

ЗАТРУДНЕНИЯ ТЕОРИИ ИЗЛУЧЕНИЯ

М. А. Марков

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

Фундаментальные трудности теории поля привлекают в последнее время всё большее и большее внимание авторитетных физиков.

В классической электродинамике эти вопросы имеют очень абстрактный интерес, так как в сущности нет экспериментальных фактов, объяснения которых можно было бы ожидать от их разрешения. Напротив, специфические, но конкретные затруднения ядерной физики и физики космических лучей оставляют (пока, во всяком случае) надежду связать их судьбу именно с решением общих задач теории поля и вообще с судьбой дальнейшего развития принципиальных основ современной теоретической физики.

Известно, что в настоящее время квантовая электродинамика, как математически строгая теория, не существует. Квантовая теория не только не даёт объяснения наличию в природе частиц с различными массами и другими свойствами, не даёт конкретных значений для собственных магнитных моментов — теория содержит расходящиеся выражения, которые тесно связаны с её математическим аппаратом. Строго говоря, основное уравнение теории — уравнение Дирака — представляет собой (при наличии поля) тривиальное соотношение.

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} = \infty, \quad (0)$$

ибо в правой части содержатся расходящиеся выражения.

В последние годы в литературе появились некоторые новые идеи, высказаны новые точки зрения на дальнейшие пути развития теоретической физики. Эти новые идеи не имеют характера законченных теоретических построений, но представляют собой ту «атмосферу исканий», в которой надо ожидать рождения настоящей теории, очень вероятно, радикально отличной от тех, которые обсуждаются в настоящее время.

Несовершенный характер этих построений делает естественным критическое отношение к ним, но чрезмерный скепсис был бы тем не менее неуместным и, пожалуй, мешающим развитию науки.

Идеи, о которых идёт речь, привлекают внимание и потому, что они связаны с именами Дирака¹, Гейзенберга², Паули³, Гейтлера⁴ и др. авторов современной квантовой физики.

В классической электродинамике трудности заложены в представлении об электроне как точечном заряде. Собственная энергия такого заряда бесконечна:

$$\frac{e^2}{r} \xrightarrow{r \rightarrow 0} \infty. \quad (1)$$

В пространстве импульсов выражение, соответствующее (1), получается в виде расходящегося интеграла:

$$e^2 \int_0^\infty dk \quad (2)$$

(k — волновое число с размерностью обратной длины).

Квантовая теория не только не решила классических трудностей точечного источника поля, но даже умножила их. Она во многих случаях приходит к расходящимся интегралам более общего вида:

$$\int_0^\infty f(k) dk \rightarrow \infty, \quad (3)$$

где $f(k)$ — как чётная, так и нечётная степень от k , а теория вакуума Дирака приводит, например, к логарифмической расходимости.

Интегралы с чётной степенью k

$$f(k) = k^{2n}, \quad n = 0, 1, 2 \quad (4)$$

в рассмотренных случаях связаны с классической трудностью точечного электрона. Это либо интеграл $\int_0^\infty dk$, связанный с собственной электростатической энергией, либо

$$\int_0^\infty k^2 dk \sim \frac{1}{r^3} \quad (5)$$

— интеграл, связанный с энергией магнитного диполя.

Интегралы с нечётной степенью k :

$$f(k) = k^{2n+1}, \quad n = 0, 1, 2 \quad (6)$$

в рассмотренных случаях носят чисто квантовый характер. Появление нечётных расходящихся интегралов связано с некоторой характерной чертой квантования поля. Именно, поле рассматривается как совокупность линейных гармонических осцилляторов, и к каждому из них, как к механической системе, применяется квантовая теория.

Квантовая теория для энергии осциллятора даёт дискретное значение:

$$W = \left(N + \frac{1}{2}\right) h\nu \quad (7)$$

(ν — характерная частота осциллятора, N — целое число).

При $N=0$ получаем

$$W = \frac{1}{2} h\nu, \quad (8)$$

т. е. каждый осциллятор обладает некоторой минимальной так называемой «нулевой энергией», которую он не излучает ни при каких обстоятельствах. Поэтому электромагнитное поле, как система осцилляторов всех частот ν , должно обладать некоторой нулевой энергией, именно суммой нулевых энергий всех осцилляторов поля. Это обстоятельство приводит к интегралу:

$$\int_0^{\infty} k^3 dk. \quad (9)$$

Интегралы этого типа (нечётной степени k) встречаются при вычислениях многих физических эффектов в высших приближениях теории возмущения, создавая тем самым неопределённость результата. Они появляются при попытках рассчитать квантово-теоретически естественную ширину спектральной линии, комптон-эффект более высокого порядка (рассеяние нескольких фотонов при одном падающем). Расходимость типа (6)

$$\int_0^{\infty} k dk \quad (9')$$

получается и для так называемой «поперечной» собственной массы электрона⁶, которая обязана своим происхождением наличию в теории тех же нулевых состояний осцилляторов поля, но появляется этот член только при наличии электрона.

Если выражение (2) получается методом теории возмущения от члена гамильтоновой функции электрона, описывающего скалярный потенциал $e\varphi$, то поперечная собственная энергия обязана своим происхождением члену $\frac{e^2 \bar{A}^2}{2m}$, где $\bar{A}$ — вектор-потенциал. В классической теории для покоящегося электрона этот член отсутствует. В квантовой области квадратичные выражения для поля исчезать не могут, так как имеются нулевые колебания осцилляторов поля.

Несмотря на различную природу расходимостей, общим для всех случаев является то обстоятельство, что если в любом из этих интегралов ограничиться в верхнем пределе каким-либо $k_{\max}$, то выражение становится сходящимся. Ограничиться каким-то $k_{\max}$ — это значит

ограничиться какой-то волной минимальной длины

$$\lambda_{\min} = \frac{1}{k_{\max}}, \quad (10)$$

т. е. ввести в теорию какое-то минимальное расстояние, которое, в частности, играло бы роль «радиуса» электрона.

Несколько лет тому назад считалось, в сущности, общепризнанным, что современная теория справедлива лишь до длин порядка «радиуса электрона» ($r \sim 10^{-13}$ см) и что область меньших длин волн — это область будущих теорий (см. доклад Дирака на Ленинградской конференции по атомному ядру 1932 г. или книгу Гейтлера «Квантовая теория излучения»).

Однако, повидимому, можно сказать, что известный прогресс физических идей последних лет заключался (а может быть, и заключается) в постепенном преодолении этой точки зрения — в расширении пределов применимости квантовой теории в её современном виде — гамильтонов метод, описание с помощью ψ -функции.

Изучение космических лучей (излучение при торможении электрона кулоновым полем ядра, рождение «пар» очень жёсткими фотонами) играло здесь очень важную роль. Во всех наблюдаемых — будем говорить для определённости, электродинамических — эффектах теория оказывается справедливой для очень больших волновых чисел, т. е. для малых длин волн.

При первых попытках разобраться в некоторых особенностях явления космических лучей (имеются в виду те из них, которые теперь с открытием частиц массой ~ 100 электронных масс — мезонов — легко объясняют, например, большую проникающую способность лучей) идеи ограниченной применимости современной теории к этим процессам не были прогрессивными, так как в «объяснении» использовалось лишь негативное утверждение «неприменимости».

Но серьёзным препятствием для расширения границ применимости современной электродинамики являются идеи электромагнитного происхождения собственной массы электрона, по крайней мере, в её классическом виде (уравнения Максвелла). Действительно, если считать, что масса электрона электромагнитного происхождения, то наблюдаемое значение собственной массы электрона однозначно выбирает значение верхнего предела интегрирования в выражении (2). Этот предел соответствует расстоянию

$$r_0 \sim \frac{e^2}{mc^2},$$

т. е. «классическому радиусу электрона», как часто называют эту комбинацию мировых постоянных.

В последнее время в преодолении этих затруднений выдвинут ряд новых идей, часто очень неожиданных и остроумных. Одна из них принадлежит Венцелю⁷ и Дираку¹. Это так называемый «предельный λ -процесс», обращающий интегралы типа (2) в нуль, чему

соответствует отказ от электромагнитного «происхождения» массы электрона. Другая идея принадлежит Боппу и Подольскому, которые получают конечное значение интеграла, также не ограничивая пределы применимости методов современной физики. Грубо говоря, последние авторы достигают этого добавлением к кулоновому полю e/r некоторого добавочного поля e^{-ar}/r , которое вычитается из первого, давая потенциал

$$\varphi = \frac{e}{r} - \frac{e^{-ar}}{r}. \quad (11)$$

При $r \rightarrow 0$ выражение (11) остаётся конечным.

С другой стороны, имеются попытки ограничить пределы квантовой теории, связывая преодоление трудностей современной физики с построением принципиально новой теории. Эта точка зрения в последнее время развивается Гейзенбергом²; она предполагает отказ в некоторой области явлений от метода Гамильтона и в некоторых пределах от волновой функции. Эта точка зрения связана с фундаментальным пересмотром основных физических понятий. Идеи эти очень привлекательны, они имеют и будут иметь много сторонников. Причина этому лежит в том, что, как учит история развития физики, принципиальные трудности старых теорий обычно преодолевались путём фундаментального изменения самих теорий, путём, в частности, критического пересмотра применимости старых понятий в новой области явлений.

Эта точка зрения легко усваивается по аналогии и стала привычна за последние десятилетия: классическая механика и специальная теория относительности, специальная теория относительности и общая теория относительности, классическая механика и квантовая теория. Но в какой мере она окажется плодотворной при решении очередных конкретных задач, стоящих перед физикой, проблема ядерных сил (скажем более узко — проблема дзйтона, β -распад), космические лучи (рождение мезонов, прохождение через атмосферу и исчезновение их), утверждать трудно.

Взято ли здесь всё от метода Гамильтона, от ϕ -функции или более скромные попытки продолжить работу над этими задачами, модернизируя несколько функцию Гамильтона и математический аппарат пространственно-временного описания вообще, заслуживает также внимания.

Начнём более подробное рассмотрение состояния вопроса с попыток ввести «критическую длину» в математический аппарат современной теории — с попыток рассматривать заряд неточечным.

§ 2. НЕТОЧЕЧНЫЙ ИСТОЧНИК ПОЛЯ

Обсуждаемые трудности теории поля исчезают при рассмотрении источника поля с распределённым по пространству зарядом. Непреодолимым возражением против такой программы оказывается требование релятивистской инвариантности уравнений движения. Можно

показать строго, что такой (т. е. протяжённый) электрон не может быть описан с помощью волновой функции, т. е. что соответствующее уравнение Дирака не имеет решений.

Релятивистски инвариантные уравнения движения современной электродинамики относятся к точечному источнику поля. Это обстоятельство математически выражается тем, что в правой части уравнения Д'Аламбера для скалярного, например, потенциала плотность заряда записывается функцией, которая всюду обращается в нуль, за исключением точки нахождения электрона, где её значение становится бесконечно большим, так называемой δ -функцией:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \nabla^2 \varphi = 4\pi e \delta(\bar{r} - \bar{r}_s). \quad (12)$$

Здесь $\bar{r}$ — любая точка пространства (координата поля), $\bar{r}_s$ — координата электрона.

Первая элементарная попытка ввести в теорию протяжённый электрон заключалась бы в замене δ -функции в правой части уравнения (12) некоторой регулярной функцией плотности $\rho(\bar{r} - \bar{r}_s)$.

Таким образом, уравнение для поля покоящегося заряда запишется:

$$\nabla^2 \varphi = -4\pi \rho(\bar{r} - \bar{r}_s). \quad (13)$$

Для иллюстрации мы могли бы выбрать функцию ρ , например, в виде:

$$\rho = \frac{e}{\pi^2} \frac{r_0}{\{r_0^2 + |\bar{r} - \bar{r}_s|^2\}^2}, \quad (14)$$

$|\bar{r} - \bar{r}_s|$ — абсолютное значение расстояния любой точки пространства от центра частицы, r_0 — константа размерности длины («радиус электрона»).

Легко видеть, что

$$\int \rho \, dv = \frac{e}{\pi^2} \int \frac{r_0}{\{r_0^2 + r^2\}^2} 4\pi r^2 dr = e.$$

Рассмотрим подробнее те возражения, которые встречает такая попытка со стороны требований релятивистской инвариантности.

Легко проверить, что выражение (14) может быть переписано в виде интеграла

$$4\pi \rho = \frac{1}{2\pi^2} \int \cos \bar{k}(\bar{r} - \bar{r}_s) e^{-r_0 k} dk_x dk_y dk_z, \quad (15)$$

где $\bar{k}$ — волновой вектор.

С другой стороны, легко видеть, что выражение (14) при стремлении r_0 к нулю представляет собой δ -функцию. При $r_0 = 0$ она всюду обращается в нуль, кроме точки $r = r_s$, где она стремится к бесконечности, как $\frac{1}{r^3}$.

Таким образом, мы легко получаем интегральное представление δ -функции, полагая в выражении (15) r_0 равным нулю:

$$\delta(\bar{r} - \bar{r}_s) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \cos \bar{k}(\bar{r} - \bar{r}_s) dk_x dk_y dk_z. \quad (16)$$

Мы видим, что выражение (15) отличается от выражения (16) наличием фактора $e^{-r_0 k}$. Назовём этот фактор «обрывающим фактором» или «форм-фактором», ибо тот или иной выбор этого фактора даёт то или иное распределение плотности заряда, ту или иную «форму» электрона. Этот форм-фактор является функцией k , быстро падающей с ростом значения волнового числа (не медленнее, чем k^{-3} , так как $dk_x dk_y dk_z$ растёт, как k^3), а в остальном фактор пока произволен. И обратно, тот или иной выбор функции для плотности заряда в (13) ведёт к тому или иному виду форм-фактора в выражении (15). В дальнейшем форм-фактор будем обозначать функцией $B(k)$.

Имея в виду вопросы релятивистской инвариантности, придадим выражению (16) релятивистски инвариантный вид. Сделаем первый шаг в этом направлении:

$$4\pi e \delta(\bar{r} - \bar{r}_s) = \frac{e}{2\pi^2} \int \cos \{\bar{k}(\bar{r} - \bar{r}_s) - c|k|(t - t_s)\} dk_x dk_y dk_z \quad (17)$$

при $t = t_s$.

Здесь для пространственно-временной симметрии формально написано разное время для поля и частицы, t и t_s по аналогии с разными обозначениями координат поля r и координат частицы r_s .

Легко видеть, что выражение для δ -функции может быть получено, как производная по времени от некоторого релятивистского инварианта

$$4\pi e \delta(\bar{r} - \bar{r}_s) = -\frac{e}{2\pi^2} \frac{\partial}{\partial t} \int \sin \{\bar{k}(\bar{r} - \bar{r}_s) - c|k|(t - t_s)\} \frac{dk_x dk_y dk_z}{|k|} \quad (18)$$

при $t = t_s$.

Аргументом у $\sin$ служит скалярное произведение двух четырёхмерных векторов (т. е. инвариант), а $\frac{dk_x dk_y dk_z}{|k|}$ также, как известно, является инвариантом.

Весь интеграл представляет собой инвариант, играющий важное значение в современной квантовой теории поля, и называется четырёхмерной δ -функцией⁶:

$$D(X - X_s) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \sin \{\bar{k}(\bar{r} - \bar{r}_s) - c|k|(t - t_s)\} \frac{dk_x dk_y dk_z}{|k|}. \quad (19)$$

Выражение (15) соответственно перепишется

$$4\pi \rho = -\frac{1}{2\pi^2} \left[\frac{\partial}{\partial t} \int \sin \{\bar{k}(\bar{r} - \bar{r}_s) - c|k|(t - t_s)\} \times \right. \\ \left. \times \frac{dk_x dk_y dk_z}{|k|} \cdot e^{-r_0 |k|} \right] \quad (20)$$

при $t = t_s$.

Для того чтобы дифференцируемое выражение в (20) было инвариантным, необходимо, чтобы инвариантом был бы форм-фактор.

Форм-фактор в виде $e^{-r_0 k}$ релятивистски не инвариантен. Для того чтобы удовлетворить требованию релятивистской инвариантности, введём вместо r_0 некоторый четырёхмерный вектор λ :

$$\lambda_0, \bar{\lambda} \quad (21)$$

(λ_0 — его временная компонента, а $\bar{\lambda}$ — пространственная).

Пусть эта степень свободы характеризует электрон и для покоящегося электрона

$$\lambda_0 \neq 0; \quad \bar{\lambda} = 0; \quad (22)$$

тогда для покоящегося электрона обрывающий фактор попрежнему имеет вид $e^{-\lambda_0 k}$, и плотность заряда покоящегося электрона попрежнему имеет вид (15).

Вообще же говоря, релятивистски инвариантный вид данного фактора запишется следующим образом:

$$B(k) = e^{-\sum_{\mu=1}^4 \lambda_{\mu} k_{\mu}}, \quad (23)$$

где $\sum_{\mu} \lambda_{\mu} k_{\mu}$ — скалярное произведение двух четырёхмерных векторов: вектора λ и волнового вектора k .

Таким образом, плотность заряда в релятивистски инвариантной теории протяжённого электрона может быть записана:

$$4\pi\rho = -\frac{e}{2\pi^2} \left[\frac{\partial}{\partial t} \int \sin \{ \bar{k}(\bar{r} - \bar{r}_s) - c|k|(t - t_s) \} B(k) \times \right. \\ \left. \times \frac{dk_x dk_y dk_z}{|k|} \right]. \quad (24)$$

Это выражение преобразуется при лоренцовых трансформациях как временная компонента вектора (временная производная от инварианта), т. е. именно так, как должна преобразовываться плотность заряда.

Иногда в литературе встречается указание, что нельзя ввести плотность заряда как чисто пространственную функцию, ибо в другой системе координат появится временная зависимость⁸ (временные размеры электрона?). Но понятие временной протяжённости электрона настолько чуждо всему складу современной физики, что образ такого электрона серьёзно не обсуждался.

Конечно, образ электрона протяжённого во времени может быть предметом специального обсуждения, но в данном случае мы имеем дело с некоторым недоразумением. Выражение (24) относится по определению всегда к $t = t_s$, поэтому время из него всегда выпадает, т. е. по определению после преобразования в другую систему координат берётся сечение $t' = t'_s$.

Дело в том, что уравнение Д'Аламбера в любой системе координат по своему смыслу содержит величины поля и частиц, взятые в один и тот же момент времени ($t' = t'_s$).

Строгое математическое доказательство этого утверждения можно получить с помощью многовременного формализма, развитого Дираком-Фоком-Подольским⁹, где правая часть уравнения Д'Аламбера (плотность заряда в данном случае) получается лишь при переходе к одному общему времени для всех частиц и поля ($t' = t'_s$), а внешний вид выражения для плотности заряда получается как раз в виде (24).

Надо заметить, что, излагая вопрос, мы пока не только не обнаружили обещанного противоречия протяжённого заряда с требованием релятивизма, но и дали в какой-то мере инвариантную формулировку задачи. Именно введение протяжённого заряда релятивистски-инвариантным образом сводится к введению релятивистски-инвариантного обрывающего фактора (форм-фактора) $B(k)$. Различные авторы (Ватагин¹⁰, Гейзенберг, Паули, Шерцер¹¹ и др.) делали попытки именно таким образом строить теорию.

Рассмотрим более строго допустимость введения таких форм-факторов в математический аппарат современной теории и, забегая вперёд, скажем, что такая теория оказывается, вообще говоря, внутренне противоречивой¹².

§ 3. РЕЛЯТИВИСТСКИЕ ФОРМ-ФАКТОРЫ

До сих пор мы рассматривали только уравнения поля (уравнение Д'Аламбера), т. е. закон движения для поля, и совершенно не касались закона движения частиц (уравнение Дирака). Но лишь совокупность законов движения частиц и поля образует электродинамическую систему уравнений.

Уравнение движения системы электронов пишется:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi; \quad (25)$$

H — функция Гамильтона. В развёрнутом виде для s электронов она пишется:

$$H = \sum_s H_s = \sum_s e_s \varphi_s - \bar{a}_s (\bar{P}_s - e_s \bar{A}_s) - \beta_s m_s, \quad (26)$$

$$s = 1, 2, \dots, n,$$

где s — номер электрона, e_s — его заряд, m_s — его масса, $\bar{a}_s$ и β_s — матрицы Дирака, φ — скалярный потенциал, $\bar{A}_s$ — вектор потенциал, $\bar{P}_s$ — оператор импульса s -й частицы.

Если известна функция Гамильтона задачи, то по общему правилу легко найти изменение во времени любой физической величины $C(gra)$.

$$\frac{\partial C}{\partial t} = [HC], \quad (27)$$

где $[]$ обозначает операцию, называемую «скобкой Пуассона».

Выше шла речь о функции Гамильтона для частиц (будем в дальнейшем обозначать её через H_p). Функция Гамильтона для поля (H_F) в отсутствие частиц задаётся в виде выражения:

$$H_F = \frac{1}{8\pi} \int (E^2 + H^2) dv. \quad (28)$$

Теперь под функцией H мы в дальнейшем будем понимать общую функцию для поля и частиц:

$$H = H_p + H_F. \quad (29)$$

Имея в своём распоряжении такую функцию, мы можем найти закон изменения во времени любой физической величины, относящейся как к частице, так и к полю. Для этого надо только по общему правилу вычислить соответствующие скобки Пуассона (27).

Таким образом, уравнение (25) с функцией Гамильтона (29) объясняет нам дать полное описание электродинамических задач. Мы можем, например, вычислить изменение электрического поля со временем $\frac{\partial E}{\partial t}$ или магнитного поля $\frac{\partial H}{\partial t}$ или вторую производную скалярного потенциала

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}. \quad (30)$$

В правой части выражения (30) неизбежно должны появиться члены, дополняющие это выражение до полного вида уравнения Д'Аламбера (12), а в промежуточных вычислениях δ -функция, как это легко проверить, получается в виде (18). Надо заметить, что такой внешний вид δ -функции получается, если пользоваться потенциалами, разложенными в ряд или интеграл Фурье, т. е. если представить потенциалы φ и $\bar{A}$ в виде:

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \sum_{\mathbf{v}} \varphi_{\mathbf{v}}^+ e^{i\{c k_{\mathbf{v}} t - \bar{k}_{\mathbf{v}} \bar{r}\}} + \varphi_{\mathbf{v}}^- e^{-i\{c k_{\mathbf{v}} t - \bar{k}_{\mathbf{v}} \bar{r}\}}, \\ \bar{A} &= \sum_{\mathbf{v}} \bar{A}_{\mathbf{v}}^+ e^{i\{c k_{\mathbf{v}} t - \bar{k}_{\mathbf{v}} \bar{r}\}} + \bar{A}_{\mathbf{v}}^- e^{-i\{c k_{\mathbf{v}} t - \bar{k}_{\mathbf{v}} \bar{r}\}}. \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Для того чтобы в выражении (30) получить не δ -функцию, а некоторую регулярную функцию, описывающую какое-то распределение плотности заряда электрона в пространстве (например, функция (14)), необходимо каждый член ряда (31) помножить на форм-фактор $B(k)$.

В случае (14) таким фактором является

$$B(k) = e^{-\sum_{\mu} \frac{k_{\mu}^2}{2\mu}}.$$

Таким образом, вставляя в функцию Гамильтона выражение для потенциалов в виде:

$$\varphi = \sum_{\mathbf{v}} \varphi_{\mathbf{v}}^+ e^{i\{c k_{\mathbf{v}} t - \bar{k}_{\mathbf{v}} \mathbf{r}\}} B(k) + \varphi_{\mathbf{v}}^- e^{-i\{c k_{\mathbf{v}} t - \bar{k}_{\mathbf{v}} \mathbf{r}\}} B(k_{\mathbf{v}}), \quad (32)$$

$$\bar{A} = \sum_{\mathbf{v}} \bar{A}_{\mathbf{v}}^+ e^{i\{c k_{\mathbf{v}} t - \bar{k}_{\mathbf{v}} \mathbf{r}\}} B(k_{\mathbf{v}}) + \bar{A}_{\mathbf{v}}^- e^{-i\{c k_{\mathbf{v}} t - \bar{k}_{\mathbf{v}} \mathbf{r}\}} B(k_{\mathbf{v}}) \quad (33)$$

вместо обычных рядов (31), мы получаем в гамильтоновой форме релятивистски-инвариантную теорию неточечного заряда, свободную от трудности с расходимостями.

Введение в теорию протяжённого электрона полностью эквивалентно рассмотренной процедуре введения форм-фактора в функцию Гамильтона. Однако можно указать такие форм-факторы, наличие которых в функции Гамильтона даёт существенное отличие от обычной теории, но тем не менее, в конце концов, сохраняет образ точечного заряда. Такие обрывающие факторы мы рассмотрим в дальнейшем в связи с λ -процессом Венцеля-Дирака.

Попытки с помощью релятивистски-инвариантных форм-факторов разрешить трудности электродинамики неоднократно появлялись в литературе. Можно указать на попытку Ватагина¹⁰, затем Гейзенберга, позже Шерцера¹¹, Хойля и др. Эти попытки отличаются в сущности видом фактора $B(k)$.

Несмотря на внешне релятивистски-инвариантную форму, теория неточечного заряда (релятивистски-инвариантного форм-фактора) оказывается неудовлетворительной. Можно показать, что соответствующая система уравнений не имеет решений, т. е. что не существует ψ функции, описывающей протяжённый заряд. Это строго математическое утверждение непригодности теории релятивистского форм-фактора имеет следующий простой физический смысл. Введение обрывающего фактора оказывается вполне эквивалентно рассмотрению классического «твёрдого» электрона, т. е. такого электрона, по которому сигнал распространяется со скоростью, большей критической, что не совместимо с требованием теории относительности.

Для того чтобы показать физически наглядно и в то же время математически строго этот дефект теории, рассмотрим два электрона S и S' , расположенных в $\bar{r}_s$ и $\bar{r}_{s'}$.

Соответствующие функции Гамильтона запишутся:

$$H_s = e_s \varphi_s - \alpha_s (\bar{P}_s - e_s \bar{A}_s) - \beta_s m, \quad (34)$$

$$H_{s'} = e_{s'} \varphi_{s'} - \alpha_{s'} (\bar{P}_{s'} - e_{s'} \bar{A}_{s'}) - \beta_{s'} m_{s'}. \quad (35)$$

По общему правилу (27) мы можем вычислить производную от «энергии» второго электрона по времени первого

$$\frac{\partial H_{s'}}{\partial t_s} = [H_s H_{s'}]. \quad (36)$$

В обычной теории (без форм-фактора) результат вычисления следующий:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_{s'}}{\partial t_s} &= e_s e_{s'} \left(1 - \frac{\bar{a}_s \bar{a}_{s'}}{c^2}\right) \int \sin \{ck(t_s - t_{s'}) - \bar{k}(\bar{r}_s - \bar{r}_{s'})\} \frac{dk_x dk_y dk_z}{k} = \\ &= e_s e_{s'} \left(1 - \frac{\bar{a}_s \bar{a}_{s'}}{c^2}\right) D(x_s - x_{s'}). \end{aligned} \quad (37)$$

Интеграл в правой части выражения (37) представляет собой уже известную нам четырёхмерную δ -функцию; она, как известно, обращается в нуль для тех значений аргумента, для которых выполняется условие

$$(t_s - t_{s'})^2 c^2 < (\bar{r}_s - \bar{r}_{s'})^2. \quad (38)$$

Физический смысл этого условия очевиден: это условие конечности скорости распространения светового сигнала. Если моменты времени t_s и $t_{s'}$ взяты такими, что за длительность $t_s - t_{s'}$ электромагнитное возмущение, исходя из точки r_s (местоположение одного электрона) и распространяясь со скоростью c , не успеет достичь точки $r_{s'}$ (расположения другого электрона), то выражение (37) обращается в нуль, и электроны между собой независимы.

В случае обрывающего фактора положение существенно иное. Теперь вместо выражения (37) мы получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_{s'}}{\partial t_s} &= [H_s H_{s'}] = \\ &= e_s e_{s'} \left(1 - \frac{\bar{a}_s \bar{a}_{s'}}{c^2}\right) \int \sin \{ck(t_s - t_{s'}) - \bar{k}(\bar{r}_s - \bar{r}_{s'})\} \frac{dk_x dk_y dk_z}{k} B_s B_{s'}. \end{aligned} \quad (39)$$

Для обрывающего фактора, взятого в виде (23) в случае двух покоящихся зарядов, вычисление интеграла (39) приводит к выражению:

$$\int = \frac{\lambda_0 c (t_s - t_{s'})}{\{\lambda_0^2 + [|\bar{r}_s - \bar{r}_{s'}| + c(t_s - t_{s'})]^2\} \{\lambda_0^2 + [|\bar{r}_s - \bar{r}_{s'}| - c(t_s - t_{s'})]^2\}}. \quad (40)$$

Даже при условии

$$c(t_s - t_{s'}) \ll |\bar{r}_s - \bar{r}_{s'}|, \quad (41)$$

когда электромагнитное возмущение, исходящее из точки r_s , заведомо не может достичь точки $r_{s'}$, выражение (40) не обращается в нуль

$$\int \sim \frac{\lambda_0 c (t_s - t_{s'})}{\{\lambda_0^2 + |\bar{r}_s - \bar{r}_{s'}|^2\}^2}. \quad (42)$$

Это значит: как бы далеко ни находился второй электрон от первого, всё же через как угодно малое время он как целое испытывает влияние первого электрона, т. е. требования релятивизма нарушаются.

При более строгом исследовании вопроса методом многовременного формализма электродинамики, развитой Дираком-Фоком-Подольским (которого, ввиду сложности, мы здесь касаться не будем), обращение в нуль выражения (37) представляет собой необходимые условия разрешимости системы дифференциальных уравнений электродинамики. В теории обрывающего фактора эти условия (так называемые условия Блоха¹³) не выполняются, т. е. соответствующая система уравнений не имеет решения, следовательно, не существует ψ -функции, описывающей протяжённый электрон.

Более подробные исследования показывают, что условие нормировки Лоренца

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div} \bar{A} = \eta(xt)$$

также перестаёт быть совместным с уравнением движения частицы, и положение не исправляется добавлением произвольной функции.

Мы видим, что попытка ввести в современный математический аппарат теории критическую длину (λ_0) приводит к серьёзным конфликтам с такими фундаментальными понятиями, как ψ -функция или, точнее и осторожнее, с описанием явления с помощью ψ -функции, заданной в пространстве — времени, т. е. к противоречию с методом Гамильтона.

Таким образом, если надежды на разрешение фундаментальных трудностей современной теории поля связывать (тем не менее) с дальнейшими попытками программы «критической длины», то необходимо фундаментальным образом менять основные понятия квантовой теории, по крайней мере в областях существенного значения этой критической длины.

Другими словами, критическая длина λ ограничивала бы пределы применимости квантовой теории по аналогии с тем, как постоянная c ограничивает пределы классической теории или критическая скорость $\hbar$ ограничивает применимость механики Ньютона.

Такую ревизию квантово-механических понятий пытается в последнее время провести Гейзенберг, заменяя метод Гамильтона квантовой теории некоторым новым математическим аппаратом.

§ 4. ИДЕИ ГЕЙЗЕНБЕРГА

В поисках новой теории Гейзенберг² исходит из «принципа наблюдаемости» (который в своё время помог ему открыть квантовую механику и осмыслить её физическое содержание).

«В теорию должны входить только принципиально наблюдаемые величины», — пользуясь этим критерием, Гейзенберг пытается среди существующих в настоящее время понятий теории отобрать те, которые должны сохраниться как необходимые элементы будущей, пока предполагаемой, теории.

Поскольку при наличии фундаментальной длины пространственно-временное описание теряет смысл, то остаётся обратиться к

энергетическому описанию или, общее, к описанию физических явлений в основном, с точки зрения законов сохранения.

По Гейзенбергу должны быть наблюдаемы:

1. Дискретные собственные значения энергии стационарных замкнутых систем.

2. При стационарных процессах столкновений (например, падающая плоская волна и рассеянная шаровая) — асимптотическое поведение волновой функции на бесконечности.

Действительно, в огромном большинстве случаев физика интересуется так называемое «поперечное сечение» того или иного процесса. «Процесс», в сущности, сводится обычно к результатам взаимодействия плоской волны с каким-либо рассеивателем. На языке описания с точки зрения законов сохранения задача формулируется следующим образом: из бесконечности на рассеиватель «падает» некоторая частица с вектором энергии-импульса $\vec{P}$. Требуется предсказать результат взаимодействия к тому моменту времени, когда сталкивающиеся системы можно снова считать свободными или, говоря строго, когда рассеянные частицы уйдут в бесконечность.

Действительно, при изучении столкновений экспериментатор имеет дело только со свободными частицами. Он наблюдает те частицы, которые были до столкновения, и те свободные частицы, которые получились после столкновения. Рассеяние здесь надо понимать в широком смысле этого слова — оно может привести к рождению какого угодно числа новых частиц в соответствии с законами сохранения.

Естественно эту задачу рассматривать как задачу стационарную: падает поток тождественных не взаимодействующих друг с другом частиц (плоская волна) — ищется на бесконечности стационарный поток рассеянных частиц.

Между первым и вторым классом наблюдаемых величин Гейзенберг усматривает более тесную связь, чем это кажется с первого взгляда.

Построение математического аппарата теории должно быть связано с нахождением такого оператора S , который преобразовывал бы состояние с заданными импульсами P'_1 и P'_2 — сталкивающихся частиц в состояние с импульсами P''_1 и P''_2 — частиц после столкновения.

В общем случае (т. е. в случае многих частиц, участвующих в столкновении) такой оператор (матрица) схематически изобразится в вид :

$$S: \begin{array}{c} P'_1 P'_2 \\ P'_1 P'_2 P'_3 \\ P'_1 P'_2 P'_3 P'_4 \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline P'_1 P''_2 & P''_1 P'_2 P'_3 & P''_1 P'_2 P'_3 P'_4 \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array}$$

В явном виде прообраз такого оператора можно получить, как указал Гейзенберг, из первого приближения квантовой теории рассеяния.

Асимптотическая форма функции, описывающая рассеянную волну (например, поток заряженных частиц, рассеянных на кулоновом центре, запишется в виде¹⁴:

$$\frac{e^{ikr}}{r} \cdot f(\theta),$$

где

$$f(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) [e^{2i\eta_n} - 1] P_n(\cos \theta)$$

$$k = mv/\hbar.$$

Мы видим, таким образом, что для получения интересующей нас картины явления рассеяния достаточно знания величины S

$$S \sim e^{i2\eta}.$$

Таким образом, для получения асимптотического выражения рассеянной волны нет необходимости в самом методе Гамильтона. Метод Гамильтона, с точки зрения Гейзенберга, даёт «слишком подробное» описание явления — такое подробное описание не соответствует принципиальным возможностям наблюдения, поэтому метод Гамильтона не адекватен физической реальности. Адекватное описание физической реальности достигается с помощью знания η .

В простом случае η связано с функцией взаимодействия $v(r)$ таким образом:

$$\eta_n = -\frac{\pi}{2} \frac{8\pi^2 m}{\hbar^2} \int_0^{\infty} v(r) [I_n + \frac{1}{2}(kr)]^2 r dr.$$

В общем же случае решение задачи рассеяния связано с заданием функции η .

Те трудности с расходимостями, о которых шла речь выше, в схеме Гейзенберга тривиальным образом отсутствуют, так как по определению рассматриваются переходы между состояниями с одной и той же энергией.

Очень существенно, что схема Гейзенберга, как это им показано, релятивистски-инвариантна. Хотя достаточно конкретное указание Гейзенберга на возможную роль η в аппарате будущей теории является наиболее существенным достижением программы, всё же схема Гейзенберга внутренне не закончена, так как в теории нет никаких оснований и правил для того или иного выбора оператора η .

Более того, строго говоря, математический аппарат предлагаемый Гейзенбергом теории не адекватен его физической программе. Основная идея Гейзенберга заключается в том, что введение некоторой

«критической длины» в будущую теорию неизбежно ограничит пространственно-временное описание физических явлений.

В математическом аппарате, предлагаемом Гейзенбергом, критической длины нет. Нет никаких новых отсюда вытекающих принципиальных ограничений возможностей измерения. Отсюда возникает вопрос, не является ли аппарат Гейзенберга некоторым элементом другого способа опять же «подробного» пространственно-временного описания. Именно это обстоятельство, как нам кажется, и выясняется в последних работах Штюкельберга. Но в таком случае надо осторожнее отнестись к доказательству релятивистской инвариантности схемы Гейзенберга. Мы видели на примере попыток решения вопроса с помощью релятивистски-инвариантных форм-факторов, что формальное благополучие в выполнении обычных требований инвариантности математического аппарата должно быть дополнено требованием отсутствия связи вне светового конуса.

Здесь некоторые виды η -функции, например те, которые Гейзенбергом связаны с неточечным взаимодействием, повидимому, этому требованию не удовлетворяют. Во всяком случае, пока нет строгих оснований считать, что матрица η даёт большую свободу для введения в теорию критической длины, чем метод Гамильтона. Более того, внутри математической схемы Гейзенберга нет внутренней необходимости для введения критической длины: обсуждаемые трудности теории поля (расходимости) в аппарате Гейзенберга отсутствуют по определению и для точечных взаимодействий.

Возможно, что на предложение Гейзенберга в конце концов надо смотреть как на новый способ «подробного» пространственно-временного описания точечных взаимодействий. Это описание может быть действительно лишено трудности с расходимостями, но внутренняя непротиворечивость метода для различных классов η ещё недостаточно исследована.

К числу конкретных трудностей теории Гейзенберга надо отнести, например, задачу о естественной ширине спектральных линий. Эта задача не находит своего непосредственного решения с помощью предложенного Гейзенбергом аппарата (переходы между состояниями строго с одной и той же энергией).

В аспекте последних замечаний заслуживает внимания попытка Гейтлера и Пенга⁴ заменить волновое уравнение квантовой теории вычислительной схемой теории возмущения. С некоторой точки зрения попытки Гейтлера-Пенга представляют собой реализацию частного случая Гейзенберга.

§ 5. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ СХЕМА ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЯ

По своему математическому смыслу «теория возмущения» должна давать приближённые выражения для решений уравнений Дирака (или Прока-Кеммера). Но так как электродинамическое уравнение Дирака в сущности не имеет решений (0),

то фактически в настоящее время мы принуждены пользоваться математическим аппаратом теории возмущения как самостоятельной вычислительной схемой, «независимой» от уравнения Дирака.

Поэтому естественна идея узаконить это обстоятельство, другими словами, определить строгим образом физические понятия, содержащиеся в данной «вычислительной схеме», определить внутренним, не противоречивым образом операции над ними и получить, таким образом, последовательную вычислительную схему для различных электродинамических процессов, свободную от известных трудностей электродинамики^{4,12}.

Физические понятия рассматриваемой схемы — это свободный электрон с инертной массой m и свободные фотоны. Все электродинамические процессы сводятся к испусканию и поглощению фотонов электроном. Каждый рассматриваемый электродинамический эффект реализуется цепочкой процессов испускания и поглощения фотонов. Каждая такая «цепочка» (H_{AB}) переводит систему из состояния A в состояние B . Правила составления матричных элементов и поперечных сечений можно определить непосредственным образом.

Полагая, что процессы реализуются путём «цепочки» минимальной длины, мы исключим расходимости, так как они связаны с недопустимым удлинением цепочки. Расходимости появляются в связи с теми матричными элементами, которые характеризуют испускание и затем поглощение того же самого фотона.

Обычно такая вычислительная схема имеет релятивистски не инвариантный внешний вид. Но пользуясь релятивистски-инвариантной формой теории возмущения, данной Штюкельсбергом¹⁵, можно убедиться в релятивистски-инвариантном содержании такой вычислительной схемы.

Понимая под $u(N^j)$ волновую функцию излучения, где N^j обозначает какое-то распределение фотонов,

$$N^j = (N_1^j \dots N_k^j).$$

Понимая под $\psi^j(x)$ волновую функцию электрона при данном состоянии излучения (j), мы можем записать волновую функцию электродинамической системы:

$$\psi = \sum \psi^j(x) u(N^j).$$

Здесь x — точка пространства-времени (x, y, z, t) .

Записывая уравнение Дирака в виде:

$$\left[\frac{1}{i} \left(\gamma \cdot \frac{\partial}{\partial x} \right) + \frac{mc}{\hbar} + v(x) \right] \psi(x) = 0,$$

где $v(x)$ — квантованное поле^{*}), и разлагая $\psi^j(x)$ в четырёхмерный ряд или интеграл Фурье^{**})

$$\psi^j(x) = \int e^{i(l, x)} A^j(l) dl_1 dl_2 dl_3 dl_4 \quad (a)$$

^{*}) γ — матрицы Дирака, m — масса электрона, $\hbar$ — постоянная Планка.

^{**}) A не в трёхмерный ряд, как это делается в обычной теории возмущения.

(где (l, x) — скалярное произведение двух четырехмерных векторов), мы для амплитуд $A'(l)$ получим некоторые алгебраические уравнения, причём $A'(l)$ — величины, не зависящие от пространства-времени, а, стало быть, являющиеся инвариантами.

Легко видеть, что нулевое приближение для $A'(l)$ удовлетворяет системе алгебраических уравнений.

$$H(l) A'(l) = 0;$$

здесь $H(l)$ обозначает выражение:

$$H(l) = (l, \gamma) + \frac{mc}{h}.$$

Первое и дальнейшие приближения легко получить методом последовательных приближений.

Первое приближение истолковывается физически как результат однократного испускания или поглощения кванта электроном. Следующие приближения определяют процессы с испусканием и поглощением электроном многих фотонов. Это первое приближение как бы является элементарным звеном любой цепочки переходов с испусканием и поглощением любого числа фотонов.

Пока мы изложили схематично обычную, но релятивистски-инвариантную теорию возмущения. Теперь можно сделать дальнейший формальный шаг: отвлечься от уравнения Дирака, постулировать звено цепочки как фундаментальное соотношение, описывающее испускание или поглощение фотона электроном, носящее характер закона природы. А все интересующие физика более сложные эффекты — цепочки составляются последовательным образом из этих элементарных звеньев.

Здесь общее требование — реализация данного перехода минимальным числом звеньев. Элемент цепочки (испускание или поглощение) математически записывается инвариантным образом:

$$A'(l) = L_k^0 A^0(l - k).$$

L_k — инвариантный оператор, переводящий заданное состояние $A^0(l - k)$ в состояние $A'(l)$ с испусканием или поглощением кванта. Не входя в детали, можно привести явный вид оператора по Штюкельбергу:

$$L_k^0 = -\frac{K(l)}{R(l)} v_{k/0}(\sigma^k, \gamma),$$

где $v_{k/0}$ — результат действия оператора излучения на заданную волновую функцию излучения, а

$$K(l) = -(l, \gamma) + \frac{mc}{h}$$

и

$$\tilde{R}(k) = K(l) H(l)$$

(σ^k — вектор поляризации фотона).

Выражения для более сложных переходов получаются последовательным применением оператора L и суммированием всех возможных в данном процессе случаев, которыми реализуется данное конечное состояние.

Зная инвариантные амплитуды $A'(I)$, мы можем составить поперечное сечение, пользуясь в промежуточных вычислениях соотношением (α) или находя в дальнейшем более непосредственные методы для составления поперечных сечений из символов $A'(I)$, так как поперечное сечение является также инвариантным и не зависит от пространственно-временных переменных.

Обсуждаемая схема даёт общий способ нахождения оператора, с помощью которого решаются задачи о столкновениях*). В этом смысле схема имеет много общего со схемой Гейзенберга. С другой стороны, обсуждаемая схема представляет собой пространственно-временное описание, так как с помощью преобразования Фурье (α) можно написать ψ -функцию как функцию от x, t .

Здесь так же, как и в общей схеме Гейзенберга, нет никаких математических обстоятельств самого аппарата, органически запрещающих переход от описания в пространстве энергии — импульса к координатному пространству. Но тогда нет оснований утверждать а priori, что не существуют дифференциальные уравнения, решения которых даёт это ψ , которое мы можем получить в результате преобразования. Более того, можем думать, что существуют такие гамильтоновы операторы, описывающие точечные взаимодействия, которые дают тот же самый результат, что и обсуждаемые математические схемы.

Один из таких операторов Гамильтона в последнее время открыт Дираком (теория так называемого «предельного λ -процесса»).

§ 6. λ -ПРОЦЕСС ВЕНЦЕЛЯ-ДИРАКА

Попытки рассматривать заряд неточечным, как было показано, полностью эквивалентны попыткам ввести в теорию инвариантный форм-фактор, но последние попытки носят более общий характер. Как правило, форм-факторы превращают расходящиеся интегралы в конечные выражения, отличные от нуля. Например, с помощью фактора (23) выражение (2) для покоящегося заряда принимает вид:

$$e^2 \int_0^\infty e^{-2\lambda_0 k} dk = \frac{e^2}{2\lambda_0}. \quad (43)$$

Но можно указать на такие исключительные случаи, когда форм-фактор обращает в нуль расходящиеся выражения.

*) Идеи Гейтлера-Пенга мы изложили в упрощённой форме в том виде, как они обсуждались автором несколько ранее (23). Гейтлер и Пенг ввели в эту схему учёт затухания, которого мы здесь не касались.

Рассмотрим, например, факторы:

$$B(k) = + \sqrt{\cos(k_\mu \lambda_\mu)}. \quad (44)$$

В этом случае потенциал (32) переписывается

$$\varphi = \sum_Y \{ \varphi_Y^+ e^{i\{ck_Y t - \bar{k}_Y \bar{r}\}} + \varphi_Y^- e^{-i\{ck_Y t - \bar{k}_Y \bar{r}\}} \} \sqrt{\cos(k_\mu \lambda_\mu)}. \quad (45)$$

Тогда с помощью второго приближения мы получим для собственной электростатической энергии покоящегося заряда ($\lambda_0 \neq 0$; $\bar{\lambda} = 0$) вместо (2) выражение

$$e^2 \int_0^\infty \cos k \lambda_0 dk. \quad (46)$$

Интеграл этот не имеет определённого смысла, но его можно рассматривать как предел такого интеграла:

$$e^2 \int \cos k \lambda_0 dk = \lim_{\alpha \rightarrow 0} e^2 \int e^{-\alpha k} \cos k \lambda_0 dk = e^2 \frac{\alpha}{\alpha^2 + \lambda_0^2} = 0. \quad (47)$$

Существенно, что выражение обращается в нуль, независимо от величины λ_0 . λ_0 может быть как угодно малым.

Так как $\lambda_0 \neq 0$ ведёт к тем же трудностям релятивистски-инвариантных форм-факторов, общее рассмотрение которых дано в начале статьи, то неожиданным свойством данного форм-фактора оказывается независимость выражения (47) от величины λ_0 . Таким образом, величину λ_0 можно в конечном результате стремиться к нулю. Отсюда название «пределный λ -процесс».

Это свойство форм-фактора обеспечивает релятивистскую инвариантность теории. Здесь обращает на себя внимание новое в физике фундаментальное обстоятельство, — обсуждается теория, в которой собственная электростатическая энергия электрона равна нулю. Прежде чем обсуждать подробнее другие следствия этой новой теории, рассмотрим внимательно последнее замечание.

§ 7. ИДЕЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ СОБСТВЕННОЙ МАССЫ ЭЛЕКТРОНА

С тех пор как было установлено соотношение энергии и массы, идея электромагнитной массы элементарного электрического заряда казалась заманчивой. В своей окончательной и последовательной форме эта идея должна была привести к построению механики из теории поля, т. е. привести к выводу уравнений движения заряда из теории поля.

Несмотря на полувековую давность этого круга идей, надо заметить, что в настоящий момент нет никаких реальных программ

построения механики из теории поля, программ, лежащих в круге идей квантовой физики элементарных частиц.

Здесь в течение последних десятилетий вырисовывались скорее новые затруднения, чем надежды на успех¹⁶. Выяснилось, что частицы обладают спином и прочее.

С другой стороны, если мы обратимся к фактическому содержанию уравнений, описывающих современную теорию взаимодействия элементарных частиц с полем (любых частиц с любым полем), то эти уравнения неизбежно приводят к появлению выражений, которые по существу своему должны были бы интерпретироваться естественным образом как массы или энергии собственного поля данной частицы.

Появление таких выражений в современном математическом аппарате теории указывает на то, что обсуждаемый вопрос уже тесно связан с самим аппаратом, что в такой-то мере он здесь конкретно поставлен, притом поставлен неудовлетворительным образом.

Неудовлетворительным образом потому, что, во-первых, эти выражения расходятся, во-вторых, даже если эти выражения удалось бы сделать конечными, их трудно было бы интерпретировать как массы частиц, так как таковые (т. е. массы частиц) в существующие уравнения входят с самого начала как чисто механические инертные массы частиц, свободных от поля и заряда:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = (\bar{\alpha} \bar{p} + \beta m) \psi.$$

Другими словами, мы хотим подчеркнуть мысль, что в рамках существующей теории эти выражения представляют собой в сущности образования «лишние» с точки зрения аппарата самой теории. Этот «лишний» характер обсуждаемых выражений любопытным образом подчеркивается во всех конкретных вычислениях реально наблюдаемых эффектов. Здесь игнорирование этих «лишних» членов (несмотря на бесконечное абсолютное значение их) не приводит к каким-либо недоразумениям. Все конечные эффекты взаимодействия электрона, например, с излучением, рассчитанные по современной теории, прекрасно согласуются с экспериментальными данными. И наоборот, пока нет ни одного экспериментального эффекта, который давал бы несогласие с теорией, такое несогласие, причины которого можно было бы искать в незаконном вычеркивании из уравнений этих бесконечных членов.

Создается впечатление, что если бы оказалось возможным предложить такую теорию взаимодействия частиц с излучением, в которой естественным образом отсутствовали бы члены с собственной энергией поля частицы и все подобные ему расходящиеся выражения, а в остальном для всех наблюдаемых эффектов эта теория давала бы правильные выражения, то такая теория во всяком случае заслуживала бы внимания и обсуждения.

Именно такую задачу поставил перед собой Дирак в своих последних работах по квантовой электродинамике.

§ 8. ЧЁТНЫЕ И НЕЧЁТНЫЕ РАСХОДИМОСТИ

Вычисляя поперечную собственную энергию электрона, используя при этом фактор (44), мы вместо (9') получаем интеграл

$$\int_0^{\infty} k dk e^{-\alpha k} \cos k \lambda_0 = \left[\frac{\alpha^2 - \lambda_0^2}{(\alpha^2 + \lambda_0^2)^2} \right]_{\alpha \rightarrow 0} = -\frac{1}{\lambda_0^2}. \quad (48)$$

Мы видим существенное отличие последнего случая от случая (47): там интеграл обращается в нуль независимо от численного значения λ_0 , здесь интеграл конечен, но отличен от нуля и в предельном случае $\lambda_0 = 0$ попрежнему расходится. Если вместе с Дираком рассматривать лишь предельное значение величин (при $\lambda_0 \rightarrow 0$, т. е. «предельный λ -процесс»), то, как мы видим, фактор (44) решает задачу в случае (2) (электростатическая собственная энергия электрона), но оставляет без изменения трудность с поперечной энергией (9').

Легко убедиться в общем виде, что с помощью фактора (44) обращаются в нуль все чётные расходимости:

$$\int_0^{\infty} k^{2n} dk.$$

Но трудности нечётных расходимостей

$$\int_0^{\infty} k^{2n+1} dk$$

в λ -процессе сохраняются.

Если взять фактор $B(k)$ в виде синуса

$$B(k) = \sqrt{\sin \left(\sum_{\mu=1}^4 k_{\mu} \lambda_{\mu} \right)}, \quad (49)$$

то в случае электростатической энергии мы получаем интеграл

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha k} \sin \lambda_0 k dk = \left[\frac{\lambda_0}{\alpha^2 + \lambda_0^2} \right]_{\alpha \rightarrow 0} = \frac{1}{\lambda_0}, \quad (50)$$

а для поперечной собственной энергии выражение:

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha k} \sin k \lambda_0 dk = 0. \quad (51)$$

Можно убедиться в общем виде, что синус-фактор даёт результат, «обратный» фактору косинуса, именно в последнем случае при конечном λ_0 нечётные расхожимости превращаются в нули, а чётные при конечном λ_0 — конечны, но в предельном переходе ($\lambda_0 = 0$) чётные расхожимости остаются, т. е. этот фактор даёт для поперечной собственной энергии нуль, для электростатической — бесконечность. Но для предельного перехода представляет интерес косинус-фактор, ибо при $\lambda_0 = 0$ $\cos \lambda_0 k = 1$, и все обычные конечные эффекты остаются без изменения ($\cos \lambda_0 k$ входит множителем).

С фактором-синус такой предельный переход не возможен, ибо

$$\sin k \lambda_0 = 0$$

при

$$\lambda_0 = 0.$$

Поэтому предельный λ -процесс Дирака оказывается эффективным только против чётных расхожимостей.

§ 9. ЗАКОН КУЛОНА

Форм-фактор, взятый в виде (44), любопытным образом меняет выражение для закона Кулона. Рассмотрим два электрона, покоящихся в точках $\bar{r}_1$ и $\bar{r}_2$ с зарядами e_1 и e_2 .

Обычным образом, с помощью второго приближения теории возмущения, мы получаем выражение для энергии взаимодействия между двумя зарядами:

$$W = - \frac{e_1 e_2}{|\bar{r}_1 - \bar{r}_2|} \cdot \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin k |\bar{r}_1 - \bar{r}_2|}{k} dk = - \frac{e_1 e_2}{|\bar{r}_1 - \bar{r}_2|}. \quad (52)$$

Теория Дирака приводит к появлению в интеграле (52) характерного фактора косинуса

$$\begin{aligned} W &= - \frac{e_1 e_2}{|\bar{r}_1 - \bar{r}_2|} \cdot \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos k \lambda_0 \cdot \frac{\sin k |\bar{r}_1 - \bar{r}_2|}{k} dk = \\ &= - \frac{e_1 e_2}{|\bar{r}_1 - \bar{r}_2|} \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \frac{2}{2} \left\{ \int_0^\infty \{ \sin [|\bar{r}_1 - \bar{r}_2| + \lambda_0] k + \right. \\ &\quad \left. + \sin [|\bar{r}_1 - \bar{r}_2| - \lambda_0] k \} \frac{dk}{k} \right\}. \quad (52') \end{aligned}$$

Первый интеграл равен:

$$\int_0^\infty \frac{\sin k (|\bar{r}_1 - \bar{r}_2| + \lambda_0)}{k} dk = \frac{\pi}{2}.$$

Второй интеграл имеет два значения в зависимости от того, что:
 $|\bar{r}_1 - \bar{r}_2| > \lambda_0$ или $|\bar{r}_1 - \bar{r}_2| < \lambda_0$:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin k (|\bar{r}_1 - \bar{r}_2| - \lambda_0)}{k} dk = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \text{если } |\bar{r}_1 - \bar{r}_2| > \lambda_0 \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{если } |\bar{r}_1 - \bar{r}_2| < \lambda_0. \end{cases} \quad (53)$$

В первом случае имеем

$$W_{|\bar{r}_1 - \bar{r}_2| > \lambda_0} = -\frac{e_1 e_2}{|\bar{r}_1 - \bar{r}_2|} \cdot \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = -\frac{e_1 e_2}{|\bar{r}_1 - \bar{r}_2|}. \quad (54)$$

Во втором случае

$$W_{|\bar{r}_1 - \bar{r}_2| < \lambda_0} = -\frac{e_1 e_2}{|\bar{r}_1 - \bar{r}_2|} \cdot \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \right) = 0. \quad (55)$$

Другими словами, если расстояние между двумя зарядами больше, чем λ_0 , то закон Кулона остаётся в его прежнем виде; если расстояние между двумя зарядами меньше λ_0 , то взаимодействие между зарядами полностью отсутствует. В предельном случае остаётся только одна единственная такая точка, это — координата самого электрона.

Потенциальная функция исчезает в нуле и в бесконечности, поэтому, образно говоря, классическая работа по «собираанию» заряда из бесконечности в точку (или в область λ_0) равна нулю, и существование заряда не требует внешних сил, сдерживающих «элементы» заряда, размещённого в области λ_0 .

Уравнение Пуассона мы легко получим, замещая в выражении (15), написанном для плотности заряда, фактор $e^{-r_0 k}$ на $\cos \lambda_0 k$. Проводя интегрирование по углам и волновым числам (k), мы получим правую часть нового уравнения Пуассона, которое теперь запишется:

$$\nabla^2 \varphi = \frac{e}{r} \frac{\partial}{\partial r} \{ \delta(r + \lambda_0) + \delta(r - \lambda_0) \}, \quad (55')$$

где

$$r = |(\bar{r} - \bar{r}_s)|.$$

Здесь под $\delta(r \pm \lambda_0)$ понимается не пространственный, а линейный интеграл

$$\delta(r \pm \lambda_0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos k (r \pm \lambda_0) dk.$$

При $\lambda_0 = 0$ мы получаем

$$\nabla^2 \varphi = \frac{e}{r} \delta'(r) = -4\pi e \delta(r),$$

т. е. обычную теорию.

§ 10. λ -ПРОЦЕСС В ФОРМЕ ДИРАКА

В предыдущих параграфах мы изложили новую теорию Дирака как частный случай теории релятивистски-инвариантного форм-фактора. В оригинальных работах Дирака теория даётся как обобщение классических скобок Пуассона.

Если величины $B(qp)$ и $C(qp)$ являются функциями канонически-сопряжённых переменных, например, импульса p и координаты q , то скобкой Пуассона $[]$ обозначается следующая простая математическая операция:

$$[BC] = \frac{\partial B}{\partial p} \frac{\partial C}{\partial q} - \frac{\partial B}{\partial q} \frac{\partial C}{\partial p}. \quad (55)$$

Следовательно, скобка Пуассона для самих p и q :

$$[pq] = 1. \quad (57)$$

Если p и q — импульс и координата линейного гармонического осциллятора, то энергия такого осциллятора записывается как

$$\frac{1}{2} (p^2 + \nu^2 q^2) = W. \quad (58)$$

$ck_\nu = \nu$ — частота осциллятора.

Введём новые переменные

$$p = \sqrt{2\nu} A^+; \quad q = \frac{1}{\sqrt{2\nu}} A. \quad (59)$$

Тогда выражение для энергии осциллятора принимает вид:

$$W = (A^{+2} + A^2) \nu;$$

для A и A^+ , как легко проверить, также справедливо

$$[A^+ A] = 1. \quad (60)$$

Пользуясь выражениями потенциала в виде (31), можно выразить энергию поля через амплитуды A^+ и A

$$H_F = \sum_{\nu} \{A_{\nu}^{+2}(k_{\nu}) + A_{\nu}^2(k_{\nu})\} CK_{\nu} = \sum_{\nu} W_{\nu}, \quad (61)$$

т. е. энергию электромагнитного поля можно рассматривать как сумму энергий (W_{ν}) линейных гармонических осцилляторов.

Идея Дирака заключается в предложении изменить скобку Пуассона (60), заменив в правой части соотношения 1 на $\cos(k_{\mu}^{\nu} \lambda_{\mu})$

$$(A_{\nu}^+ A_{\nu}) = \cos(k_{\mu}^{\nu} \lambda_{\mu}). \quad (62)$$

С помощью скобок Пуассона (60) и (62), написанных для амплитуд, можно вычислить на основании правил (56) скобку Пуассона для самих потенциалов (рядов (31)).

Проведя соответствующие вычисления, мы в обычном случае (т. е. в случае (60)) получаем

$$[A(x) A(x')] = D(x - x'), \quad (63)$$

где $A(x)$ взято в точке x (в точке $\bar{r}$ в момент t), а $A(x')$ взято в точке x' (в точке $\bar{r}'$ в другой момент t'). $D(x - x')$ — четырёхмерная δ -функция.

Если мы вычислим скобку Пуассона для потенциалов, взятых в мировых точках x и x' , пользуясь для амплитуды условием (62), а не (60), то получим

$$[A(x) A(x')] = \frac{1}{2} \{D(x - x' + \lambda) + D(x - x' - \lambda)\}. \quad (64)$$

Справа стоят четырёхмерные δ -функции, которые разнятся от δ -функции (63) тем, что они отличны от нуля не на световом конусе, а на конусах, несколько смещённых относительно светового конуса. Величина λ характеризует это смещение.

И обратно. Взяв условие (64) за основу, разлагая в ряд Фурье потенциалы, можно получить условие (62).

Дирак излагает теорию, исходя из условия (64). Собственно говоря, здесь мы имеем дело с другим способом введения того же релятивистски-обрывающего фактора. Мы бы могли изложить общую теорию обрывающего фактора (§ 3) с помощью изменения скобок Пуассона по типу (62).

Именно, полагая вместо (60) условие

$$[A^+(k) A(k)] = B^+(k) B(k). \quad (65)$$

В случае фактора $B^+ = B = \sqrt{\cos k_\mu \lambda_\mu}$ мы получаем условие (62).

В случае фактора $B^+ = B = e^{-\sum k_\mu \lambda_\mu}$ имеем

$$[A^+(k) A(k)] = e^{-2 \sum k_\mu \lambda_\mu}.$$

В случае фактора $B^+ = B = \sqrt{\sin \sum k_\mu \lambda_\mu}$ мы получаем

$$[A^+(k) A(k)] = \sin \sum k_\mu \lambda_\mu.$$

Но для скобки Пуассона от самих потенциалов мы в общем случае не всегда имеем простое аналитическое выражение.

Здесь, пользуясь фактором-синус (49), мы для самих потенциалов получаем скобку Пуассона в виде

$$[A^+(x) A(x')] = \frac{1}{2} \{ \Delta(x - x' + \lambda) + \Delta(x - x' - \lambda) \}. \quad (66)$$

Под $\Delta(x - x')$ мы понимаем вторую четырёхмерную инвариантную функцию

$$\Delta(x - x') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \cos \{ \bar{k}(\bar{r} - \bar{r}') - c(k)(t - t') \} \frac{dk_x dk_y dk_z}{k}, \quad (19')$$

которая отличается от функции (19) тем, что под интегралом стоит вместо синуса косинус¹⁷.

Этот фактор для предельного перехода, как мы уже указали, использован быть не может, так как при $\lambda = 0$

$$[A^+(x) A(x')] = 0.$$

Выражение не переходит в классическое.

Скобка Пуассона для самих потенциалов в случае (23) даётся выражением:

$$[A^+(x) A(x')] = \frac{1}{2} [D(x - x' + i\lambda) + D(x - x' - i\lambda)] + \\ + \frac{i}{2} [\Delta(x - x' + i\lambda) - \Delta(x - x' - i\lambda)]. \quad (67)$$

Однако имеются некоторые различия в этих способах введения обрывающих факторов.

С помощью скобки Пуассона типа (64) или (62) уже для вакуума устанавливается отличие от обычной теории. Таким образом, четырёх-мерный вектор $\lambda_0, \vec{\lambda}$, если мы полагаем его отличным от нуля, должен иметь какой-то физический смысл именно для вакуума.

С другой стороны, на этот вектор наложено условие $\frac{\lambda_0}{|\vec{\lambda}|} > 1$ (временноподобный). Это значит, что в какой-то системе координат (физический смысл которой не ясен) $\vec{\lambda} = 0$ и $\lambda_0 \neq 0$.

Введя же обрывающий фактор, как это мы делали выше, только в функции Гамильтона, написанной для частицы, взаимодействующей с полем, он имеет смысл лишь при наличии частиц.

Но так как в теории Дирака этот вектор всё равно в конечном результате стремится к нулю, то различие несущественно.

§ 11. λ -ПРОЦЕСС В ИЗЛОЖЕНИИ ВЕНЦЕЛЯ

Основные свойства предельного λ -процесса были изложены в работах Венцеля лет десять тому назад, но интерес к нему проявился в связи с новой математической формулировкой (62), (64), данной в последние годы Дираком. Форма очень удобна для обобщения теории на другие, неэлектромагнитные, поля.

В работах Венцеля процесс получает следующее простое содержание.

В уравнения движения частиц (уравнения Дирака, Прока и др.) входят потенциалы полей. Существенно, что значения этих потенциалов берутся в данный момент в той точке, где частицы находятся:

$$A(t_1 r) \rightarrow A(t_s r_s),$$

т. е.

$$t \rightarrow t_s; \quad r \rightarrow r_s.$$

Здесь t_s и $\bar{r}_s$ — время и координаты частицы, $\bar{r}$ — любая точка пространства (т. е. поля), которая может быть взята в любой момент времени t , вообще говоря, $t \neq t_s$.

Как показал Венцель, это координирование поля и частицы имеет следующий неоднозначный характер: если мы отнесём потенциал (выражение, стоящее в функции Гамильтона, написанной для заряда) к некоторому смещённому событию относительно частицы, т. е. положим

$$t = t_s + \Delta t \quad \text{и} \quad r = r_s + \Delta r,$$

а Δt и Δr будем стремить к нулю лишь в конечном результате вычислений, то мы имеем две возможности стремления Δt и Δr к нулю

$$\text{I.} \quad \lim \frac{\Delta t c}{\Delta r} < 1. \quad (68)$$

Это значит, что смещение носит характер пространственного вектора, и

$$\text{II.} \quad \lim \frac{\Delta t c}{\Delta r} > 1. \quad (69)$$

Это значит, что смещение носит характер временного вектора.

В первом случае результат окончательных вычислений ничем не отличается от обычного, во втором случае положение другое.

Мы можем стремить t к t_s , исходя из «прошлого» или из «будущего», поэтому Венцель берёт среднее арифметическое этих пределов. Образно говоря, предельное значение «прошлого» и «будущего» одинаково представлено в «настоящем» в результате действия на заряд как запаздывающего, так и опережающего поля.

Идеи Венцеля представляют собой в сущности предложение рассматривать точечный электрон как предел электрона, протяжённого во времени.

Для того чтобы уточнить смысл последнего утверждения, рассмотрим предварительно образ электрона Венцеля, протяжённого в пространстве, т. е. рассмотрим вначале пример форм-фактора с чисто пространственным вектором $\bar{\lambda} \neq 0$, $\lambda_0 = 0$:

$$[A+A] = \cos \bar{k}\bar{\lambda} = B^+(k) B(k). \quad (70)$$

Мы знаем, что для точечного заряда уравнение Пуассона пишется в виде:

$$\nabla^2 \varphi = -4 \pi \delta(\bar{r} - \bar{r}_s).$$

Вычисления показывают, что, вводя форм-фактор (65) через скобки Пуассона, мы в общем случае получаем для плотности выражение:

$$\rho = \frac{e}{8\pi^3} \int \cos \bar{k}(\bar{r} - \bar{r}_s) B^+(k) B(k) dk_x dk_y dk_z \quad (71)$$

или, принимая во внимание частный вид фактора (70), имеем:

$$\rho = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \cos \bar{k} \bar{R} \cos \bar{k} \bar{\lambda} dk_x dk_y dk_z, \quad (72)$$

где через $\bar{R}$ обозначена разность $\bar{R} = \bar{r} - \bar{r}_s$.

Мы можем переписать выражение (72) как полусумму двух членов

$$\rho = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{2} \left\{ \int \cos \bar{k} (\bar{R} + \bar{\lambda}) dk_x dk_y dk_z + \int \cos \bar{k} (\bar{R} - \bar{\lambda}) dk_x dk_y dk_z \right\},$$

что на основании (16) запишется через полусумму двух δ -функций

$$\rho = \frac{1}{2} \{ \delta(\bar{R} + \bar{\lambda}) + \delta(\bar{R} - \bar{\lambda}) \} \quad (73)$$

и уравнение Пуассона

$$\nabla^2 \varphi = -4\pi e \frac{1}{2} \{ \delta(\bar{R} + \bar{\lambda}) + \delta(\bar{R} - \bar{\lambda}) \}. \quad (74)$$

Так как обе δ -функции относятся к одному и тому же заряду, то мы имеем упрощённую модель протяжённого электрона, когда заряд электрона распределяется в двух точках. Электрон-«штанга», «пустой» линейный электрон.

Вычисляя собственную электростатическую энергию электрона, мы получаем в случае фактора (70) выражение

$$W \sim \frac{e^2}{\lambda}. \quad (75)$$

Это выражение стремится к бесконечности при стремлении λ к нулю. Поэтому при λ -процессе (стремление в конечном результате $\lambda \rightarrow 0$) фактор (70) с пространственным вектором λ оказывается бесполезным.

В случае Дирака фактор $B = \cos k \lambda_0$, где $\lambda_0 = c\tau_0$ — временной вектор. В данном случае выбрана такая система координат, где пространственная часть этого вектора исчезает.

Плотность заряда ρ в этом случае запишется:

$$\rho = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \cos \bar{k} (\bar{r} - \bar{r}_s) \cos k \lambda_0 dk_x dk_y dk_z. \quad (76)$$

Мы могли бы, как и в случае (72), провести интегрирование и получили бы выражение (55), которое не имеет «прозрачного» вида.

Мы постулим несколько иначе и перепишем (76) в виде (17), вводя по аналогии с r и r_s время t и t_s .

Обозначая $\lambda_0 = c\tau_0$ и преобразовывая произведение косинусов в полусумму их, получаем

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{1}{(2\pi)^3} \cdot \frac{1}{2} \int [\cos \{ \bar{k} (\bar{r} - \bar{r}_s) - kc(t - t_s - \tau) \} + \\ &\quad + \cos \{ \bar{k} (\bar{r} - \bar{r}_s) - kc(t - t_s + \tau_0) \}] dk_x dk_y dk_z = \\ \text{при } t &= t_s, \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \cdot \frac{1}{2} \int [\cos \{ \bar{k} (\bar{r} - \bar{r}_s) + kc\tau_0 \} + \\ &\quad + \cos \{ \bar{k} (\bar{r} - \bar{r}_s) - kc\tau_0 \}] dk_x dk_y dk_z. \end{aligned} \quad (77)$$

Последнее выражение показывает, что благодаря наличию временного вектора $\lambda_0 = c\tau_0$ заряд берётся как бы в два момента времени $+ \tau_0$ и $- \tau_0$ несколько сдвинутым в «прошлое» и «будущее» по отношению ко времени, к которому относится поле t и центр тяжести электрона $t_s (t = t_s)$.

Таким образом, легко устанавливается связь λ -процесса Дирака с идеями Венцеля. Если протяжённый заряд в пространстве (случай $\lambda_0 \neq 0$, $\lambda_0 = 0$) значит, что на движение центра тяжести электрона оказывает влияние значение поля, существующее в данный момент в разных точках пространства (в выше разобранном, например, случае на электрон, центр тяжести которого расположен в r_s , действуют поля, находящиеся в точке $r_s + \lambda$ и $r_s - \lambda$), и электрон, как твёрдая «палочка», в пространстве испытывает в целом влияние поля, то в случае временного вектора λ_0 , как показывает предыдущее рассмотрение, на электрон действует поле то, которое существовало в данной точке, время $\frac{\lambda_0}{c} = \tau_0$ «тому назад» и то, которое будет существовать в данной точке $\frac{\lambda_0}{c} = \tau_0$ «после данного момента», к которому относится это действие. Электрон — точечный в пространстве испытывает влияние «прошлого» момента, как если бы он был, образно говоря по аналогии с пространственным случаем, «твёрдым» во времени.

Конечно, «твёрдость» как в пространстве, так и во времени значит в сущности передачу действия с мгновенной скоростью с периферии до центра электрона. Поскольку в конечном результате λ_0 стремится к нулю, то последнее замечание не вызывает затруднений.

Всё сказанное о λ -процессе можно резюмировать следующим образом: до Венцеля и Дирака точечный электрон рассматривался как предел пространственно-протяжённого заряда. Венцель и Дирак рассматривают точечный электрон как предел заряда, протяжённого симметрично во времени. При этом оказывается, что во втором случае классические трудности точечного заряда отсутствуют.

§ 12. УРАВНЕНИЕ ЛОРЕНЦА (обратное действие поля на электрон)

Учитывая обратное действие поля на электрон, мы в простом классическом случае получаем известное уравнение

$$m\ddot{R}(t) = -\frac{1}{3} \frac{e^2}{ac^2} \ddot{R} + \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \dddot{R} + \dots + F \dots, \quad (78)$$

где m — механическая масса электрона, a — «радиус электрона», F — внешняя сила. В коэффициенте при высших производных множителем входит радиус частицы a . Поэтому для точечного электрона ($a \rightarrow 0$) уравнение содержит производные не выше третьего порядка. Для точечного электрона, трактуемого обычным образом ($a \rightarrow 0$), электромагнитная масса электрона $\frac{e^2}{cc^2} \rightarrow \infty$. В теории Дирака электрон точечный, но благодаря особенностям теории собственная электромагнитная масса электрона обращается в нуль.

Таким образом, в теории Дирака уравнение (78) имеет вид:

$$m\ddot{R}(t) = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \dddot{R} + F. \quad (79)$$

Начиная построение своей новой теории, Дирак исходит из уравнения (79), вернее, делает попытку его обосновать, рассматривая наряду с запаздывающими потенциалами потенциалы опережающие*). Но, беря уравнение (79) как данное, Дирак¹⁸ приходит к резко необычным выводам относительно поведения электрона в электромагнитном поле: электрон может испытывать влияние электромагнитного импульса до того, как этот импульс доходит до электрона (т. е. до центра тяжести). Это значило бы, что электрон в некотором смысле протяжённый и сигнал по нему распространяется со скоростью, большей критической.

λ -процесс Венцеля-Дирака также приводит к уравнению (79); можно было думать поэтому, что λ -процесс также наделяет электрон этими особыми качествами, как и первый вариант теории классического электрона, данный Дираком в 1938 г. Более внимательное рассмотрение, однако, показывает, что это не так²⁵. В этом можно убедиться²⁵, сохраняя вектор в явном виде при выводе уравнения (78).

В λ -теории Венцеля-Дирака нет исключений для выполнения требований релятивистской инвариантности. Общее доказательство этого обстоятельства даётся скобкой Пуассона (64). При конечном $\lambda \neq 0$ мы действительно имели бы случай передачи действия со скоростью, большей скорости света (связь осуществлялась бы не только на световом конусе), но поскольку λ стремится в конце концов к нулю,

*) Первый вариант теории 1933 г.

то правая часть (64) в пределе не отличается от обычной четырёхмерной δ -функции, которая свидетельствует о выполнении требования критической скорости сигнала.

Исходная система уравнений также симметрична относительно знака времени ²⁵.

Правда, из основных уравнений теории:

$$\begin{aligned} m\ddot{\mathbf{R}} &= \int \rho (\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{R}}) \bar{\mathbf{E}} dv + \frac{1}{c} \int \rho (\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{R}}) [\dot{\mathbf{R}}\bar{\mathbf{H}}] dv, \\ \bar{\mathbf{E}} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{\mathbf{A}}}{\partial t} - \text{grad } \varphi; \quad \bar{\mathbf{H}} = \text{rot } \bar{\mathbf{A}}, \\ \nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= 4\pi \rho (\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{R}}), \\ \nabla^2 \bar{\mathbf{A}} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \bar{\mathbf{A}}}{\partial t^2} &= -4\pi \rho (\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{R}}) \end{aligned} \quad (80)$$

мы можем, исключая поле, получить уравнение (79). Здесь ρ — функция плотности. Мы пишем (80) в общем виде, ибо случай λ -теории отличается лишь частным видом функции плотности заряда (76).

Поскольку исходные уравнения (80) требуют для своего решения задания в начальный момент величин и их первых производных, постольку и для решения эквивалентного уравнения (78) должно быть достаточно этих начальных условий; поэтому, решая уравнение (78), нельзя произвольно задавать (как это делает Дирак в работе 1938 г.)

начальные или конечные значения $\ddot{\mathbf{R}}$ или даже высших производных.

В классической электродинамике вопрос о начальных условиях при переходе от системы уравнения (80) к (78) был рассмотрен подробно Белоусовым ¹⁹. Конечно, можно *à priori* брать уравнение (77) или (78) как данное вне всякой связи с системой (80), но такая теория не имеет отношения к теории Дирака-Венцеля.

§ 13. НЕЧЁТНАЯ РАСХОДИМОСТЬ

Для преодоления нечётной расходимости Дирак ¹ предлагает ввести некоторое новое вспомогательное поле, квантование которого даёт фотоны с отрицательной энергией и отрицательную нулевую энергию пустого пространства.

Если энергия обычного электромагнитного поля:

$$H_+ = \sum \frac{1}{2} (A_i^\dagger A_i + A_i A_i^\dagger) \hbar \nu_i = \sum \left(N_{i+} + \frac{1}{2} \right) \hbar \nu_i,$$

то энергия нового поля запишется в виде:

$$H_- = \sum \frac{1}{2} (a_i^\dagger a_i + a_i a_i^\dagger) \hbar \nu = - \sum \left(N_{i-} + \frac{1}{2} \right) \hbar \nu_i,$$

т. е. сумма

$$H_+ + H_- = \sum (N_{i+} - N_{i-}) \hbar \nu_i$$

не обладает нулевой энергией пустого пространства.

Так как нечётные расходимости связаны с наличием нулевых колебаний вакуума, то на пути, предлагаемом Дираком, можно надеяться избежать трудностей нечётных расходимостей.

Оказывается, что операторы a^+ и a существуют, но они обладают свойством:

$$[a^+ a] = -1,$$

в то время как обычные операторы амплитуд A^+ и A удовлетворяют соотношению:

$$[A^+ A] = 1.$$

Нечётные интегралы теперь берутся в пределах от $-\infty$ и исчезают

(например $\int_{-\infty}^{+\infty} k dk = 0$). Но, к сожалению, последовательное проведение этой второй идеи Дирака требует многих новых допущений. Трудности здесь заключаются в том, чтобы это новое вспомогательное поле ограничить его вспомогательными функциями и получить старые выражения для испускания и поглощения квантов (спонтанное излучение, коэффициенты Эйнштейна). В остальном же исключить влияние этого поля на физические процессы. Такая задача решается Дираком не ординарным путём. Дирак вводит в рассмотрение некоторый «воображаемый мир», «математический мир», где определяются все понятия и законы взаимодействия частиц с положительными и отрицательными квантами, а затем устанавливается связь этого математического мира с реально наблюдаемыми явлениями мира физического.

Обращают на себя внимание принципиально различные методологические концепции Дирака и Гейзенберга. Гейзенберг пытается путём рассмотрения только наблюдаемых величин ограничить варианты теоретических построений и, таким образом, найти новую теорию. Дирак, привлекая к рассмотрению более богатую формальными возможностями математическую схему «математического» «воображаемого» мира, пытается разрешить трудности современной теории, используя эту дополнительную свободу математических построений.

Если λ -процесс в случаях классических трудностей не ведёт к каким-либо новым затруднениям, то пока нельзя это сказать о второй идее Дирака.

С другой стороны, нечётная трудность является чисто квантовой трудностью, она может иметь свою причину в нашем неумении квантовать такие системы.

Можно думать, что трудности неклассических расходимостей связаны в конце концов с неудачной аналогией рассматривать поле как совокупность квантовых осцилляторов, пустое пространство рассматривать как «твёрдое тело».

§ 7. НЕЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ПОЛЯ

Все рассмотренные попытки легко обобщаются на случай полей неэлектромагнитных.

λ -процесс для случая мезонного поля рассматривался Паули, Яухом²⁰ и др. Характерные результаты здесь следующие. в тех случаях, когда кванты поля не имеют покоящейся собственной массы (фотон, нейтрино), λ -процесс превращает расходящиеся интегралы прежней теории в нули. В тех же случаях, когда кванты поля обладают собственной массой, отличной от нуля, расходящиеся выражения обычной теории сводятся с помощью λ -процесса к конечным выражениям, отличным от нуля.

Для собственной энергии источника поля получается конечное выражение порядка:

$$\propto g\mu,$$

где μ — собственная масса кванта поля, g — константа связи.

Для существующих теорий ядерных взаимодействий эта величина слишком мала в сравнении с собственной массой протона или нейтрона. С другой стороны, аномальный магнитный момент, даваемый λ -процессом для протона и нейтрона, не верен по знаку. Последняя неудача λ -процесса может быть, конечно, отнесена и за счёт несовершенной теории ядерных сил, но тем не менее это обстоятельство пока свидетельствует не в пользу λ -теории.

Правда, здесь соблазнительна принципиальная возможность считать собственную массу элементарных частиц равной одной универсальной константе, которая тождественна с массой электрона (поскольку электромагнитное поле по λ -теории ничего к этой массе не добавляет), а различие инертных масс элементарных частиц отнести за счёт их полей, которые по λ -теории в известных случаях дают некоторые добавочные конечные величины. Но, к сожалению, в существующих теориях (слабые связи) эти добавки малы²¹.

Необходимо особо подчеркнуть, что как попытки Гейзенберга, так и λ -теория преодолевают трудности, общие для всех полей расходимости. Теория ядерных полей имеет свои специфические трудности — аномальный рост с энергией поперечных сечений для многих эффектов, отсутствие стационарных состояний систем ядерных частиц для некоторых полей и т. д. Эти трудности λ -процесс не решает и не оставляет никакой надежды для их решений в будущем, так как математически λ -теория вполне закончена.

Конечно, вполне возможно, что какая-нибудь будущая теория единым образом разрешит все эти трудности, но так же законно думать, что единым образом должны быть разрешены лишь трудности, общие для всех теорий полей.

Но и здесь, как мы видим, λ -процесс даёт решение вопроса лишь в классических случаях — квантовые расходимости требуют новых изменений в теории.

Такое изменение частично достигается Дираком с помощью введения нового вспомогательного поля, но трудно отделаться от интуитивного ощущения примитивности нашего способа квантовать системы с бесконечным числом степеней свободы. Может быть, целесообразнее искать других путей квантования таких систем, чем вводить новые поля, вся задача которых состоит в формальном исправлении неудач вторичного квантования.

Более того, есть опасность, что второе предложение Дирака ведёт к некоторым новым трудностям²².

Наконец, остаётся важный вопрос о логарифмической расходимости для собственной электростатической энергии источника при учёте вакуума Дирака — здесь мы имеем указание либо на порочность метода λ -процесса, либо на несостоятельность обычного учёта влияния «заполненного фона».

В заключение, можно добавить, что при λ , отличном от нуля, все нечётные расходимости пропадают попрежнему, а чётные остаются конечными и не требуют введений отрицательных вероятностей, конечной делается и логарифмическая расходимость собственной энергии электрона. Наконец, это дало бы естественное «обрезание» ядерным силам и пр. Но в данном случае необходимо вектору λ придать иной физический смысл: либо связать его с полем, либо ввести как новую степень свободы для частицы, но, главное, мы всё равно получим теорию, которая в области λ противоречит релятивизму. Легко видеть, что сигнал в этой области (размер частицы) распространяется мгновенно.

Конечно, отказ от релятивизма «в малом» принципиально возможен (Дирак¹⁸), но тогда ценность и преимущество того или иного предлагаемого математического аппарата очень низка: простая классическая частица — твёрдый шарик — вполне отвечает этой концепции.

Отказ от релятивизма в «малом» даёт в сущности бесконечное разнообразие возможностей — здесь нужна также какая-то ограничивающая точка зрения.

Требования релятивистской инвариантности в настоящее время настолько уменьшают возможности математических спекуляций, что делают рациональным в теоретической физике «математическое творчество» как научный метод исследования. Правда, если считать, что электрон точечный, но неопределённым образом локализован в области λ , то связь не на световом конусе могла бы истолковываться не как противоречие с релятивизмом, а как результат принципиальной неточной локализации заряда²³. Но такое утверждение носит чисто словесный характер, — пока нет адекватного математического аппарата, ибо метод Гамильтона, как мы видим, не даёт никаких сведений об области λ (в этой области нет решений уравнения движения).

Делая обзор различным попыткам построения новых теорий излучения, мы ограничивались линейными теориями и уравнениями второго порядка.

Мы несколько полнее касались λ -теории потому, что это пока единственная релятивистски-инвариантная теория, которая имеет математически законченный вид и физически не ведёт к новым осложнениям. А, кроме того, по своим фактическим результатам в электродинамике («выбрасывание» бесконечностей) очень близка к фактической схеме Гейзенберга и идеям Гейтлера-Пенга. Последнее обстоятельство дало основание Гейтлеру²⁴ рассматривать λ -теорию Дирака как строгое изложение его идеи, — но мы теперь знаем, что, в случае мезонного поля теории дают принципиально различные результаты.

ЛИТЕРАТУРА

1. P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc.*, **180**, 1 (1942), Bakerian Lecture; P. A. M. Dirac, *Com. of the Dubl. Inst.* № 1 (1943).
2. W. Heisenberg, *Z. Physik*, **120**, 513 (1943).
3. W. Pauli, *Rev. Mod. Phys.*, **15**, 175 (1943).
4. W. Heitler and H. Peng, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **38**, 296 (1942).
5. П. А. М. Дирак, Основы квантовой механики, изд. второе, стр. 315.
6. Гейтлер, Квантовая теория излучения, стр. 199.
7. G. Wentzel, *Z. Physik*, **86**, 479 (1933), **86**, 635 (1933).
8. W. Pauli, *Hand. d. Phys.*, т. 24/1, стр. 271.
9. *Sow. Phys.*, **2**, 468 (1932).
10. G. Watagin, *Z. Physik*, **88**, 92 (1934).
11. O. Scherzer, *Ann. d. Phys.*, **34**, 585 (1939).
12. M. Markow, *Comp. Rend.*, **XL**, 18 (1943); *J. Physics USSR*, **II**, 453 (1940).
13. F. Bloch, *Sow. Phys.*, **5**, 301 (1934).
14. Мотт и Месси, Теория атомных столкновений, стр. 33 (1936).
15. E. Stueckelberg, *Ann. d. Phys.*, **21**, 367 (1934).
16. M. Markow, *Comp. Rend.*, **XL**, 246 (1943).
17. W. Pauli, *Rev. Mod. Phys.*, **18**, 203 (1941).
18. P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc.*, **167**, 148 (1938).
19. А. Белоусов, *Ж. Экспер. и Теор. Физ.*, **9**, 658 (1939).
20. I. Jauch, *Phys. Rev.*, **63**, 334 (1943).
21. W. Pauli, *Phys. Rev.*, **64**, 332 (1943); M. Markow, *C. R.* XLVII, 182 (1945).
22. S. Kusaka, *Phys. Rev.*, **64**, 379 (1943).
23. M. Markow, *J. Physics USSR*, **II**, 453 (1940).
24. Hamilton W., Heitler, H. Peng, *Phys. Rev.*, **64**, 78 (1943).
25. M. Markow, *J. Physics USSR*, **10**, 159 (1946).