частиц. На уровне моря на 1 $см^2$ в минуту попадает в среднем одна частица. Существенно подчеркнуть честве незначительного побочного источника «добавочной» ионизации и были затем с полной ясностью обнаружены Хессом в 1911 г. при подъёмах на воздушных шарах до 5 километров.

Перечислим кратко основные этапы исследования космических лучей.

а) Милликен, Регенер, Пиккар, Шейн продвинули измерения космических лучей до 15—35 *км* и, наконец, недавно, путём использования ракеты, до 150 *км* над уровнем моря. На высоте около 20 *км* было обнаружено увеличение интенсивности примерно в 80 раз.

б) Скобельцын (1929 г.), Андерсон, Кунце, Блэккетт сфотографировали космические лучи разнообразными способами в вильсоновской камере, что позволило открыть множество новых явлений в этой области.

в) Клэй, Комптон (1932 г.) обнаружили в обширных экспедициях влияние земного магнитного поля на космические лучи и тем самым доказали наличие заряженных частиц в первичном потоке.

г) Андерсон открыл позитрон в космических лучах (1932 г.).

д) Блэккетт открыл впервые в космических лучах образование пар и многих пар, т. е. ливней электронов и позитронов (1933 г.).

е) Андерсон и Неддермейер открыли в космических лучах положительные и отрицательные мезотроны (1937 г.).

ж) Для расшифровки природы космических лучей и сложнейших процессов, происходящих в космическом потоке, значительную роль сыграло предложенное Оже разделение космических лучей на мягкие, поглощаемые в 10 *см* свинца и оказавшиеся в основном потоками электронов, позитронов и фотонов с примесью медленных мезотронов и протонов (число которых быстро увеличивается с высотой), и жёсткие проникающие космические лучи, оказавшиеся в основном потоками мезотронов, с примесью нуклеонов (протонов, нейтронов), число которых также быстро увеличивается с высотой.

Относительно происхождения космических лучей сейчас ещё ничего неизвестно. Неудачными оказались все ускорительные гипотезы, пытавшиеся объяснить большую энергию частиц последующим ускорением в гипотетических электрических (Росс, Генн) или магнитных (Альфвен, Терлецкий) полях, неубедительна астрономическая гипотеза Цвикки, пытавшегося связать космические лучи со взрыждали недавно близкую гипотезу образования космических лучей в результате аннигиляции протонов и нейтронов нашего мира с гипотетическими антипротонами и антинейтронами сугубо гипотетического «антимира» Дирака. Для объяснения энергии космических ливней Оже (до 10^{15}—10^{17} eV) Клейн вынужден привлекать процессы аннигиляции целых макроскопических зёрен и кусков вещества! Интересным следствием его сугубо гипотетических и предварительных подсчётов является то обстоятельство, что при этих процессах вовсе не происходит слишком быстрого уничтожения частиц, но может быть понята наблюдаемая плотность космических лучей. При подобной ситуации нельзя не попытаться рассмотреть космические лучи с космологической точки зрения, связывая их происхождение с процессами в гипотетическом «особом» ядерном состоянии вещества (см. § 12). Было бы, однако, преждевременно обсуждать здесь эту гипотезу более подробно.

С другой стороны, картина взаимодействия первичных космических лучей, по всей вероятности протонов с энергией около 10^{10} eV, с веществом атмосферы сейчас ясна во многих существенных пунктах. Наиболее правдоподобная гипотеза Джонсона-Шейна-Сванна гласит, что при столкновении с атомными ядрами в атмосфере от первичных протонов «отрывается» мезотронное поле. Ещё не ясно, порождаются ли мезотроны один за другим (т. е. каскадом) (Гейтлер), или по нескольку частиц сразу взрывным образом (Гейзенберг, Бете, Оппенгеймер). Интенсивное порождение мезотронов нуклеонами путём такого тормозного излучения за счёт ядерных сил происходит, в основном, на высотах 25—30 *км*. Часть мезотронов (возможно, именно векторных) сравнительно быстро распадается по схеме: $\mu_- \to e_- + \nu$ или $\mu_+ \to e_+ + \nu$, и даёт начало электронам и позитронам мягкой компоненты. Энергия мезотронов переходит в энергию мягкой компоненты также через выбивание электронов из атомов (Баба) и отчасти путём излучения фотонов. Другие мезотроны (возможно, именно псевдоскалярные) проскакивают через атмосферу, составляя основную долю потока жёсткой проникающей компоненты. Медленные отрицательные мезотроны поглощаются ядрами (Лукирский, Юз) и за счёт своей большой энергии покоя ($\mu \sim 100$—$200\ m$) могут вызвать расщепление ядер с вылетом нуклеонов во все стороны в виде «звезды» (Жданов). Однако, ядерные расщепления вызываются бесспорно не только мезотронами; вероятно, в них участвуют все частицы космического потока, в частности, нейтральные, и в особенности нуклеоны (Хазен) *). Следует подчеркнуть бесспорное наличие в космическом потоке, кроме основных мезотронов массы 200 m, также более тяжёлых мезотронов с массой вплоть до 990 m (Лепренс-Ренге, Алиханьян).

*) Заметим, что недавно наблюдался вылет нескольких нуклеонов при расщеплении ядер фотонами с энергией в 100 MeV, полученными в бетатроне в лабораторных условиях.

Расшифровка жёсткой компоненты, в основном вблизи уровня моря, как потока мезотронов, обладающих конечным временем жизни, в среднем $\tau = 2 \cdot 10^{-6}$ сек. позволила объяснить температурную и барометрическую зависимость интенсивности космических лучей (Блэккетт).

Наиболее успешно разработана и прекрасно подтверждена экспериментами теория основной части мягкой, поглощаемой компоненты космических лучей, состоящей из электронов, позитронов и фотонов.

Применяя теорию электронов-позитронов Дирака и квантовую электродинамику фотонов вплоть до самых высоких энергий, Баба и Гейтлер, а также Оппенгеймер и Карлсон показали в 1937 г., что при энергиях в сотни миллионов и миллиарды электрон-вольт электроны и позитроны теряют свою энергию главным образом на тормозное испускание фотонов при прохождении электрического поля ядер. Фотоны же огромных энергий, в свою очередь, с наибольшей вероятностью, теряют энергию также при столкновении с ядрами (а не на фотоэлектрическое вырывание электронов или передачу энергии электронам при комптон-эффекте, и т. д.), причём порождается пара электрон-позитрон. Выяснилось, что при прохождении фотонами слоёв вещества, содержащего тяжёлые элементы (в которых все эти эффекты наиболее ярко выражены, ввиду высокого заряда атомного ядра), даже при незначительной толщине их, имеется большая вероятность порождения многих пар (электронов и позитронов) друг за другом каскадным путём. Так были объяснены ливни частиц, открытые Блэккеттом в 1933 г. Сверхливни Оже, распространяющиеся на огромные площади радиусом до километра, состоят также, в основном, из электронов, позитронов и фотонов, бесспорно содержа примесь мезотронов, повидимому в наиболее плотной своей части — «стволе».

В дальнейшем теория каскадных ливней была детально разработана главным образом советскими авторами*). Повидимому, каскадная теория, а тем самым релятивистская квантовая механика электронов, позитронов и фотонов, в основном подтверждается даже для сверхливней Оже с энергиями в 10^{15}—10^{17} eV. Всё же следует указать некоторые «облака», сгущающиеся над теорией сверхливней Оже, огромная протяжённость коих не может быть пока что объяснена удовлетворительно теорией, учитывающей одни лишь электромагнитные взаимодействия. Повидимому, необходимо включить здесь в рассмотрение различные ядерные взаимодействия.

Дальнейший прогресс понимания элементарных частиц, бесспорно, во многом связан с исследованием космических лучей, представля-

*) Ландау, Иваненко и Соколов, точное решение уравнений каскадной теории; Тамм и Беленький, учёт ионизационных поправок.

ющих нам пока что единственную возможность изучения частиц при столь высоких энергиях и, в частности, возможность наблюдать порождение мезотронов.

§ 12. РАСПРОСТРАНЁННОСТЬ ЭЛЕМЕНТОВ И ЧАСТИЦ

Ясно, что проблема распространённости элементарных частиц связана с вопросом о распространённости элементов и их происхождении, с вопросом о природе космических лучей, и тесно примыкает к космологии. Подробное обсуждение этих проблем, разработка коих большею частью была продвинута лишь в последние 10—20 лет, выходит за рамки нашей статьи. Мы коснёмся их лишь с целью очертить круг вопросов, связанных с проблемами элементарных частиц.

Исследование земной коры, метеоритов и звёздных атмосфер показало примерно одинаковую распространённость элементов во всей известной части вселенной. Результаты работ многих исследователей, в особенности Гольдшмидта, Рэсселя, Ферсмана гласят: 1) элементы чётного атомного номера и среди них чётного атомного веса встречаются чаще нечётных (правило Харкинса), 2) концентрация изотопов элементов определённым образом быстро убывает с ростом атомного номера.

Данные о концентрации химических элементов дают число протонов и нейтронов, входящих в состав ядер, и электронов, вращающихся вокруг ядер. Присоединяя сюда сведения о средней плотности вещества $\rho \sim 10^{-27} - 10^{-30}$ *г/см*^{3} и общей массе вещества $M \sim 10^{51} - 10^{53}$ *г* в известной нам части вселенной (размерами $R \sim 10^{27}$ *см*), получим грубую, по необходимости, оценку для числа частиц

$$N_p \sim N_n \sim N_e \sim 10^{75} - 10^{77}.$$

Здесь следует заметить, что, согласно Дираку, не исключена возможность существования части вселенной, где все частицы заменены на античастицы другого знака заряда. Атомные ядра в подобном антимире были бы составлены из антипротонов и антинейтронов, вокруг которых в атомах вращались бы позитроны, в то время как e_- были бы столь же редки, как e_+ в нашей части вселенной. Интересно, что все спектральные явления зависят от квадрата заряда. Поэтому оптическими наблюдениями отличить антимир от обычного нельзя. Всё же преимущественный поток e_+ или антипротонов должен так или иначе помочь обнаружить существование антимира, например, при помощи наблюдений в космических лучах.

Как бы то ни было, важно подчеркнуть, что если допустить существование антипротонов и гипотезу антимира, то наша часть вселенной, с её известным распределением элементарных частиц, ядер и химических элементов, окажется обусловленной космологическими обстоятельствами и отнюдь не является единственно возможной.

Теперь возникают два вопроса: А) Является ли концентрация элементарных частиц, фотонов, химических элементов и космического излучения в основном постоянной? Б) Всегда ли концентрация различных типов вещества равнялась наблюдаемой ныне, и каковы тенденции её изменения?

Что касается протонов и нейтронов, то, несмотря на принципиальную возможность их уничтожения и порождения, процессы эти не наблюдались. Таким образом, общее число нуклеонов во вселенной сохраняется и, насколько известно, должно было всегда сохраняться. Вопрос же об относительном числе n и p связан, в основном, с изменением концентрации различных изотопов элементов. Число n в стабильных ядрах равняется или превосходит число протонов. Благодаря реакциям K-захвата, испускания e_- ядрами и превращения водорода в более тяжёлые ядра в звёздах, в известной части вселенной происходит некоторое обогащение числа нейтронов за счёт протонов. Что касается ядерных реакций, связанных с естественным делением урана, тория, плутония и последующими превращениями осколков, далее, с естественной β-радиоактивностью, K-захватом, расщеплением ядер, излучением радиоактивных элементов, или космическими лучами, с последующим образованием искусственно-радиоактивных ядер, — все эти процессы относительно редки и не могут существенно изменить относительную концентрацию p, n, e_-, e_+ и химических элементов. Всё же перечисленные только что процессы показывают, что концентрация элементов и частиц отнюдь не является застывшей даже в условиях Земли. Например, происходит постоянное обогащение ${}_{18}A^{40}$ за счёт ${}_{19}K^{40}$ и т. д. Не исключено заметное обогащение отдельных изотопов за счёт вековой бомбардировки ядер космическими лучами.

Насколько известно, в настоящее время интенсивное образование новых элементов и вместе с тем процессы $p \rightleftarrows n$ идут лишь внутри звёзд. Как было показано Бете (специально для звёзд, принадлежащих к классу так называемых карликов главной последовательности, в том числе Солнца), при огромных температурах порядка десятков миллионов градусов ядра водорода обладают достаточной тепловой энергией, чтобы вызвать расщепление углерода, что в конце концов приводит к образованию ядер гелия из протонов:

$$4_1H^1 \longrightarrow {}_2He^4 + 2e_+ + 2\nu + E; \quad E \sim 30 \text{ MeV}.$$

Кстати сказать, энергия, выделяемая при этом, является основным источником излучения Солнца и других подобных звёзд *).

*) Относительно распространённости нейтронов в звёздах неоднократно высказывалось предположение (Хунд, Котари), что в недрах звёзд некоторых типов, в частности у гигантов, имеются сверхплотные ядра с плотностью порядка атомно-ядерной, составленные из нуклеонов, или даже одних нейтронов. В другом варианте этой гипотезы указывалось на возможность перехода звёзд с массами, большими некоторой критической (порядка сол-

Однако температура внутри звёзд недостаточна для образования средних и тяжёлых элементов. Следует признать, что в известной нам части вселенной мы не знаем процессов, которые могли бы привести к их образованию и, следовательно, к существенному изменению относительной концентрации протонов и нейтронов.

Точно так же огромный избыток e_- и незначительное число e_+ существенно не изменяется за счёт наблюдаемых процессов: β-распада, K-захвата, образования и аннигиляции пар под действием главным образом космических фотонов, и распада мезотронов μ_-, μ_+.

Продвинуться вперёд в интересующих нас вопросах без привлечения космологии, очевидно, нельзя. Если принять повидимому наиболее правдоподобную точку зрения расширяющейся вселенной, высказанную впервые ленинградским математиком Фридманом (1923 г.), то не абсурдно допустить, что примерно 10^{10} лет тому назад вещество известной нам части вселенной было сжато до плотности около $\rho \sim 10^6 \frac{г}{см^3}$ и имело температуру около $T \sim 10^9 - 10^{10}$ градусов. В этом «предзвёздном» состоянии, рассматривавшемся в качестве предварительной гипотезы Вейцзекером, Чандрасекаром, Ватагиным, могли итти интенсивным образом процессы образования изотопов различных элементов, и можно подсчитать, что температура $T = 8 \cdot 10^9$ градусов наилучшим образом соответствует условиям образования лёгких и средних элементов, примерно до серебра, в количествах, соответствующих наблюдаемой распространённости.

В дальнейшем, при расширении этой части вселенной и понижении температуры, ядерные реакции в основном прекратились, и образовавшаяся равновесная концентрация элементов оказалась «застывшей».

Концентрация тяжёлых элементов, из теоретических соображений, однако, получается, повидимому, слишком низкой по сравнению с наблюдаемой. В виде совершенно предварительной гипотезы мы хотим указать на возможность другого «особого» состояния. Действительно, мыслимой границей сжатия вещества будет состояние ещё бóльшей ядерной плотности порядка $\rho \sim 10^{14}$ $г/см^3$. Тогда всё вещество известной части вселенной (в виде n и p) оказа-

---

нечной), в вырожденное состояние с плотностью порядка ядерной. Следует, однако, подчеркнуть, что наличие сверхплотных ядер у каких-либо звёзд не подтвердилось. Что касается образования чисто нейтронных звёзд путём K-захвата и падения всех e_- на ядра, то нужно иметь в виду упущенную указанными авторами нестабильность нейтронов, приводящую к тому, что n переходят в $p + e_- + \nu$; так что в системе с необходимостью будут присутствовать нуклеоны обоих типов.

лось бы сжатым в объёме с линейными размерами порядка $R \sim 10^{13}$ *см* $=$ $= 10^8$ *км* *).

Следует подчеркнуть, что при сверхвысоких T начинают итти не только ядерные реакции с образованием новых элементов, но и процессы порождения элементарных частиц. При $T > \frac{2mc^2}{k} \gtrsim 10^{10}$ градусов, соответствующей 10^6 eV, начнут порождаться пары лёгких частиц (e_-, e_+) за счёт разнообразных процессов. В частности, излучение при весьма высоких температурах будет смешано с электронами и позитронами и будет содержать примерно равную долю e_-, e_+ и фотонов, если отвлечься от порождения мезотронов средней массы ($\mu \sim 200\ m$), которое начнёт итти заметным образом при температуре $T \sim 10^{12}$ градусов, соответствующей 100 MeV. (Небезынтересно напомнить, что существующие ускорительные установки дают энергию в 30 MeV — циклотрон — и до 100 — 150 MeV — бетатрон, что соответствует температуре в 10^{12} градусов. При взрыве атомной бомбы температура достигла, повидимому, 10^6 градусов.)

Резюмируя, можно сказать, что если распространённость элементов и изотопов на Земле можно понять на базе геологических, химических и естественно-радиоактивных процессов, учитывая некоторое воздействие космических лучей, то для понимания распространённости изотопов элементов и частиц во вселенной необходимо учесть ещё ядерные реакции в звёздах. Объяснение же образования элементов и тем самым концентрации частиц требует привлечения космологических соображений, сугубо гипотетических на данной ступени знания.

§ 13. ОБЩИЕ ВОПРОСЫ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

После анализа основных эмпирических сведений об отдельных элементарных частицах необходимо для понимания главнейших закономерностей движений и взаимодействий всех частиц дать самое сжатое изложение основных принципов релятивистской квантовой механики, являющейся современной теорией элемен-

---

*) Здесь не мешает заметить, что с этой точки зрения сингулярные решения, которые возникают в любых вариантах нестационарных космологических теорий, должны быть пересмотрены, ввиду того, что невозможно сжать вещество в точку. «Особое» ядерное состояние вещества является границей применимости макроскопических теорий, его дальнейшее рассмотрение должно итти при помощи релятивистской квантовой механики, притом, повидимому, при учёте квантовой теории тяготения.

Как было замечено в нашей дискуссии с А. Л. Зельмановым, не исключено, что подобное ядерное состояние длилось в течение весьма незначительного времени, когда произошёл разрыв на отдельные астрономические объекты и атомные ядра. Парадоксальным образом отсюда возникает гипотеза о возможности трактовать некоторые звёзды как начальную, а не конечную стадию эволюции.

тарных частиц. В связи с этим здесь рассматриваются следующие вопросы:

1. Группы преобразований и инвариантность. 2. Волновые функции. 3. Спин. 4. Уравнения релятивистской квантовой механики. 5. Лагранжева функция. 6. Теория взаимодействия. 7. Вторичное квантование и статистика.

1. Группы преобразований и инвариантность

Волновые функции, описывающие элементарные частицы, должны иметь определённые трансформационные свойства, т. е. изменяться закономерным образом при преобразованиях координат или соответствующих движениях систем отсчёта. При этом речь идёт о преобразованиях в четырёхмерном мире: пространстве—времени. Наибольшее значение имеют инварианты (скаляры), т. е. величины, не изменяющиеся при переходе в различные координатные системы. Сами уравнения релятивистской квантовой механики, описывающие те или иные частицы, должны сохранять инвариантную форму, так как законы природы, т. е. процессы, ими выражаемые, не зависят от выбора системы координат.

Требование инвариантности принадлежит к числу наиболее общих и глубоких законов природы, выражающих самые основные свойства пространства и времени, движения частиц и их взаимодействий.

Перечислим все группы преобразований, оставляющих релятивистские квантовые уравнения инвариантными:

1) Отсутствие абсолютного центра в пространстве или начала отсчёта времени, т. е. однородность пространства—времени, приводит к инвариантности относительно переноса начала координат («принцип относительности начала отсчёта»). Следовательно, уравнения должны быть дифференциальными в четырёх координатах. Если $x'_s = x_s + a_s$ ($s = 1, 2, 3, 4$), тогда $dx'_s = dx_s$; ($x_1 = x$; $x_2 = y$, $x_3 = z$).

2) Изотропность пространства или «принцип относительности направлений» приводит к инвариантности по отношению к трёхмерным пространственным вращениям.

Из геометрических наглядных соображений очевидно, что при этом остаётся инвариантным расстояние (или квадрат расстояния) между двумя точками, например с координатами (0, 0, 0) (начало координат) и (x_1, x_2, x_3) или соответственно (0, 0, 0) и (x'_1, x'_2, x'_3):

$$r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r'^2 = x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2.$$

Для бесконечно малых вращений: $dr^2 = dr'^2$.

3) «Принцип относительности равномерных и прямолинейных движений» или «специальный принцип относительно-

с т и», установленный на базе работ Лоренца Эйнштейном и Пуанкарэ в 1905 г., утверждает эквивалентность всех, так называемых, инерциальных систем отсчёта, движущихся прямолинейно и равномерно друг относительно друга. Это требует включения четвёртой координаты —времени— в значительной мере на равных основаниях наряду с тремя пространственными ($x_4 = ct$, или $x_4 = ict$) и приводит к инвариантности уравнений относительно так называемых преобразований Лоренца, которые сводятся к вращениям в плоскостях (xt), (yt), (zt) и выражают переход от одной инерциальной системы отсчёта к другой. При этом инвариантным остаётся интервал s или расстояние между двумя точками в четырёхмерном мире, например, с координатами (t, r) и соответственно (t', r'): $s = c^2t^2 - r^2 = s'^2 = c^2t'^2 - r'^2$, или для бесконечно малых интервалов:

$$ds^2 = c^2\,dt^2 - dr^2 = ds'^2 = c^2\,dt'^2 - dr'^2.$$

4) Произвольность выбора правой и левой системы координат и симметрия по отношению к прошлому и будущему приводит к инвариантности относительно зеркальных отражений (и н в е р с и й)

$$X_1' \to -x_1;\quad X_2' \to -x_2;\quad X_3' \to x_3,$$

а также относительно обращения времени: $t' \to -t$.

Весьма существенно, что уравнения релятивистской механики, так же как неквантовой и нерелятивистской механики, обратимы по времени. Как известно, необратимость трактуется путём статистического рассмотрения.

5) Отсутствие в природе каких-либо избранных систем координат и принципиальная возможность пользоваться любыми произвольно движущимися системами отсчёта, а не только инерциальными приводят к инвариантности уравнений относительно преобразований к любой криволинейной системе координат («о б щ и й п р и н ц и п о т н о с и т е л ь н о с т и» при наличии гравитации).

Это означает, что кинематике элементарных частиц, как и всем другим законам природы, можно придать так называемую общековариантную форму, записав их, согласно Эйнштейну, в тензорном виде при помощи компонент метрического тензора $g_{\mu\nu}$ *).

6) Уравнения движения, вообще говоря, не инвариантны относительно конформных преобразований, при которых интервал умножается на некоторую функцию координат. Однако, как было показано Бэтменом и Кэннингемом, уравнения Максвелла конформно инвариантны, что тесно связано с отсутствием массы у фотонов (хотя, как заметил Паули, например дираковские уравнения при исчезающей массе, что, вероятно, справедливо для нейтрино,— не будут конформно инвариантны).

*) Или, как показали для спиноров Тетроде-Фок-Иваненко, при помощи обобщённых дираковских матриц γ_μ.

7) Исходя из наглядной возможности выбрать произвольно начало отсчёта электромагнитных потенциалов, мы приходим к инвариантности уравнений электромагнитного поля и уравнений всех других частиц, взаимодействующих с полем относительно «калибровочных» преобразований потенциалов (2-го рода, по номенклатуре Паули):

$$A_4' = A_4 + \frac{\partial f}{c\,\partial t}, \quad A_s' = A_s + \frac{\partial f}{\partial x_s}, \quad (s=1, 2, 3),$$

где f — скалярная функция всех координат. Поэтому сами потенциалы не могут входить в уравнения Максвелла.

8) Хотя потенциалы входят явно в уравнение Дирака и другие квантовые уравнения частиц, но изменение их калибровки компенсируется изменением фазы у волновой функции. Наглядная возможность изменить фазу ψ-функции приводит к требованию инвариантности всех квантовых уравнений (в том числе и нерелятивистского уравнения Шредингера) относительно «калибровочного» преобразования волновых функций (1-го рода, по номенклатуре Паули)

$$\psi \to \psi e^{iF}.$$

Действительно, непосредственно наблюдаемыми величинами являются билинейные комбинации типа плотности вероятности: $\rho = \psi^*\psi$, которые не изменяются при подобном преобразовании.

Подчеркнём теперь, что, согласно весьма общей теореме Гильберта-Нетер, каждой непрерывной группе преобразований соответствует некоторый закон сохранения. Например, из инвариантности относительно переноса начала координат (1) вытекает закон сохранения энергии-импульса, инвариантность относительно вращений в пространстве (2) даёт сохранение момента количества движения и т. д.

2. Волновые функции

В рамках релятивистских квантовых преобразований можно описывать частицы следующими волновыми функциями:

1) скалярная функция (или инвариант, т. е. тензор ранга 0). **Скаляр** ψ не изменяется при всевозможных преобразованиях.

2) **Вектор** с четырьмя компонентами (тензор ранга 1). Понятие вектора, как направленной величины, характеризуемой тремя компонентами по осям координат, известно всем. Четырёхмерный вектор будет, очевидно, характеризоваться компонентами по осям x, y, z, ct (или ict), где c — скорость света, прибавленная для сохранения размерности. Удобно перенумеровать координаты и написать: $x_1 = x$; $x_2 = y$; $x_3 = z$; $x_4 = ct$ (или ict). При преобразовании координат, например вращении координатной системы, компоненты четырёхмерных векторов преобразуются подобно координатам.

ψ-функция электромагнитного или векторного мезотронного поля есть четырёхмерный вектор (-потенциал): $\psi_\nu = A_1, A_2, A_3, iA_4$.

3) Более сложные образования, тензоры 2-го ранга, можно получить, беря произведения двух векторов. Симметричным тензором 2-го ранга (относительно линейных преобразований) в релятивистской квантовой механике является ψ-функция гравитона $h_{\nu\mu} = h_{\mu\nu}$. Антисимметричным тензором 2-го ранга $F_{\nu\mu} = -F_{\mu\nu}$ является совокупность компонент магнитного и электрического полей ($F_{12} = H_z$; $F_{13} = -H_y$; $F_{23} = H_x$; $F_{14} = -iE_x$ и т. д.), или совокупность компонент квазимагнитного и квазиэлектрического мезотронного поля, подчиняющегося уравнениям Прока. Проковское или максвелловское поля называются векторными, так как в них за основу берётся векторная ψ-функция (потенциал): Φ_μ или, соответственно, A_μ, а компоненты напряжённостей поля получаются путём применения четырёхмерной операции «вихря»:

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}.$$

Аналогичным путём можно образовать тензоры высшего ранга и использовать их в качестве волновых функций для описания тех или иных полей.

4) Важную роль в современной теории играют величины, «дуальные» к перечисленным выше. Скаляру (инварианту) сопоставляется псевдоскаляр или, что по существу означает то же самое, тензор 4-го ранга, антисимметричный во всех значках

$$\psi \longrightarrow \psi_{\alpha\beta\gamma\delta} \quad (\psi_{\alpha\beta\gamma\delta} = -\psi_{\beta\alpha\gamma\delta} \text{ и т. д.}).$$

Таким образом, $\psi_{\alpha\beta\gamma\delta}$ имеет по существу одну компоненту, отличную от нуля, как и скаляр: $\varphi_{1234} = -\psi_{2134}$ и т. д. Вектору сопоставляется псевдовектор или тензор 3-го ранга, антисимметричный во всех значках, т. е. обладающий подобно вектору 4-мя компонентами: $A_\alpha \longrightarrow \psi_{\alpha\beta\gamma}$ ($\psi_{\alpha\beta\gamma} = -\psi_{\beta\alpha\gamma}$ и т. д.). Псевдоскаляр является инвариантом при всех преобразованиях, кроме зеркальных отражений, при которых он меняет знак. Точно та́к же, псевдовектор ведёт себя подобно вектору всегда, за исключением зеркальных преобразований.

В теории Дирака впервые были введены величины нового типа, более простые, первичные, чем векторы, именно спиноры или тензоры ранга $^1/_2$, которые можно назвать также «семивекторами». Говоря наглядно, спинор является своеобразным «корнем квадратным» из вектора, так что из произведения спиноров можно образовать вектор. Спинор имеет две компоненты, которых достаточно для рассмотрения вращений и лоренцовых преобразований координат. Однако, если учесть зеркальные отражения, то следует ввести наряду со спинором сопоставленный ему дуальный; тогда получим полную систему из 2-х спиноров, или биспинор, содержащий всего 4 компоненты. Волновая функция частиц спина $^1/_2$ является биспинором и подчиняется уравнению Дирака.

Для описания частиц с другими значениями полуцелого спина, например $^3/_2$, также нужно применить величины спинорного типа. Обычные тензоры и спиноры можно трактовать совместно как спин-тензоры или «ундоры» (Бельинфанте).

3. Спин

Переход к волновым функциям с несколькими компонентами поясняется тем, что у электрона, протона и других частиц имеется спин, и частицы, говоря грубо наглядно, могут определённым образом ориентироваться. Это соответствует поляризации ψ-волн, описывающих частицы. Описание же поляризованных волн требует введения нескольких компонент, часть из которых равняется 0 в том или ином состоянии поляризации. Отсюда становится также ясно, что трансформационный характер ψ-функции и, вместе с тем, число её компонент определяют значение спина. Напомним, что для описания поляризации электромагнитных волн нужно, как известно, перейти к четырёхкомпонентной векторной функции, или четырёхмерному потенциалу, включающему наряду со скалярным A_4 также векторный потенциал A. Далее, для описания гравитационного поля от однокомпонентного ньютонова потенциала нужно перейти к эйнштейновой тензорной волновой функции с десятью компонентами $g_{\mu\nu}$ (или, для слабого поля, $h_{\mu\nu}$).

Если спин равен $^1/_2$, т. е., точнее говоря, компонента спина по любой оси может принимать два значения: $s_z = \pm \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2\pi}\right)$, то следует ввести двухкомпонентную функцию или спинор, трансформирующийся определённым образом при преобразованиях координат. Однако для обеспечения инвариантности относительно отражений, как указывалось, необходимо рассматривать четырёхкомпонентный биспинор, совпадающий с дираковской ψ-функцией. Дираковское уравнение для ψ-функции и значение спина $^1/_2$ однозначно связаны друг с другом.

Аналогия с поляризацией сохраняется также для электронов. Например, в пучке электронов после отражения спины будут ориентированы преимущественно в одном направлении. Экспериментальное доказательство поляризации электронов, в результате двойного отражения, повидимому, удалось Шеллу (теоретические подсчёты дали Мотт, а также Соколов).

Частицы спина 1 описываются векторными функциями с четырьмя компонентами и подчиняются уравнениям Прока, или, при исчезающей массе, уравнениям Максвелла. При этом, ввиду выполнения условия Лоренца, остаётся всего три независимых компоненты. Значение спина $s=1$ непосредственно соответствует двум возможностям поляризации фотона или электромагнитной волны, так же как и векторного мезотрона.

Кроме уравнения Прока, частицы спина 1 могут описываться дуальным к нему и совпадающим с ним в отсутствии взаимодействий псевдовекторным уравнением. Частицы же исчезающего спина описываются либо скалярным уравнением де Бройля, либо дуальным к нему, и совпадающим с ним в отсутствии взаимодействий, псевдоскалярным уравнением. Вообще говоря, число независимых компонент ψ-функции связано со значением спина s формулой: $n = 2s + 1$. Например, при $n = 1$ (ψ—скаляр) $s = 0$; при $n = 2$ (ψ—спинор) $s = \frac{1}{2}$; при $n = 3$ (ψ—вектор) $s = 1$; при $n = 5$ (ψ—симметричный тензор 2-го ранга) $s = 2$.

Частицы спина 2, описываемые тензором 2-го ранга, при исчезающей массе подчиняются уравнениям Эйнштейна слабого гравитационного поля. Теория частиц высшего спина ($s > 2$) сталкивается с рядом трудностей и далеко ещё не закончена (Паули и Фирц, де-Бройль, Баба).

4. Уравнения релятивистской квантовой механики

Перейдём к основным уравнениям релятивистской квантовой механики. Весьма существенно, что при 1) заданных трансформационных свойствах ψ-функций, 2) ограничении низшими производными, а также 3) ограничении линейностью, уравнения получаются однозначно (для малых спинов $s \leqslant 2$). Проще всего получить их из вариационного принципа, если известна лагранжева функция. Можно также непосредственно конструировать соответствующий оператор, исходя из классических соотношений между энергией и импульсом, либо из геометрических соображений, либо, наконец, из матричной формулировки.

а) Прежде всего напомним основное уравнение Шредингера нерелятивистской квантовой механики. Его можно рассматривать, как обычное соотношение между полной, кинетической и потенциальной энергией, в котором, однако, величинам импульсов и энергий придан символический смысл операторов дифференцирования. Именно, вместо известной формулы нерелятивистской механики:

$$E - p^2/2m = 0;$$

заменяя:

$$E = -h/2\pi i \frac{\partial}{\partial t}, \quad p_x = \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x} \text{ и т. д.} \tag{S}$$

и применяя весь оператор к функции ψ, получим уравнение Шредингера

$$S\psi \equiv -h/2\pi i \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{h^2}{8\pi^2 m} \Delta\psi = 0.$$

$\left(\text{Оператор Лапласа } \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.\right)$

Легко проверить, что: $(pq - qp)\psi = \frac{h}{2\pi i}\psi$, т. е. операторы импульсов и координат связаны «правилами перестановки»:

$$p_s q_s - q_s p_s = \frac{h}{2\pi i} \quad (q_s = x, \ y, \ z).$$

На основании уравнения Шредингера или правил перестановки можно вывести важное «соотношение неопределённости» Гейзенберга: $\Delta p_s \Delta q_s \sim h$, согласно которому произведение неточностей в координате и канонически сопряжённом импульсе не может быть меньше кванта действия.

б) Уравнение де-Бройля, описывающее бесспиновую частицу при помощи скалярной ψ-функции (комплексной в случае заряженных и действительной в случае нейтральных частиц), можно получить, исходя из простейшего инварианта: квадрата четырёхмерного градиента, дополненного инвариантным членом с массой покоя:

$$B\psi \equiv (\Box - \varkappa_0^2)\psi = 0, \qquad \text{(B)}$$

$$\Box = \Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \sum \nabla_\alpha^2, \qquad \varkappa_0 = \frac{2\pi mc}{h}.$$

$$\left(\nabla_x = \frac{\partial}{\partial x} \ \text{и т. д.}\right)$$

С другой стороны, можно взять за основу геометрический инвариант: бесконечно малый интервал в четырёхмерном мире

$$ds^2 = c^2\,dt^2 - dr^2;$$

деля его на квадрат элемента собственного времени $d\tau$, получим:

$$\frac{ds^2}{d\tau^2} = c^2 = \frac{c^2\,dt^2}{d\tau^2} - \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2.$$

Подставляя вместо скоростей импульсы $p = mv = m\frac{dr}{d\tau}$ и замечая, что $d\tau = dt\sqrt{1 - v^2/c^2}$, $E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$, получим известную релятивистскую формулу, выражающую связь энергии и импульса $\frac{E}{c^2} = p^2 + m^2c^2$. Для перехода к квантовой механике нужно опять-таки заменить энергию и импульс на операторы:

$$E \longrightarrow -\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial t}; \quad p_x = \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x} \ \text{и т. д.}$$

Тогда снова получим уравнение де-Бройля.

Как заметили Дуффин и Кеммер, скалярное уравнение можно записать сперва в виде системы 5 уравнений:

$$\varkappa_0\chi_\alpha = \frac{\partial\psi}{\partial x_\alpha} \quad (\alpha = 1, \ 2, \ 3, \ 4); \quad \frac{\partial\chi_\alpha}{\partial x_\alpha} = \varkappa_0\psi.$$

Затем эту систему можно представить в виде одного матричного уравнения: $\left(\beta_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} + i\varkappa_0\right)\phi = 0$, где

$$\varkappa_0 = i\frac{2\pi mc}{h};$$

ϕ — матрица-столбец с 5 компонентами, $\phi = \begin{vmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \\ \chi_3 \\ \chi_4 \\ \varkappa_0\phi \end{vmatrix}$,

а β_ν являются определёнными матрицами 5-го ранга. Эта форма записи скалярного уравнения весьма интересна для сравнения с уравнениями векторным (проковским) и спинорным (дираковским).

Дуальная теория, в которой за основу взят псевдоскаляр, в пустоте или в случае взаимодействия с электромагнитным полем совпадает с теорией скалярного уравнения де-Бройля, но в случае взаимодействия со спинорными внешними полями, например, нуклеонов или электронов, довольно существенно от неё отличается. Заменяя скаляр ϕ на величину $\phi_{\alpha\beta\gamma\delta}$, антисимметричную по всем значкам, а вектор χ_α на псевдовектор $\chi_{\alpha\beta\gamma}$, также антисимметричный по всем значкам, получим:

$$\chi_{\beta\gamma\delta} = \frac{\partial\phi_{\alpha\beta\gamma\delta}}{\partial x_\alpha}; \quad \frac{\partial\chi_{\beta\gamma\delta}}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial\chi_{\gamma\delta\alpha}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial\chi_{\delta\alpha\beta}}{\partial x_\gamma} - \frac{\partial\chi_{\alpha\beta\gamma}}{\partial x_\delta} = i\chi_0^2\phi_{\alpha\beta\gamma\delta}. \qquad \text{(C)}$$

То или другое из этих уравнений, (B) либо (C), может быть применено для описания мезотронов, если окажется, что их спин равен 0. По ряду соображений, связанных с теорией ядерных сил, для этого наиболее пригодным оказывается именно псевдоскалярное уравнение (C), способное описать спиновый и нецентральный характер сил между нуклеонами. Простейший вариант теории получается для нейтретто, когда вещественные величины поля имеют непосредственный классический аналог «волн» (эту «классическую мезодинамику» мы имеем в виду в дальнейшем, если не будет особых оговорок).

Чтобы учесть порождение скалярного, возможно, мезотронного поля частицами, обладающими (мезотронными) квазизарядами, т. е. нуклеонами с зарядом g или лёгкими частицами с зарядом g', следует добавить справа в (B) в качестве неоднородности члены $4\pi g\rho$ или $4\pi g'\rho'$, где ρ и ρ' — инвариантные функции плотности распределения нуклеонов и лёгких частиц вида: $\rho = \psi^*\rho_3\psi$ (где ψ—дираковская функция нуклеонов, или, соответственно, лёгких частиц; ρ_3 — скалярная матрица), т. е. вместо (B) написать: $B\phi = 4\pi g\rho$.

Тогда в статическом случае уравнение де-Бройля приобретёт вид выражения, обобщающего уравнение Лапласа-Пуассона:

$$(\Delta - \varkappa_0^2)\,\phi = -4\pi g\rho \quad (\rho_3 \rightarrow 1 \text{ при } v \rightarrow 0).$$

Решение этого уравнения (или «потенциал» мезотронного поля, порождённого точечным нуклеоном) равно: $\psi = -\frac{ge^{-\varkappa_0 r}}{r}$.

Для точечной частицы плотность ρ равна дираковской δ-функции. Аналогично учитываются источники псевдоскалярного поля в уравнении (C).

в) Уравнение Дирака. По мнению Дирака, ряд недостатков теории де-бройлевского уравнения (например, ошибочность формулы тонкой структуры, получающейся при описании электрона в атоме водорода де-бройлевским уравнением) был связан с наличием в нём второй производной по времени и индефинитностью выражения плотности вероятности. Поэтому Дирак решил «линеаризировать» оператор де-Бройля, или, так сказать, извлечь из него символически «квадратный корень», взяв за основу внешне дефинитное выражение плотности вероятности: $\rho = \sum_\nu \psi_\nu^* \psi_\nu$, сходное с нерелятивистским, но связанное теперь не с одной ψ-функцией, а с 4 компонентами ψ_ν ($\nu = 1, 2, 3, 4$). В дальнейшем выяснилось, что критика Дирака была односторонней, так как де-бройлевское уравнение с формальной стороны безукоризненно в рамках существующей релятивистской квантовой механики, но в самом деле неприменимо к электрону и другим частицам спина 1/2, поскольку оно описывает лишь частицы спина 0. Неудивительно поэтому, что теория тонкой структуры в атоме водорода или описание спиновых явлений при помощи де-бройлевского уравнения оказались неудачными.

Как бы то ни было, аргумент Дирака помог ему установить впервые уравнение частиц спина 1/2 в следующем матричном виде:

$$D\psi \equiv \left(-\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial t} + c\rho_1(\sigma p) + \rho_3 mc^2\right)\psi = 0; \qquad \text{(D)}$$

здесь ρ_1, ρ_3, $\sigma = \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ являются определёнными матрицами четвёртого ранга, а волновая комплексная функция ψ состоит из четырёх компонент, образующих биспинор (для краткости часто говорят просто спинор), который удобно записать в виде матрицы-столбца $\psi = \begin{vmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{vmatrix}$. Конечно, уравнение Дирака можно переписать в виде системы четырёх обычных нематричных уравнений, связывающих компоненты ψ_ν между собой.

Заметим две основные формулы. 1) квадраты всех матриц равны 1, т. е. $\rho_1^2 = \rho_2^2 = \rho_3^2 = \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = 1$; 2) матрицы данного типа антикоммутируют между собой:

$$\rho_1\rho_3 + \rho_3\rho_1 = 0; \quad \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_1 = 0;$$
$$\rho_3\rho_1 = i\rho_2; \quad \sigma_1\sigma_2 = i\sigma_3.$$

и т. д.

Отметим, что, как было нами показано, уравнение Дирака можно получить также, исходя из геометрического инварианта: $ds = \gamma_\alpha dx_\alpha$ новой матричной метрики аналогично выводу де-бройлевского уравнения из ds^2.

При помощи ψ_ν можно составить компоненты четырёхмерного вектора по следующему правилу:

$$j_s = \psi^* \rho_1 \sigma \psi \qquad (s = 1,\ 2,\ 3); \qquad j_4 = \psi^* \psi,$$

т. е., например,

$$j_4 = \overset{*}{\psi_1} \psi_1 + \overset{*}{\psi_2} \psi_2 + \overset{*}{\psi_3} \psi_3 + \overset{*}{\psi_4} \psi_4.$$

Кроме того, аналогичным образом можно построить величины других четырёх типов: скаляр, ρ_3; антисимметричный тензор второго ранга: $\sigma_{\mu\gamma} = \rho_3 \sigma_3$; $\rho_2 \sigma_s$; псевдовектор σ_s; ρ_2; псевдоскаляр ρ_1 — всего 16 величин пяти типов. Замечательным образом почти всем из 16 величин можно сопоставить непосредственный физический смысл. Например, матрицы $\rho_1 \sigma_s$ характеризуют вектор скорости дираковской частицы: $\mathbf{v}_s = c(\rho_1 \sigma_s)$. Это сопоставление следует понимать в том смысле, что среднее значение скорости в каком-либо состоянии, описываемом данными ψ, равняется

$$\mathbf{v}_s = \int \psi^* \rho_1 \sigma_s \psi \, d\tau.$$

Скаляр соответствует собственной массе:

$$\overline{m} = m \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\ \rho_3;$$

тензор описывает магнитный момент $\overline{\mu}_s = \frac{eh}{4\pi mc} \rho_3 \sigma_s$, а также электрический момент и т. д.; три компоненты псевдовектора дают спин $\overline{s}_r = \frac{1}{2} \frac{h}{2\pi} \sigma_r$.

Уравнение Дирака в общей теории относительности имеет следующий вид (Фок и Иваненко): $\left(\sum^4 \gamma_\alpha \nabla_\alpha + \varkappa_0\right) \psi = 0$, где γ_α являются теперь функциями всех четырёх координат, а ковариантная производная от спинора равняется: $\nabla_\alpha = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} + \Gamma_\alpha - ia\varphi_\alpha$ ($a = \text{const.}$).

Эта формула позволяет учесть влияние гравитационного поля на электрон или другую частицу спина $\frac{1}{2}$, а также записать уравнение Дирака в криволинейных координатах. Здесь Γ_α — коэффициент параллельного переноса спинора, аналогичный символу Кристоффеля в случае тензоров, который учитывает воздействие гравитационного поля. Член с φ_α, возникающий совершенно естественно (причём даже в эвклидовом плоском мире, свободном от тяготения), может быть отождествлён с потенциалом электромагнитного поля

$$\frac{2\pi ie}{hc}\,\varphi_\alpha \quad \left(a=\frac{2\pi e}{hc}\right).$$

Заметим, что, подставляя в оператор D вместо ρ_3 величину $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$, вместо $c\rho_1\sigma_s$ скорость v_s и заменяя импульсы через скорости $p=\frac{mv}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$, получим известную неквантовую релятивистскую формулу для энергии $E=\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$. Таким образом, уравнение Дирака, так же как де-бройлевское, представляет собою своеобразно выраженную связь энергии и импульса согласно обычной неквантовой формуле (Брейт).

г) Уравнения Прока для векторной комплексной (в случае заряженных частиц) Ф-функции, описывающей частицы спина 1 (весьма возможно, мезотроны), компоненты которой мы обозначим через $\Phi_\nu = \Phi_0,\ \Phi_1,\ \Phi_2,\ \Phi_3$, имеют при наличии источников вид:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t}-\operatorname{rot}\mathbf{G}-\varkappa_0^2\Phi=-\frac{4\pi g\rho\mathbf{v}}{c};\qquad \operatorname{div}\mathbf{F}+\varkappa_0^2\Phi_0=-4\pi g\rho;$$

$$\mathbf{F}+\nabla\Phi_0+\frac{1}{c}\frac{\partial\Phi}{\partial t}=4\pi f\mathbf{T};\qquad \mathbf{G}-\operatorname{rot}\Phi=4\pi f\mathbf{S}. \qquad (P)$$

В случае нейтральных частиц все величины поля Φ, $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}$ вещественны.

Первоначально Прока ошибочно предназначал свои уравнения для электрона. Но, как было показано нами совместно с Дурандиным, они приводят к статистике Бозе и не могут быть поэтому пригодны для фермиевских электронов. С другой стороны, проковские уравнения вполне пригодны для описания мезотронов спина 1. При массе частицы, равной 0, уравнения Прока в случае вещественных функций переходят в максвелловские, описывающие электромагнитное поле. При этом, конечно, источники векторного мезотронного поля, описываемые членами в правых частях, следует заменить источниками поля электромагнитного.

Укажем два основных свойства уравнений Прока. Компоненты Ф-функций или «потенциалов» удовлетворяют в пустоте уравнению Лоренца

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\Phi_0}{\partial t}+\operatorname{div}\Phi=0.$$

Каждая компонента проковского потенциала Φ, а также квазиэлектрического ($\mathbf{F}$) и квазимагнитного ($\mathbf{G}$) поля в пустоте удовлетворяе уравнению де-Бройля

$$B\Phi=B\mathbf{F}=B\mathbf{G}=0.$$

При наличии частиц, порождающих поле, в правых частях уравнений Прока добавляются члены, описывающие распределение плотностей $g\rho$ квазиэлектрических мезотронных зарядов и токов $\frac{g\rho v}{c}$ нуклеонов (или лёгких частиц $g'\rho'$), а также квазимагнитных $f\mathbf{S}$ или квазиэлектрических $f\mathbf{T}$ дипольных мезотронных моментов нуклеонов (и лёгких частиц) абсолютной величины f ($f \sim \frac{g}{\varkappa_0}$):

$$\rho = \psi^* \psi; \qquad \rho v_s = \psi^* \rho_1 \sigma_s \psi;$$
$$\mathbf{S} = \psi^* \rho_3 \sigma \psi; \qquad \mathbf{T} = \psi^* \rho_2 \sigma \psi.$$

В статическом случае для квазиэлектрического потенциала теории Прока получаем уравнение, которое мы уже имели в статическом случае уравнения де-Бройля:

$$(\Delta - \varkappa_0^2)\, \Phi_0 = -4\pi g\rho,$$

с прежним решением для точечного нуклеона: $\Phi_0 = \frac{ge^{-\varkappa_0 r}}{r}$.

Для векторной части потенциала мезотронного поля, порождённого точечным нуклеоном, аналогично получим в статическом случае

$$\Phi = -f \operatorname{rot}\left(\sigma \frac{e^{-\varkappa_0 r}}{r}\right).$$

Отсюда легко получить выражения квазиэлектрического $\mathbf{F}$ и квазимагнитного $\mathbf{G}$ мезотронных полей.

д) Уравнения Максвелла-Лоренца электромагнитного поля при наличии зарядов, токов и магнитных моментов у частиц, порождающих поле, непосредственно получаются из уравнений Прока, если положить массу мезотрона равной нулю:

$$\varkappa_0 = \frac{2\pi\mu c}{h} = 0,$$

и имеют вид:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \operatorname{rot}\mathbf{H} = -4\frac{\pi e\rho \mathbf{v}}{c}; \quad \operatorname{div}\mathbf{E} = -4\pi e\rho;$$
$$\mathbf{E} + \nabla A_0 + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = 4\pi\mu\mathbf{N}; \quad \mathbf{H} - \operatorname{rot} A = 4\pi\mu\mathbf{M}, \qquad (\mathrm{M})$$

где $e\rho$ — плотность зарядов и $e\rho\mathbf{v}$ — плотность токов, $\mu\mathbf{M}$ и $\mu\mathbf{N}$ — плотности врождённых некинематических магнитных и электрических диполей, абсолютной величины μ (например, у нуклеонов); A_0 — скалярный, $\mathbf{A}$ — векторный потенциал; $\mathbf{E}$ — электрическое, $\mathbf{H}$ — магнитное поле (все эти величины вещественны ввиду нейтральности поля). В статическом случае, при наличии зарядов, уравнения Максвелла переходят в уравнение Лапласа-Пуассона $\Delta\varphi = -4\pi e\rho$, которое для точечного заряда даёт известное решение: $\varphi = e/r$. Заметим, что с точки зрения квантовой механики уравнения Максвелла выполняются для средних значений поля. С другой стороны, они являются операторными уравнениями для волновых функций фотонов.

Совершенно аналогично уравнениям Дирака и де-Бройля, уравнения Прока можно записать в виде одного матричного уравнения:

$$\left(\sum_{1}^{4} \beta_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} + \varkappa_0\right) \Phi = 0,$$

где матрица-столбец Φ содержит десять компонент

$$\Phi = \begin{vmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \\ H_x \\ H_y \\ H_z \\ \varkappa_0 A_x \\ \varkappa_0 A_y \\ \varkappa_0 A_z \\ \varkappa_0 \varphi \end{vmatrix}, \qquad \varkappa_0 = \frac{2\pi mc}{h},$$

и матрицы десятого ранга β_ν подчиняются определённым соотношениям. Весьма интересно, что матрицы β_ν уравнений Прока и матрицы β_ν уравнений де-Бройля подчиняются в точности одним и тем же соотношениям, кстати сказать, существенно отличным от формул для дираковских матриц. Например, имеем $\beta_\nu^3 = \beta_\nu$, так что собственные значения β_ν равны ± 1, 0 вместо собственных значений ± 1, в случае Дирака и т. д.

е) Частицы спина 1 могут описываться не только векторной проковской функцией Φ_ν, или, при исчезающей массе, максвелловскими потенциалами $A_\nu = A_0$, A_s, но также псевдовекторной волновой функцией. В пустоте получим следующие уравнения псевдовекторной теории, дуальной к векторной, проковской:

$$\frac{\partial \Phi_{\beta\gamma\delta}}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial \Phi_{\gamma\delta\alpha}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial \Phi_{\delta\alpha\beta}}{\partial x_\gamma} - \frac{\partial \Phi_{\alpha\beta\gamma}}{\partial x_\delta} = 0;$$

$$F_{\alpha\beta} = \frac{1}{\varkappa_0} \frac{\partial \Phi_{\alpha\beta\gamma}}{\partial x_\gamma};$$

$$\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma} + \frac{\partial F_{\beta\gamma}}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial F_{\gamma\alpha}}{\partial x} - \varkappa_0 \Phi_{\gamma\alpha\beta} = 0; \qquad \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha} = 0. \tag{V}$$

При массе частицы, равной нулю, т. е. $\varkappa_0 = 0$, получим теорию, дуальную к максвелловской, способную описать не фотоны, но, так сказать, псевдофотоны. В пустоте уравнения псевдовекторной и векторной теории совпадают, но взаимодействия псевдовекторных и векторных частиц с другими, спинорными, частицами довольно существенно отличаются. Нетрудно добавить справа в (V) члены, описывающие порождение псевдовекторного поля другими частицами.

Если проковские уравнения, по всей вероятности, описывают хотя бы часть мезотронов, а максвелловские уравнения являются, с одной стороны, операторными уравнениями для волновых функций фотонов и вместе с тем выполняются для средних значений поля, то до сих пор неизвестны частицы или поля, которые описывались бы псевдовекторными уравнениями. В этом отношении, как и в ряде других пунктов, общая формальная схема современной релятивистской квантовой механики представляет больше возможностей, чем требуется известными экспериментами, иначе говоря, оказывается шире известной системы элементарных частиц.

ж) Уравнения Эйнштейна. Связь геометрии с веществом описывается уравнениями Эйнштейна: $R_{\alpha\beta}-\frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R=-\varkappa_{\epsilon}T_{\alpha\beta}$, которые во многих отношениях аналогичны уравнению ньютоновой теории тяготения, а также уравнениям Максвелла-Лоренца электромагнитного поля или новейшим уравнениям мезотронного поля. Действительно, справа стоит член, характеризующий распределение и движение вещества (тензор плотности энергии-импульса $T_{\alpha\beta}$), порождающего гравитационное поле.

В левой части уравнений Эйнштейна стоят гравитационные потенциалы (т. е. компоненты метрического тензора) $g_{\mu\nu}$ и их производные по координатам и времени (включены символически в сложные члены $R_{\alpha\beta}$ и R — тензор и скаляр Эйнштейна).

В отличие от электродинамики и мезодинамики, где поля могли порождаться лишь частицами, обладающими электрическими зарядами, магнитными моментами или мезотронными зарядами и моментами, гравитационное поле порождается всеми видами вещества. Существенно, что уравнения Эйнштейна, в отличие от обычных уравнений электро- и мезодинамики, являются нелинейными относительно (первых) производных от $g_{\mu\nu}$. С этим обстоятельством связана возможность вывести уравнение движения масс, порождающих гравитационное поле, из уравнений поля, что и было проделано впервые Эйнштейном, Гофманом и Инфельдом, а также Фоком.

В нерелятивистском ньютоновом приближении малых скоростей и слабого поля справа остаётся главный член тензора $4\pi\varkappa m\rho$, а сложный оператор Эйнштейна слева превращается в оператор Лапласа Δ, действующий на ньютонов потенциал φ, являющийся малым добавком к постоянному значению $g_{44}=1$.

В этом случае, следовательно, получается уравнение классической теории тяготения: $\Delta\varphi=-4\pi\varkappa m\rho$ (где ρ — плотность распределения массы). Для потенциала поля, порождённого точечной массой, получим известное центрально-симметричное решение:

$$\varphi=\frac{\varkappa m}{r}.$$

Отсюда, подставляя φ в выражение энергии взаимодействия частицы массы M с полем тяготения: $u = -M\varphi$, получим фундаментальный закон Ньютона для энергии взаимодействия двух масс

$$V = \frac{-\varkappa m M}{r}\left(\text{сила}\quad F = -\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{\varkappa m M}{r^2}\right).$$

В общем случае наиболее важное центрально-симметричное решение уравнений Эйнштейна, данное Шварцшильдом, имеет вид (см. § 10):

$$ds^2 = \gamma c^2 dt^2 - \frac{1}{\gamma} dr^2 - r^2 d\Omega^2, \qquad \gamma = 1 - \frac{2\varkappa m}{c^2 r};$$

отсюда непосредственно находятся значения $g_{\mu\nu}$, т. е. потенциалов тяготения, характеризующих искривление метрики частицей массы m.

Для точечной электрически заряженной частицы гравитационное поле будет несколько иным. Как показали Нордстрем и Джеффри, решение в этом случае гласит:

$$ds^2 = \gamma_1 c^2 dt^2 - \frac{1}{\gamma} dr^2 - r^2 d\Omega^2,$$

где теперь:

$$\gamma_1 = 1 - \frac{2\varkappa m}{c^2 r} + \frac{4\pi\varkappa e^2}{c^4 r^2}.$$

Для случая частицы, обладающей мезотронным зарядом g, мезотронное поле которой описывается, например, скалярным уравнением де-Бройля, гравитационное поле будет также несколько иным. В этом случае имеем приближённо в тех же обозначениях:

$$\gamma \cong 1 - \frac{2\varkappa m}{c^2 r} + A; \qquad A = \frac{\varkappa g^2}{c^4}\,\frac{e^{-2\varkappa_0 r}}{r^2}.$$

Укажем здесь же, что для более точного описания гравитации необходимо, очевидно, перейти к квантованным уравнениям Эйнштейна (см. § 13.7).

Считая $g_{\mu\nu}$ за «координаты» поля, можно отыскать с помощью лагранжевой функции соответствующие «импульсы» и написать квантовые правила перестановки. Отсюда, в частности, вытекает заключение о невозможности одновременного измерения всех величин, характеризующих гравитационное поле: $g_{\mu\nu}$, $R_{\mu\nu}$ и т. д. (см. § 13.7).

Однако, ввиду нелинейного характера уравнений, дальше установления общих соотношений продвинуться здесь не удалось.

Гораздо интереснее рассмотреть случай квантования слабого гравитационного поля, перейдя к линейному приближению, подобно тому как было проделано в неквантовой теории Эйнштейном. Для этого заменим компоненты метрического тензора на их постоянные галилеевы (псевдоэвклидовы) значения $g^0_{\alpha\beta}$, плюс небольшие добавки, квадратами которых можно пренебречь:

$$g_{\mu\nu} = g^0_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \qquad (g^0_{44} = +1;\ g^0_{rs} = 0 \text{ при } r \neq s;\ g^0_{rs} = -1 \text{ при } r = s.$$

Тогда в пустоте для добавков получаются уравнения волнового типа.

Следовательно, гравитационные волны распространяются со скоростью света. Это заключение для поля тяготения было сделано Пуанкарэ ещё в 1905 г. Линейные уравнения гравитационных волн можно подвергнуть квантованию по общим правилам. Каждой монохроматической волне сопоставляется квант гравитационного поля или гравитон, лишённый массы покоя и обладающий спином 2. Матричная форма уравнений слабого гравитационного поля ещё не рассматривалась. Заметим, что одно время Эйнштейн придерживался мысли о необходимости пополнения гравитационных уравнений членом с так называемой комологической постоянной Λ, что даёт наиболее общий вид уравнений при условии ограничения низшими (вторыми) производными и требовании линейности во вторых производных:

$$R_{\alpha\beta}-\frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R+\Lambda g_{\alpha\beta}=\varkappa_{s}T_{\alpha\beta}.$$

Тогда, при переходе к слабым полям, вместо волнового уравнения получим уравнение де-Бройля

$$\left(\Delta-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Lambda\right)h_{\rho 0}=0.$$

Очевидно, космологическая постоянная с точки зрения теории элементарных частиц связана с массой покоя гравитона:

$$\Lambda=\varkappa_0^2=\left(\frac{2\pi mc}{h}\right)^2;\qquad m=\sqrt{\Lambda}\frac{h}{2\pi c}\sim 10^{-64}$$

(при подстановке значения $\Lambda\simeq 10^{-54}$).

В статическом случае отсюда получим для ньютоновского потенциала φ обобщённое уравнение Лапласа-Пуассона

$$(\Delta-\Lambda)\,\varphi=4\pi\varkappa m\rho,$$

с решением для точечной частицы массы m:

$$\varphi=\frac{\varkappa m}{r}e^{-\sqrt{\Lambda}\cdot r}.$$

Подобное видоизменение уравнения Пуассона и ньютонова закона было предложено ещё в XIX веке Нейманом и Зеелигером, со специальной целью добиться быстрого исчезновения гравитационных взаимодействий на больших расстояниях и тем самым обеспечить конечность потенциала, обусловленного общим распределением масс во вселенной. В случае обычного ньютонова закона при средней плотности вещества, отличной от нуля, этот потенциал оказывается бесконечным. Подобная же трудность имела место в космологии общей теории относительности без введения космологического члена Λ и в предположении статической вселенной.

Интересно заметить, что закон Неймана-Зеелигера обобщает ньютонов точно так же, как позднее Юкава обобщает кулонов потенциал.

В первоначальной статической модели Эйнштейна вселенная оказалась пространственно конечной, замкнутой, с радиусом $R=\sqrt{\frac{1}{\Lambda}}$ и общей массой $M=\frac{\pi R c^2}{2\varkappa}$. Подставляя для R значение расстояния до наиболее удалённых объектов, доступных современным астрономическим приборам $R \sim 10^{27}$ *см*, получим

$$\Lambda \sim 10^{-54}, \quad M \sim 10^{55}.$$

Однако модель Эйнштейна оказалась неустойчивой, а другая возможная статическая модель де-Ситтера, приводившая к бесконечной вселенной, допускала лишь состояние со средней плотностью вещества, равной нулю, что, конечно, неудовлетворительно.

Не стремясь к подробному изложению космологической проблемы, укажем лишь, что в настоящее время наиболее правдоподобной считается гипотеза Фридмана (к которой присоединился также Эйнштейн после резкой полемики), предложившего впервые нестатические решения уравнения общей теории относительности.

В теории Фридмана космологический член оказывается излишним, так как и без его введения удаётся получить решения, соответствующие конечной средней плотности ρ. Метрическая форма при допущении пространственной изотропности задаётся в виде

$$ds^2 = dx_4^2 - G^2 A^2 dr^2,$$

где G есть функция одного времени, и

$$A = \frac{1}{1+\frac{z}{4}r^2}.$$

При этом значения $z = +1, -1, 0$ соответствуют: замкнутому миру конечного объёма (сферический или эллиптический мир) с положительным радиусом кривизны, бесконечному миру соответствующего радиуса кривизны или, наконец, плоскому миру эвклидова типа. Подстановка значений $g_{\mu\nu}$, вытекающих из указанного вида интервала ds^2, в уравнения Эйнштейна приводит к фундаментальному соотношению

$$\frac{z}{G^2} = \frac{1}{3}\chi\rho - \delta^2, \quad \text{где } \delta = \frac{G'}{G}.$$

Постоянная Хэббла δ, выражающая быстроту расширения вселенной, имеет значение $\delta = 432$ *км/сек* на расстоянии 10^6 парсек, т. е. $\delta = 10^{-17}$ *сек*$^{-1}$. Огромный успех модели нестатической вселенной заключается в объяснении, иначе непонятного, «разбегания» туманностей, открытого Слейфером и Хэбблом и сказывающегося в видимом смещении спектральных линий к красному концу, толкуемому как эффект Допплера. Мы видим, что тип пространства зависит от соотношения между средней плотностью вещества и хэбблоковской константой δ.

Современные, не очень точные значения для ρ приводят к заключению, что

$$\frac{1}{3}\varkappa\rho < \delta^2, \text{ т. е. } z < 1.$$

Следовательно, вселённая пространственно безгранична (пространство Лобачевского).

Весьма существенно, что модель нестатической, расширяющейся вселенной приводит с необходимостью к некоему особому состоянию, соответствующему началу расширения, причём период времени, протекшего с тех пор, оказывается равным

$$\tau \sim \frac{1}{\delta} \sim 10^{27} \text{ сек.} \sim 2 \cdot 10^9 \text{ лет.}$$

Это значение, сравнимое по порядку со средним временем жизни урана, временем существования земли и с периодами различных наиболее длительных известных звёздных процессов, представляется всё же слишком незначительным. Кроме того, самое наличие особого состояния является несомненной трудностью теории. Однако, как мы уже указывали в § 12, трактовка вселенной вблизи особого состояния с помощью макроскопических релятивистских уравнений представляется недопустимой, так как здесь должны играть существенную роль квантовые явления с элементарными частицами, учёт которых несомненно позволит устранить упомянутые трудности и продвинет нас вперёд в решении трудной космологической проблемы строения известной нам части вселенной в целом.

5. Лагранжева функция

Как и в классической механике, во главу угла всей теории целесообразно поставить лагранжеву функцию L, которая должна быть инвариантом относительно всех перечисленных выше в § 13.1 групп преобразований. При ограничении низшими производными ψ-функций и линейностью уравнений, L может быть столь же однозначно сконструирована, как и сами уравнения. Из лагранжевой функции, при помощи вариационного принципа $\delta\int L\, d\tau = 0$, при условии исчезновения вариаций $\delta\psi$ на границах, получим уравнения поля в форме лагранж-эйлеровых уравнений:

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \frac{\partial L}{\partial \frac{\partial q_s}{\partial x_\alpha}} - \frac{\partial L}{\partial q_s} = 0,$$

$$q_s = \psi, \psi^*, \quad x_\alpha = x, y, z, ct; \quad d\tau = dx, dy, dz, cdt.$$

Кроме того, непосредственно из L получаются:

1) Импульсы, канонически сопряжённые с обобщёнными координатами, в качестве которых берутся компоненты ψ-функции: $p_s = \frac{\partial L}{\partial \frac{\partial q_s}{\partial t}}$.

2) При использовании инвариантности L относительно трансляций, получим канонический тензор энергии (точнее говоря, тензор плотности энергии-импульса и натяжений)

$$T_{\alpha\beta}=\frac{\partial q_s}{\partial x_\alpha}\frac{\partial L}{\partial\frac{\partial q_s}{\partial x_\beta}}-\delta_{\alpha\beta}L$$

и вместе с тем плотности энергии T_{44} и потока энергии T_{4s}.

Выражение для плотности энергии или гамильтоновой функции непосредственно обобщает известное из механики точки выражение: $H_{мех}=p_s q_s-L \quad \left(p_s=\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}\right)$. Действительно,

$$T_{44}=H=\frac{\partial q_s}{\partial t}\frac{\partial L}{\partial\frac{\partial q_s}{\partial t}}-L=\frac{\partial q_s}{\partial t}p_s-L$$

(как всегда, подразумевается суммирование по двум одинаковым значкам, в данном случае по s). Важно отметить, во-первых, что канонический тензор энергии, вообще говоря, никогда не будет симметричным, за исключением случая скалярного поля. Во-вторых, тензор $T_{\alpha\beta}$ подчиняется обобщённому закону сохранения: $\frac{T_{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha}=0$, содержащему в качестве частных случаев законы сохранения энергии и импульса поля.

3) Наряду с каноническим тензором энергии следует ввести «метрический» тензор энергии, который, согласно Гильберту, определяется вариацией лагранжевой функции, записанной в общековариантной форме по компонентам метрического тензора $g_{\mu\nu}$:

$$T'_{\alpha\beta}=\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta L\sqrt{-g}}{\delta g_{\alpha\beta}}$$

(в окончательном результате при отсутствии тяготения следует положить $g_{\alpha\beta}$ равными их постоянным псевдоэвклидовым значениям). Метрический тензор $T'_{\alpha\beta}$ будет всегда симметричным (ввиду симметрии $g_{\alpha\beta}$) и будет совпадать с каноническим $T_{\alpha\beta}$ только для скалярного поля. $T'_{\alpha\beta}$ также подчиняется закону сохранения: $\frac{\partial T'_{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha}=0$. Разница между $T_{\alpha\beta}$ и $T'_{\alpha\beta}$ обусловлена наличием спиновых свойств у поля, или, иными словами, спином частиц, не равным нулю.

4) Обобщая обычное выражение момента количества движения $M=[rp]$ при учёте инвариантности лагранжиана относительно вращений и преобразований Лоренца, получаем тензор углового момента

$$M_{\alpha\beta,\gamma}=x_\alpha T_{\beta\gamma}-x_\beta T_{\alpha\gamma} \qquad (M_{\alpha\beta,\gamma}=-M_{\beta\alpha,\gamma}),$$

который при $\gamma=4$ даёт плотность момента количества движения (или «орбитального» момента).

5) Весьма важно, что, опять-таки наиболее непосредственно при помощи лагранжиана L, можно, согласно Бельинфанте, сконструировать общее выражение для плотности спинового момента поля $S'_{\alpha\beta,\gamma}$. Тогда полный тензор углового момента

$$\Omega_{\alpha\beta,\gamma} = M_{\alpha\beta,\gamma} + S_{\alpha\beta,\gamma}$$

будет удовлетворять уравнению сохранения $\frac{\partial \Omega_{\alpha\beta,\gamma}}{\partial x_\gamma} = 0$.

6) Вариация лагранжиана по электромагнитным потенциалам приводит к выражениям плотностей электрического заряда и тока, связанных с данным полем и частицами. Далее, опять-таки проще всего при помощи лагранжиана получаются выражения плотностей мезотронного заряда и тока и других фундаментальных величин, характеризующих данное поле.

В тесной связи с формализмом теоремы Гильберта-Нетер при этом используются, как мы видели, инвариантные свойства лагранжиана и вместе с тем непосредственно получаются также законы сохранения для тех или иных величин. Получение же выражений для тензора импульса, спина, тока и т. д. из самих уравнений поля, а не из лагранжиана, представляло бы собою весьма громоздкую процедуру, лишённую внутренней последовательности.

7) Наконец, при помощи обобщённых координат и импульсов получаются канонические трёхмерные квантовые правила перестановки теории вторичного квантования (см. § 13.7):

$$[p_s, q_r] = p_s(x')\, q_r(x) - q_r(x)\, p_s(x') = \frac{h}{2\pi i}\,\delta(x - x')\,\delta_{rs}.$$

Эти формулы обобщают на систему с бесконечным числом степеней свободы (ψ-поле) обычные правила перестановки квантовой механики частиц: $p_r q_s - q_s p_r = \frac{h}{2\pi i}\,\delta_{rs}$ (x обозначает все три координаты).

Таким образом, мы убеждаемся в том, что лагранжева функция, действительно, является наиболее фундаментальной величиной, характеризующей все основные свойства данного поля.

Поясним сказанное рядом примеров. Для уравнения де-Бройля лангранжева функция, в случае нейтральных частиц, описываемых вещественными ψ-функциями, имеет вид простейшего инварианта, билинейного относительно ψ и зависящего от первых производных:

$$L_B = -\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2 - \varkappa_0^2\psi^2\right\}.$$

Действительно из вариационного принципа: $\delta\int L_B\, d\tau = 0$ получим

$$B\psi = 0.$$

Для комплексного поля

$$L_B = -\frac{\partial\psi^*}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x} - \frac{\partial\psi^*}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y} - \frac{\partial\psi^*}{\partial z}\frac{\partial\psi}{\partial z} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\frac{\partial\psi}{\partial t} - \varkappa_0^2\psi^*\psi.$$

Простейшим инвариантом, связанным с производными от ψ-функций в теории Дирака, является выражение

$$L_D = \frac{1}{2}\{\psi^*(D\psi) - (\psi D)^*\psi\},$$

в котором второй член добавлен для обеспечения симметрии относительно ψ и ψ^*. Вариация лагранжиана L_D даёт уравнения Дирака: $D\psi = 0$; $(\psi \dot{D})^* = 0$ для ψ и ψ^*. Не пытаясь дать сколько-нибудь исчерпывающее изложение результатов применения общих принципов релятивистской квантовой механики к отдельным полям, ограничимся указанием на некоторые важнейшие величины, характеризующие типичные поля: скалярное (спин 0, бозевские частицы), биспинорное дираковское (спин $\frac{1}{2}$, фермиевские частицы) и векторное проковское или максвелловское (спин 1, бозевские частицы).

Скалярное поле: тензор энергии равен

$$T_{\alpha\beta} = \frac{\partial\psi^*}{\partial x_\alpha}\frac{\partial\psi}{\partial x_\beta} + \frac{\partial\psi^*}{\partial x_\beta}\frac{\partial\psi}{\partial x_\alpha} - \delta_{\alpha\beta} L.$$

Плотность энергии:

$$W = T_{44} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\frac{\partial\psi}{\partial t} + \operatorname{grad}\psi^* \operatorname{grad}\psi + \varkappa_0^2\psi^*\psi.$$

Существенно, что W оказывается положительно дефинитной величиной (как и для других частиц целого спина или бозевского типа).

Плотность заряда: $\rho = iea\left(\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\psi - \psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)$ (где константа a при соответствующей нормировке равна $\frac{h}{2mc^2}$) оказывается индефинитной.

Плотность спина равна нулю, как и следовало ожидать, ввиду наличия всего одной компоненты поля ψ.

Биспинорное дираковское поле: плотность энергии $W = T_{44} = \frac{1}{2ic}\left(-\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{\partial\psi^*}{\partial t}\psi\right)$ является индефинитной, т. е. может принимать (как и в других случаях частиц полуцелого спина фермиевского типа) как положительные, так и отрицательные значения. С другой стороны, плотность заряда оказывается положительно дефинитной: $\rho = e\psi^*\psi = e(\psi_1^*\psi_1 + \psi_2^*\psi_2 + \psi_3^*\psi_3 + \psi_4^*\psi_4)$.

Плотность спина, как было уже указано ранее, равна

$$S' = \frac{h}{4\pi}\psi^*\sigma\psi.$$

Уравнения Прока получаются вариацией следующей лагранжевой функции, которую мы выпишем для случая вещественного поля, описывающего нейтральные частицы (возможно, нейтральные мезотроны или нейтретто)

$$L_P = \frac{F^2 - G^2}{8\pi} + \frac{\varkappa_0^2}{} (\Phi_4^2 - \Phi_s^2).$$

Электромагнитное поле характеризуется двумя инвариантами:

1) «квадрат» тензора поля $I_1 = L_M = \frac{E^2 - H^2}{8\pi}$. Если за лагранжеву функцию L_M взять этот инвариант, то, как было показано ещё Лармором, получим уравнения Максвелла.

2) «Квадрат» произведения электрического и магнитного полей или тензора электромагнитного поля на его дуальный: $I_2 = (\mathbf{EH})^2$.

Само произведение (**EH**) является псевдоскаляром, а не скаляром. Использование инварианта I_2 в качестве лагранжевой функции привело бы, очевидно, к нелинейным уравнениям и поэтому исключается в *обычной линейной теории электромагнитного поля.* I_2 играет существенную роль в нелинейном обобщении максвелловской теории.

Приведём ещё несколько характерных для вещественного проковского поля величин:

$$\text{плотность энергии:}\quad W = \frac{E^2 + H^2}{8\pi} + \chi_0^2 \frac{(\Phi_4^2 + \Phi_s^2)}{8\pi}.$$

При $\chi_0 = 0$ получим известное максвелловское выражение. Плотность спинового момента для проковского (возможно мезотронного) вещественного поля равна

$$\mathbf{S}\,[\mathbf{F}\Phi].$$

Соответственно для максвелловского поля:

$$\mathbf{S} = [\mathbf{EA}].$$

Нетрудно построить лагранжианы для псевдоскалярного, псевдовекторного и других полей и развить для них полную теорию. Уравнения Эйнштейна для гравитационного поля также получаются из соответствующего вариационного принципа $\delta \int G \sqrt{-g}\, d\tau = 0$, где g — определитель, построенный из $g_{\alpha\beta}$.

6. Теория взаимодействия

Важно подчеркнуть, что при тех же условиях, которые определяют построение самих уравнений элементарных частиц из данных ψ-функций (т. е. инвариантности относительно всех перечисленных в § 13.1 групп преобразований, ограничении низшими производными и линейности уравнений), общий вид возможного закона взаимодействия всех частиц друг с другом также оказывается однозначным. Осуществление того или иного взаимодействия в рамках дозволенных возможностей зависит лишь от наличия у частиц констант связи, т. е. зарядов и моментов. В этом пункте опять-таки релятивистская квантовая механика допускает возможности, более широкие по сравнению с наблюдаемыми, поскольку принципиально оказывается допустимым наличие у всех частиц как зарядов, так и врождённых некинематических моментов электрического и мезотронного типов, что далеко не всегда имеет место. (Например, электроны и позитроны обладают лишь кинематическими магнитными моментами и т. д.)

Инварианты теории свободной частицы строились из функций самой частицы, а в теории взаимодействия необходимо взять смешанный инвариант, составленный из волновых функций обеих взаимодействующих частиц.

Для примера рассмотрим взаимодействие протона с электромагнитным полем. Очевидно, единственный дозволенный смешанный инвариант будет иметь, наглядно говоря, вид суммы произведений: вектор скорости **v** протона, умноженный на вектор-потенциал **A** поля, плюс произведение тензора моментов протона $\sigma_{\alpha\beta}$ на тензор поля $F_{\alpha\beta}$, или:

$$L_{p\gamma} = \frac{e}{c}\sum_{\mu}(\chi^* v_\mu \chi)\cdot A_\mu + \mu_0 \sum_{\alpha,\beta}(\chi^* \sigma_{\alpha\beta}\chi)\, F_{\alpha\beta}.$$

Здесь χ — волновые функции протонов; $A_\mu = A_1,\ A_2,\ A_3,\ iA_4$ (потенциал); $F_{\sigma\beta} = H,\ iE$ (поле); $v_\mu = c\rho_1\sigma$; ic — оператор скорости протона; $\sigma_{\mu\nu} = \rho_1\sigma_s$; $-\rho_2\sigma_s$ — оператор момента протона. Для ясности указано суммирование по одинаковым индексам $\sum\limits_r$ и $\sum\limits_{\alpha\beta}$.

μ_0 есть абсолютное значение собственного врождённого, т. е. некинематического магнитного момента протона (см. § 13.4). В случае взаимодействия с электромагнитным полем позитрона или электрона в лагранжиане отсутствует второй член ($\mu_0 = 0$ для электрона); для нейтрона исчезает первый член в лагранжиане (заряд равен нулю). К тому же выражению первого члена L_0 можно притти, если в лагранжиане для свободного протона L_p включить поле по правилу замены производных: $\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \to \frac{\partial}{\partial x_\alpha} + \frac{2\pi i e}{hc} A_\alpha$. Это эквивалентно замене импульсов на обобщённые

$$p_\alpha \to p_\alpha + \frac{e}{c} A_\alpha .$$

В результате в уравнении Дирака для протона получаем добавочный член с энергией взаимодействия, описывающей воздействие электромагнитного поля на протон:

$$U = -e\alpha_s A_s + eA_4 + \mu_0\rho_3(\sigma H) - \mu_0\rho_2(\sigma E),$$

или в нерелятивистском приближении для малых скоростей:

$$U = eA_4 + \mu_0(\sigma H)$$

(для электрона или позитрона отсутствует второй член с моментом, для нейтрона отсутствует первый член с зарядом).

Здесь за σ достаточно взять двухрядные паулиевские, а не 4-рядные дираковские матрицы. Оператор энергии взаимодействия совпадает, таким образом, с известным неквантовым выражением, с той разницей, что скорость и момент заменены на дираковские операторы для протона, как частицы спина $\frac{1}{2}$.

Подчеркнём, что вариация одного и того же смешанного лагранжиана $L_{p\gamma}$ по волновым функциям протона χ приводит к дополнительным членам в уравнении «движения», т. е. уравнении Дирака, а вариация $L_{p\gamma}$ по потенциалам A_γ даёт члены с зарядом, током и магнитным моментом протонов в правых частях уравнений Максвелла, описывающие порождение электромагнитного поля протонами (или, аналогично, электронами и нейтронами).

Аналогично этому описывается взаимодействие всех заряженных недираковских частиц, например мезотронов, с электромагнитным полем. При этом воздействие электромагнитного поля на заряд снова учитывается заменой импульсов на обобщённые:

$$p_s \to p_s + \frac{e}{c} A_s; \quad E \to E - eA_4.$$

Например, в интересном случае воздействия электромагнитного (векторного!) поля на векторное же проковское мезотронное поле уравнения «движения» мезотронного поля приобретут вид (вместо (*P*) § 13.4):

$$\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{2\pi ie}{hc}A_4\right)\mathbf{F} - \left[\left(\nabla - \frac{2\pi ie}{hc}\mathbf{A}\right)\times\mathbf{G}\right] - \varkappa_0^2\,\mathbf{\Phi} = 0;$$
$$\left(\nabla - \frac{2\pi ie}{hc}\mathbf{A}\right)\mathbf{F} + \varkappa_0^2\,\Phi_4 = 0;$$
$$\mathbf{F} + \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{2\pi ie}{hc}A_4\right)\mathbf{\Phi} + \left(\nabla - \frac{2\pi ie}{hc}\mathbf{A}\right)\Phi_4 = 0;$$
$$\mathbf{G} - \left[\left(\nabla - \frac{2\pi ie}{hc}\mathbf{A}\right)\times\mathbf{\Phi}\right] = 0,$$

где знак $\times$ означает векторное произведение, $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}$ — квазиэлектрические и квазимагнитные составляющие мезотронного поля, $\Phi_\nu = \mathbf{\Phi}$, Φ_4 — его потенциал, $A_\nu = \mathbf{A}$, A_4 — потенциал электромагнитного поля.

Взаимодействие всех частиц с мезотронным полем описывается весьма близким образом. Если мезотрон описывать скалярной вещественной функцией $\psi = \Phi_0$, то смешанный лагранжиан, учитывающий взаимодействие, например, протона с мезотронами, равен: $L_{p\mu} = g\Phi_0\chi^*\rho_3\chi$ (где χ — функции протона). Отсюда в уравнении Дирака для протона, и вообще нуклеона, появится добавочный член взаимодействия:

$$U = g\Phi_0\rho_3$$

или при малых скоростях $U = g\Phi_0$.

Для лёгких частиц (электронов, позитронов, нейтрино) будем иметь лишь другую константу — g'. При взаимодействии с заряженными мезотронами, описываемыми комплексными функциями, ввиду эрмитовости энергии взаимодействия, нужно взять сумму комплексно сопряжённых величин: $\Phi + \Phi^*$. При этом следует также учесть возможно комплексный характер константы связи, или квазизаряда g, а также то обстоятельство, что при испускании или поглощении заряженного мезотрона, нуклеоны меняют знак (протон переходит в нейтрон, нейтрон в протон).

Для учёта последнего факта следует ввести соответствующие операторы перевода нуклеонных протонных функций в нейтронные и обратно, Q и Q^*. Тогда полное выражение энергии взаимодействия нуклеонов с заряженными скалярными мезотронами запишется в виде:

$$U = g\Phi_0\rho_3 Q + \text{комплексно сопряжённое выражение.}$$

Воздействие векторного вещественного мезотронного поля на нуклеоны и лёгкие частицы совершенно подобно воздействию на них поля электромагнитного. Достаточно лишь электромагнитные величины A_ν, **E**, **H** заменить на соответствующие мезотронные: Φ_ν, **F**, **G**. В случае же заряженного векторного поля ввести операторы Q и образовать эрмитово выражение, как сумму двух комплексно сопряжённых членов.

Выражение энергии взаимодействия частиц со слабым гравитационным полем $h_{\mu\nu}$ можно построить по тому же методу (см. § 10). Взаимодействие же частиц с гравитационным полем в общем случае учитывается перепиской уравнений, или соответственных лагранжианов, в общековариантной форме при помощи компонент метрического тензора $g_{\mu\nu}$, одновременно являющихся компонентами гравитационных потенциалов (см. § 10).

Нетрудно также построить по тому же методу выражение энергии взаимодействия всех частиц с псевдоскалярным и псевдовекторным полями.

Ограничимся здесь указанием на важное для теории мезотронов и ядерных сил выражение энергии взаимодействия нуклеона с псевдоскалярным (скажем наглядно, мезотронным) полем, описываемым функцией Φ:

$$U = g_1\rho_1\Phi + g_2\sigma_1 \operatorname{grad}\Phi - g_2\rho_2\frac{\partial\Phi}{\partial t},$$

где ρ_1, σ_1, ρ_2 — псевдоскалярная и псевдовекторные матрицы Дирака; g_1 и g_2 — константы связи, играющие роль квазизаряда и дипольного квазимагнитного момента.

Перечисленные типы взаимодействия относились прежде всего к воздействию на любые частицы (бозевские и фермиевские) бозевских полей, имеющих, в случае вещественности поля, классическую аналогию: электромагнитного, нейтрального мезотронного, гравитационного, иначе говоря, взаимодействию любых частиц с фотонами, нейтретто, гравитонами. При этом частицы целого спина: фотоны, мезотроны, гравитоны, могут испускаться или поглощаться по одной частице *).

Наряду с подобной связью частиц (полей) с другими полями (частицами), обусловливающей возможность испускания и поглощения квантов поля или частиц (например, испускание фотонов заряженными частицами, или пар e, ν нуклеонами и т. д.), фундаментальную роль играет взаимодействие частиц друг с другом через какое-либо поле, что и соответствует понятию «взаимодействия» в обычном наглядном смысле. Речь идёт о переносе взаимодействия электромагнитным, нейтральным мезотронным и гравитационным полями и, кроме того, полями, не имеющими классической аналогии: заряженным мезотронным полем, полем пар лёгких частиц (e_-, ν), (e_+, ν) и любыми другими мыслимыми комбинациями, например, парами (e_-, e_+), или даже возможно парами нуклеонов (p, n).

Рассмотрим, в частности, взаимодействие позитрона с протоном (или любых двух заряженных частиц) в статическом случае. Оно возникает благодаря тому, что p порождает электрическое поле, а e_+ поглощает его, и обратно. Энергия связи U позитрона с электростатическим полем равна: $U = +eA_0$. Потенциал же поля, порождённого точечным протоном, согласно уравнению Лапласа (см. §13·4) $\Delta A_0 = -4\pi e\rho$, равен $A_0 = e/r$, отсюда энергия взаимодействия двух заряженных частиц $V = -\frac{e_1 e_2}{r}$ (следовательно, сила в согласии с законом Кулона равна $F = -\frac{dV}{dr} = \frac{e_1 e_2}{r^2}$).

Квантовая механика вновь получает то же выражение путём подсчёта по теории возмущений, во втором приближении следующего двухтактного процесса: 1) позитрон или электрон и т. д. испускает квант поля (псевдофотон), 2) протон его поглощает, и обратно.

Совершенно аналогичным путём в классической, а также в точности и в квантовой механике, получается закон тяготения Ньютона, благодаря связи частиц со слабым гравитационным полем, или через перенос взаимодействия гравитонами (см. § 10).

Наибольший интерес приобрёл в последнее время подсчёт энергии взаимодействия между двумя нуклеонами, обязанной их связи с мезотронным полем в статическом случае. Подставляя в энергию взаимодействия первого нуклеона с мезотронным, в частности, скалярным вещественным полем $U = -g_1 \Phi_0$, значение потенциала поля,

*) Кроме того все частицы (например, нуклеоны) могут быть связаны с полями пар других фермиевских частиц (например, электронов и нейтрино или позитронов и нейтрино), что не имеет точной классической аналогии. В частности, энергия взаимодействия нуклеонов с полем пар лёгких частиц имеет в нерелятивистском приближении вид:

$U = g_F \psi_\nu^* \psi_e +$ комплексно сопряжённое выражение (здесь g_F — константа Ферми из теории β-распада).

порождённого вторым нуклеоном

$$\Phi_0 = \frac{g_2 e^{-\varkappa_0 r}}{r},$$

получим искомую энергию взаимодействия в виде:

$$V = \frac{-g_1 g_2}{r} e^{-\varkappa_0 r}.$$

Точно такое же выражение получается и по квантовой теории. V быстро убывает на больших расстояниях, $r \gg \frac{1}{\varkappa_0}$ и тем самым правильно передаёт коротко действующий характер ядерных сил. При переносе взаимодействия вещественным мезотронным векторным полем энергия взаимодействия двух нуклеонов, вычисленная по классической или квантовой теории, включает важные нецентральные и спиновые члены и имеет несколько громозкий вид:

$$V = \frac{g_1 g_2}{r} e^{-\varkappa_0 r} + f_1 f_2 \frac{e^{-\varkappa_0 r}}{r} \left\{ (\sigma_1, \sigma_2) \left(\varkappa_0^2 + \frac{\varkappa_0}{r} + \frac{1}{r^2} \right) - \right.$$
$$\left. - \frac{(\sigma_1, r)(\sigma_2, r)}{r^2} \left(\varkappa_0^2 + \frac{3\varkappa_0}{r} + \frac{3}{r^2} \right) \right\};$$
$$\left(f_1 \sim \frac{g_1}{\varkappa_0};\ f_2 \sim \frac{g_2}{\varkappa_0} \right).$$

На малых расстояниях главные члены $V \sim \frac{\text{const}}{r^3}$ имеют точно вид энергии взаимодействия двух магнитных диполей. При этом ввиду слишком быстрого возрастания V при $r \to 0$ стабильные орбиты в поле таких сил невозможны, что является весьма существенной трудностью теории ядерных мезотронных векторных, (а также, как можно показать, и псевдоскалярных) сил. В случае взаимодействия, переносимого заряженными мезотронами, нужно умножить U на гейзенберговский оператор обмена зарядами (или координатами и спинами) нуклеонов: $P_H = Q_1 Q_2^* + Q_1^* Q_2$ (где значки 1,2 относятся к двум нуклеонам). Аналогично вычисляется энергия взаимодействия и во всех иных случаях.

Резюмируя, можно сказать, что теория взаимодействия позволяет успешно объяснить все взаимодействия электромагнитного и гравитационного типа и, качественно, мезотронные ядерные силы, а также указывает на принципиальную возможность разнообразнейших взаимодействий новых типов всех частиц друг с другом или непосредственно, или через другие поля или частицы. Всё это является большим достижением теории. Однако, как уже указывалось выше, независимо от трудностей в теории векторных и псевдовекторных ядерных сил, теория взаимодействия во всех случаях приводит в высших приближениях к расходимостям, не имеющим физического смысла. Краткий анализ трудностей даётся в § 14.

7. Вторичное квантование и статистика

Электромагнитные волны явились обобщением геометрической оптики, так же как ψ-волны — обобщением обычной механики. Дальнейшее квантование электромагнитного поля или любого другого поля носит поэтому название «вторичного квантования».

Основная идея этого мощного метода заключается в «атомизировании» полей, т. е. в сопоставлении волнам частиц, например, электромагнитным волнам — фотонов, слабому гравитационному полю — гравитонов, дираковским ψ-волнам — электронов и позитронов и т. д., иначе говоря, в строгой формулировке корпускулярно-волнового дуализма.

В самом деле, разлагая в ряд Фурье, с циклическим условием периодичности, ψ-функцию, например, скалярного поля, получим, используя уравнение де-Бройля

$$\psi = \frac{1}{L^{3/2}} \sum \sqrt{\frac{hc}{2\pi K}} \left(a_k e^{-icKt + i(\mathbf{kr})} + b_k e^{+icKt + i(\mathbf{kr})}\right),$$

где L — длина периода, a_k и b_k — коэффициенты Фурье, из которых выделен для удобства коэффициент $\sqrt{\frac{hc}{2K}}$; $\mathbf{k} = k_x, k_y, k_z$; $k_x = \frac{2\pi n_x}{L}$ и т. д., причём n_x, n_y, n_z являются целыми числами, $K^2 = \mathbf{k}^2 + \varkappa_0^2$; суммирование ведётся по трём индексам n_x, n_y, n_z.

Подставляя это разложение ψ в выражения плотности энергии и плотности заряда и интегрируя по всему пространству, получим значение полной энергии поля W и полного заряда e' в виде:

$$W = \sum_k \varepsilon_k (a_k^* a_k + b_k b_k^*) \quad (\varepsilon_k = hcK \text{ есть энергия } k\text{-го состояния});$$

$$e' = e \sum_k (a_k^* a_k - b_k b_k^*) \quad (e - \text{элементарный заряд}).$$

Отсюда непосредственно ясно, что амплитуды волн a_k и b_k, которые ранее были совершенно произвольны, теперь должны быть ограничены условием равенства целым числам

$$a_k^* a_k = n_k; \quad b_k b_k^* = n'_k.$$

Тогда энергия поля волн будет равна сумме энергий частиц двух сортов (a и b) в различных квантовых состояниях, причём в k-ом состоянии находится n_k частиц одного сорта и n'_k частиц другого сорта. Формула для заряда показывает, что частицы двух сортов имеют противоположные заряды:

$$W = \sum_k \varepsilon_k (n_k + n'_k),$$

$$e' = e \sum_k (n_k - n'_k)$$

(при отбрасывании бесконечной константы).

Выражения для вектора Пойнтинга, тока и т. д. подтверждают сделанное сопоставление. Аналогичные результаты получаются и для всех других полей.

Отсюда ясно, что амплитуды волн a_k, b_k и, следовательно, сами ψ-волны следует понимать в обобщённом смысле, как некоторые квантовые операторы, подчиняющиеся особым «правилам перестановки», ведущим к целочисленным собственным значениям для величин n_k и n'_k. При этом возникает, естественно, вопрос об ограничении спектра n_k, n'_k в случае статистики Ферми значениями 0 и 1. Как было впервые показано в 1927 г. Дираком, построившим теорию вторичного квантования электромагнитного поля, и развито Паули и Вейскопфом, квантовавшими скалярное поле, правила перестановки

$$[a_k, a^*_{k'}]_- = a_k a^*_{k'} - a^*_{k'} a_k = \delta_{kk'}, \qquad a_r b_s = b_s a_r = 0$$
$$[b_k, b^*_k]_- = b_k b^*_{k'} - b^*_{k'} b_k = \delta_{kk'},$$

ведут к статистике Бозе, т. е.

$$a^*_k a_k = n_k = 0, 1, 2, \ldots$$
$$a_k a^*_k = n_k + 1 = 1, 2 \ldots \text{ и т. д.}$$

При этом коэффициенты Фурье замечательным образом расщепляются на амплитуду и операторную фазу, например $a^*_k = \sqrt{n_k}\, e^{-i\vartheta_k}$. Фаза ϑ_k оказывается связанной с n_k, в сущности, так же, как координата q_k связана с импульсом: $\vartheta_k = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial n_k}$; $n\vartheta - \vartheta n = i$, откуда видно, что фаза ϑ_k является оператором изменения числа частиц. В результате величины a_k оказываются операторами поглощения, а a^*_k — испускания частиц. Тем самым вторичное квантование оказывается необходимым при описании всех процессов порождения и аннигиляции частиц. Возможность вторичного квантования всех полей означает принципиальную возможность порождения и уничтожения всевозможных полей и частиц.

Как было затем показано Йорданом и Вигнером, фермиевская статистика получается при следующих правилах перестановки:

$$[a_k a^*_{k'}]_+ = a_k a^*_k + a^*_k a_k = \delta_{kk'}.$$

В случае непрерывного спектра (при соответственном разложении в интеграл Фурье) δ-символы в правилах перестановки заменяются на δ-функции Дирака: $\delta(k - k')$.

В дальнейшем Паули доказал следующие весьма важные теоремы.

А. Для всех частиц целого спина энергия поля является положительно дефинитной величиной, но заряд и ток будут индефинитными (например, для де-бройлевских или проковских мезотронов). Для частиц полуцелого спина, наоборот, энергия поля является индефинитной, заряд и ток дефинитными (например, для дираковских спинорных электронов).

B. Оказывается, что частицы целого спина, т. е. положительно дефинитной энергии могут быть проквантованы лишь согласно статистике Бозе, фермиевское же квантование алгебраически недопустимо. С другой стороны, частицы полуцелого спина допускают с алгебраической точки зрения обе статистики. Однако, если потребовать положительности энергии, то для них допустима лишь статистика Ферми. При этом заряд и ток становятся индефинитными и равными разности зарядов и токов противоположно заряженных частиц.

Например, для поля дираковских спинорных частиц имеем:

$$W = \sum E_k (a_k^* a_k - b_k b_k^*),$$

$$e' = e \sum_k (a_k^* a_k + b_k b_k^*).$$

Квантование по фермиевской статистике, учитывающей принцип Паули, даёт: $a_k^* a_k = n_k (= 0,1)$ (число частиц 1-го сорта), $b_k b_k = 1 - n_k'$ $(= 1,0)$ (число «дырок» или свободных мест в состояниях частиц 2-го сорта). Окончательно получим:

$$W = \sum \varepsilon_k (n_k + n_k')$$

$$e' = e \sum_k (n_k - n_k').$$

(отбрасывая бесконечную постоянную).

Мы видим, что теория вторичного квантования естественным и строгим образом приходит к гипотезе Дирака о необходимости введения античастиц другого знака заряда (позитронов), число коих определяется как число «дырок» в состояниях отрицательной энергии.

От квантования амплитуд Фурье можно непосредственно перейти к квантованию самих ψ-функций. Компоненты ψ-функций в различных точках и в различные моменты времени теперь будут подчиняться некоторым правилам перестановки, т. е., вообще говоря, не будут все одновременно соизмеримы. Например, для скалярного поля имеем следующие правила перестановки:

$$\psi(\mathbf{r},t)\,\psi^*(\mathbf{r}'t') - \psi^*(\mathbf{r}'t')\,\psi(\mathbf{r},t) = \frac{-i\hbar c}{2\pi} D(\mathbf{R},T),$$

где $\psi(\mathbf{r}, t)$ — значение ψ в точке с радиус-вектором $\mathbf{r}$ в момент t, $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$, $T = t - t'$. Первая функция Паули D_1, являющаяся инвариантным решением уравнения де-Бройля и существенным образом определяющая все четырёхмерные правила перестановки не только в скалярном случае, равна:

$$D_1(\mathbf{R},T)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{d\mathbf{k}}{K}e^{i(\mathbf{kR})}\sin cKT.$$

Весьма важно, что D обращается в δ-функцию Дирака, т. е. имеет особенность на световом конусе при $R=\pm cT$ и обращается в нуль вне светового конуса, но не равна нулю внутри его. Равенство нулю функции D вне светового конуса соответствует тому, что величины, находящиеся на расстояниях столь больших, что измерения их не могут помешать друг другу, всегда соизмеримы, а их операторы коммутируют (поскольку сведения об измерениях не могут распространяться со сверхсветовой скоростью). A priori можно было бы определить четырёхмерные правила перестановки через вторую функцию Паули (другое инвариантное решение уравнения де-Бройля) $D_2=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{d\mathbf{k}}{\mathbf{K}}e^{i(\mathbf{kR})}\cos cKT$, нигде не обращающуюся в нуль, но тогда мы вступили бы в конфликт с упомянутым исключением сверхсветовых скоростей. Всё же, как отметил недавно Блохинцев, требуется дополнительный анализ применимости величины D_1 при вторичном квантовании.

Наряду с квантованием амплитуд Фурье и четырёхмерным квантованием, можно построить теорию трёхмерного канонического квантования. Для этого следует либо положить в четырёхмерных правилах перестановки $t=t'$, т. е. рассматривать все величины в один и тот же момент времени, либо непосредственно написать трёхмерные соотношения коммутации (или антикоммутации) между обобщёнными «координатами», в качестве коих берутся компоненты ψ-функции, и «импульсами», канонически им сопряжёнными. Трёхмерное квантование, не играющее сейчас важной роли, было развито Гейзенбергом и Паули ещё до установления квантования четырёхмерного. Например, для скалярного поля имеем:

$$[\psi(\mathbf{r}),\psi(\mathbf{r}')]_-=0;\quad\left[\frac{\partial\psi(\mathbf{r})}{\partial t},\psi^*(\mathbf{r}')\right]_-=-ihc^2\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}').$$

Как уже подчёркивалось выше, вторичное квантование приводит к невозможности одновременного измерения всех компонент ψ-функций. В частности, нельзя одновременно точно измерить все компоненты электрического и магнитного поля, или все компоненты поля гравитационного. Интересно отметить, что учёт порождения и уничтожения пар частиц приводит к заключению, впрочем, ещё не проанализированному до конца, что в релятивистской квантовой механике даже отдельные компоненты поля (например, электрического или магнитного) не смогут быть измерены абсолютно точно. Подобные «индивидуальные ошибки» получаются также для координат, обобщая «парные» гейзенберговские ошибки для координат и импульсов, или для пар компонент поля. (Амбарцумян и Иваненко, Шредингер, Йордан и Фок, Хальперн и Джонсон.)

Такова в самых общих чертах современная релятивистская квантовая механика, являющаяся, как мы видим, весьма последовательной, стройной теорией, успешно объясняющей большое число самых фундаментальных свойств элементарных частиц (спин, статистику, способность порождаться и уничтожаться, способность взаимодействовать с другими частицами и двигаться определённым образом). Эта общая теория лежит в основе успешных подсчётов огромного числа разнообразнейших эффектов. Поэтому нет сомнений в общей правильности основных положений теории и их применимости к огромному кругу явлений. При всём том, современная релятивистская квантовая механика не является окончательной теорией элементарных частиц.

Во-первых, релятивистская квантовая механика не вполне точно соответствует системе известных частиц, частью оказываясь шире последней, частью, наоборот, оставляя не объяснёнными ряд свойств частиц *).

Во-вторых, теория пока что не в состоянии объяснить значение масс частиц и констант связи (зарядов и моментов).

В третьих, теория приводит к ряду неоднократно упоминавшихся трудностей даже в рамках сферы её применимости; главнейшие из них частью связаны друг с другом (бесконечная энергия любого поля, порождённого точечными частицами, расходимость высших приближений теории возмущений, бесконечности в теории пар и вакуума).

Перейдём в заключение к краткому анализу этих трудностей и новейших путей, предложенных для их устранения.

---

*) Говоря о необходимости вывода значений безразмерных постоянных тонкой структуры α, β, γ в будущей теории, мы подразумеваем полную неудачу всех прежних попыток в этом отношении. Наиболее смелая гипотеза Эддингтона пыталась объявить значение обратной зоммерфельдовской постоянной целым числом: $\frac{1}{\alpha}=137{,}000$ (лучшие экспериментальные данные приводят к $\frac{1}{\alpha}=137{,}02$) и связать её с некоей «перестановочной энергией» двух зарядов, используя 16 «степеней свободы», присущих дираковской частице. Тогда Эддингтон пытался расшифровать $\frac{1}{\alpha}$ как $\frac{n(n+1)}{2}+1=$ $=\frac{16\times 17}{2}+1=137$. В дальнейшем Эддингтон пытался вывести отношение масс протона и электрона из уравнения: $10\,m^2-136\,mm_0+m_0^2=0$, для которого отношение корней равно 1836,5 (sic!). (10 — число компонент метрического тензора, $m_0=\sqrt{\frac{N}{R}}$, где $N\sim 10^{79}$ — число протонов в известной части вселенной, R — её радиус кривизны $\sim 10^{27}$ *см.*)

Сугубая неубедительность этих гипотез, типичных для определённого «кэмбриджского», направления теоретической мысли, увлекающегося жонг-

§ 14. ТРУДНОСТИ ТЕОРИИ

1. Проблема собственной массы. Полевая гипотеза

Значение собственной массы или массы в состоянии покоя, без сомнения, является наиболее характерным индивидуальным признаком элементарной частицы. (В дальнейшем, для краткости, будем говорить просто масса.) Действительно, те или другие трансформационные свойства волновых функций, так же, как значения спина, могут быть присущи самым различным частицам. Электрон, позитрон, а также нуклеоны: протон и нейтрон, и, по всей вероятности, нейтрино, описываются биспинорными функциями и все обладают спином 1/2.

Электрический заряд также не является характерным для какой-либо одной частицы.

Двух же различных частиц одной и той же массы до сих пор не обнаружено. Что касается исчезающей массы покоя, то, по современным взглядам, ею обладают кроме фотонов так же гравитоны и, возможно, нейтрино.

лированием числами, особенно отчётливо явствует из невозможности включить в схему Эддингтона новые частицы: мезотроны и нейтроны.

Следует отметить, что предварительные попытки связать атомные и космологические величины предпринимались рядом других авторов. В частности, Дирак высказал мысль, что все безразмерные «большие» постоянные связаны простыми соотношениями с коэффициентами порядка 1. Возьмём, например, отношение констант α, γ, т. е. отношение электрической и гравитационной силы между двумя электронами

$$\frac{\alpha}{\gamma}=\frac{2\pi e^2}{hc}:\frac{2\pi\varkappa m^2}{hc}=\frac{e^2}{\varkappa m^2}=10^{41}$$

(это отношение не изменится существенно, если мы возьмём силу притяжения между электроном и протоном, или двумя другими элементарными частицами). С другой стороны возьмём отношение времени расширения вселенной (по гипотезе расширяющегося мира Фридмана и астрономическим данным Хэббла), равное $2\cdot 10^9$ лет, к «естественной» единице времени, за которую можно взять одно из следующих выражений:

$$\tau_1=\frac{e^2}{mc^3},\quad \tau_2=\frac{e^2}{Mc^3},\quad \tau_3=\frac{h}{mc^2},\quad \tau_4=\frac{h}{Mc^2},$$

а также очевидно

$$\tau_5=\frac{e^2}{\mu c^3};\quad \tau_6=\frac{h}{\mu c^2},\quad \tau_7=\frac{g^2}{Mc^2}\ \text{и т. д.}$$

Тогда вновь получим «большое» число, того же порядка что и $\frac{\alpha}{\gamma}$:

$$\frac{\tau}{\tau_f}\cong 7\cdot 10^{38},\quad \text{вообще}\quad \frac{\varepsilon}{\tau_\alpha}\sim 10^{38}-10^{40}.$$

Отсюда Дирак делает интересное предположение, что мировые константы, именно, в данном случае, постоянная тяготения, уменьшаются пропорционально времени. Другие «большие» константы, которые оказываются порядка 10^{78} (очевидно число частиц) должны изменяться пропорционально квадрату времени. В дальнейшем Дирак связывает свои гипотезы с «кинематической» космологией Милна.

Более лёгкие частицы испускаются и поглощаются более тяжёлыми и могут, поэтому, наиболее непосредственно переносить взаимодействие между ними. Гравитоны переносят взаимодействие между всеми частицами, фотоны — между всеми заряженными частицами, средние по массе мезотроны обусловливают, в основном, связь между нуклеонами. Более тяжёлые частицы могут, распадаясь, превращаться в более лёгкие. Поэтому масса покоя приводит к наиболее естественной классификации частиц, которая и была указана во введении. Эта классификация соответствует выбору массы (или атомного веса), в качестве основного, так сказать, «менделеевского» признака, или отвечает, если угодно, даже ещё более раннему ньютоновскому определению массы, как «меры» вещества.

При всём том до сих пор не существует никакой теории собственной массы, и нам совершенно неясно не только происхождение конкретных значений масс частиц и их отношений, но и сама природа собственной массы. Ввиду этого следует быть весьма осторожным при выборе признака классификации частиц, ибо, ввиду разнообразных превращений частиц, различия между лёгкими и тяжёлыми частицами в значительной мере стираются. В самом деле, фотоны могут превращаться в пары электрон-позитрон или в два мезотрона. Мезотроны не только испускаются нуклеонами, но, в принципе, сами могут порождать пары нуклеонов и т. д. Мезотроны могут переносить взаимодействия не только между нуклеонами, но обусловливают, пусть очень слабое, ядерное взаимодействие между лёгкими частицами *).

Подчёркивая отсутствие законченной теории, нельзя не остановиться на единственной гипотезе, пытающейся объяснить природу собственной массы и оценить её порядок. Мы имеем в виду гипотезу «полевой» массы, основная идея которой заключается в допущении, что собственная энергия частицы (или, что то же самое, при учёте постоянного коэффициента c^2, её «собственная» масса) равняется энергии поля, порождённого частицей. Рассмотрим классическую теорию электрона, для которой «полевая» гипотеза была развита впервые Дж. Дж. Томсоном, Лоренцом, Абрагамом, Пуанкаре. В статическом случае поле точечного заряда на расстоянии r равно $E=\frac{e}{r^2}$, т. е. стремится к ∞ при приближении r к 0.

Полная энергия электростатического поля, очевидно, также бесконечна.

*) Если считать не исключённым, что основным признаком частиц окажется спин и трансформационные свойства волновых функций, то нужно будет, очевидно, говорить, например, о частице спина «половина» $s=\frac{1}{2}$, которая может находиться в позитронном, протонном, нейтронном, нейтринном или электронном состоянии. С другой стороны, беря за основу массу покоя, мы можем ожидать, что частицы данного типа, например, нуклеоны, могут находиться в возбуждённых спиновых и заряженных состояниях несколько различной массы.

Действительно:

$$W = \int_0^\infty \frac{E^2\,d\tau}{8\pi} = \frac{e^2}{2}\,\frac{1}{r}\Big|_0^\infty = \infty.$$

Иначе говоря, равна ∞ энергия взаимодействия заряда с самим собою: $\frac{e^2}{r}$ ($\lim r \to 0$) или «самодействие».

Для устранения этой трудности с бесконечностью предлагается перейти от точечной частицы к шарику радиуса r_0 с зарядом, распределённым, скажем, на его поверхности. Тогда для малых r внутри шарика поле исчезает, и для полной энергии поля получим конечное выражение

$$W = \int_{r_0}^\infty \frac{E^2 d\tau}{8\pi} = \frac{e^2}{2r_0},$$

которое можем приравнять собственной энергии частицы $W = mc^2$.

Подчеркнём, что независимо от попытки объяснения массы «полевым» путём абсурдное обращение в бесконечность энергии поля, порождённого частицей, является трудностью, подлежащей устранению.

Так как, очевидно, «частям» электрона или «частям электронного заряда» и его распределению на поверхности или по всему объёму нельзя придавать никакого буквального значения, то мы допустим выполнимость указанного результата по порядку величины, т. е. положим:

$$W = \frac{e^2}{r_0} = mc^2.$$

Тем самым определяется классический электрический радиус электрона:

$$r_0 = \frac{e^2}{mc^2} = 2{,}8 \cdot 10^{-13}\,см.$$

Бесспорный успех полевой гипотезы в применении к электрону заключается в том, что полученное значение r_0 действительно соответствует каким-то эффективным «размерам» электрона, обнаруживаемым на опытах с рассеянием и столкновениями, вне всяких предположений о неточечной частице. Например, эффективное сечение для рассеяния света на точечном электроне для больших длин волн, согласно Томсону, равно $\sigma = \frac{8\pi}{3} r_0^2$.

Таким образом, следует придать серьёзное значение полученным результатам, смысл которых мы резюмируем словами: собственная энергия электрона, согласно гипотезе полевой массы, имеет в основном электромагнитную природу. Оговорка «в основном» добавлена здесь ввиду сделанного пренебрежения гравитационной и мезотронной частями энергии электрона, которые, однако, для шарика радиуса $r \sim 10^{-13}$ *см* и массы $m = 9 \cdot 10^{-28}$ *г* очень малы.

Однако на этом, в сущности, кончаются некоторые успехи гипотезы полевой массы и без того сугубо предварительной, ввиду грубого и явно недопустимого предположения о «шарике» радиуса r_0, нарушающего релятивистскую инвариантность. Причём, если даже принять вывод массы покоя, то всё равно теория не в состоянии дать правильное значение импульса электрона.

Обратимся теперь к квантовой теории, которая, как известно, вновь приводит к закону Кулона и тем самым к прежнему выражению энергии поля или «взаимодействия» заряда с самим собою. Так как в квантовой теории гипотеза электрона-шарика, конечно, совершенно недопустима, то расходимость собственной электростатической энергии точечного заряда, обязанной испусканию и поглощению фотонов самим зарядом, т. е. «самодействию», является здесь особенно серьёзной трудностью, притом независимо от всяких гипотез о природе массы. Так как электростатическая энергия обусловлена продольной частью электромагнитного поля, то её принято называть «продольной». Кроме бесконечной «продольной» энергии (или, согласно полевой гипотезе, «продольной» массы), квантовая механика приводит к бесконечной «поперечной» массе, обязанной поперечной части электромагнитного поля, связанного с электроном. Эта энергия, как оказывается, связана с флуктуациями поля (Гейтлер). Поперечная масса имеет чисто квантовый характер.

Для позитрона, заряженных мезотронов и протона можно повторить те же рассуждения. Для классического электромагнитного радиуса мезотрона получаем $r_\mu = \frac{e^2}{\mu c^2} \sim 10^{-15}$ *см*, и для классического электромагнитного радиуса протона

$$r_p = \frac{e^2}{\mu c^2} \sim 10^{-16} \text{ см}.$$

Эти значения ни в какой мере не соответствуют эмпирическим эффективным «размерам» этих частиц, проявляющимся при столкновениях, так как эффективные сечения оказываются порядка того же радиуса электрона ($r_0 \sim 10^{-13}$*см*). С другой стороны, если бы мезотрон и протон обладали «радиусами» r_0, то их полевые электромагнитные массы равнялись бы массе электрона. Поэтому, с точки зрения полевой гипотезы, следует сделать вывод, что собственные массы мезотронов и протонов, в основном, не электромагнитного происхождения.

Так как нуклеоны являются частицами, связанными в основном с мезотронным полем, благодаря своим ядерным квазизарядам g и дипольным моментам f, довольно значительной величины, то следует, естественно, допустить, что не только взаимодействие, но и «самодействие» нуклеонов имеет, главным образом, мезотронный характер.

Приведём самые предварительные соображения по этому поводу в рамках классической теории мезотронного нейтрального поля. От бесконечной энергии мезотронного поля, порождённого точечным нуклеоном, можно перейти к конечному значению, вводя «классический мезотронный радиус» нуклеонов R_0. При этом оказывается, что квазиэлектрической части поля недостаточно для объяснения массы нуклеонов, квазимагнитная же часть поля даёт, по порядку величины, выражение энергии $W \sim \frac{f^2}{R_0^3 \mu} \sim \left(\frac{g}{\varkappa_0 R_0}\right)^2 \frac{1}{R_0}$, которое можно приравнять Mc^2, где M — масса нуклеона.

Ввиду отсутствия точных значений квазизаряда, $g/\varkappa$ и массы мезотрона, оценка может иметь лишь самый грубый характер, но во всяком случае даёт разумный порядок для $R_0 \sim 10^{-13}$ *см*. Поэтому, со всей осторожностью, можно сказать, что, с точки зрения полевой гипотезы, масса нуклеона, в основном, мезотронного дипольного квазимагнитного происхождения. Что касается массы самого мезотрона, то самое большее, на что может сейчас рассчитывать здесь полевая гипотеза, это качественное сведение массы мезотронов к какому-либо полю. Если известная совокупность элементарных частиц и полей должна быть в этом отношении замкнутой (т. е. не требовать для объяснения массы μ нового поля), то остаётся пытаться объяснять массу мезотрона комбинированными полями, например, пар лёгких частиц. Было бы преждевременно обсуждать подробнее этот пункт. Заметим ещё, что, с точки зрения полевой гипотезы, нейтрино, обладающее небольшим мезотронным зарядом g', должно обладать конечной массой мезотронного характера.

В тесной связи с вопросом о мезотронной природе нуклеонов находится проблема их врождённых некинематических магнитных моментов.

Согласно гипотезе Вика (высказанной им ещё применительно к нашей модели ядерных парных β-сил), магнитный момент нейтрона обусловлен магнитным моментом мезотрона, который испускается и вновь поглощается нейтроном. Таким образом, нейтрон некоторое время находится в «диссоциированном» состоянии ($n \to p + \mu_-$), и магнитный момент системы определяется в основном отрицательным мезотроном, обладающим, ввиду малой массы, более значительным кинематическим магнитным моментом.

Аналогичное рассуждение приводит к наличию у протона врождённого положительного момента. Количественный подсчёт вновь приводит к бесконечностям, поскольку речь идёт, очевидно, о процессах типа «самодействия». Предварительные оценки при помощи введения радиуса нуклеонов дают для магнитных моментов нуклеонов правильный порядок величины и верные знаки.

Любопытно отметить, что, если мезотроны окажутся обладающими лишь кинематическими магнитными моментами, то это будет означать полное проведение программы Ампера о сведении магнетизма к действию токов, или, на квантовом языке, к эффективным кинематическим моментам, поскольку моменты нуклеонов в конце концов окажутся обязанными кинематическим моментам мезотронов*).

2. Новые гипотезы

а) Нелинейная электродинамика. Перейдём теперь к рассмотрению других способов устранения трудности с бесконечной собственной энергией и новым попыткам в теории массы. В качестве первого пункта рассмотрим нелинейные уравнения в электродинамике, введённые впервые Ми (1912 г.), допустившим, однако, ряд ошибок, и Борном (1934 г.) со специальной целью устранения бесконечной продольной собственной энергии. Следует, впрочем, подчеркнуть, что даже устранив продольную классическую часть, мы остаёмся всё же лицом к лицу с обращением в бесконечность поперечной, квантовой части собственной энергии.

Исходным пунктом нелинейной теории Борна, развитой им совместно с Инфельдом, является выбор новой специально подобранной инвариантной лагранжевой функции.

Схема Борна формально безукоризненна в смысле выполнения всех требований инвариантности, и его теория действительно приводит к конечной продольной энергии точечного электрона, но выбор комбинаций основных инвариантов совершенно произволен и поэтому лишён убедительности. Так как любая функция инвариантов есть также инвариант, то ясно, что одного условия инвариантности для построения теории недостаточно. Речь идет при этом о построении лагранжиана из обоих инвариантов электромагнитного поля: I_1 и I_2 (см. § 13.5). Желая предотвратить обращение поля в бесконечность на малых расстояниях и руководствуясь идеей о наличии какого-то максимального допустимого поля b, Борн взял первоначально за основу лагранжиан $L = \frac{b^2}{4\pi}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{E^2 - H^2}{b^2}}\right)$. При сла-

*) Обсуждая перенос взаимодействия какими-либо частицами, можно задаться обратным вопросом: какие взаимодействия и между какими частицами способны переносить данные частицы? Или, если принять гипотезу полевой массы: массы каких частиц могут быть обусловлены данными частицами? Нетривиальным остаётся при этом вопрос о переносе взаимодействий парами нуклеонов. Действительно, с точки зрения полевой гипотезы, не исключается существование неких «супра-частиц» с массами порядка нескольких масс нуклеонов, взаимодействие между которыми переносилось бы парами нуклеонов. Обсуждая эту сугубо гипотетическую возможность, не следует, однако, забывать, что эффективный радиус действия сил, переносимых нуклеонами, будет $r \sim \frac{h}{Mc} \sim 10^{-15}$ *см*, т. е. меньше величины $r_0 \sim 10^{-13}$ *см*. Если же все элементарные частицы окажутся обладающими подобными «размерами» ($\sim r_0$), то перенос взаимодействий нуклеонами и существование супра-частиц должны быть исключены.

бых полях, значительно меньших максимального $E < b$, $H < b$, разлагая в ряд, получим: $L \approx \frac{E^2 - H^2}{8\pi} = I_1$, т. е. лагранжиан обычной теории Максвелла. Таким образом, в теории Борна выполняется некоторый принцип соответствия. В общем же случае уравнения электромагнитного поля будут, очевидно, нелинейными. Например, имеем вместо $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$ даже в пустоте уравнение: $\operatorname{div} \mathbf{D} = 0$, где $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$, $\varepsilon = 1/\sqrt{1 - E^2/b^2}$.

Весьма любопытным образом полная энергия электростатического поля, порождённого точечным зарядом, оказывается конечной: $W = \frac{e^2}{r_0} \left(b = \frac{e}{r_0^2}\right)$, и её можно приравнять собственной энергии электрона mc^2.

Как нетрудно убедиться, теория Борна приводит также к правильному соотношению между импульсом и энергией. Можно сказать, что вместо выражения энергии $\frac{e^2}{r}$, Борн берёт $\frac{e^2}{\varepsilon r}$, где ε — диэлектрическая постоянная, отличная от 1 даже для вакуума в нелинейной теории. Уменьшение r компенсируется увеличением ε, так что полная энергия поля оказывается конечной.

В дальнейшем был рассмотрен более общий лагранжиан:

$$L = \frac{b^2}{4\pi}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{E^2 - r^2}{b^2} - \frac{(EH)^2}{b^4}}\right),$$

а также многие другие комбинации инвариантов I_1 и I_2, приводящие к конечной продольной энергии.

На этом, в сущности, кончаются все успехи теории Борна, в известном смысле осуществляющей программу построения чисто полевой «унитарной» теории заряда (хотя бы одного электрона). Сравнение с экспериментом не имеет смысла обсуждать, так как всё основание теории покоится на произвольном выборе лагранжиана. Вместе с тем на теории Борна и посейчас нередко удобно демонстрировать характерные нелинейные эффекты.

Проблема нелинейной электродинамики впервые приобрела реальное значение после открытия порождения и уничтожения частиц и теории позитрона Дирака. Действительно, согласно релятивистской квантовой механике, два фотона могут при столкновении друг с другом породить пару электрон-позитрон (e_-, e_+), которая, в свою очередь, может аннигилировать и дать два или более фотона. Если промежуточный процесс идёт виртуально, то мы будем иметь дело с превращением двух фотонов в два или более фотона, причём, новые фотоны могут обладать другой поляризацией, и, вообще говоря, другими частотами. Ясно, что всё это явление рассеяния света на свете носит нелинейный характер «столкновения» двух фотонов или двух электромагнитных волн, нарушающего принцип суперпозиции, выполняющийся в линейной электродинамике Максвелла, согласно которой волны проходят друг сквозь друга, не взаимодействуя. Символически рассеяние света на свете записывается в виде $\gamma+\gamma'\rightarrow(e_{-}+e_{+})\rightarrow\rightarrow\gamma''+\gamma'''$.

Итак, возможность порождения и уничтожения частиц с необходимостью приводит к нелинейным эффектам. Более того, релятивистская квантовая механика предсказывает возможность любых нелинейных процессов: поляризацию вакуума, рассеяние света на свете, отражения света от света, и т. д. Вероятность рассеяния света на свете весьма мала и, повидимому, при существующих плотностях излучения этот эффект не может быть наблюдаем, так же как и другие нелинейные эффекты, лежащие на пределе возможности наблюдения.

Можно задаться вопросом: какому изменению теории Максвелла в нелинейном смысле будет эквивалентно подобное включение эффектов, связанных с парами частиц. Символически, теория пар и вакуума Дирака плюс линейная теория Максвелла будут эквивалентны некоторой нелинейной электродинамике, характеризуемой особым лагранжианом. Так как искомый лагранжиан L при пренебрежении высшими производными есть функция инвариантов I_1 и I_2, то при не слишком высоких значениях поля его можно разложить в ряд по степеням I_1 и I_2, и написать:

$$L_{NL}=I_1+\alpha I_2+\beta I_1^2+\ldots$$

Теория пар Дирака приводит к определённым значениям коэффициентов:

$$\alpha=7\beta;\quad \beta=\frac{1}{360\pi^2}\,\frac{1}{(2\pi)^5}\,\frac{e^4h^5}{m^4c^7}.$$

Любопытно, что различные варианты теории Борна-Инфельда приводили к близким значениям этих коэффициентов.

Трудная проблема построения нелинейной электродинамики при помощи теории пар Дирака рассматривалась Вейскопфом и группой Гейзенберга лишь при некоторых ограничениях (слабые поля и слабые градиенты поля), притом при условии применения определённого «вычитательного» рецепта, требуемого для устранения ряда бесконечностей, связанных с теорией пар (или «вакуума») Дирака. Важно подчеркнуть, что нелинейная электродинамика, вытекающая из квантовой механики, сама по себе оказалась не способной устранить трудность с бесконечной продольной энергией поля или собственной массы *).

---

*) Согласно вычислениям Вейскопфа, эта бесконечность приобретает, однако, логарифмический, т. е. более слабый характер, вместо расходимости типа

$$\frac{1}{r}\rightarrow\infty$$
$$\lim r\rightarrow 0.$$

Здесь следует сделать существенное замечание: нелинейность входит в электродинамику не только благодаря виртуальному порождению пар элек-

Аналогично обстоит дело в мезодинамике, где принципиальная возможность виртуального порождения пары нуклеонов двумя мезотронами и последующего виртуального их уничтожения с испусканием двух новых мезотронов даёт типичный нелинейный эффект рассеяния мезотронов на мезотронах — нарушающий суперпозицию мезотронных ф-функций.

Символически: $\mu+\mu' \longrightarrow (N+N') \longrightarrow \mu''+\mu'''$.

Нелинейная мезодинамика, построение которой до сих пор обсуждалось лишь в виде программы, должна будет привести к таким эффектам, как поляризация нуклеонного вакуума, отражение мезотронных волн друг от друга, нелинейное рассеяние мезотронов на мезотронах, и должна будет, повидимому, обусловить также значительное ослабление взаимодействия нуклеонов на малых расстояниях, содействуя устранению дипольной трудности в теории ядерных сил.

Нелинейные теории, принципиально говоря, позволяют вывести уравнения движения частиц из уравнений поля, порождённых этими частицами, подобно тому, как это было сделано в теории гравитации.

Так как все частицы так или иначе могут при столкновениях виртуально порождать пары различных других частиц, которые после виртуального уничтожения могут вновь превращаться в пары частиц первоначального типа, то отсюда следует заключить об универсальной нелинейности всей квантовой кинематики, в том числе уравнений полей электронов, позитронов, нуклеонов. Было бы преждевременно обсуждать здесь эти новые сложные проблемы. Укажем лишь, что для нелинейных уравнений поля теряет смысл разложение на отдельные компоненты типа ряда Фурье и тем самым теряет непосредственный наглядный смысл вторичное квантование, заключающееся в сопоставлении амплитудам Фурье чисел частиц. Таким образом, повидимому, самое понятие частиц приобретёт иной смысл в нелинейной теории.

b) Высшие производные. В последнее время обсуждался вопрос о возможном обобщении уравнений полей элементарных частиц путём введения высших производных. Простейшим образцом подобной теории является схема Боппа и Подольского. Вводя высшие производные от поля в уравнения Максвелла, мы получим формально безукоризненную инвариантную теорию, переходящую при медленно меняющихся полях в обычную электродинамику. В частности, в статическом случае, вместо уравнения Лапласа, получим уравнение 4-го порядка: $\Delta(\Delta-\varkappa_0^2)\varphi=4\pi e_1\rho$, которое для точечного заряда, порождающего поле, имеет решение: $\varphi=\frac{e_1}{r}(1-e^{-\varkappa_0 r})$.

Энергия взаимодействия $V=e_2\varphi$ двух зарядов, обусловленная новым

тронов и позитронов, но также через пары заряженных мезотронов. Исследование нелинейности подобного типа едва лишь начато. (См. Иваненко-Соколов-Разман.) Все возможные пары заряженных частиц должны привнести свою долю в окончательный нелинейный лагранжиан.

полем, будет комбинацией потенциалов типа кулоновского и юкавского. Энергия самодействия точечной частицы оказывается конечной, и её можно приравнять собственной энергии, т. е. можно положить $\varepsilon_0 = mc^2 = V_{(r=0)} = e^2 \varkappa_0$, следовательно, $\varkappa_0 = \frac{1}{r_0}$. Трудность, возникающая благодаря квазимагнитному члену вида r^{-3} в выражении энергии взаимодействия двух нуклеонов при переносе сил векторными или псевдоскалярными мезотронами, устраняется полностью, как было показано нами (Иваненко и Соколов). Следует отметить, что для всей теории поля с высшими производными (которая, кстати сказать, не относится к числу широко обсуждаемых гипотез) сейчас самым существенным является обоснование самой необходимости введения высших производных, а не рассмотрение отдельных конкретных вариантов. Это обоснование следует произвести с той же убедительностью, как, например, доказывается общая необходимость нелинейного обобщения. В последнее время в этом направлении первые шаги были предприняты Крамерсом, Бельинфанте и Любанским, показавшими, что уравнения с высшими производными получаются естественно в рамках общих ундорных (спин-тензорных) уравнений.

Таким образом, ввиду общей произвольности теории, ограничивающейся притом ближайшими степенями высших производных, и ряда трудностей с отрицательной энергией, эта попытка также не является окончательно убедительной и должна рассматриваться скорее лишь как самое предварительное указание на новые возможности.

с) Затухание. Следующим пунктом мы рассмотрим весьма важную, широко используемую ныне теорию затухания или обратного действия поля на частицы. Учёт обратного действия поля на испустившие его частицы является, очевидно, частью проблемы самодействия, и поэтому полное решение этой проблемы весьма сложно. Сам же по себе учёт затухания не представляет ничего гипотетического, неожиданностью явилась лишь значительная роль затухания для полей, обладающих эффективной дипольностью (например, векторные мезотроны), доказанная в последнее время (Баба, Иваненко и Соколов, Гора, Гейтлер, Вильсон). С другой стороны, как известно, для электромагнитных эффектов роль затухания весьма незначительна. Для эффективно дипольных полей, подобных векторному или псевдоскалярному мезотронному, в задачах рассеяния и порождения частиц учёт затухания весьма существенен и позволяет устранить трудности, связанные с неограниченным ростом эффективных сечений или вероятностей этих эффектов при высоких энергиях. (Например, вероятности рассеяния света на векторном мезотроне, рассеяния или порождения векторных мезотронов на нуклеонах и т. д.) К сожалению, до сих пор не удалось учесть эффект, аналогичный затуханию в статической задаче взаимодействия двух нуклеонов.

В качестве примера учёта затухания рассмотрим рассеяние мезотронов нуклеонами. Проще всего исходить из классической мезодинамики. Тогда нерелятивистское уравнение движения нуклеона массы M и квазиэлектрического заряда g в поле плоской мезотронной волны будет иметь вид:

$$M\ddot{x}=g\mathbf{F}.$$

Учитывая значения энергии мезотронного поля, излучаемой нуклеонами в 1 сек. по всем направлениям $J=\frac{2}{3vc^2}\dot{p}^2\left(1+\frac{1}{2}\frac{\varkappa_0^2}{K^2}\right)$, где v — фазовая скорость, и деля излученную энергию J на величину мезотронной энергии I, падающей за 1 сек. через $см^2$, получим искомое эффективное сечение рассеяния

$$\sigma_0=\frac{J}{I};$$

при этом I равно плотности энергии $u=\frac{1}{8\pi}\left[F^2+G^2+\varkappa_0^2(\Phi_0^2+\Phi^2)\right]$, умноженной на групповую скорость мезотронных волн

$$I=uv_g;\quad v_g=c^2/v.$$

Окончательно имеем: $\sigma_0=\frac{8\pi r_n^2}{3}\left(1+\frac{\varkappa_0^2}{2K^2}\right)$, где r_n — квазиэлектрический радиус нуклеона $r_n=\frac{g^2}{Mc^2}$. При $\varkappa_0=0$ и замене r_n на электромагнитный радиус получим известную формулу Томсона для рассеяния света на заряде. Учёт силы лучистого мезотронного трения $F_e=\frac{2}{3}\frac{g^2}{c^3}\dot{x}$ существенного изменения не вносит, и эффективное сечение приобретает вид:

$$\sigma_e=\frac{\sigma_0}{1+\left(\frac{2}{3}\frac{r_n\nu}{c}\right)^2}$$ (где ν — частота мезотронной волны).

Совершенно иное положение вещей получим для рассеяния поперечных мезотронов на квазимагнитном нуклеонном диполе (а не заряде), когда существенно сказывается эффективная дипольность мезотронного векторного поля. Беря за основу уравнения движения диполя $\dot{m}=\eta[mG]$, где η — отношение квазимагнитного момента нуклеона к механическому, и повторяя предыдущие рассуждения, получим в наиболее интересном для нас случае высоких энергий следующее эффективное сечение для рассеяния мезотронов нуклеонами

$$\sigma_m=\frac{32\pi}{3}\left(\frac{f^2}{hc}\right)^2\frac{\nu^2}{c^2\varkappa_0^2}=\text{const.}\ \nu^2.$$

Здесь величина излучения равняется $J' = \frac{2}{3}\frac{\dddot{m}^2}{c^3}$, а $f = g/\varkappa_0$ есть квазимагнитный момент нуклеона. Таким образом, эффективное сечение неограниченно растёт с частотой мезотронного поля, что физически нелепо и формально абсурдно. Теперь выступает на сцену учёт затухания. Как нетрудно показать (Баба, Иваненко), сила лучистого квазимагнитного трения равняется $F_m = \frac{2}{3}\eta\frac{\ddot{m}}{v^3}$. При больших энергиях получим при учёте лучистого трения эффективное сечение, не растущее, но даже убывающее с частотой $\sigma'_m = \frac{\sigma_m}{1 + \frac{4}{9}(f^2/hc)^2 \cdot \nu^4/c^4\varkappa_0^4}$.

Квантовый подсчёт для нейтральных мезотронов приводит в точности к тому же выражению (Соколов). Таким образом, учёт затухания устраняет трудности с ростом эффективных сечений.

При дальнейшем развитии теории затухания Гейтлер и Пенг указали предварительный, инвариантный способ отбрасывания бесконечных членов самодействия и отделения чистого эффекта затухания. Однако теория эта ещё лишена окончательной доказательной силы и не способна, например, устранить трудность с испусканием фотонов низкой частоты, указанную Блохом и Нордсиком.

d) В о з б у ж д ё н н ы е с о с т о я н и я. Впервые Гейтлер-Ма и Баба указали на гипотезу высших возбуждённых состояний нуклеонов несколько иной высшей массы, как на способ устранения трудностей с неограниченным ростом эффективных сечений. В дальнейшем Вентцель и Паули показали, что возбуждённые состояния нуклеонов получаются с необходимостью в так называемой теории «сильной связи», в которой взаимодействие нуклеонов с мезотронным полем подсчитывается не по обычной теории возмущений путём разложения по константе $\beta = \frac{2\pi g^2}{hc}$, но, напротив, существенно учитывается значительная величина β по сравнению с зоммерфельдовской константой тонкой структуры $\alpha = \frac{2\pi e^2}{hc}$, и взаимодействие принимается с самого начала большим. В дальнейшем, однако, выяснилось, что теория «сильной связи», страдавшая с самого начала пороком нерелятивистского описания неточечных нуклеонов, приводит к неверным следствиям в применении к ядерным проблемам и недавно эта теория была оставлена самими авторами. Кроме того, Гейтлер также склонился в пользу затухания, как физически обоснованного средства устранения недопустимого роста эффективных сечений. Однако самая гипотеза возбуждённых состояний нуклеонов и, очевидно, других элементарных частиц, физически довольно любопытна независимо от её недостаточного обоснования и в последнее время вновь и вновь выдвигается в различных предварительных теориях (см., например, недавнюю теорию Баба и работы Тамма-Гинзбурга). Речь идёт при этом о высших спиновых состояниях нуклеонов, о гипотетических протонах и нейтронах спина $^3/_2$, $^5/_2$ и т. д., а также, добавим мы, о мезотронах спина 1, 2 и т. д. Далее, в другом варианте гипотезы, допускаются нуклеоны (и мезотроны, добавим мы) с зарядами $+2e, +3e, -e, -2e$ и т. д., т. е., в частности, антипротоны, антипротоны с двойным отрицательным зарядом и т. д. При этом всем этим нуклеонным «изобарам» приписывается несколько большая масса с энергией возбуждёния, лежащей, согласно различным авторам, в границах от нескольких миллионов электрон-вольт вплоть до 10^8 электрон-вольт и даже до значений, равных собственной энергии нуклеонов. Излишне подчёркивать, что окончательным аргументом в пользу гипотезы возбуждённых состояний может явиться лишь экспериментальное обнаружение подобных частиц.

е) Предельный процесс. Наряду с рассмотренными выше теориями (полевой массы или теории с высшими производными), которые стремились получить конечное значение собственной массы, следует указать на иные тенденции в современной физике, характеризуемые временным отказом от понимания массы и направленные лишь на устранение трудностей, связанных с бесконечной собственной энергией поля. Наиболее интересной является теория Вентцеля-Дирака, которые искусственно вводят некоторый вектор λ, играющий, наглядно говоря, роль эффективных «размеров», или скорее «протяжённости» частицы во времени.

Вместо того чтобы вычислять силу, действующую на электрон, например, в 12 час. 00 мин. 00 сек., сила вычисляется Вентцелем как полусумма значений в момент, на некоторое небольшое значение λ_0 предшествующий 12 час. 00 мин. 00 сек., и в момент на λ_0 следующий за 12 час. 00 мин. 00 сек. В конечном результате λ_0 стремится к нулю. При этом оказывается, что электростатическая энергия, соответствующая собственной массе поля, порождённого точечным зарядом, а вместе с тем полевая собственная масса точно обращается в нуль, как в классической, так и в квантовой теории; энергия мезотронного продольного поля, порождённого покоящимся нуклеоном, хотя не обращается в нуль, но оказывается конечной и по порядку равной собственной энергии мезотрона. Таким образом, гипотеза предельного «λ-процесса» в корне расходится с гипотезой полевой массы частиц, так как последняя величина здесь просто фактически устраняется. Вопрос о природе массы не ставится, так что метод λ-процесса играет, так сказать, не творческую, но «хирургическую» роль.

Для устранения бесконечностей, вызванных поперечной частью поля, λ-процесс оказывается недостаточным, поэтому Дирак предложил допустить наличие отрицательных энергий и отрицательных вероятностей, что, как можно доказать, устраняет бесконечную поперечную массу. Мы не будем останавливаться на формализме теории Дирака, так как его гипотезы не привели пока что ни к каким конкретным результатам. Более того, как подчеркнул Паули, громоздкий и мало наглядный метод отрицательных вероятностей во всяком случае не устраняет всех бесконечностей, встречающихся в релятивистской квантовой механике.

Важно указать, что как полевая гипотеза, так и λ-предельный процесс пытаются устранять трудность бесконечной энергии поля точечного заряда, приписывая частице ту или иную «форму» (т. е. распределение заряда). Наряду с λ-предельным процессом было предложено весьма большое число других формально безукоризненных способов введения релятивистски инвариантных «форм-факторов», обрывающих безграничный рост поля на самых малых расстояниях, благодаря чему энергия становится конечной. Квантовые правила перестановки как для амплитуд волновых функций, так и для самих ψ, должны быть при этом также модифицированы. Однако все подобные предложения Марха, Ватагина, Ланде, Шерцера, Маркова не имели успеха и, как было недавно показано последним автором, по существу, ведут к дополнительным трудностям.

f) Характеристическая матрица. Новая фундаментальная программа, также широко обсуждаемая в настоящее время, выдвинута в 1942—1944 гг. Гейзенбергом. Последний предлагает во главу угла всей теории поставить не гамильтонову функцию (энергию) и волновые уравнения релятивистской квантовой механики, которые так или иначе, наряду с успехами, привели к указанным трудностям, или во всяком случае не сумели устранить трудностей с бесконечной энергией поля, порождённого точечным зарядом, и других, но некоторую характеристическую «матрицу рассеяния» S, долженствующую непосредственно трансформировать наблюдаемые падающие волны в рассеянные волны, наблюдаемые на больших расстояниях. Более точное описание процессов столкновений на самых малых расстояниях, как ненаблюдаемое, не должно иметь места в теории. Как было показано Гейзенбергом, Паули, Меллером, Штюкельбергом и Блохинцевым, в простых случаях матрица S действительно заменяет гамильтониан и позволяет решить не только задачу рассеяния, но также определить стационарные энергетические состояния. Для слабого взаимодействия, разлагая в ряд унитарную матрицу $S = e^{i\eta}$, получим $S \approx 1 + i\eta$, где η, по существу, совпадает с энергией взаимодействия. Однако для однозначного построения S в общем случае одних требований инвариантности и унитарности недостаточно, так что вся теория Гейзенберга, идущая под широкими лозунгами отказа от пространственно-временного описания явлений на малых расстояниях и изгнания ненаблюдаемых величин, пока что остаётся довольно произвольной схемой. Интересным и обещающим представляется наличие некоторых общих пунктов в теории затухания и в гипотезе характеристической матрицы.

g) «Квантовая» геометрия. Отметим, наконец, довольно распространённое убеждение в необходимости введения в теорию какой-то универсальной длины, вероятно, порядка радиуса электрона, сказывающуюся во многих теориях. Не исключено поэтому, что придётся перейти к какой-то новой «квантовой» геометрии, учитывающей известную «прерывность» пространства — времени. Обычная геометрия, возможно, окажется тогда лишь грубым усреднением этой квантовой метрики. Предварительные попытки в указанном направлении предпринимались время от времени, но пока что не привели к законченным результатам (Амбарцумян и Иваненко, Гейзенберг, Марх). Существенный шаг в том же направлении был сделан недавно Снайдером, показавшим, что требованиям лоренцовой инвариантности можно удовлетворить, вводя новые операторы координат с целочисленными значениями. Результат Снайдера эквивалентен введению криволинейной метрики в пространстве импульсов. При этом можно показать, что трудности с бесконечной энергией поля действительно, повидимому, устраняются. Независимо от дальнейшего развития теории эти результаты заставляют обратить на себя внимание.

Резюмируя, можно сказать, что в борьбе с трудностями теории ядерных сил и бесконечной собственной массы, трудностями вакуума, а также с расходимостями высших приближений, намечаются новые пути к построению более общей теории, которая и должна будет представить собою вполне последовательную, непротиворечивую релятивистскую квантовую механику элементарных частиц и полей и сможет не только устранить все указанные трудности, но и вывести значения масс и зарядов всех частиц *).

---

*) По смыслу настоящей обзорной статьи, стремящейся лишь дать по возможности доступное введение в теорию элементарных частиц, не представляется целесообразным давать точные указания на литературу. Поэтому мы отошлём читателей к обзорным журналам «Успехи физических наук» и Reviews of Modern Physics, а также к выходящим вскоре в русском переводе книгам: Вентцеля «Квантовая теория поля» и Паули «Релятивистская теория элементарных частиц» и его же «Мезонная теория ядерных сил».