1946 УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК, Т. XXIX, вып. 1—2

О НЕКОТОРЫХ «ПАРАДОКСАХ», СВЯЗАННЫХ СО СПЕКТРАЛЬНЫМИ РАЗЛОЖЕНИЯМИ

С. М. Рытов

В статье рассматриваются некоторые кажущиеся противоречия из области спектральных разложений, с которыми, как показывает практика, весьма часто сталкиваются работающие в области радио и спектроскопии. Ошибки, связанные с непониманием этих «парадоксов», нашли место в немалом количестве и в специальной литературе. Правильный подход к такого рода вопросам был дан академиком Л. И. Мандельштамом, которому принадлежит и доведение некоторых из них до полной ясности. Часть статьи (§§ 2 и 3) посвящена поэтому изложению соответствующих соображений акад. Л. И. Мандельштама.

1. «ПРОТИВОРЕЧИЕ» МЕЖДУ МАТЕМАТИКОЙ И ОПЫТОМ.

Спектральные разложения, широко применяемые в теории линейных колебаний (где выполняется принцип суперпозиции), основаны на теореме Фурье. Эта теорема утверждает, что при определённых ограничениях функция $f(t)$, вообще говоря, комплексная, может быть представлена либо интегралом

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(\omega)\, e^{i\omega t}d\omega, \qquad g(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}dt, \tag{1}$$

если она непериодическая, либо рядом

$$f(t)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{i\omega_n t}, \qquad c_n=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{+T} f(t)\, e^{-i\omega_n t}dt, \tag{2}$$

если она почти-периодическая, либо рядом

$$f(t)=\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t}, \qquad c_n=\frac{\omega}{2\pi}\int\limits_{-\frac{\pi}{\omega}}^{+\frac{\pi}{\omega}} f(t)\, e^{-in\omega t}dt, \tag{3}$$

если она периодическая. Во всех случаях $f(t)$ должна быть задана во всём интервале t от $-\infty$ до $+\infty$; для периодической функции задание в интервале $\left(-\frac{\pi}{\omega}, +\frac{\pi}{\omega}\right)$ этому равносильно. Таким образом, в разложениях Фурье, передающих поведение $f(t)$ во все времена, спектральные амплитуды c_n или спектральные плотности $g(\omega)$ не зависят от t, т. е. гармонический спектр неизменен, дан раз и навсегда.

Довольно часто этот непреложный математический факт вступает в конфликт с представлениями, почерпнутыми из самых, казалось бы, очевидных явлений, говорящих об изменении гармонического спектра во времени. Ведь не подлежит сомнению, что спектр, наблюдаемый в спектроскоп, исчезает тотчас же, как только мы погасим исследуемую искру или дугу, или что с прекращением работы радиостанции исчезают и несущая, и боковые полосы. Более того, спектр радиостанции непрерывно меняется во время самой передачи — от слова к слову, от сигнала к сигналу и при передаче оперы вечером он, несомненно, иной, чем при передаче известий утром. Как же в таком случае обстоит дело с теоремой Фурье?

Это кажущееся противоречие легко разрешается, если глубже проанализировать, что́, собственно, имеют в виду, когда говорят об изменяющемся спектре. Анализ, о котором идёт речь и который вносит ясность в вопрос, опирается на соображения, неоднократно высказывавшиеся покойным академиком Л. И. Мандельштамом в связи с некоторыми другими — в общем аналогичными — «парадоксами» из области спектральных разложений. Поскольку эти соображения имеют, таким образом, прямое отношение к поставленному выше вопросу и поскольку они недостаточно широко известны*), я начну с краткого их пересказа.

2. ЧТО ТАКОЕ «СИНУСОИДА С ПЕРЕМЕННОЙ АМПЛИТУДОЙ ИЛИ ЧАСТОТОЙ»?

Гармоническое или синусоидальное колебание — это по определению есть функция $A\cos(\omega t + \varphi)$ или в комплексном виде — функция

$$Ae^{i(\omega t+\varphi)}, \tag{4}$$

заданная во всём бесконечном интервале t от $-\infty$ до $+\infty$, причём амплитуда A, частота ω и начальная фаза φ — постоянные величины. Поэтому с точки зрения математика такие выражения, как «синусоида с переменной амплитудой», являются бессмысленными, противореча-

*) Л. И. Мандельштам останавливался на этих вопросах в своих лекциях и семинарах, которые пока ещё не опубликованы. В известной мере высказывания Л. И. Мандельштама, о которых идёт речь, нашли своё отражение лишь в специальных исследованиях его учеников, например, в работе Г. С. Горелика «Резонансные явления в системах с периодически меняющимися параметрами» (ЖТФ, **4**, 1783, 1934; **5**, 195 и 489, 1935) и в работе автора «Модулированные колебания и волны» (Труды ФИАН, **2**, вып. I, 1938).

щими самому определению синусоиды. Тем не менее физик и инженер повседневно и с успехом пользуются понятиями синусоидального колебания, монохроматического света, музыкального тона и т. п., невзирая на то, что реальные процессы никогда не бывают синусоидальными, хотя бы потому, что они имеют начало и конец. Очевидно, существуют такие условия, при которых колебания, уклоняющиеся от синусоидальности, можно с требуемой точностью рассматривать как синусоидальные. В чём эти условия заключаются?

Всякое изменение хотя бы одной из величин A, ω и φ в (4) равносильно наличию спектра частот, наличию набора синусоидальных колебаний. Так, например, при амплитудной модуляции вида

$$A = A_0(1 + k\cos\Omega t) \tag{5}$$

мы получаем (полагая для простоты $\varphi = 0$):

$$A_0(1 + k\cos\Omega t)\,e^{i\omega t} = A_0 e^{i\omega t} + \frac{kA_0}{2}\,e^{i(\omega+\Omega)t} + \frac{kA_0}{2}\,e^{i(\omega-\Omega)t}, \tag{6}$$

т. е. набор из трёх синусоидальных колебаний с частотами ω (несущая) и $\omega \pm \Omega$ (боковые частоты).

Правая и левая части (6) математически тождественны — это одно и то же. Спрашивать, что же мы имеем на самом деле — переменную ли амплитуду A у колебания $e^{i\omega t}$ или три синусоидальных колебания — лишено всякого смысла. Однако, всего 15 лет тому назад такой авторитетный учёный и радиоинженер, как Флеминг, поднял на страницах Nature *) полемику, утверждая, что реальной является только «модулированная несущая», а боковые частоты или полосы — это просто удобный вычислительный приём, математическая фикция, которой ничего не соответствует в действительности. Выводы отсюда касались отнюдь не высоких материй, а самых насущных практических вопросов. Так как на самом деле, писал Флеминг, мы имеем одну единственную частоту ω, то нет никаких оснований к установлению частотных интервалов между радиостанциями, и густота заселения эфира лимитируется только селективностью приёмников... Разумеется, Флеминг не смог последовательно защитить свою точку зрения, объявляющую левую часть (6) реальной, а тождественную ей правую часть — нереальной **). Ведь затруднительно ответить на вопрос о том, что реально: 10, 5+5 или 2+8.

Однако, если, имея 10 рублей, вы должны заплатить 2 рубля, то из всех возможных способов разбить 10 на слагаемые выделяется

---

*) См. Nature, 125, 93, 198, 271, 306, 1930. Более полные данные по литературе содержатся в моей работе «Модулированные колебания и волны», стр. 78 и след. (Труды ФИАН, 2, вып. I, 1938).

**) Не следует думать, что выступление Флеминга — единичный факт. Дискуссия о «реальности» боковых частот имеет довольно длинную историю, на которой, однако, мы останавливаться не можем. Ошибочные высказывания по этому вопросу встречаются в литературе и после дискуссии с Флемингом.

именно разбиение на 2 и 8. Другими словами, конкретные обстоятельства выделяют из всех математически равноценных способов представления способ, наиболее пригодный, наиболее целесообразный в данных условиях. Как указал Л. И. Мандельштам, то же самое относится и к рассматриваемому вопросу.

Не следует путать вопрос о реальности существования, который — если его ставить — во всяком случае решается одинаково для всех тождественных представлений, с вопросом о целесообразности того или иного из этих представлений. Говоря о «реальности» или «нереальности», фактически имеют в виду именно этот последний вопрос. Но он приобретает смысл и содержание только в том случае, если указано, что мы собираемся делать с колебанием (6), как и чем его исследовать. Безотносительно к свойствам воспринимающего или анализирующего аппарата этот вопрос повисает в воздухе.

В качестве иллюстрации Л. И. Мандельштам приводил ещё и такой пример. Предположим, что перед нами смесь из больших и малых, железных и медных шариков. Спрашивается, имеем ли мы железные и медные шарики или большие или малые. Не будучи в состоянии решить этот вопрос вообще, мы берём конкретный анализатор — сито — и просеиваем смесь. В результате оказывается, что она состоит из больших и малых шариков. Однако, другой анализирующий прибор — магнит — показывает нам, что реально в смеси содержатся железные и медные шарики.

В нашем случае нас конкретно интересует действие колебания (скажем, электродвижущей силы) вида (6) на селективное устройство, на линейный приёмник, обладающий определённой полосой пропускания, например, на простой резонансный контур. Целесообразность того или иного представления эдс определяется поэтому свойствами такого контура. Для тока I в контуре мы имеем уравнение

$$\ddot{I}+2h\dot{I}+\omega_0^2 I = Ae^{i\omega t} = A_0(1+k\cos\Omega t)\,e^{i\omega t}. \qquad (7)$$

Пусть контур настроен на несущую ($\omega_0=\omega$) и пусть показатель затухания $h \ll \omega$ и частота модуляции $\Omega \ll \omega$, как это имеет место в практических условиях. Тогда вынужденное колебание, с точностью до членов порядка h/ω и Ω/ω будет:

$$I = A_0\left[1+\frac{k}{\sqrt{1+\left(\frac{\Omega}{h}\right)^2}}\cos(\Omega t-\alpha)\right]\frac{e^{i\omega t}}{2i\omega h},\quad \operatorname{tg}\alpha=\frac{\Omega}{h}. \qquad (8)$$

Ход $I(t)$ существенно различен в зависимости от величины отношения Ω/h, которое можно толковать двояко. При спектральном подходе мы скажем, что это есть отношение частотного интервала между несущей и боковой частотой к полуширине резонансной кривой контура. Если же мы хотим говорить не о спектре, а о ходе вынужденного колебания во времени, то Ω/h представит собою (умноженное на 2π) отношение времени установления колебаний в контуре $1/h$ к периоду модуляции $\frac{2\pi}{\Omega}$. Разумеется, оба толкования совершенно равнозначны.

Если $\Omega \ll h$, т. е. модуляция медленна по сравнению со временем установления, или, говоря спектральным языком, боковые частоты $\omega \pm \Omega$ отодвинуты от несущей ω гораздо менее, чем на ширину резонансной кривой, то (8) даёт:

$$I = \frac{Ae^{i\omega t}}{2i\omega h} = \frac{A_0(1 + k\cos\Omega t)\,e^{i\omega t}}{2i\omega h}.$$

Таким образом, в этом случае, когда контур не разделяет гармонических компонент эдс, мы получаем неискажённое квазистационарное воспроизведение модуляции. В каждый данный момент колебание I в контуре таково, как если бы сила $Ae^{i\omega t}$ действительно была синусоидальной, т. е. как будто $A = \text{const}$. Вот эта квазистационарность, позволяющая учитывать изменение амплитуды (или частоты, или фазы) просто в окончательных формулах, полученных и строго справедливых для гармонического колебания, представляет собой именно то и только то, что может быть вложено в слова «синусоида с переменной амплитудой» (частотой, фазой).

С увеличением Ω/h модуляция I всё более сглаживается $\left(\text{коэффициентом глубины модуляции тока является } \frac{k}{\sqrt{1 + \left(\frac{\Omega}{h}\right)^2}}\right)$, и мы приходим к другому крайнему случаю $\Omega \gg h$, когда в контуре получается правильная синусоида

$$I = \frac{A_0 e^{i\omega t}}{2i\omega h}.$$

При этих условиях, т. е. при селективности, позволяющей выделять из спектра несущую или боковые частоты, нет никакого смысла говорить о «синусоиде с переменной амплитудой» и, наоборот, с полной ясностью выступает — если пользоваться терминологией Флеминга — «реальность» несущей и боковых частот. Совершенно так же в акустике имеет смысл говорить о биениях лишь до тех пор, пока наше ухо не может различить двух тонов разной высоты, а слышит один тон переменной громкости. Здесь воспринимающим аппаратом является ухо и критерием служит его разрешающая способность.

Простота квазистационарного рассмотрения, переносящего результаты, полученные для гармонических колебаний, на колебания негармонические, не раз заставляла забывать о том, что оно законно лишь при модуляциях, медленных по сравнению со временем установления воспринимающих аппаратов, т. е. при отсутствии разделения (как говорят оптики, разрешения) этими аппаратами отдельных спектральных компонент.

Разумеется, не осталась в стороне и синусоида с переменной частотой. Одно время в радиотехнике существовало мнение, что частотная модуляция, в отличие от амплитудной, разрешает проблему «тесноты в эфире», и даже был выдан соответствующий патент Робинсону. Рассуждение было таково.

При амплитудной модуляции мы имеем волновую полосу, ширина которой задана передаваемыми звуковыми частотами и, следовательно, не может быть уменьшена по нашему произволу. При частотной же модуляции мы имеем «одну единственную» частоту

$$\omega(t) = \omega_0(1 + k\cos\Omega t),$$

колеблющуюся в интервале от $\omega_0(1-k)$ до $\omega_0(1+k)$, ширина которого $2\omega_0 k$ может быть сделана сколь угодно малой путём уменьшения k, без каких-либо ограничений в отношении частоты модуляции Ω. Если мы возьмём теперь очень селективный приёмник и настроим его так, чтобы интервал $2\omega_0 k$ расположился под склоном резонансной кривой, то амплитуда колебаний в контуре будет меняться вдоль по резонансной кривой в такт с изменением $\omega(t)$. Частотная модуляция превратится в амплитудную, и тем более глубокую, чем круче резонансная кривая, т. е. чем выше селективность приёмника...

В действительности всё будет как раз наоборот. Резонансная кривая — это кривая стационарных амплитуд, устанавливающихся при действии синусоидальной эдс той или иной частоты. Если частота меняется, то предписываемые резонансной кривой значения амплитуд не будут успевать устанавливаться, и сглаживание модуляции будет тем сильнее, чем быстрее модуляция по сравнению со временем установления. При спектральном подходе это означает, что, разложив силу в гармонический ряд, мы получим при этом несущую ω_0 и боковые частоты $\omega_0 \pm \Omega$, $\omega_0 \pm 2\Omega$..., и, пользуясь — теперь уже законно — резонансной кривой, мы получим тем лучшее воспроизведение модуляции, чем шире резонансная кривая ($h \gg \Omega$), т. е. чем меньше селективность контура. И, наоборот, контур с очень высокой селективностью ($h \ll \Omega$) выведет нас из квазистационарных условий, откликаясь на каждую гармоническую компоненту спектра в отдельности.

3. МОЖНО ЛИ УСЛЫШАТЬ СИГНАЛ ДО ЕГО ПРИХОДА?

Если достаточно селективный аппарат может выделять отдельные гармонические колебания спектра, т. е., находясь под действием несинусоидальной силы, совершать *гармоническое* колебание с частотой, на которую он настроен, то мы сталкиваемся с новым «парадоксом». *Синусоидальное* колебание в аппарате — это значит *вечное* колебание, длящееся в частности с незапамятных времён. Как же примирить это с тем, что действующая сила может быть сигналом, например, телеграфным сигналом, начинающимся только с момента $t=0$? Выходит, что наш достаточно селективный резонатор может почувствовать сигнал до его прихода и способен, таким образом, предсказывать будущее... Почему же в действительности никакая сколь угодно высокая селективность резонатора не позволяет в таких случаях выловить из разложения Фурье вечно длящуюся отдельную синусоидальную компоненту?

Дело в том, что сила, начинающая действовать с какого-либо момента, является тем самым непериодической силой, а значит её спектр не содержит отдельных гармоник, а является сплошным. Это не ряд, а интеграл Фурье, т. е. непрерывный набор синусоид, из которого всякая сколь угодно острая полоса пропускания всегда вырежет не одну, а бесконечное множество синусоид. Для того чтобы можно было выделить отдельную гармонику, сила должна выражаться рядом Фурье, т. е. быть периодической или почти-периодической. Но тогда не возникает никакого противоречия, ибо сама сила действует повторяясь (или почти повторяясь) с $t=-\infty$. Нет ничего удивительного в том, что, скажем, периодически повторяющиеся телеграфные сигналы заставляют достаточно селективный (медленно устанавливающийся) контур «звенеть» непрерывно. Парадокс получается лишь тогда, когда сила до момента $t=0$ не действовала совсем, но, как сказано, в этом случае нельзя выделить отдельную синусоиду, так как в спектре таких синусоид нет.

Правда, здесь ещё нет исчерпывающего ответа. Остаётся неясным следующее. В непрерывном наборе синусоид в спектре сигнала $f(t)$:

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega)e^{i\omega t}d\omega, \qquad (9)$$

спектральные плотности $g(\omega)$ как раз таковы, что все эти синусоидальные колебания взаимно гасятся до момента $t=0$. Наш аппарат, обладающий пропускаемостью $\phi(\omega)$, даёт отклик:

$$f_1(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega)\,\phi(\omega)e^{i\omega t}d\omega,$$

причём функция $\phi(\omega)$ может быть сколь угодно острой*). Кажется весьма странным, что взаимное гашение синусоид происходит не только при специально вычисленных $g(\omega)$, но и при любых $g_1(\omega)=g(\omega)\phi(\omega)$. Надо доказать ещё, что это действительно так.

*) Вообще говоря, функция $\phi(\omega)$ комплексна, т. е. $\phi(\omega)=A(\omega)e^{i\varphi(\omega)}$. $A(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ радиотехники называют частотной и фазовой характеристиками аппарата. Такая терминология общепринята, но несколько нелогична, ибо для $A(\omega)$ название берётся по аргументу ω, а для $\varphi(\omega)$ — по функции φ. Естественней было бы называть $A(\omega)$ амплитудной характеристикой.

Возьмём опять простой резонансный контур, в котором сила $e^{i\omega t}$ вызывает колебание

$$\psi(\omega)\, e^{i\omega t} = \frac{e^{i\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\omega h},$$

а значит, сила (9) вызывает колебание

$$f_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(\omega)\, e^{i\omega t} d\omega}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\omega h}. \qquad (10)$$

Надо показать, что если при $t < 0$ $f(t) = 0$, то и $f_1(t) = 0$, каковы бы ни были ω_0 и h.

Обратимся с этой целью к плоскости комплексного переменного ω (рис. 1). Путь интегрирования — действительная ось. Подинтегральное выражение в (10) имеет два полюса:

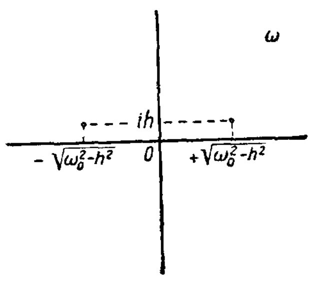

Рис. 1.

$$\omega = ih \pm \sqrt{\omega_0^2 - h^2},$$

которые при всяком $h > 0$ лежат в верхней полуплоскости. Мы можем замкнуть путь интегрирования бесконечно большой полуокружностью, если выберем последнюю так, чтобы интеграл вдоль неё ничего не добавлял к (10). Выбор означает при этом либо замыкание наверху, где $\mathrm{Im}\,\omega > 0$, либо внизу, где $\mathrm{Im}\,\omega < 0$. Чтобы произвести этот выбор, подставим в (10) выражение для $g(\omega)$:

$$g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} f(\xi)\, e^{-i\omega\xi} d\xi. \qquad (11)$$

Мы сразу берём здесь интегрирование только по $\xi > 0$, так как при $\xi < 0$ $f(\xi) = 0$. Подстановка в (10) даёт:

$$f_1(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} f(\xi)\, d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega(t-\xi)} d\omega}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\omega h}. \qquad (12)$$

В показателе экспонента в (12) стоит

$$i\omega(t-\xi) = i(\mathrm{Re}\,\omega + i\,\mathrm{Im}\,\omega)(t-\xi) = -\mathrm{Im}\,\omega\,(t-\xi) + i\,\mathrm{Re}\,\omega\,(t-\xi).$$

Таким образом, при $t - \xi > 0$ экспонент затухает при уходе в верхнюю полуплоскость ($\mathrm{Im}\,\omega > 0$), а при $t - \xi < 0$ — в нижнюю.

Нас интересует $f_1(t)$ при $t < 0$. Но если $t < 0$, то и подавно $t - \xi < 0$, ибо $\xi > 0$. Значит, мы должны замкнуть путь интегрирования в нижней полуплоскости. Так как он не охватывает при этом полюсов, то $f_1(t)=0$, что и требовалось доказать.

Если $t>0$, то для $\xi>t$ мы опять должны замкнуть путь в нижней полуплоскости, и эта часть интеграла по ξ (от t до ∞) даст нуль. Останется та часть, для которой $\xi<t$, и путь интегрирования должен быть замкнут наверху. Он охватывает тогда оба полюса подинтегрального выражения, и мы получаем:

$$t>0,\quad f_1(t)=\frac{1}{2\pi}\int_0^t f(\xi)\,d\xi \oint \frac{e^{i\omega(t-\xi)}d\omega}{\omega_0^2-\omega^2+2i\omega h}=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^t f(\xi)\,d\xi\frac{1}{2\sqrt{\omega_0^2-h^2}}\left\{\oint\frac{e^{i\omega(t-\xi)}d\omega}{\omega-ih+\sqrt{\omega_0^2-h^2}}-\right.$$

$$\left.-\oint\frac{e^{i\omega(t-\xi)}d\omega}{\omega-ih-\sqrt{\omega_0^2-h^2}}\right\}.$$

По теореме Коши вычеты обоих интегралов равны соответственно

$$2\pi i e^{i\left(ih-\sqrt{\omega_0^2-h^2}\right)(t-\xi)}\quad\text{и}\quad 2\pi i e^{i\left(ih+\sqrt{\omega_0^2-h^2}\right)(t-\xi)}.$$

Следовательно,

$$f_1(t)=\frac{1}{\sqrt{\omega_0^2-h^2}}\int_0^t f(\xi)\,d\xi\frac{i}{2}\left\{e^{-\left(h+i\sqrt{\omega_0^2-h^2}\right)(t-\xi)}-\right.$$

$$\left.-e^{-\left(h-i\sqrt{\omega_0^2-h^2}\right)(t-\xi)}\right\}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\omega_0^2-h^2}}\int_0^t f(\xi)\,e^{-h(t-\xi)}\sin\left[\sqrt{\omega_0^2-h^2}\,(t-\xi)\right]d\xi,$$

т. е. мы получили для $t>0$ тот вид решения, который обычно получают для уравнения

$$\ddot{I}+2h\dot{I}+\omega_0^2 I=f(t)$$

методом вариации произвольных постоянных при начальных условиях $I(0)=0$, $\dot{I}(0)=0$.

Разумеется, нельзя доказать — и этого нет в действительности, — что $f_1(t)=0$ после окончания сигнала. Наоборот, чем селективней резонатор, тем дольше он будет колебаться после прекращения действия силы. Но так как это происходит после действия силы, то и противоречия возникнуть не может.

Мы рассмотрели частный случай резонансного контура, но из доказательства ясно, что лишь одно единственное его свойство сыграло решающую роль: полюса пропускаемости $\psi(\omega)$ лежали в верхней полуплоскости, т. е. показатель затухания h был положителен, система была диссипативной. Очевидно, для любой диссипативной системы будет то же самое: все показатели затухания будут положительны. Если хоть один из них отрицателен, то всё доказательство теряет силу, и такая система может колебаться до прихода сигнала. Физик сразу же скажет, что она попросту самовозбудилась из-за регенерации. Но интеграл, конечно, не обязан знать, являются ли эти колебания ответом на ещё не пришедший сигнал или нет. Для него причин и следствий не существует, и он говорит просто, что в этом случае возможно $f_1(t) \neq 0$ как при $t > 0$, так и при $t < 0$, когда $f(t) = 0$.

4. ИДЕАЛЬНЫЙ ФИЛЬТР

Остановимся теперь на одном вопросе, показывающем, что мы ещё не вполне избавились от сюрпризов.

Мы говорили о пропускаемостях $\psi(\omega)$, которые выражаются для систем с n степенями свободы в виде единицы, делённой на полином степени $2n$ относительно ω, и обладают поэтому $2n$ полюсами. Но почему мы должны ограничиваться такими $\psi(\omega)$, тем более, что вычисление их для сложной системы довольно громоздко. Не проще ли вместо того, чтобы писать дифференциальные уравнения сложной цепи, задать $\psi(\omega)$, как это обычно делают практики, какой-либо удобной функцией, достаточно хорошо аппроксимирующей экспериментальные частотную и фазовую характеристики аппарата. Возьмём, в частности, идеальный фильтр, у которого

$$\psi(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{в полосе частот от } \omega_0 - \Delta \text{ до } \omega_0 + \Delta, \\ 0 & \text{всюду вне этой полосы.} \end{cases}$$

Отклик такого фильтра на силу (9) будет

$$f_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\omega_0-\Delta}^{\omega_0+\Delta} g(\omega)\, e^{i\omega t} d\omega. \tag{13}$$

Можно ли доказать, что этот отклик равен нулю до $t = 0$, т. е. до начала сигнала? Отнюдь нет, и, наоборот, легко убедиться в противоположном.

Действительно, подставив в (13) выражение (11) для $g(\omega)$ и выполнив интегрирование по ω, получаем

$$f_1(t) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\infty f(\xi)\, e^{i\omega_0(t-\xi)} \frac{\sin\Delta(t-\xi)}{t-\xi}\, d\xi.$$

Предположим для определённости, что сигнал, начинающийся в момент $t = 0$ [это уже учтено в (11)], представляет собой колебание

$f(t)=e^{i\omega_0 t}$, длящееся до момента $t=T$. Тогда $f(\xi)=e^{i\omega_0\xi}$ в интервале $(0, T)$, и $f_1(t)$ принимает вид:

$$f_1(t)=\frac{e^{i\omega_0 t}}{\pi}\int\limits_0^T \frac{\sin\Delta(t-\xi)}{t-\xi}\,d\xi=\frac{e^{i\omega_0 t}}{\pi}\int\limits_{\Delta(t-T)}^{\Delta t}\frac{\sin x}{x}\,dx. \tag{14}$$

Последнее выражение получено заменой переменного интегрирования $\Delta(t-\xi)=x$.

Из (14) следует, что $f_1(t)$ стремится к нулю как при $t\to\infty$, так и при $t\to-\infty$, но, вообще говоря, при $t<0$, т. е. до начала сигнала, отклик $f_1(t)\neq 0$. Таким образом, наш фильтр принимает сигнал до его прихода. В чём же здесь дело?

Ответ содержится уже в самой постановке вопроса. Мы выдумали «аппарат», который заведомо не может быть реализован с помощью линейных устройств, т. е. устройств, описываемых линейными дифференциальными уравнениями. Если же мы захотим прибегнуть к *нелинейным* системам (скажем, типа автопараметрических фильтров, или к системам, содержащим реле), то надо сразу же забыть о разложениях Фурье и, вообще, каких бы то ни было разложениях силы, так как в нелинейных системах нет принципа суперпозиции. Пропускаемость $\phi(\omega)$ можно понимать в этом случае как набор тех стационарных режимов, которые имеют место в нашей системе при действии синусоидальной силы той или иной частоты ω, но знание $\phi(\omega)$ не позволяет сделать никаких заключений о том, что получится при одновременном действии на аппарат хотя бы двух синусоид, не говоря уже о силе со сплошным спектром. Таким образом, линейный аппарат, действующий согласно (13), это действительно математическая фикция, вроде опережающих потенциалов в электродинамике.

5. ЧТО ТАКОЕ «СПЕКТР», МЕНЯЮЩИЙСЯ СО ВРЕМЕНЕМ

Предположим, что радиостанция излучает модулированное колебание (6), но не вечно, а с момента $t=0$ до $t=T$. Что мы имеем в виду, когда говорим, что спектр (6) существует лишь во время работы станции, а до и после этого промежутка времени его нет? Мы понимаем под этим, что какой бы селективный приёмник, легко разделяющий несущую и боковые частоты, мы ни взяли, мы не обнаружим при неработающей станции ни этой несущей, ни боковых частот. Аналогично, когда мы говорим о том, что спектр искры исчезает вместе с гашением самой искры, мы подразумеваем исчезновение той картины спектральных линий, которую мы наблюдаем в спектроскоп. Речь идёт, таким образом, об *отклике воспринимающего аппарата*, а не о разложении Фурье действующей на этот аппарат силы. Но тогда сразу же выступает различие между теми спектральными компонентами силы, которые наш аппарат разрешает, т. е. которые раздвинуты по частоте больше, чем на ширину его резонансной кривой, и теми, которых он не разрешает.

Возьмём сначала пример, в котором фигурировали бы только периодические модуляции силы. Пусть в излучении радиостанции (6), кроме модуляции со звуковой частотой Ω, происходит (скажем, из-за питающей сети) ещё очень медленная модуляция с частотой Ω', соответствующей, например, одному периоду в минуту. Тогда колебание эдс, действующей на приёмник, будет

$$\begin{aligned} &A_0(1+k'\cos\Omega' t)(1+k\cos\Omega t)e^{i\omega t}=\\ &=A_0(1+k'\cos\Omega' t)\left\{e^{i\omega t}+\frac{k}{2}e^{i(\omega+\Omega)t}+\frac{k}{2}e^{i(\omega-\Omega)t}\right\}=\\ &=A_0e^{i\omega t}+\frac{k'A_0}{2}e^{i(\omega+\Omega')t}+\frac{k'A_0}{2}e^{i(\omega-\Omega')t}+\frac{kA_0}{2}e^{i(\omega+\Omega)t}+\\ &+\frac{k'kA_0}{4}e^{i(\omega+\Omega+\Omega')t}+\frac{k'kA_0}{4}e^{i(\omega+\Omega-\Omega')t}+\frac{kA_0}{2}e^{i(\omega-\Omega)t}+\\ &+\frac{k'kA_0}{4}e^{i(\omega-\Omega+\Omega')t}+\frac{k'kA_0}{4}e^{i(\omega-\Omega-\Omega')t}. \end{aligned} \tag{15}$$

Последние две строчки представляют собою разложение Фурье нашей эдс, состоящее из 9 настоящих синусоид. В результате очень медленной модуляции Ω' несущая ω и боковые частоты $\omega\pm\Omega$ расщеплены каждая на три весьма близких частоты. Рис. 2 даёт представление о виде спектра, но, разумеется, масштабы на нём не выдержаны. Ведь Ω соответствует, скажем, 1000 циклов, а Ω' — $^1/_{60}$ цикла.

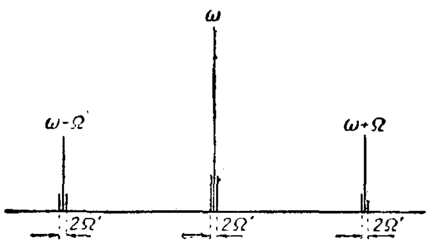

Рис. 2.

Контур, с помощью которого мы хотим получить хорошее воспроизведение звуковой модуляции, должен иметь резонансную кривую, более широкую, чем 2Ω. Колебание в таком контуре будет тогда вполне квазистационарным, т. е. будет описываться верхней строчкой (15) — синусоидой, амплитуда которой меняется с частотами Ω и Ω'. Намереваясь разделить несущую ω и боковые частоты $\omega\pm\Omega$, мы берём более селективный контур, резонансная кривая которого гораздо у́же Ω. Но если эта кривая гораздо шире Ω' — а практически так оно и будет, ибо мы не умеем строить контуры с декрементами порядка 10^{-7} и меньше,— то отклик такого контура будет соответствовать второй строчке (15). Мы выделили несущую ω или боковые частоты $\omega\pm\Omega$, но амплитуда каждой из этих «спектральных компонент» будет квазистационарно повторять очень медленную модуляцию Ω'.

Аналогично обстоит дело и в том случае, когда колебание (6) промодулировано функцией

$$F(t)=\begin{cases} 1 \text{ при } 0<t<T, \\ 0 \text{ вне интервала } (0,\ T). \end{cases} \qquad (16)$$

Гармоническое разложение этой функции даётся интегралом Фурье

$$F(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1-e^{-i\alpha T}}{\alpha}\,e^{i\alpha t}d\alpha,$$

плотность которого имеет максимум в точке $\alpha=0$, равный $\frac{T}{2\pi}$ и тем более острый, чем больше T. Колебание (6), длящееся от $t=0$ до $t=T$, можно представить поэтому в видах:

$$A_0F(t)(1+k\cos\Omega t)\,e^{i\omega_0 t}=A_0F(t)\left\{e^{i\omega_0 t}+\frac{k}{2}e^{i(\omega_0+\Omega)t}+\frac{k}{2}e^{i(\omega_0-\Omega)t}\right\}=$$

$$=\frac{A_0}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1-e^{-i(\omega-\omega_0)T}}{\omega-\omega_0}\,e^{i\omega t}d\omega+\frac{kA_0}{4\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1-e^{-i(\omega-\omega_0-\Omega)T}}{\omega-\omega_0-\Omega}\,e^{i\omega t}d\omega+$$

$$+\frac{kA_0}{4\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1-e^{-i(\omega-\omega_0+\Omega)T}}{\omega-\omega_0+\Omega}\,e^{i\omega t}d\omega. \qquad (17)$$

В интегралах мы произвели замену переменного интегрирования, положив $\omega=\omega_0+\alpha$ в первом, $\omega=\omega_0+\Omega+\alpha$ — во втором и $\omega=\omega_0-\Omega+\alpha$ — в третьем.

Нижнее выражение есть разложение Фурье нашего колебания, представляющее собой суперпозицию трёх сплошных спектров с максимумами на частотах ω_0 и $\omega_0\pm\Omega$. Наличие начала и конца у колебания (6) привело, таким образом, к тому, что отдельные спектральные линии ω_0 и $\omega_0\pm\Omega$ размазались, превратившись в максимумы сплошного спектра. Ширина этих максимумов порядка $1/T$ и, следовательно, составляет примерно 1 цикл, если колебание длится в течение $T=1$ *сек*. Опять-таки приёмник с реально достижимой селективностью сможет разделить максимумы друг от друга, но пропустит целиком всю существенную полосу частот около каждого максимума. А это означает, что приёмник квазистационарно воспроизведёт модуляцию $F(t)$ и, следовательно, несущая ω_0 и боковые частоты $\omega_0\pm\Omega$ появятся в момент $t=0$ и исчезнут в момент $t\approx T$ [вторая строчка (17)]. По доказанному в предыдущем параграфе мы можем утверждать даже большее: ни при какой селективности приёмника ни несущая, ни боковые частоты не произведут отклика раньше $t=0$. Однако, после $t=T$ отклик будет длиться тем больше, чем выше селективность приёмника.

Говоря, что спектр излучения радиостанции меняется от одного произносимого перед микрофоном слова к другому и даже от слога к слогу, мы представляем себе, что отклик фильтра, выделяющего некоторый узкий участок боковой полосы спектра, всё время дышит в такт с передаваемой речью или музыкой. Это значит, что наш фильтр, пропускающий полосу, например, от 1000 до 1100 циклов, не способен разделить спектральные компоненты, отстоящие друг от друга менее, чем на 100 циклов. Так как смена слогов происходит с частотами порядка 10 циклов, то на выходе фильтра, на частоте около 1000 циклов, мы получаем квазистационарный отпечаток смены слогов.

В заключение несколько слов о спектральном оптическом аппарате. Здесь всё сказанное выступает особенно наглядно, так как спектроскоп даёт картину, в которой частотная шкала представлена вся сразу в виде пространственной шкалы.

Диффракция на объективе трубы приводит, как известно, к тому, что даже при идеально монохроматическом свете и бесконечно тонкой щели коллиматора мы получаем в фокальной плоскости трубы, в точке, соответствующей частоте света ω, не отдельную линию, а лишь главный максимум непрерывной диффракционной картины. Спектроскоп разрешает лишь настолько раздвинутые частоты, главные максимумы которых в достаточной степени не перекрываются. Для более близких частот мы имеем наложение колебаний в одном и том же месте спектральной картины и, следовательно, наблюдаем в этом месте результат сложения этих колебаний.

Благодаря тому, что исследуемый источник посылает свет в спектроскоп не вечно, а от момента $t=0$ до $t=T$, каждая монохроматическая компонента излучения (если допустить, что такие компоненты вообще существуют) промодулирована функцией (16). Если речь идёт о T, превышающих 10^{-11} секунды, то современные спектроскопы не в состоянии обнаружить уширение линий, возникающее из-за этой модуляции. Главные максимумы, отвечающие синусоидальным компонентам колебания $F(t)e^{i\omega t}$, практически лягут друг на друга, и мы увидим один единственный максимум на частоте ω, промодулированный функцией $F(t)$, т. е. появляющийся и исчезающий вместе с зажиганием и гашением источника.

Итак, «переменный спектр» — это разложение Фурье, не доведённое до конца. Его спектральные амплитуды зависят от времени — меняются квазистационарно в соответствии с теми частотными интервалами, которых данный аппарат не разрешает. Теорема Фурье даёт разложения, которые физически мог бы реализовать только аппарат с бесконечно большой разрешающей силой, реальные же аппараты обладают конечной разрешающей силой, и наша спектральная интуиция, почерпнутая из поведения таких аппаратов, относится к «недоразложенным» спектрам, состоящим из «синусоид с переменными амплитудами, частотами или фазами».