

МИКРОРАДИОВОЛНЫ

Э. Ю. Кондон *)

Глава II. ЛИНИИ ПЕРЕДАЧИ

В области низких частот энергия передаётся из одного места пространства в другое (например, от генератора к антенне) с помощью линии передачи, состоящей обычно из двух проводников, например, двух параллельных проводов или коаксиального кабеля. Такие же линии передачи играют важную роль и в микроволновом радио. Однако, наряду с этими линиями передачи, в практике микрорадиозолн для передачи энергии употребляются также полые трубы, получившие наименование волноводов.

Теории волноводов будет посвящена следующая, III глава настоящего обзора; здесь же мы ограничимся линиями передачи из двух проводников.

11. Линии передачи из двух проводников

Наиболее общим видом линии передачи этого типа является коаксиальный кабель, состоящий из двух круговых проводников внутреннего радиуса $r=a$ и внешнего радиуса $r=b$. Теория такого кабеля тесно связана с теорией коаксиального полого резонатора, рассмотренной в § 5. Направим ось z вдоль линии передачи и предположим, что сечение в произвольной плоскости $z=\text{const}$ ограничено двумя кривыми: внутренней C_1 и внешней C_2 (ср. рис. 4). Мы будем искать решения уравнения (5.1), в которых зависимость от координаты z имеет вид $e^{-ik_z z}$, т. е. представляет бегущие волны, распространяющиеся в положительном направлении оси z . Фазовая скорость их

$$u_p = \frac{\omega}{k_z}. \quad (11.1)$$

Если обозначить через k отношение ω/C и положить $E_z = H_z = 0$, то уравнения (5.1) приводят к следующим соотношениям, описываю-

*) Продолжение, см. УФН, т. 27, стр. 213, 1945. Перевод В. Г. Левича. Редакция просит читателей исправить опечатки, вкравшиеся в первую часть статьи Кондона. Список этих опечаток приводится в настоящем выпуске, стр. 258.

щим зависимость компонент поля от координат x и y :

$$\begin{aligned} kE_x &= k_3 H_y, & kE_y &= -k_3 H_x, \\ 0 &= \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}, \\ -kH_x &= k_3 E_y, & -kH_y &= -k_3 E_x, \\ 0 &= \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}. \end{aligned}$$

Последние z -компоненты этих уравнений показывают, что вектора E и H можно представить через градиент некоторой скалярной функции $u(x, y)$. Аналогично тому, как это было сделано в § 5, положим:

$$\begin{aligned} E_z &= -\text{grad } u(x, y), \\ -kH_z &= [k_3 \mathbf{k}, \text{grad } u(x, y)]. \end{aligned} \quad (11.2)$$

Последние соотношения показывают, что $k_3 = \pm k$, так что фазовая скорость волн в кабеле равна $\pm C$. Z -компонента уравнения для $\text{rot } H$ требует, чтобы функция $u(x, y)$ удовлетворяла уравнению Лапласа:

$$\Delta u(x, y) = 0. \quad (11.3)$$

Так как граничные условия, которым удовлетворяет функция $u(x, y)$, те же, что и у аналогичной ей функции в теории резонатора, именно $u = \text{const}$ на кривых C_1 и C_2 , то все результаты, полученные в § 5 для полого резонатора с двойными стенками, могут быть перенесены на коаксиальный кабель.

Пусть, $u(x, y)$ такое решение краевой задачи, что координаты x и y являются периодическими функциями с периодом 2π сопряженной к u функции $v(x, y)$, как это имело место в (5.26). Пусть, далее, значения u на внутреннем и внешнем проводниках будут соответственно u_1 и u_2 . Тогда для волн, распространяющихся в положительном направлении оси z , мы имеем:

$$\begin{aligned} E_z &= -\text{grad } u(x, y) \cos(\omega t - kz), \\ H_z &= [-\mathbf{k}, \text{grad } u(x, y) \cos(\omega t - kz)], \end{aligned} \quad (11.4)$$

а для волн, распространяющихся в противоположном направлении:

$$\begin{aligned} E_z &= -\text{grad } u(x, y) \cos(\omega t + kz), \\ H_z &= [+ \mathbf{k}, \text{grad } u(x, y) \cos(\omega t + kz)]. \end{aligned} \quad (11.5)$$

Характеристический импеданс. Как указывалось уже в § 5, решения, в которых координаты (x, y) являются периодическими функциями v с периодом 2π , соответствуют амплитудам тока на внутреннем и внешнем проводниках, равным $1/2$ абс. A и ампли-

туде ($u_2 - u_1$) стат. вольт у линейного интеграла от напряжённости E , взятого от одного до второго проводника по кривой, лежащей в плоскости $z = \text{const}$. Следовательно, отношение амплитуд разности потенциалов и тока равно

$$Z = 60 (u_2 - u_1) \text{ ом.} \quad (11.6)$$

Эту величину называют характеристическим, или волновым импеданцем линии передачи.

Волновой импеданц линии передачи, определённый таким образом, совпадает с найденным в § 5 импеданцем полого резонатора с двойными стенками.

Волновой импеданц линии передачи может быть определён и несколько иным путём, позволяющим яснее представить себе физический смысл этой величины. Обозначим через C_1 ёмкость единицы длины конденсатора, образованного двумя проводниками линии передачи. Предположим, что потенциал одного из них равен нулю, а второго V стат. вольт. Тогда заряд на единицу длины равен $C_1 V$ эл. ст. ед./см. Если линия передачи питается таким образом, что в неё посылаются волны, распространяющиеся слева направо со скоростью c , в её входном конце должен возбуждаться ток, поддерживающий должное значение заряда на обоих проводниках. Соответствующий ток равен $c C_1 V$ абс. един., или $C_1 V$ абс. ампер. Следовательно, если определить входное сопротивление линии передачи как отношение разности потенциалов к току, мы имеем

$$Z = \frac{300 V}{10 C_1 V} = \frac{30}{C_1} \text{ ом.} \quad (11.7)$$

Если пространство между обоими проводниками заполнено средой с диэлектрической постоянной ϵ и магнитной проницаемостью μ , то легко видеть, что входное сопротивление линии будет равно

$$Z = \left(\frac{\mu}{\epsilon} \right)^{1/2} \frac{30}{C_1} \text{ ом,} \quad (11.8)$$

где C_1 — ёмкость на единицу длины при ϵ и μ , равных единице.

Ёмкость на единицу длины кругового коаксиального кабеля равна

$$C_1 = \frac{1}{2 \lg \frac{b}{a}}, \quad (11.9)$$

и, следовательно, волновой импеданц такой линии передачи равен

$$Z = \left(\frac{\mu}{\epsilon} \right)^{1/2} 60 \lg \frac{b}{a}. \quad (11.10)$$

Аналогично, в случае коаксиальных конфокальных эллиптических цилиндров с фокальным расстоянием f и полуосями, соответственно

a и b для волнового импеданца получается [ср. (5.27)] выражение:

$$Z = \left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{1/2} 60 \left[\text{Arch}\left(\frac{b}{f}\right) - \text{Arch}\left(\frac{a}{f}\right) \right]. \quad (11.11)$$

Линии передачи, в которых один из проводников полностью окружён другим, являются предпочтительными перед «открытыми» линиями, например парой параллельных проводов, так как закрытая система самоэкранируется и не взаимодействует с окружающими проводниками. Однако, теория передачи, изложенная в этом параграфе, в равной мере применима и к открытым линиям передачи, где кривые C_1 и C_2 ограничивают два проводника, лежащих один вне другого.

Важным частным случаем «открытой» линии передачи является случай двух круглых проводов радиуса r , центры которых лежат на расстоянии d друг от друга. При этом ёмкость системы на единицу длины

$$C_1 = \frac{1}{4 \text{ Arch } \frac{d}{2r}},$$

так что волновой импеданц

$$Z = \left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{1/2} 120 \text{ Arch } \frac{d}{2r}. \quad (11.12)$$

Другим важным случаем является система из двух пластин шириною b , находящихся на расстоянии d друг от друга, причём $d \ll b$. Для такой линии

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \frac{d}{4\pi b}, \\ Z &= \left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{1/2} \frac{120\pi d}{b}. \end{aligned} \right\} \quad (11.13)$$

так что

Пример. Как велико должно быть расстояние между поверхностями параллельных проводов линии передачи для того, чтобы волновой импеданц линии был равен 73 ом.

Ответ. Около $19\frac{0}{10}$ диаметра проводов.

Каково должно быть отношение радиусов внутреннего и внешнего цилиндров коаксиального кабеля для того, чтобы волновой импеданц был равен 73 ом.

Ответ: $b/a = 3,36$.

Уравнения линии передачи. До сих пор мы рассматривали теорию линий передачи с точки зрения теории поля. В технической литературе*), однако, линии передачи рассматриваются на основе

*) В качестве хорошего элементарного введения можно указать на руководство *Everitt*⁹, а также и некоторые важные статьи, см. ¹⁰.

метода цепей с сосредоточенными постоянными. Чтобы привести сравнение обоих методов расчёта, мы изложим вкратце и этот последний.

Линия передачи считается эквивалентной предельному случаю цепи, изображённой на рис. 7, в котором каждая из линий считается состоящей из малых параметров и большое число линий включается так, чтобы, например, индукция каждой из линий, помноженная на число их, приближалась к пределу L , индукции, отнесённой на единицу длины. То же относится и к сопротивлению R , проводимости G и ёмкости C , отнесённым к единице длины.

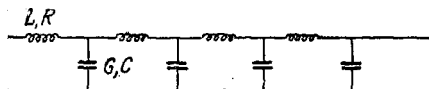


Рис. 7. Цепь с сосредоточенными постоянными, эквивалентная линии передачи.

Если $V(z, t)$ — разность потенциалов верхней линии по отношению к точкам нижней линии с той же координатой z и $I(z, t)$ — ток, текущий слева направо в верхней и в обратном направлении в нижней линии, мы должны иметь:

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -RI - L \frac{\partial I}{\partial t}, \quad (11.14)$$

где R и L — сопротивление в омах и индукция в генри, отнесённые на единицу длины.

Аналогично, если G — проводимость в мегаомах и C — ёмкость в фарадах на единицу длины, то

$$\frac{\partial I}{\partial z} = -GV - C \frac{\partial V}{\partial t}. \quad (11.15)$$

Эти два уравнения составляют основу теории цепей с сосредоточенными постоянными. Полученные ранее с помощью уравнений теории поля результаты соответствуют идеальному случаю R и G , стремящихся к нулю. Прежде чем перейти к обсуждению решения уравнений (11.14) и (11.15), желательно связать фигурирующие в них величины с понятиями, которыми мы пользовались в теории поля. Прежде всего в теории цепей с сосредоточенными постоянными мы говорим о разности потенциалов между двумя линиями. С другой стороны, мы знаем, что быстропеременное электрическое поле нельзя описать с помощью одного скалярного потенциала. Мы можем устранить это противоречие, отождествив $V(z, t)$ с линейным интегралом от напряжённости поля $E(x, y, z, t)$ по пути, соединяющему обе линии и лежащему в плоскости $z = \text{const}$. Поскольку, как мы видели, в плоскости $z = \text{const}$ компонента напряжённости поля E_z может быть представлена как градиент скалярного потенциала, результат интегрирования не зависит при этом от выбора пути интегрирования.

Понятие силы тока можно связать с величинами, фигурирующими в теории поля следующим образом. Вычислим линейный интеграл от

напряжённости магнитного поля \mathbf{H} по контуру, лежащему в плоскости $z = \text{const}$ бесконечно близко к одному из проводников. Из уравнения $\text{rot } \mathbf{H} = 4\pi \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ следует, что

$$\oint \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int \text{rot } \mathbf{H} d\mathbf{s} = 4\pi \int \mathbf{j} d\mathbf{s},$$

причём поверхностный интеграл берётся в плоскости $z = \text{const}$ по области, заключённой внутри контура интегрирования в интеграле слева.

Ток смещения не вносит доли в линейный интеграл, так как вектор $\partial \mathbf{D} / \partial t$ всюду направлен перпендикулярно к поверхности проводника. Следовательно, полный ток, текущий в проводнике, $I(z, t)$ равен

$$I(z, t) = \frac{1}{4\pi} \oint \mathbf{H} d\mathbf{l}. \quad (11.16)$$

Что же касается индукции, отнесённой на единицу длины, то её нужно понимать следующим образом: пространственное распределение магнитного поля между проводниками в случае больших частот является таким же, как и при постоянных токах. Магнитная энергия, заключённая между z и $z + dz$, выражается интегралом $\int (\mathbf{H}^2 / 8\pi) dV$, который берётся по объёму, заключённому между этими плоскостями. Приравняв этот интеграл величине $(L dz) I^2 / 2$, мы получаем удовлетворительное определение величины индукции L , отнесённой к единице длины. Если выражать ток I в абс. амперах и энергию в эргах, L будет отвлечённым числом.

Аналогично ёмкость, отнесённую к единице длины, нужно связать с энергией электрического поля, заключённой между плоскостями z и $z + dz$ соотношением

$$C dz = \frac{v^2}{2} = \int \frac{\mathbf{E}^2}{8\pi} dv.$$

Если v выражено в абс. вольтах и энергия в эргах, C является отвлечённым числом.

Можно показать, что $LC = 1$ при такой частоте, при которой магнитный поток, проходящий через проводник, можно считать ничтожно малым. Сопротивление на единицу длины должно быть определено как сумма сопротивлений обеих линий, с должным учётом скин-эффекта.

Проводимость на единицу длины определяется через диссипативные характеристики диэлектрика, как будет показано в дальнейшем (см. § 15).

Распределение потенциала и тока. Мы рассмотрим сейчас решение уравнений (11.4) и (11.15), соответствующее распростра-

нению простой гармонической бегущей волны, т. е. положим

$$V = Ve^{i(\omega t - kz)}, \quad I = Ie^{i(\omega t - kz)}. \quad (11.17)$$

Подставляя это значение V и I в (11.14) и (11.15), мы находим для амплитуд V и I :

$$ikV = (R + i\omega L) I, \quad ikI = (G + i\omega C) V. \quad (11.18)$$

Эта система уравнений приводит к отличным от нуля значениям амплитуд V и I , если только постоянная k имеет значение

$$k^2 = \omega^2 \left(L - \frac{iR}{\omega} \right) \left(C - \frac{iG}{\omega} \right) = -(R + i\omega L)(G + i\omega C). \quad (11.19)$$

В случае линии без потерь, в которой $R = 0$ и $G = 0$, это приводит к условию

$$k = \omega (LC)^{1/2}. \quad (11.20)$$

В такой цепи волны распространяются в обоих направлениях без затухания, с фазовой скоростью $1/(LC)^{1/2}$. Из определения L и C следует, что эта скорость как раз равна скорости света в пустоте c . В общем случае линии передачи с потерями уравнение (11.19) приводит к комплексным значениям k . Это означает, что происходит затухание волн. Величина затухания (определяемая мнимой частью k) зависит от частоты, и поэтому в линии передачи происходит искажение в передаче всякого немонохроматического сигнала. Легко видеть, однако, что в частном случае, когда $LG = RC$, затухание не зависит от ω , а вещественная часть k пропорциональна ω , так что фазовая скорость оказывается одинаковой для всех частот. Такая линия передачи называется линией без искажений. Развитие теории подобного рода линий передачи играет весьма важную роль для передачи электроэнергии на большие расстояния и телефонии.

Поэтому теория цепей с сосредоточенными постоянными получила весьма широкое развитие, и изложению её посвящено большое количество специальных руководств, к которым мы отсылаем читателя за деталями.

§ 12. Линия передачи с нагрузкой

Рассмотрим линию передачи, заканчивающуюся в точке $z = L$ некоторой нагрузкой, характеризуемой импедансом Z_L . Вообще говоря, в линии будут существовать волны, текущие как по направлению к нагрузке, так и в противоположном направлении. Интерферируя друг с другом, они образуют систему стоячих волн, налагающуюся на бегущие волны. Благодаря этому отношение напряжения к току в различных точках цепи оказывается различным.

Предположим, что характеристический импеданс цепи равен Z_0 . Если амплитуды волн напряжения, распространяющихся в положительном и отрицательном направлениях оси z , равны соответственно V_1

и V_2 , напряжённость поля в любой точке z будет выражаться вещественной частью величины

$$V = (V_1 e^{-ikz} + V_2 e^{+ikz}) e^{i\omega t}, \quad (12.1)$$

и полный ток, текущий в цепи в точке z ,

$$I = \frac{1}{Z_0} (V_1 e^{-ikz} - V_2 e^{+ikz}) e^{i\omega t}. \quad (12.2)$$

Заметим, что амплитуды V_1 и V_2 являются, вообще говоря, комплексными числами.

В точке $z=L$, в которой линия оканчивается импеданцем Z_L , имеем $V=Z_L I$, так что

$$Z_L = \frac{Z_0 (V_1 e^{-ikL} + V_2 e^{ikL})}{V_1 e^{-ikL} - V_2 e^{ikL}}. \quad (12.3)$$

На внешнем конце линии при $z=0$ входной импеданс Z равен отношению V/I , т. е.

$$Z_0 \frac{V_1 + V_2}{V_1 - V_2} = Z. \quad (12.4)$$

Уравнение (12.3) определяет отношение амплитуд отражённой и падающей волн V_2/V_1 . Решая его, мы находим:

$$\frac{V_2 e^{ikL}}{V_1 e^{-ikL}} = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}. \quad (12.5)$$

Здесь $V_2 e^{ikL}$ представляет амплитуду отражённой и $V_1 e^{-ikL}$ амплитуду падающей волны в точке $z=L$, т. е. у нагрузки. Из (12.5) мы видим, что $V_2=0$, если только $Z_L=Z_0$, т. е. что отражения не наступает, если импеданс нагрузки равен импедансу линии передачи. Удобно ввести вспомогательную величину ψ , определяемую соотношением

$$\frac{V_2}{V_1} = -e^{-2\psi}, \quad (12.6)$$

с помощью которой формулы (12.3) и (12.4) могут быть представлены в следующем виде:

$$Z_L = Z_0 \operatorname{th}(\psi - ikL), \quad (12.7)$$

$$Z = Z_0 \operatorname{th} \psi. \quad (12.8)$$

Если написать

$$Z = Z_0 \operatorname{th}(u + iv),$$

$$Z_L = Z_0 \operatorname{th}(u_L + iv_L),$$

где $u + iv = \psi$ и $u_L + iv_L = \psi - ikL$, то

$$u = u_L \quad \text{и} \quad v = v_L + kL. \quad (12.9)$$

Предположим теперь, что в плоскости импеданцев, т. е. в плоскости

$Z = R + ix$, мы вычертим координатную сетку из семейств взаимно-ортогональных кривых $u = \text{const}$ и $v = \text{const}$. Импеданс нагрузки Z_L отвечает паре значений u_L, v_L . Из (12.9) мы видим, что линия передачи с «электрической длиной» kL отвечает преобразованию в плоскости импеданца, соответствующему переходу по кривой $u = u_L$ из точки $v = v_L$ в точку $v = v_L + kL$. Поэтому представляет большой интерес более подробное изучение кривых, определённых преобразованием

$$Z = Z_0 \operatorname{th}(u + iv) = Z_0 \frac{\operatorname{th} u + i \operatorname{tg} v}{1 + i \operatorname{th} u \operatorname{tg} v}.$$

При $u = 0$ это соотношение даёт $Z = iZ_0 \operatorname{tg} v$, т. е. отвечает изменению Z вдоль всей мнимой оси при возрастании v от нуля до π . При бесконечно большом значении u , $Z = Z_0$, при любых значениях v кривая вырождается в точку. При $v = 0$, $Z = Z_0 \operatorname{th} u$, так что Z пробегает все значения, лежащие на вещественной оси между $Z = 0$ и $Z = Z_0$ при изменении u от нуля до бесконечности. При $v = \pi/2$ имеем $Z = Z_0 \operatorname{cth} u$, так что Z изменяется от бесконечности до Z_0 при возрастании u от нуля до бесконечности. Таким образом, кривая $u = \text{const}$ пересекает вещественную ось в двух точках: именно в точках $(Z_0 \operatorname{th} u, 0)$ и $(Z_0 \operatorname{cth} u, 0)$. Кривые $u = \text{const}$ оказываются окружностями, центры которых лежат в точках $(Z_0 \operatorname{cth} 2u, 0)$ и радиусы равны $Z_0/\operatorname{sh} 2u$. Аналогично, кривые $v = \text{const}$ также оказываются окружностями, центры которых лежат в точках $(0, -Z_0 \operatorname{ctg} 2v)$ и радиусы равны $Z_0(\sin 2v)$. Предположим, что нам задано Z_L и входное сопротивление Z , и мы хотим узнать, каковы должны быть длина цепи kL и её характеристический импеданс Z_0 для преобразования Z в Z_L .

На рис. 8а начертим биссектрису, перпендикулярную к линии $Z_L Z$. Её пересечение с вещественной осью определяет центр круга $u = u_L$, вдоль которого производится преобразование от Z к Z_L . Эта окруж-

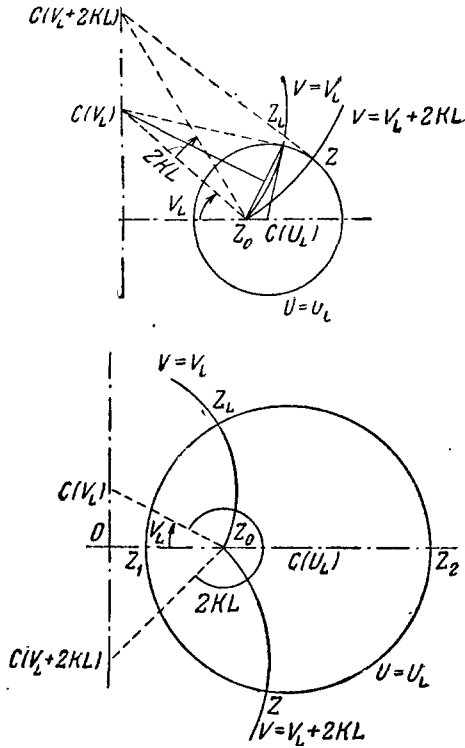


Рис. 8а. Геометрическое построение для определения Z_0 и kL .
Детальное построение для одного случая приведено на верхнем рисунке.

ность пересекает вещественную ось в двух точках. Произведение абсцисс этих точек равно квадрату величины Z_0 . Это позволяет вычислить Z_0 , значение которого может быть нанесено на диаграмму. Зная Z_0 , мы можем выполнить построение, детально указанное на верхней части рис. 8а, позволяющее найти точки $C(v_L)$ и $C(v_L + kL)$, центры окружностей $v = v_L$ и $v = v_L + kL$. Наконец, угол, под которым видна из точки Z_0 линия, соединяющая точки $C(v_L)$ и $C(v_L + kL)$, равен $2kL$.

Очевидно, что зависимость Z от частоты возникает отчасти из-за зависимости от частоты, присущей Z_L , а отчасти из-за изменения электрической длины цепи R_L , связанной с изменением k . Если задано $Z_L(k)$, можно построить точки, соответствующие значениям

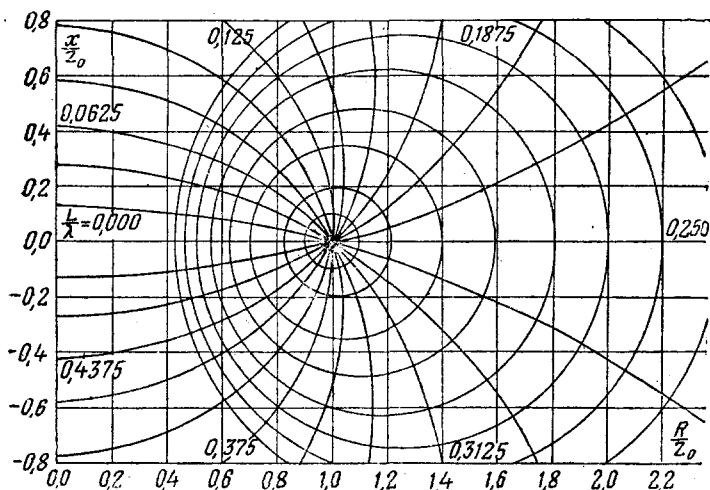


Рис. 8б. Специальная сетка для вычислений импеданцев. Окружности $u = \text{const}$ и $v = \text{const}$ нанесены на плоскости.

$Z(k)$, т. е. найти частотную зависимость линии и нагрузки. В связи с этим полезно заметить, что если геометрическая длина линии L велика по сравнению с длиной волны, уже незначительное изменение k приводит к изменениям kL , превышающим в несколько раз 2π , что само по себе приводит к нескольким оборотам вокруг точки Z_0 .

Зависимость Z_L от k является обычно медленной, за исключением тех случаев, когда в данной области частот имеются резонансные частоты Z_L .

Если приходится производить много расчётов такого рода, удобно приготовить специальный чертёж, изображённый на рис. 8б, на котором отложены одновременно обычные декартовы координаты R и X и окружности $u = \text{const}$ и $v = \text{const}$ для нескольких частных значений Z_0 . Значения u и v , соответствующие данным R и X , могут быть

найлены сразу с достаточной для ряда случаев степенью точности. Сложность этих геометрических построений связана с тем, что движение Z вдоль окружности $u = u_0$ при возрастании kL с постоянной скоростью происходит неравномерно.

Другое осложнение связано с тем, что для вычисления всех возможных импеданцев нужно совершать построение во всей бесконечной полуплоскости. Последнее наводит на мысль о том, что удобнее пользоваться диаграммами, на которых окружности $u = u_0$ являются концентрическими, и линии $v = \text{const}$ представляют лучи, выходящие из центра, как в обычной полярной системе координат. Мы сейчас увидим, что такое построение является возможным с помощью стереографической проекции плоскости на сферу.

Пусть (рис. 8с) сфера диаметром Z_0 касается плоскости RX в начале координат и пусть Q — конец диаметра, проходящего через начало координат. Каждой точке Z на плоскости RX отвечает точка Z' на сфере, в которой линия QZ пересекает сферу. Основным свойством стереографической проекции является то, что любая окружность на плоскости преобразуется в окружность на сфере, и наоборот.

Если начертить на сфере систему параллелей и меридианов с осью, параллельной оси R , то, как можно показать, система окружностей

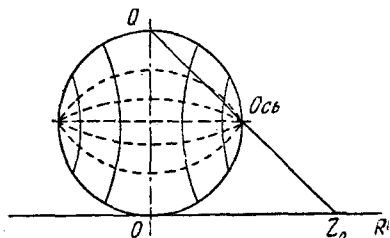


Рис. 8с. Стереографическая проекция плоскости $R \cdot X$ на сферу диаметром Z_0 .

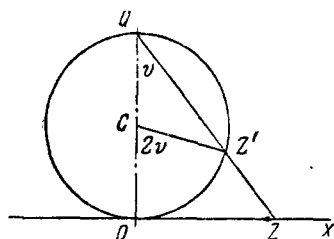


Рис. 8d. Сечение через мнимую ось и $Qu = 0$.

$u = \text{const}$ в плоскости Z соответствует линиям постоянной широты, а система окружностей $v = \text{const}$ соответствует линиям постоянной долготы на сфере.

На рис. 8d изображено сечение сферы плоскостью $u = 0$, проходящей через мнимую ось. Так как для $u = 0$ мы имеем $Z = iZ_0 \tan v$, то угол OQZ равен v , следовательно, угол OCZ' равен $2v$. Возрастание v на π отвечает изменению $2v$ на полный период 2π . Поэтому линии $v = \text{const}$ являются меридианными кругами с долготой $2v$.

На рис. 8е изображено сечение через вещественную ось и Q . Дуга OP представляет геометрическое место $v = 0$ и дуга PQ — геометрическое место $v = \pi/2$. Значение u отвечает некоторой линии широты на сфере $u = \text{th } R/Z_0$, причём широта точки Z' на сфере связана с точкой $(R, 0)$ на плоскости. В частности, экватор представляет

изображение окружности $u=0$, а полюс соответствует бесконечно удалённой окружности $u \rightarrow \infty$.

Мы можем, далее, спроектировать на сферу декартовы координаты на плоскости $R=\text{const}$ и $X=\text{const}$. Очевидно, геометрическое

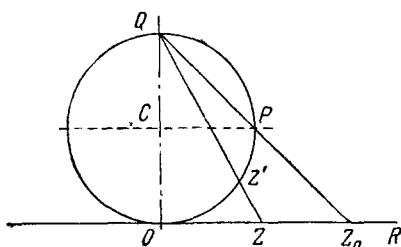


Рис. 8е. Сечение через вещественную ось и $Q \cdot v = 0$.

место точек, лежащих на прямой $R=\text{const}$, будет представлять малые круги, являющиеся геометрическим местом точек пересечения сферы с плоскостью, проходящей через Q и линию $R=\text{const}$. Это семейство окружностей будет иметь общую касательную в точке Q .

Аналогично, линии $X=\text{const}$ изображаются семейством окружностей, ортогональным к первому и также имеющим общую касатель-

ную в точке Q . Поэтому вблизи точки Q сетка линий, изображающих прямые $R=\text{const}$ и $Q=\text{const}$, будет иметь вид, указанный на рис. 8f.

Имея систему окружностей $R=\text{const}$ и $X=\text{const}$, начерченных на сфере, можно вовсе не пользоваться плоскостью импеданцев. На сфере мы получаем две системы взаимно ортогональных окружностей, одна из которых является изображением (R, X) координат точки, а другая — изображением её (u, v) координат. Если нам задают значения R_L и X_L , мы должны изобразить их на сфере с помощью сетки (R, X) . Тогда изменение импеданца, обусловленное линией длиной kL , получается вращением вдоль дуги малого круга $u=u_L$ до тех пор, пока долгота не увеличится на величину $2kL$. Изложенные выше графические методы весьма поучительны, но на практике весьма неудобно пользоваться кривыми, нанесёнными на сферу.

Мы можем, однако, воспользоваться тем, что каждую точку Q на сфере можно вновь спроектировать на плоскость, касательную к сфере у противоположного конца диаметра, проходящего через Q' .

Из всех плоских диаграмм, которые можно построить таким образом, одна является особенно удобной. Именно, при построении этой

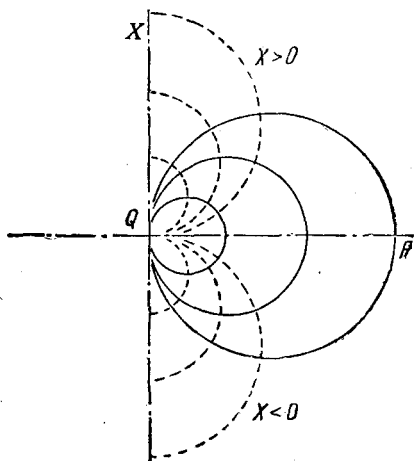


Рис. 8f. Проекция на сферу координатных линий $R=\text{const}$ и $X=\text{const}$.

диаграммы полюс Q' и точка $Z = Z_0$ откладываются на противоположных концах диаметра.

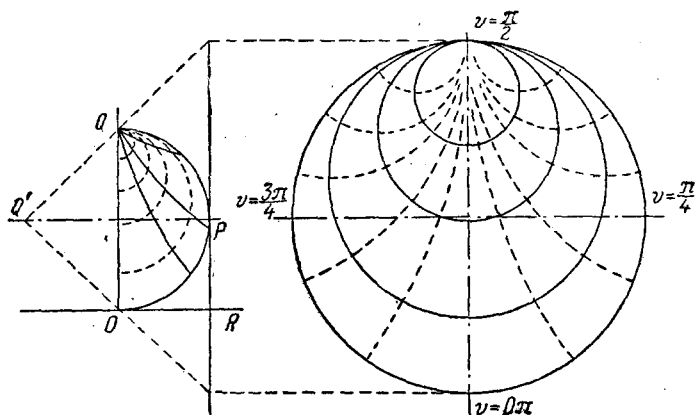


Рис. 8г. Построение проекции сферы на касательную плоскость: каждая точка сферы Q' проектируется на плоскость, касательную к противоположному концу диаметра, проведенного через эту точку.

Из рис. 8г ясно, что полусфера, соответствующая положительным сопротивлениям, проектируется на окружность радиуса Z_0 , которая представляет проекцию экватора $u=0$ и центр которой соответствует полюсу $u \rightarrow \infty$. Другие значения u будут представлены системой концентрических окружностей.

Аналогично, меридианы $v = \text{const}$ проектируются на радиальные лучи на этой плоскости. Окружности $R = \text{const}$ и $X = \text{const}$ на сфере проектируются на аналогичным образом расположенную систему окружностей на плоскости, как это показано на рис. 8г.

Таким образом, мы достигаем поставленной цели и получаем диаграмму, на которой окружности $u = \text{const}$ являются концентрическими окружностями, а окружности $v = \text{const}$ превращаются в лучи, равно отстоящие друг от друга при равных интервалах v . На рис. 8h изображена диаграмма этого типа. При практике работы с этими диаграммами их следует вычерчивать в возможно боль-

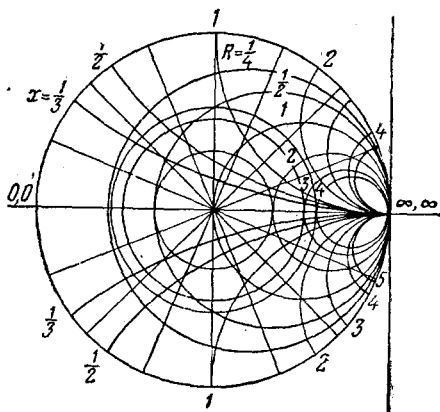


Рис. 8h. Сетка для вычисления импедансов, в которой окружности $u = \text{const}$ являются концентрическими.

шем масштабе, который обеспечил бы достаточную точность и аккуратность построения.

Пример. Найти при заданных Z_L и Z_0 входное сопротивление при любой длине линии kL .

На рис. 81 центр окружности $v = v_L$ лежит на мнимой оси и сама окружность проходит через точки Z_L и Z_0 . Построив секущую перпендикулярную линии $Z_0 Z_L$ и проведя её до пересечения с мнимой осью, найдём центр окружности $v = v_L$. Чтобы найти центр окружности $u = u_L$, проведём перпендикуляр к линии CZ_L в точке Z_L .

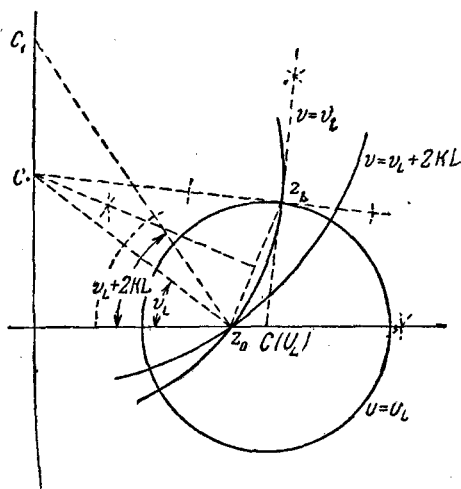


Рис. 81. Построение для определения Z для любого kL .

Тогда точка пересечения этого перпендикуляра с вещественной осью и будет искомым центром. Начертим, далее, окружность $u = u_L$. Преобразование импеданца линией длиной kL получим, прибавив к v_L отрезок kL , найдём при этом новый центр C' и, вычертив новую окружность $v = v_L + kL$, найдём точку пересечения последней окружности с окружностью $u = u_L$.

13. Трансформаторы с переменным импеданцем

Поскольку в линии передачи существуют потери, а также могут существовать дефекты

изоляции в излучающей системе и сети, является желательным доведение энергии до нагрузки таким образом, чтобы в линии не возникало отражённых волн. Для этого необходимо, чтобы импеданс нагрузки Z_L был согласован с импедансом линии Z_0 . Поэтому возникает вопрос о необходимости введения в цепь между линией передачи и нагрузкой соответствующих трансформаторов, которые позволили бы производить такое согласование.

Посмотрим прежде всего, что может дать подключение к линии передачи «участка согласования» длиной L_1 параллельно с нагрузкой. Предположим, что волновой импеданс параллельного участка равен волновому импедансу линии передачи и согласно (12.9) имеет вид $iZ_0 \operatorname{tg} kh_1$. Так как он включён параллельно нагрузке, удобнее для дальнейших вычислений ввести вместо импеданца обратную величину — полную проводимость. Пусть $Y_L = G_L - iB_L$ и $-iY_0$ — проводимость нагрузки и параллельного участка цепи (здесь $Y_0 = 1/Z_0$ — волновая проводимость линии передачи). Тогда полная проводимость системы

из нагрузки и «согласовательного» участка, включённых параллельно, будет

$$Y_1 = Y_L - iY_0 \operatorname{ctg} kL_1. \quad (13.1)$$

При изменении L от нуля до значения, равного половине длины волны, второй член (13.1) пробегает бесконечный ряд значений, и, следовательно, полная проводимость может принимать любое значение на вертикальной линии Y_L в комплексной плоскости проводимости. Поэтому, если вещественная часть Y_L оказывается равной характеристической проводимости линии передачи, выбором соответствующего значения L_1 можно добиться идеального согласования линии передачи с нагрузкой. Так как для полного согласования требуется равенство двух комплексных чисел, универсальный трансформатор, пригодный для согласования во всех случаях, должен обладать по крайней мере двумя различными «согласовательными элементами». Посмотрим поэтому, чего можно добиться включением в линию передачи второго участка «согласования» длиной L_2 , находящегося на расстоянии L_3 от нагрузки. Из уравнения (13.1) следует, что при добавлении к линии участка L_3 общая проводимость будет

$$Y = Y_0 \frac{1 - w}{1 + w},$$

где

$$w = \frac{Y_0 - Y_1}{Y_0 + Y_1} e^{-2i\theta} \quad \text{и} \quad \theta = kL_3.$$

Влияние участка L_2 состоит в том, что к написанному выражению следует добавить член $-iY_0 \operatorname{ctg} kh_2$. Поэтому участок, включённый параллельно нагрузке, можно использовать для компенсации любого реактивного члена в Y . Задача сводится, таким образом, к изучению области значений, которые могут быть приписаны Y при различных L_1 и L_3 . Положив $Y_1/Y_0 = g - ib$, мы находим:

$$\frac{Y}{Y_0} = \frac{g}{(\cos \theta - b \sin \theta)^2 + g^2 \sin^2 \theta} - i \frac{\sin \theta \cos \theta (1 - g^2 - b^2) + b(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)}{(\cos \theta - b \sin \theta)^2 + g^2 \sin^2 \theta}. \quad (13.2)$$

Отсюда видно, что, изменяя величину b , мы можем заставить вещественную часть Y/Y_0 пробегать весь ряд значений от нуля (при бесконечно большом значении b) до $1/g \sin^2 \theta$ (при $\cos \theta - b \sin \theta = 0$). Поэтому можно привести в соответствие любую линию передачи и нагрузку, если только $g \sin^2 \theta$ меньше единицы. Поскольку вещественная часть Y_1 равна вещественной части Y_L , отсюда непосредственно следует, что с помощью такого трансформатора с двумя «участками согласования» можно привести в соответствие с линией передачи лю-

бую нагрузку, полная проводимость которой удовлетворяет условию

$$G_L \sin^2 \theta < Y_0. \quad (13.3)$$

На первый взгляд может показаться, что это ограничение может быть снято, если выбрать L_3 так, что $\theta = n\pi$, т. е. $\sin \theta = 0$. Если, однако, подобрать таким образом L_3 , мы потеряем возможность нахождения правильного положения провода L_3 , так как оно фигурирует в вещественной части в (13.2) в комбинации $b \sin \theta$. Поэтому приходится идти на следующий компромисс. Чтобы сделать ограничение (13.3) как можно менее жёстким, следует сконструировать трансформатор так, чтобы значение $\sin \theta$ было достаточно мало. При этом, однако, необходимо очень точно подбирать положение участка согласования L_2 .

Удобно выбирать θ так, чтобы $L_3 = \lambda/8$ или $3\lambda/8$, так, чтобы $\sin \theta$ и $\cos \theta$ были равны $1/\sqrt{2}$. При этом оказывается возможным согласовывать нагрузки с линиями передач при всех импедансах, для которых выполняется условие $G_L < 2Y_0$ без существенной потери в точности определения положения участка L_2 .

Если $Z_L = Ae^{ia}$, так что $G_L = 1/A \cos a$, то условие (13.3) гласит $1/A \cos a \leq 2/Z_0$. В плоскости импеданцев Z_L это означает, что точка

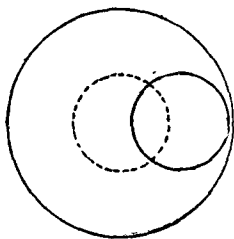


Рис. 9. Участок линии в четверть длины волны с переменноволновым сопротивлением.

ка Z_L должна лежать вне круга радиуса $Z_0/4$ с центром в точке $(Z_0/4, 0)$. Другим распространённым типом трансформатора является участок кабеля длиной в четверть длины волны, волновое сопротивление которого может непрерывно изменяться от максимального до минимального значения. Соответствующая конструкция такого трансформатора изображена на рис. 9. Внутренний проводник смонтирован на эксцентрической оси так, что при повороте его на 180° он занимает положения от коаксиального с внешним проводником (пунктир на рис. 9) до весьма близкого к нему (сплошной круг на рис. 9). При коаксиальном положении внутреннего кабеля волновое сопротивление

имеет максимальное значение, в противоположном положении, когда центр внутреннего проводника занимает ближайшее к внешней стенке положение, волновое сопротивление имеет минимум.

Если Z_L — импеданс нагрузки, согласованной с таким трансформатором, то согласно (12.6) входное сопротивление $Z = Z_0^2/Z_L$. Поэтому можно пользоваться одним «участком согласования», параллельным Z_L для погашения реактивных членов Z_L и включённым за ним только что описанным трансформатором, преобразующим величину R_L так, чтобы она оказалась согласованной с импедансом линии Z_0 .

Можно и наоборот, сперва включать трансформатор в четверть длины волны, а за ним — участок кабеля, компенсирующий реактивные компоненты импеданца.

§ 14. Потери в линиях передачи

Потери в линиях передачи возникают вследствие неидеальности проводников и диэлектрика, заполняющего пространство между ними.

Введение последнего в кабель связано обычно с необходимостью придания ему должных механических свойств. Так, например, если кабель является гибким, то почти всегда необходимо сплошь заполнять его твёрдым диэлектриком, чтобы при изгибании кабеля его центральный проводник оставался на месте. Потери в проводниках были рассмотрены в § 8. Как там было установлено, потеря энергии на единицу длины выражается формулой

$$\frac{c \delta_{\mu}}{\rho \lambda} \int H^2 dS, \quad (14.1)$$

где интегрирование ведётся по поверхности обоих проводников. Если I — амплитуда тока на каждом из проводников коаксиального кабеля $[I(z, t) = I \cos(\omega t - kz)]$, амплитуда магнитного поля на внутреннем проводнике $2I/a \cos(\omega t - kz)$ и на внешнем проводнике — $2I/b \cos(\omega t - kz)$. Поэтому средняя (за период) потеря мощности на единице длины равна

$$\pi c \delta_{\mu} / 2\lambda (1/a + 1/b) I^2.$$

Эта потеря мощности соответствует эффективному сопротивлению на единицу длины кабеля:

$$R_1 = 15 \left(\frac{\rho_{\mu}}{\lambda} \right)^{1/2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right). \quad (14.2)$$

Если ток, текущий в линии, равен I ампер, а волновое сопротивление Z_0 ом, средний поток энергии будет равен $Z_0 I^2 / 2$ ватт, а потеря мощности $R_1 I^2 / 2$. Поэтому падение мощности вдоль кабеля выражается законом

$$\frac{dP}{dz} = - \frac{R_1}{Z_0} P$$

и

$$P(z) = P(0) e^{-(R_1/Z_0)z}. \quad (14.3)$$

Следовательно, величина R_1/Z_0 определяет расстояние, на котором мощность в кабеле убывает в e раз. Эта величина аналогична «добротности» Q полого резонатора. Мы будем обозначать эту величину через L . Для коаксиального кабеля

$$L = 4b \left(\frac{\lambda}{\rho_{\mu}} \right)^{1/2} \frac{\lg \frac{b}{a}}{1 + \frac{b}{a}} \text{ см.} \quad (14.4)$$

В радиотехнике отношение мощностей обычно выражается в децибеллах (дб). 1 дб соответствует отношению мощностей $10^{0,1} = 1,258$. Так как $\lg_{10} e = 0,434$, множитель e^{-1} соответствует потере энергии в 4,34 дб. Так как потери мощности в обычно употребляемых медных проводах невелики, удобно выражать L в метрах на децибелл. Подставляя для электропроводности меди ρ , $\rho = 5,7 \cdot 10^{-6}$ см, мы получаем следующую практическую формулу:

$$L = 10,72 b \sqrt{\lambda} \frac{\lg \frac{b}{a}}{0,279 \left(1 + \frac{b}{a}\right)} \text{ м/дб}, \quad (14.5)$$

где λ , a и b должны выражаться в сантиметрах. Множитель в (14.5), зависящий от отношения b/a , имеет пологий максимум при $b/a = 3,58$.

Таблица 6

x	$\frac{\lg x}{0,279(1+x)}$
1,5	0,58
2,0	0,83
2,5	0,94
3,0	0,98
3,5	1,00
4,0	0,99
4,5	0,98
5,0	0,96

При этом он равен примерно единице. Поскольку этот максимум является весьма пологим, для получения хорошей линии нет особой необходимости точно придерживаться положения максимума, как это видно из табл. 6.

Как типичный пример, рассмотрим кабель с диаметром внешнего проводника, равным $5/8$ дюйма в линии, рассчитанной на передачу 15-сантиметровых волн. Максимальное значение L получается при диаметре внутреннего проводника 0,175 дюйма и оказывается равным $L = 33$ м/дб.

Пример. Показать, что если кабель заполнен идеальным диэлектриком с диэлектрической постоянной ϵ и если внутренний и внешний проводники кабеля сделаны из различных металлов, имеющих сопротивления и восприимчивость соответственно ρ_a, μ_a и ρ_b, μ_b , формула (14,4) может быть обобщена в

$$L = 4b \left(\frac{\lambda}{\frac{\epsilon}{\rho_b \mu_b}} \right) \frac{\lg \frac{b}{a}}{1 + \left(\frac{\rho_a \rho_a}{\rho_b \rho_b} \right)^{1/2} \frac{b}{a}}. \quad (14.4a)$$

В § 5 мы видели, как можно воспользоваться теорией функций комплексного переменного для разыскания поля в линии из двух проводников в самом общем случае. Рассмотрим теперь с помощью теории функций потери в цепи при произвольной форме образующих её проводников. Если $z = f(w)$ и обратная функция $w = g(z)$, то

$$\text{grad}^2 v = \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 = |g'(z)|^2.$$

На кривой $u = \text{const}$

$$ds = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 \right]^{1/2} = \left| f'(w) \right| dv.$$

Так как $|g'(z)| = 1/|f'(w)|$, интеграл, фигурирующий в (14.1), может быть представлен в виде

$$\int H^2 ds = \int_0^{2\pi} \frac{dv}{|f'(w)|};$$

последний интеграл должен вычисляться при значениях $u = u_1$ на внутреннем и $u = u_2$ на внешнем проводниках. Поэтому аналогично (14.2) мы можем написать для эффективного сопротивления на единицу длины линии

$$R_1 = 15 \left(\frac{\rho_{\mu}}{\lambda} \right)^{1/2} \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{2\pi} \frac{dv}{|f'(w)|_{u_1}} + \int_0^{2\pi} \frac{dv}{|f'(w)|_{u_2}} \right], \quad (14.6)$$

и величина L может быть легко найдена из её определения $L = Z_0/R_1$, где для Z_0 нужно воспользоваться формулой (5.28).

Как типичный пример такого рода вычислений, найдём значение R_1 для линии, состоящей из двух конфокальных эллиптических цилиндров, волновое сопротивление которой было вычислено в (5.27). Мы имеем для такой цепи $z = f \operatorname{ch} w$, следовательно, $f'(w) = f \operatorname{sh} w$ и интегралы в (14.6) сводятся к

$$\frac{\lambda}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dv}{f'(w)} = \frac{1}{2\pi f \operatorname{ch} u} \int_0^{2\pi} \frac{dv}{(1 - k^2 \sin^2 v)^{1/2}},$$

где $k^2 = 1/\operatorname{ch}^2 u$. Последний интеграл представляет полный эллиптический интеграл первого рода.

Так как $\operatorname{ch} u_1 = a/f$ и $\operatorname{ch} u_2 = b/f$, окончательно имеем:

$$R_1 = 15 \left(\frac{\rho_{\mu}}{\lambda} \right)^{1/2} \left[\frac{1}{a} \frac{2}{\pi} K\left(\frac{f}{a}\right) + \frac{1}{b} \frac{2}{\pi} K\left(\frac{f}{b}\right) \right]. \quad (14.7)$$

Если величины f/a и f/b малы по сравнению с единицей, оба эллиптических интеграла стремятся к значению $\pi/2$, и формула (14.7) превращается в полученную ранее формулу для сопротивления кругового коаксиального кабеля. Для нахождения поправки к R , при малых значениях f в первом приближении можно воспользоваться известным разложением в ряд по степеням аргумента k для эллиптических интегралов и написать

$$R_1 = 15 \left(\frac{\rho_{\mu}}{\lambda} \right)^{1/2} \left[\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{f^2}{4} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) + \dots \right]. \quad (14.8)$$

Поскольку поправка уже в первом приближении зависит только от f^2 , ясно, что изменение величины потерь в линии при не слишком больших отклонениях формы образующих её проводников от круговой является незначительным.

§ 15. Диэлектрические потери

Предположим теперь, что пространство между проводниками заполнено диэлектриком с диэлектрической постоянной ϵ . Тогда, согласно (11.8), волновой импеданс цепи изменится по сравнению с его значением при отсутствии заполнения в отношении $1/\sqrt{\epsilon}$. Если в диэлектрике имеют место потери мощности, он должен описываться комплексной диэлектрической постоянной. Для нахождения величины диэлектрических потерь необходимо вернуться к уравнению (1.1) для $\text{rot } \mathbf{H}$. Полагая, что временная зависимость поля определяется множителем $e^{i\omega t}$, мы находим

$$\text{rot } \mathbf{H} = 4\pi \mathbf{j} + ik \mathbf{D}.$$

Если вещество характеризуется удельным сопротивлением ρ и диэлектрической постоянной ϵ , правая часть уравнения может быть представлена в виде

$$ik \mathbf{E} \left(\epsilon - \frac{2i\lambda}{\rho} \right),$$

аналогично тому, как мы писали её в § 8, посвящённом скин-эффекту в металлах. В металлах ρ настолько мало, что второй член в скобках оказывается значительно больше первого. У диэлектриков, однако, имеет место обратное соотношение. Явления, происходящие в реальных диэлектриках, гораздо более сложны, чем это считается при формальном подходе теории поля¹¹. В действительности диссипация энергии в диэлектрике происходит отнюдь не только вследствие наличия в нём конечной проводимости. Так, например, энергия диссипируется при ориентации полем молекул с постоянным дипольным моментом в вязкой среде.

Однако, все диссипативные процессы имеют между собой то общее, что все они приводят к появлению в диэлектрике некоторой отличной от нуля плотности тока, находящейся в одной фазе с напряжённостью \mathbf{E} , которая формально может быть описана введением мнимого члена в диэлектрическую постоянную. В частности, диэлектрические потери могут быть связаны и с простой проводимостью, описываемой омическим сопротивлением. Эти потери также зависят от частоты, и не существует однозначного способа для экспериментального разделения омических потерь от потерь, обусловленных другими механизмами.

Поэтому нам кажется более целесообразным отказаться от попыток различать между «истинными» омическими потерями и другими

диссипативными механизмами и описывать феноменологически неидеальность диэлектрика введением комплексной диэлектрической постоянной

$$\epsilon = \epsilon' - i\epsilon'', \quad (15.1)$$

где величины ϵ' и ϵ'' , зависящие от частоты, являются характерными для данного материала. Иногда потери описываются комплексной диэлектрической постоянной, записываемой в виде

$$\epsilon = \epsilon_0 e^{-i\delta}. \quad (15.2)$$

Перед тем как перейти к рассмотрению потерь в цепи, обусловленных неидеальностью диэлектриков, полезно пересмотреть результаты § 3 и выяснить, как изменяются свойства полого резонатора при заполнении его неидеальным диэлектриком.

Введение в уравнение (3.1) комплексной диэлектрической постоянной приводит к тому, что показатель преломления $n = \sqrt{\epsilon\mu}$, фигурирующий в волновых числах $k = n\omega/c$, также становится комплексным. Вся теория, изложенная в главе 1, в основном сводилась к отысканию дозволённых значений k , при которых в резонаторе удовлетворялись бы уравнения поля с соответствующими граничными условиями.

Поскольку теперь мы считаем n комплексным, а все дозволённые значения k — вещественными, частота ν должна принимать комплексные значения.

Предположим, что для какого-то вида колебаний мы нашли дозволённое (собственное) значение волнового числа, равное k_a . В вакууме поле резонатора описывается свободными незатухающими колебаниями с частотой $ck_a/2\pi$. Если же резонатор заполнен неидеальным диэлектриком, частота колебаний будет

$$\nu_a = \nu'_a + i\nu''_a = \frac{k_a c}{2\pi n} = \frac{k_a c}{2\pi} \sqrt{\epsilon' - i\epsilon''}, \quad (15.3)$$

так что временная зависимость колебаний поля выражается множителем $e^{i2\pi\nu'_a t} \cdot e^{-2\pi\nu''_a t}$.

Таким образом физический смысл мнимой части ν''_a состоит в том, что она определяет величину затухания свободных колебаний, обусловленных потерями в диэлектрике.

Ситуация оказывается при этом весьма сходной с той, которая имеет место при конечной проводимости стенок резонатора (ср. § 9). Мы можем ввести понятие «добротности» диэлектрика Q' , характеризующее величину потерь совершенно таким же образом, как и введённая в § 9 добротность проводника Q .

Для резонатора с идеально проводящими стенками, заполненными неидеальным диэлектриком, потери будут описываться затухающим

временным множителем $e^{-\omega t/2Q'}$, где

$$Q' = \frac{\nu_a'}{2\nu_a''} = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{\delta}{2}. \quad (15.4)$$

Здесь δ — фаза диэлектрической постоянной.

Если же наряду с диэлектрическими потерями в резонаторе будут происходить потери, обусловленные конечной проводимостью стенок, полное затухание можно характеризовать величиной Q_c , равной

$$\frac{1}{Q_c} = \frac{1}{Q} + \frac{1}{Q'}. \quad (15.5)$$

Мы видим, что, даже когда потери в диэлектрике составляют всего 1% (иначе говоря, даже при $\operatorname{tg} \delta = 0,01$), значение добротности Q резонатора, заполненного этим диэлектриком, не может достигать 100. Более того, при этом диэлектрические потери будут уже велики по сравнению с потерями в стенках, по крайней мере при обычных значениях проводимости.

Рассмотрим теперь влияние неидеальности диэлектрика, введенного в кабель линии передачи. Уравнения Максвелла будут удовлетворены, если вместо E мы подставим $\sqrt{\epsilon} E$ и положим

$$k = \frac{n\omega}{c},$$

где n — комплексный показатель преломления.

Комплексность величины n приводит к тому, что и волновое число k становится комплексным, т. е.

$$k = k' - ik'' = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon' - i\epsilon''}. \quad (15.6)$$

Это, в свою очередь, приводит к затуханию волн, распространяющихся вдоль линии передачи. Например, ток будет теперь равным

$$I = I_0 e^{-k''z} \cos(\omega t - k'z) \quad (15.7)$$

и, следовательно, мощность в цепи будет уменьшаться по закону $e^{-2k''z}$. Поэтому «длина потерь» L' в линии с неидеальным диэлектриком будет равна

$$L' = \frac{1}{2k''} = \frac{\lambda}{4\pi\sqrt{\epsilon}} \operatorname{cosec} \frac{\delta}{2}, \quad (15.8)$$

где L_1 и λ выражены в сантиметрах. Заметим, что в (15.8) длина волн λ означает длину волны в вакууме.

Поскольку потери в проводящих стенках аддитивны с потерями в диэлектрике, полная эффективная длина L_c определяется равенством

$$\frac{1}{L_c} = \frac{1}{L} + \frac{1}{L'}, \quad (15.9)$$

где L и L' — длины потерь, обусловленные, соответственно, потерями в диэлектрике и проводниках кабеля.

§ 16. Отражение от креплений

Для механического крепления кабеля можно употреблять тонкие пробки из диэлектрика, вставленные внутрь кабеля. На поверхностях этих пробок неизбежно будет происходить отражение волн; однако при соответствующем подборе расстояний между ними можно свести эти отражения к нулю. Кроме того, правильный учёт всех явлений, связанных с введением в кабель таких диэлектрических пробок, позволяет сконструировать фильтры для микрорадиоволн, аналогичные фильтрам в цепях с сосредоточенными постоянными, которые употребляются при низких частотах.

В каждой точке z кабеля с диэлектрическими пробками существуют бегущая (слева направо, в положительном направлении оси z) и отражённая волны. Пусть $n = \sqrt{\epsilon}$ — показатель преломления диэлектрика, $A = nV_a$ и $B = nV_b$, где V_a и V_b — амплитуды бегущей и отражённой волн. Тогда электрическое поле в каждой точке кабеля будет описываться двукомпонентной величиной $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$, которую в ходе дальнейших вычислений мы будем считать двухрядной матрицей с одной колонкой. Мы положим, как всегда, что временная зависимость A определяется множителем $e^{i\omega t}$, координатная зависимость A определяется множителем e^{-ikz} , где $k = n\omega/c$, и, аналогично, координатная зависимость B — множителем e^{+ikz} . Поэтому амплитуда $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ в данной точке может быть выражена через амплитуду $\begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix}$ в точке, находящейся в той же среде на расстоянии z правее, матричным соотношением

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{ikz} & 0 \\ 0 & e^{-ikz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix}. \quad (16.1)$$

Для читателей, не знакомых с матричной алгеброй, заметим, что матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix}$$

представляет не что иное, как краткую запись совокупности двух линейных уравнений:

$$a = cg + dh, \quad b = eg + fh.$$

В частности (16.1) представляет объединённую запись пары уравнений:

$$A = e^{ikz} A_1, \quad B = e^{-ikz} B_1.$$

То обстоятельство, что в матрице преобразования, входящей в (16.1),

стоят нули, выражает математический факт, что A зависит только от A_1 и B только от B_1 . Физически это означает, что в однородном кабеле не происходит отражения волн. Посмотрим теперь, как изменится соотношение (16.1), если мы будем пересекать, идя слева направо, границу раздела между участками с диэлектрической постоянной, равной, соответственно, единице и n . На границе раздела выполняются обычные граничные условия — непрерывность радиальной слагающей электрического и циркулярной слагающей магнитного поля.

Пусть $\begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} A_n \\ B_n \end{pmatrix}$ — амплитуды по обе стороны поверхности раздела. Тогда граничные условия могут быть записаны в виде

$$A_1 + B_1 = n^{-1} (A_n + B_n), \quad A_1 - B_1 = A_n - B_n.$$

Выражая A_1 и B_1 через A_n и B_n , мы можем в матричных обозначениях написать

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} n^{-1} + 1 & n^{-1} - 1 \\ n^{-1} - 1 & n^{-1} + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_n \\ B_n \end{pmatrix}. \quad (16.2)$$

Чтобы выяснить физический смысл полученного результата, предположим, что диэлектрик сплошь заполняет кабель справа от поверхности раздела, тогда как слева от неё диэлектрика вовсе нет. Предположим, кроме того, что кабель надлежащим образом ограничен так, чтобы $B_n = 0$. Тогда мы имеем:

$$A_1 = \frac{1}{2} (n^{-1} + 1) A_n, \quad B_1 = \frac{1}{2} (n^{-1} - 1) A_n.$$

Поток энергии в падающей волне пропорционален A_1^2 или $\frac{1}{4} (n^{-1} + 1)^2 A_n^2$, а в отражённой волне — $B_1^2 = \frac{1}{4} (n^{-1} - 1)^2 A_n^2$. Для простоты допустим, что n вещественно. Тогда отношение энергии отражённой к падающей будет

$$R = \frac{(n^{-1} - 1)^2}{(n^{-1} + 1)^2} = \frac{(n - 1)^2}{(n + 1)^2}. \quad (16.3)$$

Эквивалентность обоих выражений в (16.3) выражает тот факт, что при отражении от простой границы раздела отражённая мощность одна и та же при переходе от среды с показателем преломления 1 к среде с показателем преломления n , или, наоборот, при переходе от среды n к среде 1.

Приведём численный пример. Если, например, кабель заполнен полистиролом с $\epsilon = 2,7$, мы имеем $n = 1,65$ и $R = 5,8\%$. При таком большом значении R при отражении уже от одной границы является, очевидно, весьма важным принятие соответствующих мер для получения такой интерференции, которая привела бы к взаимному

гашению волн, отражённых от различных поверхностей раздела, имеющих внутри кабеля.

На поверхности, где показатель преломления изменяется от n до 1, мы находим аналогично (16.2):

$$\begin{pmatrix} A_n \\ B_n \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} n+1 & n-1 \\ n-1 & n+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix}. \quad (16.4)$$

Как и следовало ожидать, матрица преобразования в (16.4) оказывается обратной матрице в (16.2).

Напомним читателю правила умножения матриц, которое понадобится нам для дальнейшего. Оно состоит в том, что если

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix},$$

то $a = ei + fk, \quad b = ej + fl,$
 $c = gi + hk, \quad d = gj + hl.$

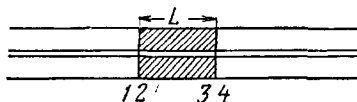


Рис. 10. Крепление в коаксиальном кабеле.

Рассмотрим теперь все эффекты, связанные с введением в кабель пробки из диэлектрика толщиной L (рис. 10). С помощью (16.4) мы можем выразить $\begin{pmatrix} A_3 \\ B_3 \end{pmatrix}$ через $\begin{pmatrix} A_4 \\ B_4 \end{pmatrix}$, затем $\begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix}$ через $\begin{pmatrix} A_3 \\ B_3 \end{pmatrix}$ с помощью (16.1) и, наконец, $\begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix}$ через $\begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix}$ из (16.2). В результате мы получаем следующее выражение $\begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix}$ через $\begin{pmatrix} A_4 \\ B_4 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} n^{-1}+1 & n^{-1}-1 \\ n^{-1}-1 & n^{-1}+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha} \end{pmatrix} \times \frac{1}{2} \begin{pmatrix} n+1 & n-1 \\ n-1 & n+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_4 \\ B_4 \end{pmatrix},$$

где $\alpha = \omega n L / c$. Перемножая все три матрицы (помня при этом, что порядок умножения является здесь существенным), мы находим матрицу, описывающую влияние одной пробки:

$$\frac{1}{4n} \begin{pmatrix} [(n+1)^2 e^{i\alpha} - (n-1)^2 e^{-i\alpha}] & -2i(n^2-1) \sin \alpha \\ 2i(n^2-1) \sin \alpha & [(n+1)^2 e^{-i\alpha} - (n-1)^2 e^{i\alpha}] \end{pmatrix}. \quad (16.5)$$

Соотношение (16.5) часто удобнее писать в виде

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 & Q_1^* \\ Q_1 & P_1^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_4 \\ B_4 \end{pmatrix},$$

где

$$P_1 = \cos \alpha + i \frac{n^2+1}{2n} \sin \alpha, \quad (16.6)$$

$$Q_1 = i \frac{n^2-1}{2n} \sin \alpha.$$

Отсюда мы находим, что отражённая от одной пробки мощность равна

$$R_1 = \frac{(n^2 - 1)^2 \sin^2 \alpha}{(n^2 + 1)^2 \sin^2 \alpha + 4n^2 \cos^2 \alpha}. \quad (16.7)$$

Для полистирола, например, $n = 1,65$ и

$$R_1 = \frac{2,89 \sin^2 \alpha}{13,7 \sin^2 \alpha + 10,8 \cos^2 \alpha}.$$

Из последних соотношений ясно, что отражённая мощность обращается в нуль при $\alpha = m\pi$, т. е. когда L равна чётному числу полуволн в данном материале диэлектрика. Напротив, наибольшее отражение имеет место при L , равном нечётному числу полуволн. Для полистирола максимальная величина отражённой мощности составляет 21% падающей.

С точки зрения механических свойств кабеля, толщина пробки L в $1/8$ дюйма является обычно достаточной. Для пробок из полистирола при длине волны в вакууме, равной 15 см, это соответствует значению $\alpha = 12^\circ$ и R около $1,1\%$. В то же самое время в области более длинных волн та же самая пробка приводит к совершенно ничтожному отражению. Вот почему вопрос об отражении от пробок, введённых в кабель, имеет такое большое значение именно в области микрорадиоволн.

§ 17. Дроссельный и шунтовой конденсатор

Предположим, что мы хотим, чтобы в линии передачи токи высокой частоты доходили только до некоторой точки, а дальше линия передачи превращалась в цепь, в которой могли бы протекать только

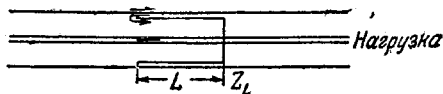


Рис. 11. Высокочастотный дроссель (узел напряжения в дальнем конце чашки).

токи низкой частоты. Соответствующее приспособление, введённое в линию, носит наименование дросселя. Пусть на внутреннем проводнике коаксиального кабеля сделана насадка в форме чашки, как это показано на рис. 11. Пусть,

далее, импеданс нагрузки, расположенной позади насадки, равен Z_L . Если длина насадки L , то импеданс у её открытого конца равен, согласно (12.5),

$$Z' = Z_2 \frac{Z_L \cos kL + iZ_2 \sin kL}{iZ_L \sin kL + Z_2 \cos kL}, \quad (17.1)$$

где Z_2 — характеристический импеданс элемента цепи, образованного внешним проводником и наружной стенкой насадки.

Аналогично входной импеданс у открытого конца чашки равен

$$Z' = iZ_1 \operatorname{tg} kL,$$

где Z_1 — характеристический импеданс участка, образованного внутренним проводником и внутренней стенкой насадки.

Для токов, текущих так, как показано стрелками на схеме, оба сопротивления включены последовательно, так что полный входной импеданс оказывается равным

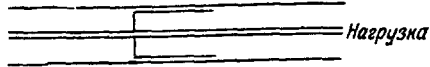
$$Z = Z' + Z'' \quad (17.2)$$

Если длина насадки равна четверти длины волны,

$$Z = iZ_1 \infty + \frac{Z_2^2}{Z_L} = \infty, \quad (17.3)$$

т. е. импеданс с открытой стороны насадки обращается в бесконечность.

Поэтому происходит полное отражение волн высокой частоты от насадки. При этом у входного отверстия насадки имеется пучность в волне напряжения и узел волн тока так, как будто бы линия оканчивалась в этом месте открытой цепью.



Рассмотрим теперь такую же насадку, помещённую внутрь кабеля так, как это показано на рис. 12. В этом случае импеданс насадки равен просто

Рис. 12. Высокочастотный дроссель (узел напряжения на ближнем конце чашки).

$iZ_1 \operatorname{tg} kL$, причём импеданс включён последовательно с импедансом нагрузки Z_L , так что полный импеданс равен $(Z_L + iZ_1 \operatorname{tg} kL)$.

Если длина насадки равна четверти длины волны, импеданс снова становится бесконечным. Поэтому волны, приходящие слева, полностью отражаются, причём на дне насадки получается узел волн напряжения.

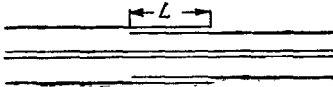


Рис. 13. Низкочастотный дроссель (удобен для наворачивающихся частей кабеля).

Таким образом, насадки в четверть длины волны блокируют токи высокой частоты и не пропускают их в правую часть кабеля.

Иногда, наоборот, желательно бывает задержать токи низкой частоты так, чтобы это не сказывалось на токах

высокой частоты. Для этой цели линия передачи разрезается так, как это показано на рис. 13. Если длина перекрывающихся участков внешних проводников равна четверти длины волны высокочастотного излучения в кабеле, бесконечный импеданс у открытого промежутка внешних проводников превращается в нулевой импеданс. Поэтому, токи высокой частоты, текущие в большем (левом) проводнике, переходят

внутри правого проводника, минуя разрыв без падения напряжения. Токи же низкой частоты оказываются заблокированными из-за отсутствия контакта между обоими внешними проводниками.

Другая конструкция кабеля, позволяющая блокировать токи низкой частоты, изображена на рис. 14. В этом случае внешний проводник кабеля также делается разрезным, и оба участка оканчиваются фланцами. Радиусы обоих фланцев, при которых такая конструкция удовлетворяет поставленным требованиям, могут быть найдены следующим образом. Пусть радиус внешнего проводника будет равен a . Тогда мы должны иметь $E_z = 0$ при $r = a$ так, чтобы в щели между фланцами не происходило никакого падения напряжения, как будто бы внешний проводник был непрерывным.

Рис. 14. Низкочастотный дроссель (для жёсткого кабеля).

Мы можем, вообще говоря, положить

$$E_z = AJ_0(kr) + BN_0(kr),$$

где J_0 и N_0 — бесселевы функции нулевого порядка. Требование $E_z = 0$ при $r = a$ сводится, таким образом, к уравнению

$$AJ_0(ka) + BN_0(ka) = 0,$$

которое определяет отношение B/A .

На внешнем радиусе фланца при $r = b$ радиальный ток должен обращаться в нуль. Для этого необходимо, чтобы $H_\varphi = 0$, откуда, в свою очередь, следует, что должно иметь место равенство $\partial E_z / \partial r = 0$ при $r = b$. Поэтому

$$AJ'_0(kb) + BN'_0(kb) = 0.$$

Последнее уравнение позволяет при заданном отношении B/A определить радиус фланцев b .

Пусть, например, $a = 0,5$ см и длина волны $\lambda = 3$ см, так что $k = 2,08$ и $k_a = 1,04$. При этом $J_0(ka) = 0,7473$ и $N_0(ka) = 0,1188$, так что если положить

$$E_z = 0,1188J_0(kr) - 0,7473N_0(kr),$$

то первое условие при $r = a$ будет выполнено. Значение kb , удовлетворяющее условию $\partial E_z / \partial r = 0$, может быть найдено, проще всего, по таблицам бесселевых функций. При помощи таблиц мы находим, что E_z имеет максимальное значение при $kb = 2,4$, или $b = 1,15$ см.

§ 18. Линия передачи как резонатор

Любой конечный участок линии передачи может быть использован сам по себе или в соединении с сосредоточенными ёмкостями или индукциями для получения резонансного контура.

Рассмотрим прежде всего участок линии передачи длиной z , открытый с одного конца и закрытый с другого. Импеданс у открытого конца будет равен, согласно формуле (12.7),

$$Z = iZ_0 \operatorname{tg} kz.$$

Свободные колебания в линии должны быть таковы, чтобы текущий ток был равен нулю даже при конечном значении амплитуды напряжения. Следовательно, частоты свободных колебаний должны быть таковы, чтобы импеданс на открытом конце цепи был равен бесконечности. Поэтому резонансные значения k могут быть найдены из условия

$$kz = \left(n + \frac{1}{2}\right) \pi,$$

где n — целые числа. Это условие может быть переписано в виде

$$z = \left(\frac{n}{2} + \frac{1}{4}\right) \lambda. \quad (18.1)$$

Таким образом, наинизшая резонансная частота должна быть такова, чтобы z равнялась четверти длины волны.

Если резонатор закрыт с обоих концов, резонансные частоты должны быть такими, чтобы импеданс у обоих концов линии был равен нулю. Это даёт $kz = n\pi$, т. е. в этом случае длина участка должна быть равна целому числу полуволн. Последнее утверждение находится в согласии с результатами, полученными в § 5 с помощью рассуждений, основанных на теории поля.

Предположим теперь, что на открытом конце линии, изображённой на рис. 15, имеется конденсатор ёмкостью C . Входной импеданс на концах 1, 2 будет равен сумме отдельных импеданцев, т. е.

$$Z = iZ_0 \operatorname{tg} kz + \frac{1}{i\omega C}. \quad (18.2)$$

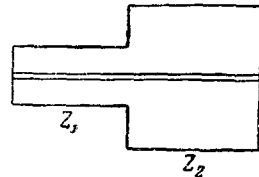


Рис. 15. Резонатор, составленный из двух участков линии.

Все частоты, для которых $Z = 0$, будут являться резонансными частотами, так как в настоящем резонаторе, в котором концы 1, 2 соединены, ток на границе должен протекать без падения напряжения. Это даёт для k уравнение

$$kz \operatorname{tg} kz = \frac{z}{cCZ_0}. \quad (18.3)$$

Если C мало, корни уравнения (18.3) мало отличаются от корней (18.1). В общем случае, при заданных L , C и Z_0 , резонансные значе-

ния k проще всего могут быть найдены графическим путём, откладывая на графике $x \operatorname{tg} x$ как функцию x . Из такого графика можно непосредственно заключить, что увеличение C приводит к уменьшению всех резонансных частот. Полезно сравнить эти рассуждения с расчётами § 7, основанными на применении теории поля.

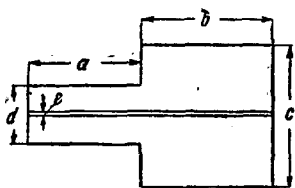
Резонатор может быть устроен, как это показано на рис. 15, из двух, соединённых друг с другом линий длиной z_1 и z_2 , с импедансами Z_1 и Z_2 , соответственно. Входное сопротивление в плоскости раздела, равное

$$i(Z_1 \operatorname{tg} kz_1 + Z_2 \operatorname{tg} kz_2),$$

должно обращаться в нуль при резонансных частотах. Последние могут быть найдены графически. Для этого нужно построить график функций $Z_1 \operatorname{tg} kz_1$ и $-Z_2 \operatorname{tg} kz_2$ в зависимости от k и найти точки пересечения обеих кривых.

Пример. Вычислите наименьшую резонансную частоту резонатора, изображённого на рис. 16 (поверхность вращения относительно горизонтальной оси). Размеры, указанные на чертеже, равны

Рис. 16. Тот же резонатор (размеры приставлены для упражнения).



$$a=2, \quad b=3, \quad c=1, \quad d=\frac{1}{2} \quad \text{и} \quad e=\frac{1}{4}.$$

Ответ: 468 мегациклов/сек.

§ 19. Сужающиеся линии передачи¹²

Под сужающейся линией мы будем понимать кабель с геометрическими размерами, изменяющимися вдоль линии, например коаксиальный кабель с переменным отношением радиусов внешнего и внутреннего проводников.

Мы будем в дальнейшем предполагать, что все поперечные размеры кабеля малы по сравнению с длиной волны. Исходными соотношениями теории являются уравнения (11.14) и (11.15). Поскольку на практике сужающиеся линии используются только для коротких переходных участков основной линии, мы будем пренебрегать потерями и считать $R=0$ и $G=0$. Необходимое обобщение написанных ранее уравнений применительно к сужающимся линиям заключается в том, что теперь нужно считать L и C функциями z . Поэтому уравнения линии передачи преобразуют вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial z} &= -L \frac{\partial I}{\partial t}, \\ \frac{\partial I}{\partial z} &= -C \frac{\partial V}{\partial t}. \end{aligned} \right\} \quad (19.1)$$

Полагая, что временная зависимость величин выражается фактором $e^{i\omega t}$ для амплитуд V и I , находим:

$$\left. \begin{aligned} V'' - \frac{d \lg L}{dz} V' + \omega^2 L C V &= 0, \\ I'' - \frac{d \lg C}{dz} I' + \omega^2 L C I &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (19.2)$$

Если $\epsilon = \mu = 1$, то $LC = \frac{1}{c^2}$, и характеристический импеданс цепи Z связан с L и C соотношениями

$$Z = cL = \frac{1}{cC}.$$

Поэтому логарифмические производные, стоящие в (19.2), можно выразить через логарифмическую производную Z . Полагая $k = \omega/c$, мы имеем:

$$\left. \begin{aligned} V'' - \frac{d \lg Z}{dz} V' + k^2 V &= 0, \\ I'' + \frac{d \lg Z_0}{dz} I' + k^2 I &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (19.3)$$

Нам нужно получить решение лишь одного из этих уравнений, так как если, например, решение для $V(z)$ известно, ток $I(z)$ может быть найден с помощью первого из уравнений (19.1) в виде

$$I = \frac{i}{\omega L} \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{i}{kZ} \frac{\partial V}{\partial z}. \quad (19.4)$$

Поэтому рассмотрим решение первого из уравнений (19.3), определяющего изменение разности потенциалов между обоими проводниками кабеля вдоль линии передачи.

Для линий, остающихся однородными по длине, $d \lg Z/dz = 0$, уравнение имеет решение вида e^{ikz} или e^{-ikz} , т. е. представляет обычные невозмущенные гармонические волны, распространяющиеся вдоль кабеля со скоростью света. Если же свойства кабеля изменяются по его длине и $\frac{d \lg Z}{dz} \neq 0$, решение (19.3) удобно искать в виде

$$V = \sqrt{Z} U, \quad (19.5)$$

где функция U удовлетворяет уравнению

$$U'' + \left[k^2 + \left(\frac{Z''}{2Z} \right) - \left(\frac{3Z'^2}{4Z^2} \right) \right] U = 0. \quad (19.6)$$

Решение последнего уравнения выражается через элементарные функции в двух случаях.

Экспоненциальная линия. Первым из них является случай, когда кабель сужается таким образом, что его характеристический импеданс экспоненциально уменьшается вдоль линии, т. е.

$$Z(z) = Z_0 e^{2k_0 z}. \quad (19.7)$$

При этом дифференциальное уравнение (19.6) для $U(z)$ упрощается и приобретает вид

$$U'' + (k^2 - k_0^2) U = 0. \quad (19.8)$$

Характер получающихся при этом решений зависит от знака величины

$$k'^2 = k^2 - k_0^2.$$

Если k'^2 положительно, функция U является чисто периодической, так что вдоль линии распространяются незатухающие волны, причём амплитуда волн V экспоненциально возрастает в направлении возрастания импеданса Z . Если же k'^2 отрицательно, V представляет вещественную экспоненциальную функцию, и волны затухают вдоль линии. Поэтому такая экспоненциально сужающаяся линия ведёт себя как пропускной фильтр — через него проходят только волны с волновым числом k , большим k_0 . Вырезаемые частоты начинаются с тем более высокой частоты, чем скорее сужается кабель.

Рассмотрим волну, распространяющуюся в положительном направлении оси z . Разность потенциалов V будет иметь вид

$$V = V_0 e^{k_0 z} e^{i(\omega t - k' z)}$$

и, следовательно, ток

$$I = \frac{V_0}{Z_0} \frac{k' + ik_0}{k} e^{-k_0 z} e^{i(\omega t - k' z)}.$$

Отношение разности потенциалов к току в любой точке даёт величину импеданса нагрузки, которой может заканчиваться в этой точке линия без образования отражённых волн. Этот импеданс равен, очевидно,

$$Z_l = \frac{k}{k' + ik_0} Z_0 e^{2k_0 z}. \quad (19.9)$$

Таким образом, этот импеданс является до некоторой степени реактивным, хотя его фазовый угол стремится к нулю, если передаваемая частота велика по сравнению с граничной вырезаемой частотой, т. е. k' велико по сравнению с k_0 .

Рассмотрим конкретный пример. Предположим, мы хотим исследовать свойства переходного участка линии, соединяющего два кабеля с характеристическими импедансами 50 и 100 ом. Если внутренний

проводник в обоих кабелях имеет один и тот же диаметр — 0,125 дюйма, диаметры внешних проводников должны быть, соответственно, 0,288 и 0,660 дюйма. Если переходный участок имеет длину в 1 м, мы имеем $200 k_0 = x \ln 2$, или $k_0 = 3,47 \cdot 10^{-3} \text{ см}^{-1}$. Следовательно, граничная обрезаемая длина волны равна $\frac{2\pi}{k_0} = 1810 \text{ см}$.

Если в этой линии передается излучение с длиной волны 15 см или $k = 0,418 \text{ см}^{-1}$, легко вычислить, что фазовый угол импеданса переходного участка составляет меньше одного градуса.

Линия, в которой Z изменяется с z по степенному закону. Другим случаем, когда уравнение (19.6) может быть решено в элементарных функциях, является случай, когда Z изменяется пропорционально некоторой степени расстояния z от начала сужающегося кабеля, т. е.

$$Z(z) = Z_1 z^n, \quad (19.10)$$

где Z_1 — характеристический импеданс в точке, находящейся на расстоянии, равном единице от того места, где z обращается в нуль. На практике приходится иметь дело с конечным участком сужающегося кабеля, например с участком от $z = +a$ до $z = +b$. Поэтому не возникает никаких трудностей, связанных с отрицательными значениями Z или обращением его в нуль, которые, как может показаться на первый взгляд, возникают при использовании закона (19.10)

В этом случае $\frac{d \lg Z}{dz} = \frac{n}{z}$ и (19.10) превращается в

$$V'' - \frac{n}{z} V' + k^2 V = 0. \quad (19.11)$$

Решение уравнения (19.11) выражается в бесселевых функциях. Именно

$$V(z) = z^m Z_m(kz),$$

где $m = \frac{1-n}{2}$ и $Z_m(kz)$ означает бесселеву функцию m -го порядка.

Поэтому свойства сужающейся линии этого типа также могут быть полностью исследованы.

ЛИТЕРАТУРА

9. Everitt, Communication Engineering, N. Y., 1937, Ch. 4 и 5; Guillemin, Communication Networks, N. Y., 1935, v. 2.
10. Nergaard, RCA Rev., 3, 156, 1938; Nergaard and Salzberg, Proc. I. R. E., 579, 1939; Reukema, Elec. Eng., 56, 1002, 1937, King, Proc. I. R. E., 23, 885, 1935; Mason and Sykes, Bell Sys. Tech. J., 16, 275, 1938.

11. Manning and, Rev. Mod. Phys., **12**, 215, 1940; W. Kausman, Rev. Mod. Phys., **14**, 12, 1942.
 12. Eckart, Z. Hochfrequ., **55**, 173, 1940; Ballantine, J. Frank. Inst., **203**, 561, 1927; Wheeler and Murnaghan, Phil. Mag., **6**, 146, 1928; Starr, Proc. I.R.E., **20**, 1052 1932; Burrows, Bell. Sys. Tech. J., **17**, 555, 1938; Wheeler, Proc. I.R.E., **27**, 65, 1939.

Редакция просит читателей исправить опечатки, вкравшиеся в первую часть статьи Кондона в УФН, т. XXVII, стр., 213—264, 1945 г.

Стр.	Строка	Напечатано	Должно быть
219	6 св.	$\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}$	$[\mathbf{kE}]$
»	6 св.	$\mathbf{k} \cdot \mathbf{H}$	$[\mathbf{kH}]$
»	8 св.	$\mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{E})$	$[\mathbf{k}[\mathbf{kE}]]$
227	7 чн.	$\operatorname{div}(\mathbf{a} \mathbf{b})$	$\operatorname{div}[\mathbf{a} \mathbf{b}]$
»	5 чн.	$\operatorname{div}(\mathbf{A}_n \operatorname{rot} \mathbf{A}_m + \operatorname{rot} \mathbf{A}_n \mathbf{A}_m)$	$\operatorname{div}([\mathbf{A}_n \operatorname{rot} \mathbf{A}_m] + [\operatorname{rot} \mathbf{A}_n \mathbf{A}_m])$
229	7 чн.	$\int \operatorname{div}(\mathbf{A}_n \operatorname{rd} \mathbf{A}_m) dV$	$\int \operatorname{div}[\mathbf{A}_n \operatorname{rd} \mathbf{A}_m] dV$
235	5 св.	$\mathbf{k} \operatorname{grad}_s E_z$	$[\mathbf{k}, \operatorname{grad}_s E_z]$
238	ф-ла (5.20)	$\mathbf{k} \operatorname{grad} \frac{\partial U}{\partial z}$	$[\mathbf{k}, \operatorname{grad} \frac{\partial U}{\partial z}]$
239	20 св.	$\mathbf{k} \operatorname{grad} u$	$[\mathbf{k}, \operatorname{grad} u]$
241	15 св.	$z = f(\cos hu \cos v + i \sin hu \sin v)$	$z = f(\operatorname{ch} u \cos v + i \operatorname{sh} u \sin v)$
»	18 св.	$\left(\frac{x}{f \cos hu}\right)^2 + \left(\frac{y}{f \sin hu}\right)^2 = 1$	$\left(\frac{x}{f \operatorname{ch} u}\right)^2 + \left(\frac{y}{f \operatorname{sh} u}\right)^2 = 1$
»	11 чн.	$\cos hu_1 = \frac{a}{f}$ и $\cos hu_2 = \frac{b}{f}$	$\operatorname{ch} u_1 = \frac{a}{f}$ и $\operatorname{ch} u_2 = \frac{b}{f}$
»	8 чн.	$u_2 - u_1 = \cos h^{-1} \left(\frac{b}{f}\right) - \cos h^{-1} \left(\frac{a}{f}\right)$	$u_2 - u_1 = \operatorname{arch} \left(\frac{b}{f}\right) - \operatorname{arch} \left(\frac{a}{f}\right)$
»	ф-ла (5.27) 1-я чн.)	$\left[\cos h^{-1} \frac{b}{f} - \cos h^{-1} \frac{a}{f}\right]$	$\left[\operatorname{arch} \left(\frac{b}{f}\right) - \operatorname{arch} \left(\frac{a}{f}\right)\right]$
249	ф-ла (7.18)	$\mathbf{C} \cdot \operatorname{grad} \phi$	$[\mathbf{C}, \operatorname{grad} \phi]$
»	ф-ла (7.20)	$\mathbf{k} \operatorname{grad} \phi$	$[\mathbf{k}, \operatorname{grad} \phi]$