МИКРОРАДИОВОЛНЫ*)

Э. Ю. Кондон

ВВЕДЕНИЕ

Микрорадиоволнами в электромагнитной теории излучения принято называть электромагнитные волны, лежащие, грубо говоря, в интервале длин волн от 1 *м* до 1 *мм*, что отвечает интервалу частот от $3 \cdot 10^8$ до $3 \cdot 10^{11}$ *циклов·сек*$^{-1}$.

Со стороны больших частот этот интервал ограничен тем, что техника получения более высоких частот является скорее «оптической», чем «электрической».

Со стороны малых частот ограничение связано с тем, что для частот ниже 300 *мегациклов·сек*$^{-1}$ становятся совершенно достаточными обычные методы расчёта контуров с сосредоточенными постоянными, применяемые в радиотехнике.

Поле микрорадиоволн характеризуется следующими тремя основными моментами.

1. Методы получения микрорадиоволн являются электрическими, но не оптическими. В частности, источником для получения микрорадиоволн являются вынужденные колебания в макроскопических электромагнитных системах, а не некогерентное излучение большого числа атомов или молекул.

2. Размеры приборов, служащих для получения микроволн, обычно велики и, во всяком случае, сравнимы с длиной волны. Это обстоятельство делает невозможным или, по крайней мере, весьма затрудняет использование для изучения микрорадиоволн обычных методов, применяемых для колебательных контуров с сосредоточенными или даже распределёнными постоянными. Во всяком случае, пока не существует ещё каких-либо методов, которые позволяли бы обойтись без применения методов теории поля при расчётах в этой области, подобно тому, как это делается при расчётах переменных токов или в обычной радиотехнике.

Растущие требования практики, несомненно, приведут к разработке таких методов, но на данной стадии развития желательно изучение микрорадиоволн именно с точки зрения теории электромагнитного поля. Повидимому, инженерам, работающим в области

---

*) Rev. Modern Physics, 14, 341 (1942), перевод В. Г. Левича.

ультракоротких волн, придётся всерьёз заняться изучением теории электромагнитного поля.

3. Электронные лампы, применяемые в области микрорадиоволн, имеют ту основную особенность, что время полёта отдельных электронов в приборе не является малым по сравнению с периодом излучения, как это имеет место в области длинных волн.

Действительно, в обычных лампах скорости электронов составляют от 0,01 до 0,1 скоростей света. Поэтому на протяжении 1 цикла электроны пролетают путь от 0,01 до 0,1 длины волны.

Если длина волны составляет всего лишь несколько сантиметров, на практике оказывается затруднительным сконструировать трубку со столь коротким пробегом электронов, чтобы он был мал по сравнению с 0,01 — 0,1 длины волны.

Это обстоятельство делает неприменимым обычные представления в области электронных ламп. Современный прогресс в области ультракоротких волн в значительной степени связан с открытием путей для полного использования конечного (по сравнению с периодом излучения) времени полёта электронов в лампах.

Другими словами, конечное время полёта не явилось ограничением для современной электроники, но лишь вынудило оставить традиционные представления в этой области.

Исторически, ранние работы Герца, в которых электромагнитные волны были впервые получены искусственным путём, относились к той области длин волн, которую мы называем здесь микрорадиоволнами.

Однако, они отличались от рассматриваемых здесь волн, с одной стороны, тем, что их интенсивность была крайне мала, а с другой стороны, тем, что они представляли собой сильно затухающий цуг волн, гораздо более удобное для практических целей стационарное излучение, получаемое с помощью современной аппаратуры.

С точки зрения использования ультракоротких волн для связи, основными моментами являются следующие.

1. Новые частоты могут получаться в плотной среде.

2. Микрорадиоволны могут успешно использоваться для получения строго направленного излучения, поскольку для направленности излучения размеры антенны должны быть велики по сравнению с длиной излучаемой волны — требование, которому, очевидно, легче удовлетворить в случае коротких волн.

Область микрорадиоволн настолько нова, что имеется пока очень небольшое число работ, в которых изучалось распространение таких волн вдоль поверхности суши или моря или поведение их в ионосфере. В этом направлении должна ещё проводиться большая работа. С развитием экспериментальной техники и усовершенствованием оборудования и приборов, физики получат в своё распоряжение новое оружие для исследования ещё совершенно «открытых» областей.

Уже сейчас известно, что некоторые молекулы (например аммиака) имеют в области микрорадиоволн характеристические

частоты, крайне важные для понимания молекулярной структуры. Вероятно, благодаря спектроскопии сантиметровых волн, мы в будущем получим ряд важных сведений и из других областей физики.

Если поместить в поле микрорадиоволнового излучения ферромагнетик, глубина эффективного проникновения поля в проводник будет как раз того же порядка, что размеры областей спонтанного намагничивания (доменов). Поэтому, нет никакого сомнения в том, что изучение ферромагнетиков с помощью микрорадиоволн даст много нового для лучшего понимания природы ферромагнетизма. Далее, у большого числа диэлектриков имеется максимум поглощения в области частот микрорадиоволн. Поэтому, изучение свойств таких диэлектриков в этой области частот должно быть существенно для лучшего понимания их структуры. Это особенно важно для таких веществ, как современные синтетические резины и каучуки. Все эти сведения, важные для лучшего понимания процессов в диэлектриках и ферромагнетиках, представляют большей частью вклад в область прикладной физики.

Однако, если мы захотим найти самую широкую область приложений микрорадиоволн вне стен исследовательской лаборатории, то сразу становится очевидным, что большая часть достигнутых результатов может найти самое непосредственное применение в навигации, морской и воздушной. Не следует также упускать из виду и то, что применение микрорадиоволн в диатермии ещё совершенно не исследовано и может оказаться, что они обладают специфическими лечебными свойствами, отсутствующими у применяемого в настоящее время длинноволнового излучения.

Таким образом, эта область представляет собой обширное поле для исследований.

Глава I. ПОЛЫЕ РЕЗОНАТОРЫ

В области микрорадиоволн, вместо обычных антенны и конденсатора, как главных элементов резонансного контура, употребляются полые резонаторы. Полым резонатором мы будем называть область пространства, окружённую со всех сторон стенками, сделанными из хорошего проводника, которая используется как элемент колебательного контура. Поэтому изучение микрорадиоволн следует начать с рассмотрения свойств полого резонатора.

§ 1. Уравнения Максвелла

Решение всех задач, связанных с электромагнитным полем, основано на использовании уравнений Максвелла, которые мы будем писать в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{div}\mathbf{D}=4\pi\rho, && div\,\mathbf{B}=0,\\ &\operatorname{rot}\mathbf{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}, && \operatorname{rot}\mathbf{H}=4\pi\mathbf{j}+\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}, \end{aligned}\right\} \qquad (1.1)$$

где **E** — вектор электрического поля в CGS-единицах, **D** — вектор индукции в CGS-единицах, ρ — плотность заряда в CGS электростатических единицах, **H** — вектор магнитного поля в гауссах, **B** — вектор магнитной индукции в гауссах, **j** — плотность тока проводимости в абс. ед./*см*^{2}.

Выбранная нами система единиц оказывается наиболее удобной и часто применяемой на практике. Однако, мы не хотели бы впасть в распространённую ошибку и постоянно придерживаться однажды выбранной системы единиц. Когда это представляется удобным, мы будем пользоваться и другими системами единиц.

В обычных средах мы имеем

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{B}&=\mu\mathbf{H}\cdot\\ \mathbf{D}&=\varepsilon\mathbf{E},\end{aligned}\right\} \tag{1.2}$$

и

где μ — магнитная проницаемость и ε — диэлектрическая постоянная среды. Коэффициенты μ и ε чаще всего приводятся в справочниках в выбранной нами системе единиц, они являются безразмерными величинами, равными единице в вакууме.

В проводящей среде напряжённость электрического поля **E** связана с плотностью тока **j** соотношением

$$\mathbf{E}=1/\sigma\mathbf{j}, \tag{1.3}$$

где σ — проводимость вещества в *см*$^{-1}$ и $1/\sigma$ — удельное сопротивление. В обычных таблицах приводится значение σ (или удельное сопротивление $1/\sigma$) в *ом·см*, что соответствует тому, что **E** выражено в вольтах на сантиметр, а **j** — в амперах на квадратные сантиметры. Если $1/\sigma'$ — удельное сопротивление в омах на сантиметр, то

$$\frac{1}{\sigma}=\frac{1}{30}\cdot\frac{1}{\sigma'}. \tag{1.4}$$

Для меди при комнатной температуре $1/\sigma'=1{,}7\cdot10^{-6}\,\Omega\cdot см$, $1\cdot\sigma=$ $=5{,}7\cdot10^{-8}$ *см*.

На границе раздела двух непроводящих сред должны выполняться условия непрерывности нормальных слагающих **D** и **B** и касательных слагающих **E** и **H**. Если на поверхности раздела имеются поверхностные заряды с плотностью n CGS *ед*/*см*^{2}, то нормальная слагающая вектора **D** испытывает скачок, равный $4\pi n$.

Плотность заряда и плотность тока связаны между собой уравнением непрерывности

$$\operatorname{div}\mathbf{j}+\frac{1}{c}\frac{\partial\rho}{\partial t}=0, \tag{1.5}$$

которое выражает тот факт, что полный ток, вытекающий из данного объёма, сопровождается соответствующим уменьшением заряда

в этом объёме. В технических руководствах напряжённость поля выражают обычно в вольтах на сантиметр, силу тока — в амперах, плотность тока — в амперах на квадратный сантиметр и заряд — в кулонах. 1 V $= \frac{1}{300}$ CGS-единиц; 1 абс. ед. тока $= 10$ A; 1 кулон $= 3 \cdot 10^9$ CGS-единиц заряда. Мощность в выбранной нами системе единиц выражается в абс. ед. напряжения на абс. ед. тока $= 3$ kW (1 *кв* $= 1$ V $\cdot$ 1 A). Хотя **H** обычно выражается в гауссах и в технических руководствах, однако, иногда **H** выражают в амперах на сантиметр. Последнее соответствует магнитному полю бесконечно длинного соленоида, через который протекает ток, выражаемый в ампер-витках на сантиметр (1A/*см*^{2} $= 0{,}4\pi$ гаусс).

Рис. 1. Соотношение между векторами E, D и H, B в плоской волне, распространяющейся в направлении, перпендикулярном к плоскости чертежа.

Из уравнений Максвелла можно вывести общее соотношение

$$\operatorname{div} \mathbf{S} + \frac{1}{4\pi}\left(\mathbf{H}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{E}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right) = -c\mathbf{jE}, \qquad (1.6)$$

где

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}[\mathbf{EH}] \ \textit{эрг/см}^2\textit{сек}. \qquad (1.7)$$

Вектор **S** носит название вектора Пойнтинга и интерпретируется, как поток электромагнитной энергии. Истинное значение потока электромагнитной энергии не определяется этим или какими-либо иными соотношениями, так как к вектору **S** можно прибавить любой другой вектор **S**, дивергенция которого равна нулю, без того, чтобы нарушалось общее уравнение (1.6). Поскольку, однако, значение электромагнитной энергии не измеряется непосредственно, а лишь после превращения её в механическую или тепловую энергию, эта неопределённость не может отразиться на значениях непосредственно наблюдаемых величин.

В тех случаях, когда μ и ε постоянны во времени, второй член в (1.6) может быть представлен, как производная по времени от величины

$$W = \frac{1}{8\pi}(\mu \mathbf{H}^2 + \varepsilon \mathbf{E}^2) \ \textit{эрг/см}^3, \qquad (1.8)$$

которая интерпретируется, как плотность электромагнитной энергии поля.

В выбранной нами системе единиц абсолютные величины векторов **E** и **H** в плоской электромагнитной волне равны между собой. Для практики нужно иметь в виду выражение для вектора Пойнтинга в технической системе единиц:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{0{,}4\pi}[\mathbf{EH}] \ W/\textit{см}^2. \qquad (1.9)$$

В вакууме в этих единицах величина **H** в гауссах равна 1/300 E

в вольтах на сантиметр, так что абсолютная величина вектора Пойнтинга равна $\mathbf{S}=(1/120\ \pi)\cdot E^2$. Число $120\ \pi=377$ выражается в омах и в литературе часто громко именуется «импенданцем пустого пространства».

Возвращаясь снова к уравнению (1.6), мы видим, что в той части пространства, где отсутствуют токи, так что правая часть уравнения обращается в нуль, оно выражает закон сохранения энергии электромагнитного поля. Оно показывает также, что изменение энергии электромагнитного поля в любой замкнутой области, через границы которой электромагнитная энергия не может вытекать, происходит только за счёт электрического тока, текущего в направлении вектора электрического поля.

Всё содержание теории микрорадиоволн и вся техника их использования состоят в генерировании, передаче и приёме электромагнитной энергии в области столь высоких частот, что соответствующие длины волн оказываются сравнимыми с размерами приборов, служащих для их получения.

В дальнейшем нам придётся часто разыскивать распределение электромагнитного поля, интегрируя уравнения поля. В других областях радиотехники приходится иметь дело только с волнами, длинными по сравнению с размерами приборов. Это обстоятельство позволяет избежать уравнений поля, как расчётного аппарата, и пользоваться общей теорией цепей с сосредоточенными постоянными, которая является основой для расчётов почти во всей электротехнике.

§ 2. Плоские волны

Прежде чем перейти к рассмотрению задачи о поле в полом резонаторе, полезно напомнить решение уравнений поля в виде плоских, стоячих и бегущих волн.

Предположим, что вектор поля представляет вещественную часть вектора

$$\mathbf{A}e^{2\pi i(\nu t-\mathbf{k}\mathbf{r})}, \tag{2.1}$$

где $\mathbf{A}$ — постоянный вектор, $\mathbf{k}$ — волновой вектор, направленный по нормали к фронту плоской волны в сторону распространения её фазы и по абсолютной величине равный числу длин волн на 1 *см*, и ν — частота в циклах на секунду. В радиотехнической литературе чаще выбираются противоположные знаки в экспоненте, но все результаты не зависят от выбора знаков. Выбранный нами положительный знак при временном множителе чаще встречается в других разделах электротехники, в частности, в теории переменных токов, где считается, что все векторы на векторных диаграммах вращаются против часовой стрелки.

Из двух уравнений $\operatorname{div}\mathbf{D}=0$ и $\operatorname{div}\mathbf{B}=0$ следует, что

$$\mathbf{D}\cdot\mathbf{k}=0 \text{ и } \mathbf{B}\cdot\mathbf{k}=0,$$

т. е. что амплитуды электромагнитных волн ортогональны к направлению распространения. Мы будем считать направление **D** или **E** направлением поляризации волны.

Два последних уравнения Максвелла после подстановки (2.1) дают

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{E}=-\frac{\nu}{c}\mathbf{B},\quad \mathbf{k}\cdot\mathbf{H}=+\frac{\nu}{c}\mathbf{D}, \tag{2.2}$$

из которых вытекает, что

$$\mathbf{k}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{E})=-\left(\frac{\nu}{c}\right)^2\varepsilon\mu\mathbf{E} \tag{2.3}$$

и, следовательно, учитывая, что $\mathbf{k}E=0$,

$$|\mathbf{k}|=\left(\frac{\nu}{c}\right)(\varepsilon\mu)^{1/2}. \tag{2.4}$$

Таким образом, фазовая скорость распространения волн в среде равна $c/\sqrt{\varepsilon\mu}$, а показатель преломления $W=(\varepsilon\mu)^{1/2}$. Из (2.2) легко видеть, что векторы **E**, **H** и **k** ориентированы так, как это показано на рис. 1, а их амплитуды удовлетворяют равенству

$$\sqrt{\varepsilon}\cdot\mathbf{E}=\sqrt{\mu}\cdot\mathbf{H}.$$

В пустоте все векторы электромагнитного поля равны между собой. Средний поток энергии, переносимой плоской волной,

$$\mathbf{S}\ \mathrm{W}/см^2=\frac{1}{2}\frac{1}{120\pi(\mu/\varepsilon)^{1/2}}E^2, \tag{2.5}$$

где E^2 выражено в вольтах на сантиметр.

Как указывалось уже в предыдущем параграфе, коэффициент в знаменателе выражается в омах. Из (2.5) мы видим, что среда характеризуется импеданцем для плоской волны, равным $120\,\pi\,(\mu/\varepsilon))^{1/2}$ ом. Импеданц для плоской волны в омах можно также определить, как отношение напряжённости электрического (*вольт/см*) и магнитного (*ампервитки/см*) полей. Такое определение приводит к тому же самому численному значению импеданца.

Стоячая волна возникает при наложении двух бегущих волн равной амплитуды, распространяющихся в противоположных направлениях. Предположим, например, что одна из волн распространяется в положительном направлении оси z и поляризована в направлении оси x. Тогда напряжённости электрического и магнитного полей плоской волны будут иметь вид

$$\left.\begin{aligned} &E_x=E_1\cos 2\pi(\nu t-kz),\ E_y=E_z=0,\\ &H_y=\left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)^{1/2}E_1\cos\pi(\nu t-kz),\ H_x=H_z=0.\end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

Аналогично, для волны, поляризованной в том же направлении, но распространяющейся в противоположную сторону,

$$\left.\begin{aligned} &E_x = E_2 \cos 2\pi(\nu t + kz),\ E_y = E_z = 0, \\ &H_y = -\left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)^{1/2} E_2 \cos 2\pi(\nu t + kz),\ H_x = H_z = 0. \end{aligned}\right\} \quad (2.7)$$

Предположим теперь, что плоскость $z = 0$ является идеальным проводником. На поверхности идеального проводника тангенциальная слагающая вектора E должна обращаться в нуль, и, следовательно, амплитуды обеих волн должны удовлетворять условию $E_2 = E_1$. Поле обеих волн, падающей и отражённой, описывается соотношениями

$$\left.\begin{aligned} &E_x = 2E_1 \sin 2\pi kz \sin 2\pi\nu t, \\ &H_y = 2\left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)^{1/2} E_1 \cos 2\pi kz \cos 2\pi\nu t. \end{aligned}\right\} \quad (2.8)$$

Как видно из (2.8), в начальный момент, при $t = 0$ энергия поля имеет чисто магнитный характер, а через четверть цикла — чисто электрический. Таким образом, в стоячей волне энергия поля не остаётся совершенно неизменной, а пульсирует, переходя из магнитной в электрическую и обратно (рис. 2). Отражение плоской волны идеальным проводником сопровождается индуцированием в нём токов. В главе IV будет показано, как вычисляется излучение по заданному распределению токов. Здесь же мы ограничимся утверждением, что индуцированный поверхностный ток излучает волны, которые представляют отражённые поверхности металла волны и в точности погашают падающие волны на противоположной поверхности металла.

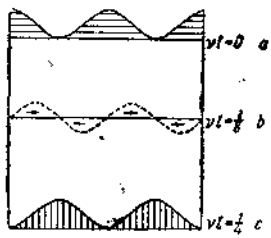

Рис. 2. Пульсация энергии в стоячей плоской волне.

Индуцируемый ток на поверхности металла можно найти следующим образом. Магнитное поле вблизи границы металла, в плоскости $z = 0$ будет равно

$$H_y = 2E_1\left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)^{1/2} \cos 2\pi\nu t \quad \text{при } z > 0,$$
$$H_y = 0 \qquad\qquad \text{при } z < 0.$$

Следовательно, линейный интеграл, взятый по замкнутому контуру единичной длины, проходящему вдоль поверхности вне металла в положительном направлении и внутри него — в отрицательном, будет отличен от нуля.

Из уравнений Максвелла следует при этом, что вдоль поверхности металла течёт замкнутый ток проводимости (ток смещения равен

нулю, так как у поверхности металла касательные слагающие электрического поля E исчезают), плотность которого

$$j_x = -\frac{2E_1}{4\pi}\left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)^{1/2}\cos 2\pi\nu t.$$

§ 3. Полый резонатор[1]

Область пространства, окружённая со всех сторон хорошим проводником, может служить полым резонатором или «румбатроном». Каждый такой резонатор имеет бесконечно большое число резонансных частот и соответствующих длин резонансных волн.

Мы сперва изложим теорию резонатора, ограниченного идеальным проводником с омическим сопротивлением, равным нулю, а затем учтём влияние конечного сопротивления металла. Мы ограничимся также полостью в виде прямоугольного ящика, наиболее удобной для наших целей потому, что поле в ней выражается через простые тригонометрические функции. Нашей задачей является решение уравнений поля в такой полости с учётом граничных условий на поверхности металла, ограничивающего полость: вектор **E** должен быть перпендикулярен к поверхности и вектор **H** — параллелен ей.

Предположим, что все векторы поля зависят от времени по закону $e^{2\pi i\nu t}$. Тогда координатная зависимость векторов поля может быть найдена из уравнений

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{div}\sqrt{\varepsilon}\,\mathbf{E}=0, \quad \operatorname{div}\sqrt{\mu}\,\mathbf{H}=0,\\ &\operatorname{rot}\sqrt{\varepsilon}\,\mathbf{E}=-i\left(\frac{2\pi n\nu}{c}\right)\sqrt{\mu}\,\mathbf{H},\\ &\operatorname{rot}\sqrt{\mu}\,\mathbf{H}=+i\left(\frac{2\pi n\nu}{c}\right)\sqrt{\varepsilon}\,\mathbf{E}, \end{aligned}\right\} \qquad (3.1)$$

если внутри полости ε и μ — постоянные. Здесь n означает показатель преломления, определённый в § 2, $n=\sqrt{\varepsilon\mu}$. Обозначим через k множитель $2\pi n\nu/c$.

Из уравнений (3.1) ясно, что векторы $\sqrt{\varepsilon}\,\mathbf{E}$ и $\sqrt{\mu}\,\mathbf{H}$ удовлетворяют в полости, заполненной средой, таким же уравнениям, как векторы **E** и **H** в пустоте, но со скоростью c, заменённой на c/n. Поэтому поле в резонаторе, заполненном обычной (с постоянными ε и μ) средой, может быть без труда найдено, если известно поле соответствующей области пустого пространства. По этой причине, а в особенности ещё и потому, что на практике употребляются всегда именно пустотные резонаторы, мы во всех дальнейших формулах положим ε и μ равными единице.

Беря *rot* от третьего из уравнений (3.1) и производя простые преобразования, находим уравнение для напряжённости электрического поля **E**

$$\Delta\mathbf{E}+k^2\mathbf{E}=0. \qquad (3.2)$$

Если решение этого уравнения известно, то для нахождения напряжённости магнитного поля **H** не нужно отдельно решать соответствующее уравнение, а вектор **H** может быть найден непосредственно из третьего уравнения (3.2)

$$\mathbf{H} = \frac{i}{k} \operatorname{rot} \mathbf{E}. \tag{3.3}$$

Вычисленное таким образом магнитное поле автоматически удовлетворят граничным условиям. Граничные условия для электрического поля **E** можно записать в виде $\int \mathbf{E}\,d\mathbf{l} = 0$, где интеграл берётся по любому контуру, проведённому вдоль поверхности металла, поскольку на этой поверхности касательные слагающие вектора **E** обращаются в нуль. Поэтому $\iint \operatorname{rot} \mathbf{E}\,d\mathbf{s} = 0$, где интеграл распространяется на любой участок граничной поверхности. Из последнего соотношения следует, что нормальная слагающая $\operatorname{rot} \mathbf{E}$ обращается в нуль в любой точке на граничной поверхности, откуда, в свою очередь, вытекает, что граничные условия для магнитного поля **H** действительно будут автоматически выполнены [ср. формулу (3.3)].

Общих методов решения уравнения (3.2) для полости произвольной формы не существует и решение его может быть найдено только для небольшого числа случаев специально простой формы. Задача о нахождений электромагнитного поля в полости во многих отношениях сходна с соответствующей акустической задачей о нахождении стоячих звуковых волн в замкнутой полости.

Однако, электромагнитная задача является более сложной, так как электромагнитные волны являются векторными волнами, причём каждая компонента вектора **E** в отдельности удовлетворяет уравнению (3.2) и, кроме того, их совокупность связана между собой условием $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$. В акустической же задаче приходится иметь дело с одной скалярной величиной, например, давлением в волне.

Мы рассмотрим сейчас решение уравнения (3.2) для полости, имеющей форму прямоугольного параллелепипеда, стенки которого перпендикулярны к координатным осям и отсекают на них отрезки

$$0 < x < A, \quad 0 < y < B, \quad 0 < z < C.$$

Если мы попытаемся искать решение уравнения (3.2) в виде

$$E_x = E_1 \begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix} k_1 x \begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix} k_2 y \begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix} k_3 z,$$

$$E_y = E_2 \begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix} k_1 x \begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix} k_2 y \begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix} k_3 z,$$

$$E_z = E_3 \begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix} k_1 x \begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix} k_2 y \begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix} k_3 z,$$

то уравнение будет удовлетворено при выборе любой комбинации синусов и косинусов, если только числа k_1, k_2 и k_3 связаны соотношением

$$k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = k^2.$$

Для того, чтобы выполнить граничное условие: перпендикулярность вектора **E** ко всем стенкам полости, мы должны ограничиться либо синусами, либо косинусами и наложить на k_1, k_2 и k_3 условие:

$$k_1=\frac{l\pi}{A}, \quad k_2=\frac{m\pi}{B}, \quad k_3=\frac{n\pi}{C}, \tag{3.4}$$

где l, m и n — целые числа.

Поэтому решение имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} E_x&=E_1\cos\frac{l\pi x}{A}\sin\frac{m\pi y}{B}\sin\frac{n\pi z}{C},\\ E_y&=E_2\sin\frac{l\pi x}{A}\cos\frac{m\pi y}{B}\sin\frac{n\pi z}{C},\\ E_z&=E_3\sin\frac{l\pi x}{A}\sin\frac{m\pi y}{B}\cos\frac{n\pi z}{C}.\end{aligned}\right\} \tag{3.5}$$

Три амплитуды E_1, E_2 и E_3 не являются независимыми, но связаны соотношением

$$\frac{l\pi}{A}E_1+\frac{m\pi}{B}E_2+\frac{n\pi}{C}E_3=0. \tag{3.6}$$

Следовательно, каждой совокупности целых чисел l, m и n отвечают две линейно независимые волны. Если k_1, k_2 и k_3 рассматривать, как три компоненты вектора, E_1, E_2 и E_3, как компоненты другого вектора, то допустимым является любой вектор E_1, E_2 и E_3, перпендикулярный к вектору **k**. Возможные резонансные частоты удовлетворяют условию

$$\left(\frac{\nu}{C}\right)^2=\left(\frac{l}{2A}\right)^2+\left(\frac{m}{2B}\right)^2+\left(\frac{n}{2C}\right)^2, \tag{3.7}$$

где l, m и n — целые числа, причём по крайней мере два из них одновременно отличны от нуля.

Для волн, у которых одна из компонент вектора **k** равна нулю, т. е. равно нулю одно из чисел l, n, m, вектор электрического поля направлен параллельно той оси, вдоль которой отсутствует компонента вектора **k**. В этом случае имеется только одно решение уравнения (3.6) и только один вектор, удовлетворяющий условию (3.7), хотя, как мы только что указывали, в общем случае имеется два линейно независимых решения, отвечающих данной совокупности l, m и n.

Наименьшая резонансная частота волн в ящике получается в том случае, когда два числа, относящихся к осям, вдоль которых ящик имеет наибольшие размеры, равны единице, а третье — нулю. Если A и B — две большие стороны полости, то волна с наименьшей частотой поляризована вдоль третьей стороны ящика, и соответствующая длина волны равна

$$\lambda=\frac{2}{(A^{-2}+B^{-2})^{1/2}}.$$

В частности, для кубического ящика длина волны, отвечающая наинизшей резонансной частоте, равна длине диагонали грани ящика $\lambda = \sqrt{2}\,A$.

Число различных резонансных колебаний быстро возрастает по мере передвижения по шкале частот. Рассмотрим, например, ящик с одной стороной, значительно меньшей двух других (т. е. $B = A$, $C \ll A$). Колебания с наинизшей частотой отвечают $n = 0$. Значение величины $2A\sigma$ определяется выражением

$$2A\sigma = \left[l^2 + m^2 + n^2\left(\frac{A}{C}\right)^2\right]^{1/2}.$$

Легко подсчитать, что существует 33 различных набора целых чисел l, m, n, приводящих к частотам бо́льшим, чем наименьшая частота в пять и менее раз. Можно также заметить, что частоты могут быть сгруппированы в серии: главная серия образуется по закону (110), (220), (330), (440); другая серия начинается с частот (120) и (210) и содержит частоты вида (240) и (420), (360) и (630) и т. д. Однако, закон образования высших частот путём образования целых кратных является специальным свойством прямоугольного ящика и отсутствует для полостей иной формы.

В заключение необходимо дать определение некоторых терминов, которые понадобятся нам в дальнейшем. Каждую частоту, для которой существует решение уравнений поля, удовлетворяющее граничным условиям, мы будем называть собственной частотой. Наименьшая из собственных частот называется фундаментальной или основной. Если высшие частоты являются целыми кратными фундаментальной частоты, они именуются гармониками. Частное решение уравнений для **E** и **H** образует собственное колебание в полости. Если при этом одной частоте отвечает несколько собственных колебаний, то такие колебания называются вырожденными. Степенью вырождения называется число различных линейно-независимых собственных колебаний, отвечающих одной и той же частоте.

Так, в только что рассмотренном примере фундаментальная частота является невырожденной, а все высшие частоты — двукратно вырожденными, поскольку, например, решения (1, 2, 0) и (2, 1, 0) линейно-независимы и имеют одинаковые частоты. Такой тип вырождения мы будем называть поляризационным вырождением. Вырождение, возникающее из-за симметрии формы полости, носит название вырождения симметрии. Например, колебания (1, 2, 0) и (2, 1, 0) имеют одинаковые частоты только в том случае, когда рёбра A и B равны между собой.

Слабое отклонение от условия $A = B$, преднамеренное или связанное с несовершенством прибора или характером включения резонатора в общую цепь, приводит к тому, что вырожденные частоты начинают слегка отличаться друг от друга. Мы будем говорить при этом, что вырождение снимается.

Очень важным моментом является отсутствие единственности в решении уравнений волнового поля, связанного с вырождением. Например, в случае поляризационого вырождения в качестве основных колебаний можно выбрать любые два (предпочтительно взаимно перпендикулярные) вектора, удовлетворяющие условию (3.6). Любая линейная комбинация их является возможным собственным колебанием, связанным с этой частотой.

Аналогично, в случае вырождения симметрии, истинное собственное колебание может быть линейной комбинацией вырожденных колебаний. Рассмотрим, например, колебания (1, 2, 0) и (2, 1, 0). Согласно (3.5) у обеих комбинаций отлична от нуля только z-ая компонента вектора $\mathbf{E}$, которая равна, соответственно,

$$E_{120} = C \sin\left(\frac{\pi x}{A}\right) \sin\frac{2\pi y}{A},$$

$$E_{210} = D \sin\left(\frac{2\pi x}{A}\right) \sin\frac{\pi y}{A},$$

где C и D — произвольные амплитуды. В зависимости от относительных значений обеих амплитуд возможны самые разнообразные виды распределения поля в полости; некоторые из них схематически изображены на рис. 3.

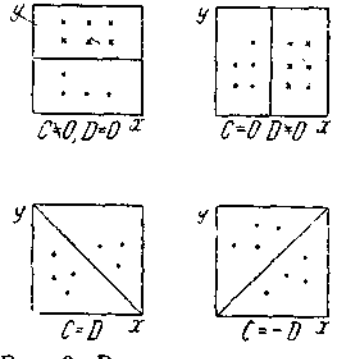

Рис. 3. Различные типы распределения поля, приводящие к вырождению собственных колебаний (120) и (210).

Так как комбинация с $C = D$ представляет собой колебания вдоль линии $y = x$ так же, как вдоль $y = 0$ и $x = 0$, она удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к фундаментальному колебанию в прямоугольной призме, образованной этими тремя линиями. Таким образом, часто можно находить частные решения для полостей простой формы, которые сложно находить иными способами.

Этот приём, однако, непригоден уже для прямоугольной призмы с неравными сторонами, так как в ней собственные колебания не вырождены и не могут непосредственно складываться друг с другом.

Пример: Рассмотреть колебания, отвечающие соотношению амплитуды $D = \pm iC$.

§ 4. Нормальные координаты*)

Детально рассмотренное в предыдущем параграфе решение задачи о собственных колебаниях в прямоугольном резонаторе позво-

*) Бо́льшая часть этого параграфа может быть опущена при первом чтении, но для дальнейшего нужно иметь в виду основные полученные в нём

лило нам познакомиться с основными чертами, характерными для задач о собственных колебаниях в полости любой формы. Именно, мы видели, что решения задачи, удовлетворяющие граничным условиям, существуют только для дискретного ряда частот, причём каждой частоте отвечает одно или несколько собственных колебаний.

Очевидно, в наиболее общем случае в полости резонатора одновременно возбуждены все собственные колебания, подобно тому как при ударе по закреплённой мембране в ней возбуждаются все возможные собственные колебания. Для математического описания собственных колебаний поля в полости в общем случае мы введём так называемые нормальные координаты, которые представляют совокупность амплитуд всех основных электромагнитных волн в полости.

Вектор-потенциал. Вместо того, чтобы пользоваться непосредственно напряжённостями электрического и магнитного полей **E** и **H**, удобнее пользоваться скалярным и вектор-потенциалами φ и **A**, которые определяются с помощью соотношений:

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \operatorname{grad}\varphi, \qquad \mathbf{H} = \operatorname{rot}\mathbf{A}. \tag{4.1}$$

При таком определении вектор-потенциал измеряется в тех же единицах, что и ток. Уравнения для rot **E** и div **H** при подстановке в них потенциалов φ и **A** будут удовлетворены автоматически. Подставляя (4.1) в два других уравнения электромагнитного поля, мы находим:

$$\left.\begin{aligned} -\Delta\mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} + \operatorname{grad}\left(\operatorname{div}\mathbf{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) &= 4\pi\mathbf{j}, \\ -\Delta\varphi + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\operatorname{div}\mathbf{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) &= 4\pi\rho. \end{aligned}\right\} \tag{4.2}$$

Мы можем по своему произволу распорядиться величиной div **A** так, чтобы упростить полученные уравнения. Если положить $\operatorname{div}\mathbf{A} = -\frac{1}{c}\cdot\partial\varphi/\partial t$, мы получим следующие уравнения для потенциалов:

$$\left.\begin{aligned} \Delta A - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} &= -4\pi\mathbf{j}, \\ \Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} &= 4\pi\rho, \\ \operatorname{div}\mathbf{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{4.3}$$

Эти уравнения будут основными в теории излучения системой движущихся зарядов и токов, которой будет посвящена IV глава.

результаты — ортогональность волновых функций [формула (4.5)] и динамические уравнения для амплитуд собственных колебаний [формула (4.10)]. Этот параграф представляет приложение к интересующей нас задаче формализма квантовой электродинамики — ср. [2].

Беря div от первого уравнения, умножая на $1/c$ второе и складывая их, мы найдём уравнение для временной зависимости величины $\operatorname{div}\mathbf{A}+\frac{1}{c}\cdot\partial\varphi/\partial t$, именно

$$\left(\Delta-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\left(\operatorname{div}\mathbf{A}+\frac{1}{c}\varphi\right)=0.$$

В правой части последнего уравнения стоит нуль потому, что ток и заряды должны удовлетворять уравнению непрерывности (1.5). Оно показывает, что если мы имеем решение, удовлетворяющие третьему уравнению (4.3) вместе с его производными по времени при $t=0$, то тем самым мы удовлетворяем ему и во все остальные времена.

Предположим теперь, что задача о нахождении собственных частот и отвечающих им собственных волн в полости может быть решена таким же образом, как это делалось для прямоугольного ящика. Это означает, что нам известна совокупность величин k_1, k_2, k_3 и т. д. и соответствующих решений $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_3$ и т. д. уравнений для потенциала

$$\Delta\mathbf{A}+k^2\mathbf{A}=0,\quad \operatorname{div}\mathbf{A}=0, \tag{4.4}$$

удовлетворяющих граничным условиям.

$\mathbf{A}$ перпендикулярно к границе области или обращается в нуль. Как мы видели, с каждым вырожденным числом $\mathbf{k}_n$ связано не одно, а несколько линейно-независимых решений $\mathbf{A}_n$. Поэтому для полной нумерации всех векторов $\mathbf{A}$ нужно пользоваться ещё одним индексом, позволяющим различать $\mathbf{A}$, соответствующие одному и тому же значению $\mathbf{k}_n$. Однако, обычно можно не вводить такого усложнения письма, а нумеровать одним индексом n все независимые волновые функции, так что в случае вырождения нескольким различным значениям индекса и отвечали бы одинаковые значения $\mathbf{k}_n$.

Ортогональность волновых функций. Векторные волны A_n обладают важным свойством ортогональности, что позволяет выражать через них остальные функции, подобно тому как это делается в теории рядов Фурье. Составим выражение

$$\mathbf{A}_m\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A}_n-\mathbf{A}_n\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A}_m=(k_n^2-k_m^2)\,\mathbf{A}_n\mathbf{A}_m.$$

Воспользовавшись известным тождеством векторного анализа

$$\operatorname{div}(\mathbf{ab})=\mathbf{b}\operatorname{rot}\mathbf{a}-\mathbf{a}\operatorname{rot}\mathbf{b},$$

это уравнение можно написать в виде

$$\operatorname{div}(\mathbf{A}_n\operatorname{rot}\mathbf{A}_m+\operatorname{rot}\mathbf{A}_n\mathbf{A}_m)=(k_n^2-k_m^2)\,\mathbf{A}_n\mathbf{A}_m.$$

Проинтегрируем теперь обе части последнего уравнения по объёму полости. Интеграл в левой части может быть преобразован в поверхностный интеграл, распространённый по поверхности, ограничивающей полость. Однако, поскольку $\mathbf{A}_n$ и $\mathbf{A}_m$ перпендикулярны к по-

верхности, этот интеграл исчезает. Поэтому, имеем

$$\int \mathbf{A}_n \mathbf{A}_m \, dV = 0, \quad \text{если} \quad n \neq m. \tag{4.5}$$

В случае вырожденных значений k всегда можно выбрать такую линейную комбинацию векторов $\mathbf{A}_n$, которая удовлетворяла бы условиям ортогональности даже и в том случае, если бы первоначально найденные $\mathbf{A}$ этим условиям не удовлетворяли.

Поскольку частное решение уравнений для $\mathbf{A}$ будет оставаться решением при умножении его на произвольную постоянную, мы можем подобрать при различных $\mathbf{A}_n$ постоянные множители так, чтобы нормировать функции, т. е. чтобы имело место равенство

$$\int \mathbf{A}_n \mathbf{A}_n^* \, dV = V, \tag{4.6}$$

где $\mathbf{A}_n^*$ — комплексно-сопряжённая $\mathbf{A}_n$ функция, а V — объём полости, заполненной излучением. При такой нормировке функции $\mathbf{A}_n$ считаются безразмерными.

Рассмотрим сперва случай, когда плотность заряда внутри полости всё время равна нулю. Тогда и $\varphi = 0$, и мы можем попытаться отыскать решение первого из уравнений (4.3) в виде

$$\mathbf{A} = \sum q_n(t) \, \mathbf{A}_n(x, y, z). \tag{4.7}$$

Поскольку векторы $\mathbf{A}_n$ безразмерны, временные множители $q_n(t)$ имеют размерность абсолютных амперов. Временные амплитуды, характеризующие возбуждение соответствующих электромагнитных колебаний, называются нормальными амплитудами поля.

Каждому собственному колебанию отвечает своя амплитуда, так что полное число их бесконечно велико.

Амплитуды токов возбуждения. Разложим ток в полости резонатора $\mathbf{j}(x, y, z, t)$ в ряд Фурье по векторам $\mathbf{A}_n$, так что

$$\mathbf{j}(x, y, z, t) = \sum I_n(t) \, \mathbf{A}_n(x, y, z). \tag{4.8}$$

Для формального определения коэффициентов разложения воспользуемся условиями ортогональности и нормировки функций $\mathbf{A}$ и, как это обычно делается в теории рядов Фурье, без труда найдём

$$I_n(t) = \frac{1}{V} \int \mathbf{j} \mathbf{A}_n^* \, dV. \tag{4.9}$$

Размерность $I_n(t)$, как и $\mathbf{j}$ — А/*см*². Мы будем именовать коэффициенты $I_n(t)$ амплитудами тока возбуждения n-го колебания. Заметим, кстати, что распределение токов $\mathbf{j}$ является тем более эффективным для возбуждения n-го собственного колебания, чем ближе пространственное распределение его к пространственному распределению возбуждаемого колебания.

Уравнение для амплитуд поля. Подставляя (4.8) и (4.7) в первое из уравнений (4.3) и приравнивая коэффициенты при

векторах $\mathbf{A}_n$, мы получим следующее уравнение для амплитуд поля в резонаторе:

$$\ddot{q}_n(t) + (ck_n)^2 q_n(t) = 4\pi c^2 I_n(t). \tag{4.10}$$

Это уравнение совершенно идентично с уравнением вырожденных колебаний гармонического осциллятора, обладающего собственной частотой $(ck_n)\,2\pi$.

Если амплитуда тока возбуждения $I_n(t)$ равна нулю, соответствующая амплитуда q_n является гармонической функцией времени, изменяющейся с частотой (ck_n) с постоянной амплитудой. Отсутствие затуханий у свободных колебаний связано с тем, что мы предполагаем, что стенки полости сделаны из идеального проводника. Влияние конечного электрического сопротивления стенок будет учтено в § 8.

Выражение для энергии. Подставляя в общее выражение для энергии электрического поля в пустоте

$$W_e = \int \frac{E^2}{8\pi}\, dV = \frac{V}{8\pi c^2} \sum_n j_n^2,$$

выражая E через **A** и пользуясь формулами (4.5), (4.6) и (4.7), находим следующее выражение для энергии электрического поля в полости с излучением:

$$W_e = \frac{V}{8\pi c^2} \sum_n \dot{q}_n^2. \tag{4.11}$$

Аналогично, для магнитной энергии имеем

$$W_m = \int \frac{H^2}{8\pi}\, dV = \sum_{n,m} \int q_n q_m (\operatorname{rot} \mathbf{A}_n \operatorname{rot} \mathbf{A}_m)\, dV.$$

Для упрощения этого выражения вычислим отдельно интеграл

$$\int (\operatorname{rot} \mathbf{A}_n \operatorname{rot} \mathbf{A}_m)\, dV = \int \operatorname{div} (\mathbf{A}_n \operatorname{rot} \mathbf{A}_m)\, dV + k_m^2 \int \mathbf{A}_n \mathbf{A}_m\, dV =$$
$$= \int (\mathbf{A}_n \operatorname{rot} \mathbf{A}_m)\, d\mathbf{s} + k_m^2 \int \mathbf{A}_n \mathbf{A}_m\, dV.$$

Поверхностный интеграл исчезает, так как нормальная к поверхности компонента вектора $\mathbf{A}_n \operatorname{rot} \mathbf{A}_m$ равна нулю. Следовательно,

$$\int \operatorname{rot} \mathbf{A}_n \operatorname{rot} \mathbf{A}_m\, dV = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ k_n^2 V & n = m. \end{cases}$$

Так что, окончательно, для магнитной энергии находим

$$W_m = \frac{V}{8\pi} \sum_n k_n^2 q_n^2. \tag{4.12}$$

Поскольку отдельные собственные колебания независимы и энергия взаимодействия между ними равна нулю, что видно из условия ортогональности векторов $\mathbf{A}_n$, полная энергия поля равна просто сумме электрической и магнитной энергии, т. е.

$$W_n = \frac{V}{8\pi c^2}\left[\dot{q}_n^2 + (ck_n^2)\, q_n^2\right]. \tag{4.13}$$

Выражение для dW_n/dt может быть найдено из (4.10) совершенно таким же способом, как находится интеграл энергии для системы частиц в механике. Простые вычисления дают

$$\frac{dW_n}{dt} = V\dot{q}_n(t)\, I_n(t), \tag{4.14}$$

т. е. скорость возрастания энергии электромагнитного поля n-го колебания равна скорости возрастания амплитуды этого колебания, умноженной на ток возбуждения, отвечающий этому колебанию, и на объём полости, заполненной полем.

Это выражение совершенно аналогично выражению для мощности в механике, равной произведению силы (в нашем случае I_n) на скорость (в нашем случае пропорциональной скорости возрастания амплитуды q_n).

Эффективная индукция и ёмкость. Для тех, кто привык мыслить в терминах резонансных контуров с их ёмкостями и индукциями, будет полезно ввести определение величин, играющих для полого резонатора роль эффективной ёмкости и индукции. Обычная индукция связана с магнитной энергией соотношением $W_m = Li^2/2$, где W_m выражено в эргах, i в абсолютных амперах и L в сантиметрах.

В нашем случае амплитуда n-го колебания q_n играет в магнитной энергии роль тока, так что мы можем отождествить коэффициент при q_n^2 в (4.12) с половиной эффективной индукции L_n n-го собственного колебания

$$L_n = \frac{Vk_n^2}{4\pi} = \frac{\pi V}{\lambda_n^2}. \tag{4.15}$$

Для перевода в практические единицы напомним, что индукция в 1 *см* равна 10^{-9} генри.

Ёмкость n-го собственного колебания поля мы определим так, чтобы произведение L_nC_n давало правильную резонансную частоту в соответствии с известным соотношением

$$\lambda_n = 2\pi\sqrt{L_nC_n}.$$

Отсюда легко найти электростатическую ёмкость C_n, связанную с n-м собственным колебанием поля:

$$C_n = \frac{4\pi}{Vk_n^4}. \tag{4.16}$$

Пример: Показать, что нормированный вектор $\mathbf{A}_n$ для собственного колебания (110) в кубическом резонаторе с ребром A будет

$$A_n = 2k \sin\frac{\pi x}{A} \sin\frac{\pi y}{A},$$

где k — единичный вектор, направленный по оси z. Показать также, что электрическое поле достигает максимального значения на линии $x = A/2$, $y = A/2$ и что если амплитуда $q_{110} = 1$ абс. ед., то максимальное значение электрического поля равно $4\pi/\lambda$ абс. ед., где $\lambda = \sqrt{2}A$.

Влияние объёмных зарядов. Перейдём теперь к рассмотрению более общего случая, когда в полости резонатора отличны от нуля и плотность тока, и плотность заряда. В этом случае разложение (4.7) уже не имеет места, так как оно приводит к невыполняющемуся уже более равенству $\operatorname{div}\mathbf{A} = 0$.

То же самое относится и к разложению (4.8). Необходимое обобщение полученных выше соотношений заключается в следующем.

Предположим, что однородная граничная задача для скалярной функции

$$\Delta\varphi_m + k_m^2\varphi_m = 0 \qquad (4.17)$$
$$\varphi_m = 0 \text{ на границе области}$$

решена и соответствующие собственные функции и собственные числа известны. Функции φ_m можно считать ортогональными и нормированными

$$\varphi_l\Delta\varphi_m - \varphi_m\Delta\varphi_l + (k_m^2 - k_l^2)\varphi_m\varphi_n = 0$$

или

$$\varphi_l\Delta\varphi_m - \varphi_n\Delta\varphi_l = \operatorname{div}(\varphi_l \operatorname{grad}\varphi_m - \varphi_m \operatorname{grad}\varphi_l = (k_l^2 - k_m^2)\varphi_m\varphi_l.$$

Интегрируя по всему объёму полости, имеем

$$(k_l^2 - k_m^2)\int \varphi_m\varphi_l dV = \int \operatorname{div}(\varphi_l \operatorname{grad}\varphi_m - \varphi_m \operatorname{grad}\varphi_l)\, dV =$$
$$= \int (\varphi_l \operatorname{grad}\varphi_m - \varphi_m \operatorname{grad}\varphi_l)\, d\mathbf{S} = 0$$

при $l \neq m$.

Условие нормировки, накладываемое на функции φ_m, имеет тот же вид, что и (4.6):

$$\int \varphi_m^2 dV = V. \qquad (4.18)$$

Мы предположим, далее, что плотность заряда $\rho(x, y, z, t)$ может быть разложена в ряд по ортогональным функциям φ_m, т. е.

$$\rho(x, y, z, t) = \sum_m R_m(t)\,\varphi_m(x, y, z) \qquad (4.19)$$

и аналогично, скалярный потенциал $\varphi(x, y, z, t)$

$$\varphi(x, y, z, t) = \sum_m \Phi_m(t)\,\varphi_m(x, y, z). \qquad (4.20)$$

Подстановка этих разложений в уравнение для φ (4.3) приводит к уравнениям для коэффициентов Φ_m, совершенно аналогичным (4.10):

$$\ddot{\Phi}_m(t) + (ck_m)^2 \Phi_n = 4\pi c^2 R_m. \tag{4.21}$$

В выражения для $\mathbf{A}$ и $\mathbf{j}$ должны быть внесены такие добавки, чтобы их дивергенция не исчезала. Подходящими для этого функциями являются

$$\mathbf{B}_m = \frac{1}{k_m} \operatorname{grad} \varphi_m, \quad \operatorname{rot} \mathbf{B}_m = 0. \tag{4.22}$$

Функции $\mathbf{B}_n$ ортогональны друг к другу и к функциям $\mathbf{A}_n$. Чтобы проверить последнее утверждение, воспользуемся общей формулой

$$\int (\operatorname{rot} \mathbf{a} \operatorname{rot} \mathbf{b} + \operatorname{div} \mathbf{a} \operatorname{div} \mathbf{b} + \mathbf{a} \operatorname{rot} \mathbf{b})\, dV = \\ = \int (\mathbf{a} \operatorname{rot} \mathbf{b})\, d\mathbf{S} + \int (\operatorname{div} \mathbf{b} \cdot \mathbf{a})\, d\mathbf{S}.$$

Отождествим вектор $\mathbf{a}$ с $\mathbf{A}_n$ и $\mathbf{b}$ с $\mathbf{B}_m$. Тогда два первых интеграла в левой части исчезают, первый из-за равенства нулю $\operatorname{div} \mathbf{A}_n$, второй из-за равенства нулю $\operatorname{rot} \mathbf{B}_m$ и третий превращается в $-k_n^2 \int \mathbf{A}_n \mathbf{B}_m dV$.

В правой части первый интеграл исчезает, так как вектор $\mathbf{B}_m$ перпендикулярен к поверхности, и второй из-за равенства $\operatorname{div} \mathbf{A}_n = 0$. Множитель $1/k_m$ введён в (4.22) для того, чтобы $\mathbf{B}_m$ было нормировано так же, как и $\mathbf{A}_n$:

$$\int \mathbf{B}_m \mathbf{B}_l dV = \begin{cases} 0, & m \neq l, \\ V, & m = l. \end{cases} \tag{4.23}$$

Последнее вытекает из соотношения

$$\int \operatorname{grad} \varphi_n \operatorname{grad} \varphi_l dV = \int \operatorname{div} (\varphi_m \operatorname{grad} \varphi_l)\, dV - \int \varphi_m \Delta \varphi_l dV.$$

Мы предположим теперь, что выражения (4.7) и (4.8) при наличии в полости объёмных зарядов обобщаются следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{A} &= \sum_n q_n(t)\, \mathbf{A}_n + \sum_m P_m(t)\, \mathbf{B}_m, \\ \mathbf{j} &= \sum_n I_n(t)\, \mathbf{A}_n + \sum_m H_m(t)\, \mathbf{B}_m. \end{aligned}\right\} \tag{4.24}$$

Подставляя эти выражения в уравнение для $\mathbf{A}$ (4.3), находим уравнение для P_m:

$$\ddot{P}_m(t) + (ck_m)^2 P_m(t) = 4\pi c^2 H_m(t), \tag{4.25}$$

которое, совместно с уравнениями (4.21) и (4.10), образует полную систему уравнений для всех амплитуд волнового поля. Значительное усложнение возникает при учёте влияния объёмных зарядов на зна-

чение ёмкости. При этом необходимо не только ввести в энергию скалярный потенциал, но и учесть изменение, возникающее в вектор-потенциале **A**.

Аналогично (4.3) можно показать, что если в начальный момент имеют место равенства

$$\dot{\Phi}_m - ck_m P_m = 0$$

и

$$\frac{d}{dt}(\dot{\Phi}_m - ck_m P_m) = 0,$$

то они остаются выполненными во всё дальнейшее время. Следовательно, решения уравнений (4.10), (4.21) и (4.25) должны быть выбраны так, чтобы они удовлетворяли этим условиям, как части начальных условий задачи.

Если вычислить электрическую и магнитную энергию поля, то окажется, что в магнитной энергии никаких изменений не произойдёт, так как ротор от добавленных в вектор-потенциал членов равен нулю; в электрической же энергии появятся новые члены и она приобретёт вид

$$W_l = \frac{V}{8\pi c^2}\sum_n \dot{q}_n^2 + \frac{V}{8\pi c^2}\sum_m \dot{P}_m^2 + \frac{V}{8\pi}\sum_m k_m^2 \Phi_m^2. \qquad (4.26)$$

§ 5. Цилиндрический резонатор*)

Цилиндрическим резонатором мы будем называть резонатор, ограниченный плоскостями $z=0$ и $z=C$ с торцов, причём сечение в любой плоскости $z=\text{const}$ представляет одну и ту же кривую. Для такого резонатора задача о пространственном распределении поля в самом общем виде может быть сведена к двухмерной задаче. Мы будем исходить из уравнений Максвелла (3.1), в которых положено $\varepsilon=\mu=1$:

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{div}\mathbf{E}=0, && \operatorname{div}\mathbf{H}=0;\\ &\operatorname{rot}\mathbf{E}=-ik\mathbf{H}, && \operatorname{rot}\mathbf{H}=+ik\mathbf{E}.\end{aligned}\right\} \qquad (5.1)$$

Естественно предположить, что решение зависит от координаты z так же, как и в случае прямоугольного ящика, т. е. выражается через $\cos k_3 z$ и $\sin k_3 z$.

Все возможные собственные колебания поля в цилиндрическом резонаторе могут быть разделены на два класса: колебания E-типа, для которых

$$E_z \neq 0, \text{ а } H_z = 0, \qquad (5.2)$$

и колебания H-типа, для которых

$$H_z \neq 0, \text{ а } E_z = 0.$$

*) Литература по этому вопросу весьма скудна. Некоторые общие вопросы освещены в книгах, см. [3].

Колебания E-типа. Рассмотрим сперва колебания E-типа. Так как у этих колебаний $H_z=0$, то уравнения для $\operatorname{rot}\mathbf{H}$ имеют вид

$$\left.\begin{aligned} ikE_x &= -\frac{\partial H_y}{\partial z}, \\ ikE_y &= +\frac{\partial H_x}{\partial z}, \\ ikE_z &= \frac{\partial H_y}{\partial x}-\frac{\partial H_z}{\partial y} \end{aligned}\right\} \tag{5.3}$$

и, аналогично, уравнения для $\operatorname{rot}\mathbf{E}$

$$\left.\begin{aligned} -ikH_x &= \frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}, \\ -ikH_y &= \frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x}, \\ 0 &= \frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}. \end{aligned}\right\} \tag{5.4}$$

Компоненты E_x и E_y можно выразить через E_z:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}+k^2E_x=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial E_z}{\partial z}\right),$$
$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2}+k^2E_y=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial E_z}{\partial z}\right).$$

Левая часть этих уравнений равна, соответственно $(k^2-k_3^2)E_x$ и $(k^2-k_3^2)E_y$ при любой зависимости E_z от координаты z. Поэтому, если обозначить через E_s компоненты вектора $\mathbf{E}$ в сечении резонатора, перпендикулярном оси z,

$$E_s=\mathbf{i}E_x+\mathbf{k}E_y,$$

то уравнения можно записать в векторном виде

$$(k^2-k_3^2)\,\mathbf{E}_s=\operatorname{grad}_s\frac{\partial E_z}{\partial z}, \tag{5.5}$$

где grad_s означает градиент в поперечном сечении.

Воспользовавшись далее уравнениями (5.4), чтобы исключить магнитное поле из третьего уравнения (5.3), мы получим основное уравнение, описывающее изменение E_s по сечению

$$\Delta_s E_s+(k^2-k_3^2)E_s=0, \tag{5.6}$$

где Δ_s означает оператор Лапласа для сечения (равный обычному оператору Лапласа без производных по z).

Наконец, с помощью (5.4) можно выразить магнитное поле через электрическое

$$H_x = \frac{ik}{k^2 - k_3^2}\frac{\partial E_z}{\partial y} \quad H_y = -\frac{ik}{k^2 - k_3^2}\frac{\partial E_z}{\partial x} \tag{5.7}$$

или, в векторной форме,

$$\mathbf{H} = -\frac{ik}{k^2 - k_3^2}\mathbf{k}\,\mathrm{grad}_s E_z, \tag{5.8}$$

где $\mathbf{k}$ — единичный вектор в направлении оси z.

Граничным условием для электрического поля $\mathbf{E}$ является нормальность вектора $\mathbf{E}$ к граничным поверхностям резонатора. Чтобы удовлетворить этому условию на концах цилиндра в E_z, нужно взять зависимость от $\cos k_3 z$, но не от $\sin k_3 z$. Условие на стенках цилиндра приводит к тому, что допустимыми являются только те решения уравнения (5.6), которые обращаются в нуль на границе области.

Обозначим через $\phi_n(x, y)$ и k_n — собственные функции и собственные числа двухмерной краевой задачи

$$\Delta_s^2\phi_n(x, y) + k_n^2\phi_n(x, y) = 0, \tag{5.9}$$
$$\phi_n(x, y) = 0 \text{ на границе области.}$$

В математике хорошо известно решение этой задачи для самых разнообразных границ, так как задачи этого типа часто встречаются в других разделах математической физики.

Тогда для собственных колебаний E-типа имеем окончательно:

$$\left.\begin{aligned} E_z &= A\phi_n(x, y)\cos k_3 z, \\ k^2 &= k_n^2 + k_3^2, \\ E_s &= -\left(\frac{k_3}{k_n^2}\right)A\left(\frac{\partial\phi_n}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi_n}{\partial y}\mathbf{k}\right)\sin k_3 z, \\ H_s &= -i\left(\frac{k}{k_n^2}\right)A\left(-\frac{\partial\phi_n}{\partial y}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi_n}{\partial x}\mathbf{j}\right)\cos k_3 z. \end{aligned}\right\} \tag{5.10}$$

Для вектор-потенциала имеем

$$\mathbf{A} = \mathbf{B}\left\{\phi_n(x, y)\cos k_3 z\cdot\mathbf{k} - \frac{k_3}{k_n^2}\mathrm{grad}_s\,\phi_n\sin k_3 z\right\}, \tag{5.11}$$

где B — постоянная нормировки, выбранная так, чтобы было выполнено условие (4.6). Именно, имеем:

$$\int \mathbf{A}^2 dV = B^2\frac{C}{2}\left[\int\phi_n^2 dx\,dy + \frac{k_3^2}{k_n^4}\int(\mathrm{grad}\,\phi_n)^2 dx\,dy\right].$$

Так как

$$(\mathrm{grad}\,\phi)^2 = \mathrm{div}\,(\phi\,\mathrm{grad}\,\phi) - \phi\Delta\phi,$$

это условие сводится к

$$\int \mathbf{A}^2 dV = B\frac{C}{2}\left[1+\frac{k_3^2}{k_n^2}\right]\int \psi_n^2 dx\,dy,$$

так что, если через V обозначить объём резонатора, то

$$B^2 = \frac{2Vk_n^2}{Ck^2\int \psi_n^2 dx\,dy}. \tag{5.12}$$

Колебания H-типа. Теория собственных колебаний H-типа совершенно аналогична только что изложенной теории колебаний E-типа. Вместо (5.3) и (5.4) мы имеем

$$ikE_x = \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}, \quad ikE_y = \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x},$$

$$0 = ikE_z = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y},$$

$$-ikH_x = -\frac{\partial E_y}{\partial z}, \quad -ikH_y = \frac{\partial E_x}{\partial z}, \quad -ikH_z = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}.$$

Эти уравнения позволяют выразить H_x и H_y через H_z и получить для компоненты поля, лежащей в сечении резонатора, уравнение

$$(k^2 - k_3^2)\,H_s = \mathrm{grad}_s\left(\frac{\partial H_z}{\partial z}\right). \tag{5.13}$$

Для H_z имеем аналогично (5.6)

$$\Delta_s^2 H_z + (k^2 - k_3^2)\,H_z = 0 \tag{5.14}$$

и, наконец,

$$E_s = \frac{ik}{k^2 - k_3^2}\,k\,\mathrm{grad}_s H_z, \tag{5.15}$$

аналогично (5.8).

Поскольку граничные условия требуют, чтобы $\mathbf{H}$ было параллельно стенке, в H_z нужно брать множитель $\sin k_3 z$. Из (5.13) мы видим, что для того, чтобы вектор $\mathbf{H}_s$ был тангенциальным к поверхности цилиндра, градиент по нормали от H_z должен обращаться в нуль на стенках.

Обозначим через $\varphi_m(x, y)$ и k_m собственные функции и собственные числа двухмерной задачи

$$\Delta_s \varphi_m + k_m^2 \varphi_m = 0, \tag{5.16}$$

$$\partial\varphi_m/\partial n \text{ на границе},$$

где $\partial/\partial n$ означает дифференцирование по нормали к поверхности. Разница в граничных условиях (5.9) и (5.16) приводит к тому, что задача H-типа имеет другой набор собственных значений и собственных функций.

Для собственных колебаний H-типа имеем

$$\left.\begin{aligned} &H_z = A\varphi_m(x, y)\sin k_3 z,\\ &k^2 = k_n^2 + k_3^2,\\ &\mathbf{H}_s = \left(\frac{k_3}{k_m^2}\right) A\,\mathrm{grad}_s\,\varphi_m \cos k_3 z,\\ &\mathbf{E}_s = i\left(\frac{k}{k_m^2}\right) A\left(-\frac{\partial\varphi_m}{\partial y}\mathbf{i} + \frac{\partial\varphi_m}{\partial x}\mathbf{j}\right)\sin k_3 z. \end{aligned}\right\} \qquad (5.17)$$

Для вектор-потенциала этих колебаний можно положить

$$\mathbf{A} = B\left(-\frac{\partial\varphi_m}{\partial y}\mathbf{i} + \frac{\partial\varphi_m}{\partial x}\mathbf{j}\right)\sin k_3 z,$$

где B — нормирующий множитель, равный, как показывают расчёты,

$$B^2 = \frac{2V}{Ck_m^2\int\varphi_m^2\,dx\,dy}. \qquad (5.18)$$

Заметим, что среди колебаний E-типа имеется колебание с $k_3 = 0$, для которого резонансная частота не зависит от высоты цилиндра, тогда как колебания H-типа существуют только для $k_3 \neq 0$.

Дозволенными значениями k_3 являются, конечно, лишь значения

$$k_3 = \frac{n\pi}{C} \qquad (n \text{ — целое число}). \qquad (5.19)$$

Нам понадобятся специальные обозначения для обоих видов собственных колебаний цилиндрического резонатора. Наиболее удобными обозначениями для колебаний E- и H-типов являются соответственно $E(n, l)$ и $H(m, l)$. Для цилиндров со специальными формами сечения индексы n и m будут замещаться в некоторых случаях более удобными индексами.

Рис. 4. Схема сечения резонатора с двойными стенками.

Резонатор с двойными стенками. Если сечение цилиндрического резонатора ограничено с внешней стороны кривой C_1, а с внутренней — кривой C_2, как указано на рис. 4, то полость конденсатора не является более односвязной областью. Это значит, что произвольный замкнутый контур внутри области не может быть стянут в точку непрерывной деформации внутри области. Неодносвязность области влечёт за собой некоторые важные следствия.

На практике кривые C_1 и C_2 представляют, обычно, концентрические круги, но, как мы сейчас увидим, общие свойства резонаторов с двойными стенками не зависят от вида граничных кривых.

Двумя важнейшими особенностями таких резонаторов является: 1) то, что в полости резонатора может существовать чисто магнитное статическое поле и 2) что в них возможно существование

системы собственных колебаний с частотой, зависящей только от длины, но не поперечных размеров цилиндра, у которых одновременно исчезают слагающие E_z и H_z. Такие колебания мы будем называть колебаниями коаксиального кабеля.

Если E_z и H_z одновременно равны нулю, то система уравнений Максвелла (5.3) и (5.4) имеет вид

$$ikE_x = -\frac{\partial H_y}{\partial z}, \qquad ikE_y = \frac{\partial H_x}{\partial z},$$
$$0 = \frac{\partial H_y}{\partial z} - \frac{\partial H_x}{\partial y},$$
$$-ikH_z = -\frac{\partial E_y}{\partial z}, \qquad -ikH_y = \frac{\partial E_x}{\partial z},$$
$$0 = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}.$$

Из выражений для z-компонент уравнений для электрического и магнитного полей вытекает, что $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ могут быть представлены, как градиент некоторой скалярной функции $U(x, y, z)$.

Именно, положим

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{E}_z &= -\operatorname{grad}_S U(x, y, z); \\ \text{тогда} \qquad ik\mathbf{H}_S &= \mathbf{k}\operatorname{grad}\frac{\partial U}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \tag{5.20}$$

Из первых двух уравнений имеем

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) + k^2\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) = 0,$$
$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right) + k^2\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right) = 0,$$

а из третьего находим

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right) = 0.$$

Граничные условия гласят, что E_S исчезает при $z=0$ и $z=C$ и на боковых стенках сосуда. Чтобы удовлетворить этим условиям, положим

$$U(x, y, z) = u(x, y)\sin\frac{n\pi z}{C},$$

где

$$\Delta U = 0$$

и u обращается в постоянную на граничных кривых C_1 и C_2. Если бы мы имели дело с односвязной областью, ограниченной одной кривой C_2, то, как известно из теории потенциала, функция u, удовлетворяющая уравнению Лапласа внутри области и постоянная на её границе, была бы постоянной всюду. Поэтому электрическое и магнитное поле внутри области тождественно и

обратилось бы в нуль. Это показывает, что в односвязной полости невозможно существование электромагнитного поля с исчезающими одновременно z-ми компонентами $\mathbf{E}_z$ и $\mathbf{H}_z$.

Иначе, однако, дело обстоит в двухсвязной области между кривыми C_1 и C_2. Мы можем здесь удовлетворить граничным условиям, положив $u=u_1$ на кривой C_1 и $u=u_2$ на кривой C_2, где u_1 и u_2 — различные постоянные. При этом функция $u(x, y)$ будет уже не постоянной, а превратится в функцию, совпадающую с электростатическим потенциалом, удовлетворяющим указанным условиям. Так как волновое число k не входит в граничные условия на боковых поверхностях цилиндра, оно полностью определится условиями на торцовых поверхностях, т. е. $k=n\pi/C$. Отсюда следует, что при любом виде кривых C_1 и C_2 в резонаторе с двойными стенками могут существовать собственные колебания с длиной волны $\lambda=2C/n$, где n—целое число.

Если перейти к пределу $k\to 0$, то электрическое поле обратится, очевидно, в нуль [так как $U(x, y, z)=u(x, y)\sin kZ$ стремится при этом к нулю]. Однако, напряжённость магнитного поля будет отлична от нуля и равна

$$\mathbf{H}_S=\mathbf{k}\,\mathrm{grad}\,u.$$

Таким образом, в резонаторе может существовать постоянное магнитное поле, образованное циркуляцией постоянного тока, текущего по внутренней и внешней стенкам цилиндра. Такие статические поля всегда существуют в резонаторе, внутренность которого представляет многосвязную область.

Использование теории функций. Поскольку функция $u(x, y)$ удовлетворяет уравнению Лапласа в двух измерениях, ряд результатов можно получить с помощью теории функций.

Для дальнейшего, положим $z=x+iy$ (не следует смешивать z с координатой z вдоль оси цилиндра). Пусть далее

$$w=f(z)=u(x, y)+iv(x, y) \tag{5.21}$$

является аналитической функцией z. Для того, чтобы w имела однозначную и непрерывную производную $f'(z)$, должны выполняться условия Коши-Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{5.22}$$

Из (5.19) следует, что

$$E_x=-\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right), \quad E_y=-\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right),$$
$$iH_x=-\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right), \quad iH_y=-\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right),$$

если отвлечься от синусоидальной или косинусоидальной зависимостей E и H от координаты z, направленной вдоль оси цилиндра.

Формулы (5.22) можно кратко записать в векторном виде, как

$$\mathbf{E} - i\mathbf{H} = -\operatorname{grad} w. \tag{5.23}$$

Рассмотрим теперь произвольную функцию $w = f(z)$ такую, что уравнение $u(x, y) = \text{const.}$ определяет семейство замкнутых кривых, каждая из которых охватывает все предыдущие. Любые две из этих кривых могут быть выбраны в качестве граничных кривых C_1 и C_2 полого резонатора с двойными стенками, следовательно, каждая из функций u может представлять решение уравнений поля для всего семейства полых резонаторов.

Круговой коаксиальный кабель. Простейшим из приложений общего метода служит решение для кругового коаксиального кабеля. Оно даётся функцией

$$w = \log z \tag{5.24}$$

или

$$e^{u+iv} = z,$$

откуда

$$e^u = |z| = r,$$

так что

$$u = \log r$$

и

$$v = \arg z = \varphi,$$

где

$$\log z = \log r + i\varphi.$$

Следовательно, линии $u = \text{const.}$ представляют круги $r = \text{const.}$, а линии $v = \text{const.}$ — лучи, проведённые под углом $\varphi = \text{const.}$

Электрическое и магнитное поля, согласно (5.23), будут

$$\mathbf{E} - i\mathbf{H} = -\operatorname{grad} w = -\left(\frac{1}{r}\right) r_0 - i\left(\frac{1}{r}\right)\varphi_0. \tag{5.25}$$

Электрическое поле направлено по радиус-вектору, магнитное поле циркулярно и оба убывают обратно пропорционально радиусу. Если радиус внутреннего цилиндра будет a, а внешнего b, то плотность тока, текущего по поверхности внутреннего цилиндра, будет равна $1/4\pi a$ абс. ед.·*см*, внешнего $1/4\pi b$. Полные токи, текущие по обеим поверхностям, равны друг другу и составляют 1/2 абс. А; линейный интеграл от вектора поля в пределах от $r = a$ до $r = b$ равен $\log(a\ b)$ абс. ед. Поэтому, если амплитуда возбуждения резонатора такова, что максимальная амплитуда тока (в точках, где $\cos n\pi z/C = \pm 1$, т. е. $z = 0$ или $v = \pm C/m$) равна 1 А, максимальная амплитуда напряжённости (в точках, где $\sin n\pi z\, C = \pm 1$) равна $60 \log b/a$. Это часто выражают словами: «импеданц круглого коаксиального кабеля равен $60 \log b/a$ *ом*».

Если граничными кривыми служат не окружности, а более сложные кривые, то решение может быть получено следующим образом: предположим, что координаты (x, y) являются периодическими функция-

ми v; не ограничивая общности, можно считать, что период равен 2π и что функция комплексного переменного, удовлетворяющая этому условию, является разложением Фурье

$$z = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m e^{m(u+iv)}; \tag{5.26}$$

член A_0 можно исключить из разложения, так как если бы он был отличен от нуля, при сдвигании соответствующим образом начала координат в плоскости (x, y), можно было бы добиться обращения его в нуль.

Круговой коаксиальный передатчик получается при $A_1 = 1$, $A_m = 0$ (при $m \neq 1$).

Эллиптический коаксиальный кабель. Интересным является случай, когда

$$A_1 = A_{-1} = \frac{f}{2}, \quad A_m = 0 \quad \text{при} \quad m \neq \pm 1.$$

Формула (5.26) даёт

$$z = f(\cos hu \cos v + i \sin hu \sin v).$$

Отсюда следует, что кривые $u = \text{const.}$ являются конфокальными эллипсами

$$\left(\frac{x}{f \cos hu}\right)^2 + \left(\frac{y}{f \sin hu}\right)^2 = 1$$

с фокусами в точке $(x, y) = (\pm f, 0)$.

Таким образом, в этом мы получаем теорию резонатора, ограниченного двумя конфокальными эллиптическими цилиндрами.

Если внутренний и внешний цилиндры имеют большие полуоси a и b, соответственно, $(a, b > f)$ на внутренней и внешней стенках,

$$\cos hu_1 = \frac{a}{f} \text{ и } \cos hu_2 = \frac{b}{f}.$$

Линейный интеграл, взятый от внутренней до внешней стенки, будет равен

$$u_2 - u_1 = \cos h^{-1}\left(\frac{b}{f}\right) - \cos h^{-1}\left(\frac{a}{f}\right).$$

Магнитное поле в точке (u, v) равно $-\operatorname{grad} v$, так что аксиальный ток на единицу длины на каждой из стенок равен $1/4\pi \operatorname{grad} v$ абс. единиц. Полный ток по стенке равен $\frac{1}{2}$ абс. единиц, так как интеграл от $\operatorname{grad} v$ по поверхности равен 2π. Следовательно, определяя импеданц так же, как и для кругового коаксиального передатчика, мы находим для импеданца передатчика

$$60\left[\cos h^{-1}\frac{b}{f} - \cos h^{-1}\frac{a}{f}\right] = 60 \lg \frac{b + (b^2 - f^2)^{1/2}}{a + (a^2 - f^2)^{1/2}}. \tag{5.27}$$

Мы можем, наконец, получить общее выражение для импеданца резонатора, ограниченного двумя цилиндрами любой формы.

Независимо от формы поверхности полный ток, текущий по внутреннему проводнику, равен $\frac{1}{2}$ абс. ед. и линейный интеграл от вектора электрического поля, взятый на пути от внутреннего до внешнего проводника, равен $u_2 - u_1$ абс. ед., если проводники находятся при потенциале u_1 и u_2.

Следовательно, импеданц резонатора независимо от формы образующих цилиндров равен

$$60\,(u_2 - u_1). \tag{5.28}$$

§ 6. Круговой цилиндр

Общие выводы предыдущего параграфа могут быть иллюстрированы на примере кругового цилиндра радиуса R, имеющем большой практический интерес. Вместо декартовых координат x, y удобно ввести полярные координаты.

Уравнения (5.9) и (5.16) будут удовлетворены решениями типа

$$I_m(k_a r)\, e^{im\varphi}, \tag{6.1}$$

где $I_m(x)$ — бесселева функция с целым индексом m. Граничные условия для колебаний E-типа будут удовлетворены, если выбрать k_a так, чтобы

$$I_m(k_a R) = 0. \tag{6.2}$$

Последнее условие приводит нас к необходимости заменить индекс a при k двумя индексами m и p, где m — порядок бесселевой функции и p — номер корня соответствующей бесселевой функции. Некоторые из корней бесселевых функций приведены в табл. 1. Корни

Таблица 1

Значения корней X_{mp} уравнения $I_m(X_{mp}) = 0$

	$m=0$	1	2	3
$p=1$	2,405	3,832	5,135	6,379
2	5,520	7,016	8,417	9,760
3	8,654	10,173	11,620	13,017
4	11,792	13,323	14,796	16,229

расположены в порядке возрастания их численного значения. Таким образом, мы будем обозначать каждое E-колебание через $E = (n, m, p)$, а соответствующее волновое число k_{Enmp}.

Волновое число колебания, удовлетворяющего граничным условиям, будет

$$k^2_{E_{nmp}} = \frac{X^2_{mp}}{R^2} + \frac{n^2\pi^2}{C^2}. \qquad (6.3)$$

Колебание E-типа наименьшей частоты будет $E(001)$. Его волновое число

$$k_{E001} = 2{,}405/R \quad \text{или длина волны} \quad \lambda_{E001} = 2{,}61R. \qquad (6.4)$$

Следующее колебание в симметричной серии $m=0$ будет $E(002)$. Его волновое число и длина волны, соответственно,

$$k_{E002} = 5{,}520/R \text{ и } \lambda_{E002} = 1{,}14R. \qquad (6.5)$$

Мы видим, что частота этого колебания более, чем вдвое, превышает наименьшую собственную частоту резонатора.

Аналогично, для колебаний H-типа граничные условия требуют, чтобы волновое число k_b удовлетворяло уравнению

$$I'_m(k_bR) = 0. \qquad (6.6)$$

Корни этого уравнения приведены в табл. 2.

Таблица 2

Значения корней I_{mp} уравнения $I_m(Y_{mp}) = 0$

	$m=0$	1
$p=1$	3,832	1,840
2	7,016	5,335
3	10,173	8,535
4	13,323	11,705

Частоты колебаний H-типа будут поэтому определены уравнением

$$k^2_{H_{nmp}} = \frac{Y^2_{mp}}{R_2} + \frac{n^2\pi^2}{C^2}. \qquad (6.7)$$

Из табл. 2 мы видим, что Y_{11} меньше, чем любой из X_{mp}. Однако, поскольку для волн H-типа значение $n=0$ запрещено, легко видеть, что частота колебания $E(001)$ ниже частоты $H(111)$, если только $C < 1{,}15R$. Если же $C > 1{,}15R$, то, наоборот, частота колебания $H(111)$ оказывается ниже частоты колебания $E(001)$.

Легко обобщить полученные результаты на случай резонатора, имеющего форму сектора кругового цилиндра. Предположим, что сектор ограничен плоскостями $\varphi=0$ и $\varphi=\alpha$, где $\alpha < 2\pi$. Для колебаний E-типа на этих плоскостях должно быть выполнено равенство $E_z=0$. Этому условию можно удовлетворить, положив вместо (6.1)

$$\psi_a(r, \varphi) = I\frac{m\pi}{\alpha}(k_ar)\sin\left(\frac{m\pi\varphi}{\alpha}\right). \qquad (6.8)$$

Граничные условия требуют, чтобы при $r=R$ бесселевы функции должного индекса $m\pi/\alpha$ в (6.8) обращались в нуль. Это условие определяет дозволенные значения частот.

Аналогично, для колебаний H-типа мы должны положить

$$\varphi_b(r, \varphi)=\frac{Im\pi}{\alpha}(k_b r)\cos\frac{m\pi\varphi}{\alpha}, \tag{6.9}$$

причём дозволенные волновые числа k_b определяются из требования, чтобы производная бесселевой функции обращалась в нуль при $r=R$.

Пример: Показать, что если резонатор представляет сектор (с углом раствора α) концентрических круговых цилиндров радиусом A и B, то E-колебания имеют вид

$$\psi=[CI(k_a r)+DN(k_a r)]\sin\frac{m\pi\varphi}{\alpha},$$

где I и N — две сопряжённые бесселевы функции дробного порядка $m\pi/\alpha$. Рассмотреть зависимость фундаментальной частоты от α и отношения A/B.

§ 7. Резонатор, имеющий форму фигуры вращения

На практике часто применяются резонаторы, имеющие вид фигуры вращения. При рассмотрении таких резонаторов удобно пользоваться цилиндрическими координатами r, φ, z, причём цилиндрическая ось их совпадает с осью симметрии резонатора.

В резонаторе такой формы могут существовать симметрические колебания, у которых $E_\varphi=0$ и H_φ не зависит от угла φ.

В этом параграфе будет развита теория колебаний этого типа. В цилиндрических координатах пара уравнений Максвелла для rot **E** и rot **H** будет иметь вид:

$$\left.\begin{aligned}
ikE_r&=\frac{1}{r}\frac{\partial H_z}{\partial\varphi}-\frac{\partial H_\varphi}{\partial z},\\
ikE_\varphi&=\frac{\partial H_r}{\partial z}-\frac{\partial H_z}{\partial r},\\
ikH_z&=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rH_\varphi)-\frac{1}{r}\frac{\partial H_r}{\partial\varphi},\\
-ikH_r&=\frac{1}{r}\frac{\partial H_z}{\partial\varphi}-\frac{\partial E_\varphi}{\partial z},\\
-ikH_\varphi&=\frac{\partial E_r}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial r},\\
-ikH_z&=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rH_\varphi)-\frac{1}{r}\frac{\partial E_r}{\partial\varphi}.
\end{aligned}\right\} \tag{7.1}$$

Предположим теперь, что $H_r = H_z = 0$ и что H_φ не зависит от φ. Тогда уравнения сводятся к

$$\left.\begin{aligned}
&a. && ikE_r = -\frac{\partial H_\varphi}{\partial z},\\
&b. && ikE_\varphi = 0,\\
&c. && ikE_z = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rH_\varphi),\\
&d. && 0 = \frac{1}{r}\frac{\partial E_z}{\partial \varphi},\\
&e. && -ikH_\varphi = \frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r},\\
&f. && 0 = -\frac{1}{r}\frac{\partial E_r}{\partial \varphi}.
\end{aligned}\right\} \tag{7.2}$$

Уравнения (d) и (f) являются следствиями уравнений (c) и (a), так как H_φ не зависит от φ по условию. Исключая из (e) компоненты электрического поля с помощью (a) и (c), находим следующее уравнение для H_φ:

$$\frac{\partial^2 H_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial H_\varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 H_\varphi}{\partial z^2} + \left(k^2 - \frac{1}{r^2}\right) H_\varphi = 0. \tag{7.3}$$

Граничные условия для вектора **H** не налагают ограничений на решения уравнения (7.3). Однако, ограничения накладываются граничными условиями для **E**.

Из (a) и (c) имеем

$$\mathbf{E}_s = E_r\mathbf{r} + E_\varphi\varphi_0 = \frac{i}{kr}\varphi_0 \cdot \operatorname{grad}(rH_\varphi). \tag{7.4}$$

Положим, что граничной поверхностью служит кривая $f(r, z) = 0$, нормаль которой будет

$$n = \operatorname{grad} f.$$

Граничное условие для **E** гласит, что тангенциальная слагающая вектора **E** обращается в нуль на поверхности тела вращения, так что

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_s = 0.$$

Это граничное условие можно в скалярном виде записать, как

$$\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial}{\partial r}(rH_\varphi) + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z}(rH_\varphi) = 0 \tag{7.5}$$

на кривой $f(r, z) = 0$.

Для решения (7.4) удобно ввести величину u, определяемую, как

$$u = H_\varphi r. \tag{7.6}$$

Дифференциальное уравнение для u будет

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + k^2 u = 0;$$

$$u = 0 \text{ при } r = 0, \ \frac{\partial u}{\partial r} = 0 \text{ на кривой } f(r, z) = 0. \tag{7.7}$$

В качестве простого примера рассмотрим коаксиальный кабель, ограниченный цилиндрами радиуса $r = A$ и $r = B$ и длиной $0 \leqslant z \leqslant C$. Положим $u(r, z) = v(r)\,w(z)$.

Тогда уравнение (7.7) будет удовлетворено, если

$$v'' - \frac{1}{r}v' + k_a^2 v = 0,$$

$$w'' + k_3^2 w = 0,$$

где

$$k = k_a^2 + k_3^2. \tag{7.8}$$

Решением уравнения для w, удовлетворяющим граничным условиям, является

$$w(z) = \cos k_3 z, \quad \text{где } k_3 = \frac{4\pi}{C}.$$

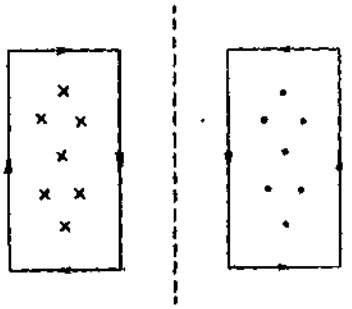

Рис. 5. Схема распределения токов и магнитного поля для собственного колебания с нулевой частотой коаксиального кабеля.

Простейшее решение для v получим, полагая $k_a = 0$ и $v = 1$. Этому решению и значению $n = 0$ отвечает наинизшая частота собственных колебаний, именно частота, равная нулю. Таким образом, в резонаторе может существовать чисто магнитное статическое поле, которое индуцируется постоянными токами, циркулирующими по металлическим стенкам резонатора, как это показано на рис. 5. Первым колебанием с частотой, отличной от нуля, является колебание с $n = 1$. Его частота не зависит от радиусов A и B и получается из условия, что длина резонатора C была равна полуволне стоячих колебаний. Следующие волны этой серии имеют длины волн, равные $C = n\lambda/2$ и $v = 1$.

Уравнению для $v(r)$ при $k_a \neq 0$ можно удовлетворить, положив

$$v(r) = rZ_1(k_a r), \tag{7.9}$$

где Z_1 — общий интеграл уравнения Бесселя первого порядка:

$$Z_1(x) = aI_1(x) + bN_1(x). \tag{7.10}$$

Отношение a/b и параметр k_a следует выбрать так, чтобы $v'(r)=0$ при $r=A$ и $r=B$. Таким образом, могут быть вычислены частоты собственных колебаний высших порядков *).

Эти граничные условия определяют последовательность значений k_a, каждое из которых может относиться к любому из значений n, приводя к определённой частоте собственных колебаний.

Коаксиальный резонатор в четверть волны. На практике часто пользуются так называемым коаксиальным резонатором в четверть волны. Он получается вращением вокруг вертикальной оси фигуры, изображённой на рис. 6.

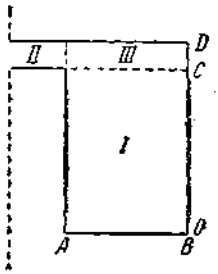

Рис. 6. Схема сечения коаксиального резонатора в четверть волны.

Точная теория такого резонатора отсутствует; для приближённого рассмотрения **) разобьём резонатор на три области I, II и III и рассмотрим каждую из них в отдельности.

В области I, особенно при z, близких к нулю, поле можно считать весьма близким к полю рассмотренного раньше коаксиального кабеля. Поэтому, мы предположим, что в этой области

$$u_{\mathrm{I}}=a\cos kz \qquad (0<z<C). \tag{7.11}$$

Здесь $k=k_3$, так как $k_a=0$.

Подобно тому, как это делается в теории цепей с сосредоточенными постоянными, мы можем считать, что на границе области I, при $z=C$ или $z=D$ имеется узел в волне напряжения, если только ёмкость области II достаточно велика. В область II мы положим

$$u_{\mathrm{II}}=b_r J_1(kr) \tag{7.12}$$

($k=k_a$, так как здесь $k_3=0$). В большинстве практически важных случаев длина B мала по сравнению с четвертью длины волны, т. е. $kB\ll\pi/2$. Поэтому в этой области $rJ_1(r)$ практически равно первому члену разложения этого выражения в ряд по степеням r, так что можно в хорошем приближении положить

$$u_{\mathrm{II}}=\frac{bkr^2}{2},$$

что соответствует существованию в области II однородного аксиального поля $E_z=-ib$. Следовательно, линейный интеграл от точки $z=C$ до точки $z=D$ на расстоянии $r=A$ от оси равен

*) Эта задача была детально рассмотрена в работе Боргниса [4].

**) Более точная теория дана в работе Ганзена [5], некоторые интересные экспериментальные результаты у Барроу и Мичер [6].

$-ib(C-D)$. На линии $z=C$, при $A \leqslant r \leqslant B$ мы имеем, приближённо

$$E_r = -\left(i\,\frac{a}{r}\right)\sin kC,$$

так что линейный интеграл по этому пути равен

$$-ia\sin kC \ln\left(\frac{B}{A}\right).$$

Если мы будем пренебрегать потоком, проходящим через область III, линейный интеграл от напряжённости поля E, взятый по контуру, охватывающему эту область, должен исчезать и, следовательно,

$$a\sin kC \ln\frac{B}{A} = b(D-C). \tag{7.13}$$

Магнитное поле на границе обеих областей остаётся непрерывным. Поэтому, приравнивая в точке $r=A$, $z=C$ магнитные поля обеих областей, мы имеем

$$a\cos kC = \frac{bkA^2}{2}. \tag{7.14}$$

В нашей приближённой теории с тем же успехом можно было бы приравнять значения магнитных полей и в любой другой точке в области III. Эта точка выбрана просто потому, что в ней u_{I} и u_{II}, вероятно, лучше апроксимируются написанными выше выражениями, чем глубже в области III.

Деля (7.13) на (7.14), мы имеем

$$\operatorname{tg} kC = \frac{2(D-C)}{A^2 k \ln\frac{B}{A}}. \tag{7.15}$$

Последнее выражение определяет значение k через характерные размеры резонатора.

Предыдущий, весьма грубый, анализ может естественно не удовлетворить читателя. Однако, он соответствует результатам, полученным с помощью обычного инженерного расчёта в теории передачи, как будет показано в § 18. Последний способ имеет то преимущество, что сделанные приближения видны в нём более отчётливо.

Отношение a/b может быть получено из (7.13) или (7.14) и оказывается равным

$$\frac{a}{b} = \frac{D-C}{\sin kC \ln\frac{B}{A}} = \frac{kA^2}{2\cos kC}. \tag{7.16}$$

Предыдущая теория может быть проиллюстрирована следующим численным примером.

Возьмём частоту в 150 мегациклов, что соответствует длине волны, равной 200 *см*. Предположим, что мы хотим пользоваться резонатором с габаритами $D-C=3$ *дм*, $A=6$ *дм* и $B=10$ *дм*. Каково при этом будет допустимое значение C? Из (7.15), поскольку $k=1/12{,}5$, имеем

$$\operatorname{tg} kC = 4{,}07 \text{ или } kC = 76{,}2^\circ,$$

откуда находим значение C равным

$$C = \frac{76{,}2}{90}\frac{\lambda}{4} = 16{,}6 \text{ дм}.$$

Следовательно, в этом случае резонатор должен быть на 15% короче, чем четверть длины волны. Из (7.16) получаем для отношения b/a:

$$\frac{b}{a} = 0{,}0647.$$

Таким образом, если возбуждение таково, что амплитуда магнитного поля в точке $z=0$, $r=A$ равна гауссу, амплитуда электрического поля на оси z в области II равна $b=0{,}986$ абс. ед. (так как $A=15{,}26$ и $a=15{,}26$). Линейный интеграл от вектора электрического поля, взятый по прямой $r=0$ от $z=C$ до $z=D$, равен 2 260 V.

Иногда для симметрических колебаний резонаторов, имеющих вид фигуры вращения, применяется другой метод расчёта. Если ϕ — любая функция, удовлетворяющая скалярному волновому уравнению

$$\Delta\phi + k^2\phi = 0, \tag{7.17}$$

то, как легко проверить, вектор

$$\mathbf{A} = \mathbf{C}\cdot\operatorname{grad}\phi, \tag{7.18}$$

где $\mathbf{C}$ — постоянный вектор, удовлетворяет векторному волновому уравнению

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A} - k^2\mathbf{A} = 0. \tag{7.19}$$

Предположим, что нам заданы частные решения (7.17), не зависящие от угла φ, и мы выбираем в качестве вектора $\mathbf{C}$ единичный вектор $\mathbf{k}$, направленный вдоль оси вращения. Тогда вектор $\mathbf{A}$ будет ориентирован вдоль вектора φ_0 и его удобно идентифицировать с магнитным полем симметрических колебаний.

Положив

$$\mathbf{H} = \mathbf{k}\operatorname{grad}\phi = \frac{\partial\phi}{\partial r}\varphi_0, \tag{7.20}$$

имеем для электрического поля

$$ik\mathbf{E} = \operatorname{rot}\mathbf{H} = -\frac{\partial^2\phi}{\partial z\partial r}\mathbf{r}_0 + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)\mathbf{k}. \tag{7.21}$$

Граничные условия гласят [ср. (7.5)], что нормальная производная $u = r_0(\partial\psi/\partial r)$ обращается в нуль на поверхности вращения и $u = 0$ при $r = 0$. Решения (7.17), остающиеся конечными на оси вращения и не зависящие от угла φ, имеют вид

$$\psi = J_0(\alpha r)\, e^{i\beta z}, \quad \alpha^2 + \beta^2 = k^2.$$

Поэтому общим решением служит

$$\psi(z, r) = \int_{-k}^{+k} g(\beta)\, J_0\left(\sqrt{k^2 - \beta^2}\, r\right) e^{i\beta z} d\beta,$$

где $g(\beta)$ — произвольная функция. Так как $J_0'(x) = -J_1(x)$,

$$u = r\frac{\partial\psi}{\partial r} = r\int_{-k}^{+k} h(\beta)\, J_1\left(\sqrt{k^2 - \beta^2}\, r\right) e^{i\beta z} d\beta,$$

где $h(\beta)$ — новая произвольная функция.

§ 8. Скин-эффект

Для изучения вопроса о потерях в полом резонаторе, обусловленных конечной проводимостью ограничивающих его металлических стенок, необходимо сперва рассмотреть процесс распространения электромагнитных волн в хороших проводниках.

Из уравнений поля (1.1) для среды с постоянными ε, μ и σ можно найти волновое уравнение, описывающее координатную зависимость векторов поля, если их временная зависимость имеет вид $e^{i\omega t}$. Именно, уравнения для амплитуд поля можно записать в виде

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E} &= k^2\mu\left(\varepsilon - \frac{2i\lambda}{\sigma}\right)\mathbf{E}, \\ \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{H} &= k^2\mu\left(\varepsilon - \frac{2i\lambda}{\sigma}\right)\mathbf{H}, \end{aligned}\right\} \tag{8.1}$$

где, как всегда, $k = \omega/c$. Эти уравнения имеют такой же вид, как и в непроводящей среде, но среда теперь характеризуется комплексным показателем преломления

$$n^2 = \mu\left(\varepsilon - \frac{2i\lambda}{\sigma}\right). \tag{8.2}$$

Так как электропроводность металлов σ порядка 10^{-3} *см*, чисто мнимая часть n^2 даже в оптической области, а тем более в интересующей нас области длин волн, оказывается гораздо больше вещественной. Поэтому величиной ε в (8.2) можно пренебречь. Физически это означает, что токами смещения можно пренебречь по сравнению с токами проводимости. Тогда для показателя преломления имеем

$$n = \sqrt{\frac{\mu\lambda}{\sigma}}\,(1 - i). \tag{8.3}$$

Общее решение уравнения (8.1) может быть представлено в виде плоских волн

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i\omega t - knz} = E_0 e^{-z/\delta} \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right). \qquad (8.4)$$

Величина δ, равная

$$\delta = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\delta\lambda}{\mu}}, \qquad (8.5)$$

носит название глубины проникновения. Она определяет глубину проникновения в металл быстро затухающего электромагнитного поля. Значения δ для некоторых длин волн для меди приведены в табл. 3. В частности, при частоте 60 циклов/сек. значение δ составляет у меди 0,85 *см*.

Таблица 3

Глубина проникновения δ для меди

λ *см*	δ *см*
1	0,368
3	0,670
10	1,22
100	3,86
1000	12,2

Если электромагнитные волны распространяются вдоль оси z в глубь металла так, что вектор электрического поля направлен по оси x, а вектор магнитного поля по оси y

$$H_y = H_y^0 e^{-z/\delta} \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right), \qquad (8.6)$$

то ток проводимости, индуцируемый в металле, равен, как известно,

$$\mathbf{j} = \frac{1}{4\pi}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{H}.$$

С помощью (8.6) имеем

$$j_y = j_z = 0,$$

$$j_x = -\left(\frac{H_y^0}{4\pi\delta}\right) e^{-z/\delta}\left[\cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) - \sin\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)\right]. \qquad (8.7)$$

Количество энергии, превращающейся в джоулево тепло в единицу времени в 1 *см*^{3} металла, равно $\sigma c j^2$ *эрг*^{2}/*см*$^2\cdot$*сек*, поэтому полная потеря мощности во всей толще металла, отнесённая на единицу площади и усреднённая по циклу, будет

$$\sigma c \frac{(H_y^0)^2}{4\pi\delta^2}\int_0^\infty e^{-2z/\delta}\,dz = \frac{\pi\delta}{\lambda}\,\frac{c\mu\,(H_y^0)^2}{8\pi}. \qquad (8.8)$$

В последнем выражении множитель $\mu\,(H_y^0)^2/8\pi$ представляет плотность энергии магнитного поля.

Вследствие того, что глубина проникновения δ весьма мала, во всех практически встречающихся случаях (за исключением очень тонких проволочек) можно считать поверхность металла плоской и пользоваться для абсорбируемой энергии выражением (8.8). Тогда полная потеря мощности в стенках полого резонатора будет, очевидно, равна

$$\frac{c\delta}{8\pi}\int \mu\,\mathbf{H}^2\,d\mathbf{S}, \qquad (8.9)$$

где интегрирование производится по поверхности всех стенок резонатора и **H** — тангенциальная к граничным поверхностям слагающая вектора напряжённости магнитного поля.

Из-за наличия конечной проводимости стенок вектор напряжённости электрического поля не точно перпендикулярен к граничной поверхности. Из выражения для j_k, взятого при $z=0$, мы находим

$$E_x^0 = \sigma j_x = \frac{\sqrt{2}\sigma H_y^0}{4\pi\sigma} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right). \tag{8.10}$$

Из (8.10) мы видим, однако, что тангенциальная слагающая электрического поля меньше соответствующей слагающей магнитного поля в отношении $\sqrt{2}\sigma/4\pi\sigma$.

Как будет показано в следующем параграфе, потери в полом резонаторе за 1 цикл малы по сравнению с энергией, запасённой в резонаторе. Поэтому для нахождения потерь в резонаторе можно применить приближённый способ вычислений, основанный на том, что распределение поля внутри резонатора пишется так, как будто бы проводимость стенок была бесконечно велика, а затем по заданному таким образом распределению поля находится величина потерь.

§ 9. Потери в резонаторе

В радиотехнике потери в колебательных системах принято характеризовать добротностью контура[7] величиной, обратной коэффициенту затухания, Q, определяемой законом убывания амплитуды:

$$e^{-\omega t/2Q}. \tag{9.1}$$

При этом полная энергия поля в системе изменяется по закону

$$W = W_0 e^{-\omega t/Q}. \tag{9.2}$$

Нетрудно видеть, что

$$Q = 2\pi \frac{\text{полная энергия колебательной системы}}{\text{потеря энергии за 1 цикл}}. \tag{9.3}$$

С помощью формул, полученных в предыдущем параграфе, выражение для Q можно написать в виде

$$Q = \frac{2}{\delta\mu} \frac{\iint H^2 dV}{\iint H^2 dS}. \tag{9.4}$$

Для грубой оценки величины Q заметим, что, так как **H** имеет на поверхности пучность, среднее значение $\mathbf{H}^2$ на поверхности приблизительно вдвое больше среднего значения в объёме и поэтому

$$Q \sim \frac{V}{\delta\mu S}, \tag{9.5}$$

где V и S — объём и площадь стенок резонатора. Для резонаторов, линейные размеры которых велики по сравнению с глубиной проникновения δ, можно ожидать, что по порядку величины потери будут равны отношению линейных размеров к глубине проникновения. Поскольку отношение двух интегралов в формуле (9.4) имеет размерность в сантиметрах и δ пропорциональна $\sqrt{\lambda}$, величины потерь Q двух геометрически подобных резонаторов относятся, как квадратные корни из линейных размеров или как квадратные корни длин волн различных собственных колебаний.

На практике потери полых резонаторов в области микрорадиоволн характеризуются значением $Q > 1000$ и, следовательно, распределения полей в резонаторах мало отличаются от вычисленных на основе предположения об идеально проводящих стенках. Поэтому при использовании формулы (7.4) для нахождения потерь можно подставлять, вместо истинного значения магнитного поля, значение его, вычисленное в предположении, что стенки резонатора являются идеально проводящими.

В качестве примера вычислим значение Q для $(0, m, n)$ колебаний в прямоугольном резонаторе с рёбрами A, B, C, рассмотренном в § 3. Нетрудно вычислить, что в этом случае

$$Q = \frac{1}{\delta\mu} \frac{ABC}{BC + 2AC \dfrac{\left(\frac{m}{B}\right)^2}{\left(\frac{m}{B}\right)^2 + \left(\frac{n}{C}\right)^2} + 2AB \dfrac{\left(\frac{n}{C}\right)^2}{\left(\frac{m}{B}\right)^2 + \left(\frac{n}{C}\right)^2}}. \qquad (9.6)$$

В частности, для квадратной призмы $B = C$

$$Q = \frac{B}{\delta} \frac{\frac{A}{B}}{1 + 2\frac{A}{B}}.$$

Для куба $A = B = C$ и $Q = \frac{A}{3\delta}$.

Длина волны колебания с наименьшей частотой $\lambda = 2\sqrt{2A}$ и, следовательно,

$$Q = \frac{\lambda}{3\sqrt{2}\delta\mu}.$$

Значение Q для куба со стенками из меди, заполненного средой с $\mu = 1$ равно, следовательно,

$$Q = 5920\sqrt{\lambda} = 7040\sqrt{A}.$$

Для $\lambda = 10$ *см*, $Q = 18\,800$.

Посмотрим теперь, как изменяется уравнение для нормальных координат $g(t)$, введённых в § 4, при учёте потерь в резонаторе.

Чтобы учесть потери в резонаторе, необходимо ввести в (4.10) член с затуханием. Нетрудно убедиться, что затухание будет

правильно учтено, если это уравнение будет переписано следующим образом:

$$\ddot{q}_a + \left(\frac{\omega_a}{Q_a}\right)\dot{q}_a + \omega^2 q_a = 4\pi c^2 I_a(t). \tag{9.7}$$

Умножая на $V/4\pi c^2 \dot{q}_a$, мы найдём уравнение для W_a, которое заменяет (4.14):

$$\dot{W}_a = VI_a(t)\dot{q}_a(t) - V\frac{\omega_a}{4\pi c^2 Q_a}\dot{q}_a^2(t). \tag{9.8}$$

Второй член справа, который представляет потери в резонаторе, является, очевидно, существенно отрицательным. В стационарном состоянии, когда $q_a(t)$ выражаются гармоническими функциями времени, средняя скорость превращения энергии электромагнитного поля в джоулево тепло равна

$$P = \left(\frac{V\omega_a}{4\pi c^2 Q_a}\right)\frac{\dot{q}_a^2}{2} = \frac{2\pi^2 Vc}{\lambda_a^3 Q_a}\frac{q_a^2}{2},$$

где q_a представляет амплитуду нормальной координаты $q_a(t)$. Коэффициент при q_a^2 мы будем именовать сопротивлением резонатора для a-го колебания R_a:

$$R_a = \frac{60\pi^2 V}{Q_a \lambda_a^3}. \tag{9.9}$$

Для кубического резонатора с ребром куба, равным A, и медными стенками для (0,1,1)-колебания $R_a = 0{,}0112$ *ом*.

Шунтовое сопротивление. Другой величиной, которая часто оказывается более удобной для выражения потерь, является так называемое шунтовое сопротивление резонатора. Для некоторых расчётов в теории электроннолучевых генераторов, содержащих полые резонаторы, нам понадобится определять амплитуды величины линейного интеграла от вектора напряжённости электрического поля вдоль некоторого пути в резонаторе. Мы имеем

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{C}\mathbf{A}_a\dot{q}_a.$$

Таблица 4

Значения величин, входящих в выражение для шунтового сопротивления S_P

P	X_{0p}	$J_1(X_{0p})$	$\sqrt{X_{0p}}J_1^2(X_{0p})$
1	2,4048	+0,5191	0,417
2	5,5207	−0,3403	0,272
3	8,6337	+0,2705	0,216
4	11,7915	−0,2325	0,186
5	14,9309	+0,2065	0,165

Поэтому амплитуда электрического поля, выраженного в вольтах на сантиметры, равна $30k_a q_a \mathbf{A}_a$, если q_a выражено в амперах. Линейный интеграл от $\mathbf{E}$

$$V_a = 30k_a q_a \int A_a\, d\mathbf{l}. \tag{9.10}$$

Мы можем теперь определить шунтовое сопротивление резонатора, как такое сопротивление, что если бы им была зашунтована разность потенциалов V_a, то диссипируемая в этом сопротивлении мощность была бы равна мощности фактически диссипируемой в резонаторе. Шунтовое сопротивление резонатора зависит не только от резонатора и вида колебаний, но также и от пути, вдоль которого вычисляется V_a. Обозначая шунтовое сопротивление через S_a, имеем

$$\frac{V_a}{2S_a}=\frac{60\pi^2 V}{Q_a\lambda_a^3}\frac{q_a^2}{2},$$

и, следовательно,

$$S_a=60Q_a\lambda_a\frac{\left(\int \mathbf{A}_a d\mathbf{l}\right)^2}{\iiint \mathbf{A}_a^2 dv}. \qquad (9.11)$$

Подставляя для Q_a его выражение из (9.4) и пользуясь формулой векторного анализа, приводившейся ранее [формулы, предшествующие (4.12)], можно преобразовать это выражение к иному виду:

$$S_a=\frac{480\pi^3}{\lambda_a\delta\mu}\frac{\left(\int \mathbf{A}_a d\mathbf{l}\right)^2}{\iint \mathbf{H}^2 ds}. \qquad (9.12)$$

Так например, для кубического резонатора с медными стенками с длиной ребра A *см*, выбирая за путь интегрирования прямую, проходящую через ток пересечения линий $x=A/2$, $y=A/2$ от $z=0$ до $z=A$, для (110)-колебания S_a равно 105 600 $A^{5/2}$.

$E(00p)$-колебания кругового цилиндра. В качестве примера вычислим Q_a и S_a для $E(00p)$-колебаний в круговом цилиндре.

Как было показано в § 6, в таком резонаторе напряжённость электрического поля выражается формулой

$$E_z=AJ_0(kr) \text{ абс. ед./}см,$$

где $kR=x_{0p}$, p-му корню уравнения $J_0(x)=0$. Следовательно, падение потенциала на пути вдоль оси z от $z=0$ до $z=C$ равно

$$V=AC \text{ абс. V}.$$

Согласно (5.8) напряжённость магнитного поля с точностью до временного множителя, не представляющего интерес для этого вычисления, имеет вид

$$\mathbf{H}=AJ_1(kr)\varphi_0 \text{ гаусс}.$$

Из (8.9) для мощности, выделяющейся на торцовых сторонах цилиндра, имеем

$$P_E=A^2\left(\frac{\pi c\delta\mu}{4\lambda}\right)\int_0^R J_1^2(kr)\,rdr=A^2\left(\frac{\pi c\delta\mu}{4\lambda}\right)\frac{R^2}{2}J_1^2(X_{0p})$$

и для мощности, выделяющейся на боковых сторонах цилиндра,

$$P_C = A^2 \left(\frac{\pi c \delta \mu}{4\lambda}\right) RCJ_1^2(X_{0p}),$$

так что полная мощность, превращающаяся в джоулево тепло

$$P_C + 2P_E = A^2 \left(\frac{\pi c \delta \mu}{4\lambda}\right) (R^2 + RC) J_1^2(X_{0p}).$$

Полный запас энергии в резонаторе

$$W = \int \frac{\mathbf{H}^2}{8\pi} dV = \frac{A^2}{8} CR^2 J_1^2(X_{0p}).$$

Следовательно, по определению (9.3) для Q имеем

$$Q_p = \left(\frac{2\pi R}{\rho\mu}\right)^{1/2} \frac{C}{R+C} (X_{0p})^{1/2}. \tag{9.13}$$

Интересно отметить влияние изменения C при заданном R на картину собственных колебаний в резонаторе. Изменение Q не влияет на частоту собственных колебаний резонатора, так как она зависит только от R. При C малых по сравнению с R, значение Q также мало; с ростом C значение Q сперва возрастает, но при $C \gg R$ стремится к постоянному пределу.

Шунтовое сопротивление S_p можно получить, приравнивая $V^2/2S_p$ полной теряемой мощности. Это даёт

$$S_p = 120 \left(\frac{2\pi R}{\rho\mu}\right)^{1/2} \frac{C^2}{R^2 + RC} \frac{1}{(X_{0p})^{1/2} J_1^2(X_{0p})} \text{ ом}. \tag{9.14}$$

Сравнивая формулу для S_p с формулой для Q_p, мы видим, что обе величины связаны между собой простым соотношением

$$S_p = 120 \left(\frac{C}{R}\right) \left[\frac{1}{X_{0p}} J_1^2(X_{0p})\right] Q_p. \tag{9.15}$$

Для нахождения численных значений S_p может служить табл. 4. (X_{0p} в этой таблице означает p-й корень уравнения

$$J_0(x) = 0.)$$

Колебания коаксиального кабеля. Другим примером, имеющим большое практическое значение, служит коаксиальный кабель, ограниченный внутренним и внешним цилиндрами радиуса $r = a$ и $r = b$, соответственно и плоскостями $z = 0$ и $z = C$.

Поле в таком резонаторе было рассмотрено в § 5 и описывается формулой (5.25). Подставляя в (5.25) явно не выписанную там зависимость от координаты z, имеем

$$\mathbf{H} = \frac{A}{2} \cos \frac{n\pi z}{C} \varphi_0 \text{ гаусс}.$$

С помощью (8.9) находим потери на обоих концах резонатора:

$$P_E = A^2\left(\frac{\pi c\delta\mu}{4\lambda}\right)\frac{b}{a}$$

и внутренней и внешней стенках

$$P_I = A^2\left(\frac{\pi c\delta\mu}{4\lambda}\right)\frac{C}{2a},$$

$$P_0 = A^2\left(\frac{\pi c\delta\mu}{4\lambda}\right)\frac{C}{2b}.$$

Полная потеря мощности в резонаторе будет

$$P_I + P_0 + 2P_E = A^2\left(\frac{\pi c\delta\mu}{4\lambda}\right)\left(2\lg\frac{b}{a} + \frac{C}{2a} + \frac{C}{2b}\right).$$

Энергия, запасённая в резонаторе,

$$W = \frac{A^2}{8}C\lg\frac{b}{a}.$$

Поэтому для Q получаем следующее выражение:

$$Q_n = \left(\frac{2C}{\rho\mu}\right)^{1/2}\frac{\lg\frac{b}{a}}{4\lg\frac{b}{a} + \frac{C}{a} + \frac{C}{b}}\sqrt{n}. \qquad (9.16)$$

Наиболее естественным путём, по отношению к которому можно определить шунтовое сопротивление, является прямая из точки $r = a$ до точки $r = b$, проведённая в такой плоскости $z = \text{const}$, что $\sin n\pi z/C = \pm 1$, т. е. в которой имеется пучность волны напряжения. На таком пути

$$V = A\lg\frac{b}{a} \text{ абс. ед.}$$

Вычисляя из этого выражения и выражения для полной потери мощности шунтовое сопротивление S_n, имеем

$$S_n = 120\left(\frac{2C}{\rho\mu}\right)^{1/2}\frac{2\left(\lg\frac{b}{a}\right)^2}{4\lg\frac{b}{a} + \frac{C}{a} + \frac{C}{b}}\sqrt{n}. \qquad (9.17)$$

По аналоги с (9.15) можно написать соотношение, связывающее Q_n с S_n:

$$S_n = \left(120\frac{Q_n}{\pi n}\right)\lg\frac{b}{a} \text{ ом}.$$

Пример. Рассмотрите резонатор, для которого $C = 150$ *см* и, следовательно, длина волны, отвечающая колебанию с самой низкой частотой, равна 3 *м*. Пусть $a = 30$ *см* и $b = 45$ *см*. Какую мощ-

ность должен иметь резонатор с медными стенками для того, чтобы амплитуда напряжённости электрического поля в пучности составляла 1 млн. V?

Ответ: 1720 kW.

§ 10. Сферический резонатор

Теория собственных колебаний в полом резонаторе сферической формы может быть развита, как частный случай некоторого общего метода, могущего иметь гораздо более общее применение.

Введём ортогональные криволинейные координаты x_1, x_2 и x_3 такие, чтобы элемент длины дуги выражался в этих координатах формулой

$$ds^2 = e_1^2 dx_1^2 + e_2^2 dx_2^2 + e_3^2 dx_3^2. \tag{10.1}$$

Например, в сферических координатах

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\varphi^2 \tag{10.2}$$

и, следовательно,

$$x_1 = r;\ x_2 = \theta;\ x_3 = \varphi;\ e_1 = 1;\ e_2 = r;\ e_3 = r\sin\theta.$$

В таких криволинейных координатах уравнения Максвелла для rot **E** и rot **H** могут быть представлены в виде

$$\left.\begin{aligned}
ike_2e_3E_1 &= \frac{\partial}{\partial x_2}(e_3H_3) - \frac{\partial}{\partial x_3}(e_2H_2),\\
ike_3e_1E_2 &= \frac{\partial}{\partial x_3}(e_1H_1) - \frac{\partial}{\partial x_1}(e_3H_3),\\
ike_1e_2E_3 &= \frac{\partial}{\partial x_1}(e_2H_2) - \frac{\partial}{\partial x_2}(e_1H_1),\\
-ike_2e_3H_1 &= \frac{\partial}{\partial x_2}(e_3E_3) - \frac{\partial}{\partial x_3}(e_2E_2),\\
-ike_1e_3H_2 &= \frac{\partial}{\partial x_3}(e_1E_1) - \frac{\partial}{\partial x_1}(e_3E_3),\\
-ike_1e_2H_3 &= \frac{\partial}{\partial x_1}(e_2E_2) - \frac{\partial}{\partial x_2}(e_1E_1).
\end{aligned}\right\} \tag{10.3}$$

Предположим, что координата x_1 выбрана так, чтобы $e_1 = 1$, как и в случае обычных сферических координат и, кроме того, чтобы в выбранной системе координат отношение e_2/e_3 не зависело от x_1.

В этом случае, как будет сейчас доказано, собственные колебания распадаются на два независимых класса, причём каждый класс колебаний описывается своей волновой функцией.

Эти два класса колебаний мы будем называть колебаниями E-типа и H-типа, в соответствии с введённой ранее классификацией.

В случае колебаний E-типа $H_1=0$. Четвёртое из уравнений (10.3) будет удовлетворено, если мы положим

$$e_2E_2=\frac{\partial P}{\partial x_2}, \quad e_3E_3=\frac{\partial P}{\partial x_3}.$$

Если ввести скалярную функцию U такую, что $P=\partial U/\partial x_1$, второе и третье уравнение дают

$$H_2=\frac{ik}{e_3}\frac{\partial U}{\partial x_3}, \quad H_3=-\frac{ik}{l_2}\frac{\partial U}{\partial x_2}.$$

Первое и пятое из уравнений (10.3) дают два различных выражения E_1 через U. Условие совместности обоих выражений приводит к уравнению для U:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2}+\frac{1}{e_2e_3}\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{e_3}{e_2}\frac{\partial U}{\partial x_2}+\frac{\partial}{\partial x_3}\frac{e_2}{e_3}\frac{\partial U}{\partial x_3}\right)+k^2U=0. \qquad (10.4)$$

Наиболее удобное выражение E_1 через U имеет вид

$$E_1=k^2U+\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2}.$$

При таком выборе связи U и E_1 шестое уравнение (10.3) будет удовлетворено тождественно.

Колебания H-типа получаются, если положить $E_1=0$. Это приводит к аналогичной системе уравнений, позволяющих выразить компоненты поля через скалярную функцию U, удовлетворяющую волновому уравнению (10.4). В итоге мы получаем следующие соотношения, связывающие компоненты поля со скалярной функцией U:

E-тип:

$$\left.\begin{aligned} &E_1=k^2U+\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2}, && H_1=0,\\ &E_2=\frac{1}{e_2}\frac{\partial^2 U}{\partial x_1\partial x_2}, && H_2=\frac{ik}{e_3}\frac{\partial U}{\partial x_3},\\ &E_3=\frac{1}{e_3}\frac{\partial^2 U}{\partial x_1\partial x_3}, && H_3=-\frac{ik}{e_2}\frac{\partial U}{\partial x_2}. \end{aligned}\right\} \qquad (10.5)$$

H-тип:

$$\left.\begin{aligned} &E_1=0, && H_1=k^2U+\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2},\\ &E_2=-\frac{ik}{e_3}\frac{\partial U}{\partial x_3}, && H_2=\frac{1}{e_2}\frac{\partial^2 U}{\partial x_1\partial x_2},\\ &E_3=\frac{ik}{e_2}\frac{\partial U}{\partial x_2}, && H_3=\frac{1}{e_3}\frac{\partial^2 U}{\partial x_1\partial x_3}. \end{aligned}\right\} \qquad (10.6)$$

Специализируем теперь наше общее решение для случая сферы. Для этого выберем в качестве координат x_1, x_2 и x_3 сферические координаты r, θ, φ. Тогда уравнение для U приобретает вид

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial U}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2}\right)+k^2U=0. \qquad (10.7)$$

Общее решение его ищем в виде

$$U = R(r)\,\Theta(\theta,\ \varphi),$$

где функция $\Theta(\theta,\ \varphi)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial\Theta}{\partial\varphi^2}+l\,(l+1)\,\Theta=0, \qquad (10.8)$$

а функция $R(r)$ уравнению

$$\frac{d^2R}{dr^2}+\left(k^2-\frac{l\,(l+1)}{r^2}\right)R=0. \qquad (10.9)$$

Для того, чтобы существовало конечное и однозначное решение уравнения (10.8), необходимо, чтобы параметр l принимал только ряд целых значений.

Функции, удовлетворяющие уравнению (10.8), носят название гармонических. Теория гармонических функций полно разработана, и содержание её изложено в большом числе математических руководств.

Решения уравнения (10.9) носят название цилиндрических функций

$$R(r)=(kr)\,z_l(kr), \qquad (10.10)$$

где

$$z_l(x)=\left(\frac{\pi}{2x}\right)^{1/2} z_{l+\frac{1}{2}}(x).$$

Функции Бесселя удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$\left.\begin{aligned}
&z_{n-1}+z_{n+1}=\frac{2n+1}{x}\,z_n,\\
&\frac{dz_n}{dx}(x)=[nz_{n-1}-(n-1)\,z_{n+1}]\,\frac{1}{2n+1},\\
&\frac{dx^{n+1}z_n}{dx}=x^{n+1}z_{n-1},\\
&\frac{dx^{-n}z_n}{dx}=-x^{-n}z_{n+1}.
\end{aligned}\right\} \qquad (10.11)$$

Нам нужно выбрать те из функций Бесселя, которые остаются конечными при $z=0$. Мы будем обозначать их $j_l(x)$. Первые функции $j_l(x)$ приведены в табл. 5.

Таблица 5

Значение для $j_l(x)$

l	$j_l(x)$
0	$\sin x/x$
1	$\sin x/x^2-\cos x/x$
2	$(3/x^3-1/x)\sin x-(3/x^2)\cos x$
3	$(15/x^4-6/x^2)\sin x-(15/x^3-1/x)\mathrm{soc}\ x$

Для сферических функций мы введём следующее обозначение

$$\Theta(\theta,\ \varphi)=\Theta(l,\ m)\,e^{im\varphi}, \tag{10.12}$$

где

$$m\geqslant 0\begin{cases}\Theta(l,\ m)=\\ \Theta(l,\ -m)=\end{cases}\left\{(-1)^m\left[(2l+1)\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\right]^{1/2}\sin^m\theta\,\frac{d^m}{d(\cos\theta)^m}\times\right.$$
$$\times P_l(\cos\theta)$$

Здесь $P_l(\cos\theta)$ — полином Лежандра l-го порядка.

Первые сферические функции имеют вид

$$\Theta(0,\ 0)=1,$$
$$\Theta(1,\ 0)=\sqrt{3}\cos\theta,$$
$$\Theta(2,\ 0)=\frac{\sqrt{5}}{2}(3\cos^2\theta-1),$$
$$\Theta(3,-0)=\frac{\sqrt{7}}{2}(2\cos^3\theta-3\cos\theta\sin^2\theta).$$

Коэффициенты в $\Theta(l,\ m)$ выбраны так, чтобы выполнялось условие нормировки

$$\iint|\Theta|^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi=4\pi,$$

интегрирование ведётся по всем углам $\theta\varphi$.

В дальнейшем нам понадобятся следующие формулы из теории сферических функций

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\theta}\Theta(l,\ m)&=\frac{1}{2}[(l-m)(l+m+1)]^{1/2}\Theta(l,m+1)-\\
&\quad-\frac{1}{2}[(l+m)(l-m+1)]^{1/2}\Theta(l,\ m-1),\\
\cos\theta\Theta(l,\ m)&=\Theta(l+1,\ m)\left[\frac{(l+1-m)(l+1+m)}{(2l+1)(2l+3)}\right]^{1/2}+\\
&\quad+\Theta(l-1,\ m)\left[\frac{(l-m)(l+m)}{(2l-1)(2l+1)}\right]^{1/2},\\
\sin\theta\Theta(l,\ m)&=-\Theta(l+1,m+1)\left[\frac{(l+m+1)(l+m+2)}{(2l+1)(2l+3)}\right]^{1/2}+\\
&\quad+\Theta(l-1,\ m+1)\left[\frac{(l-m)(l-m-1)}{(2l-1)(2l+1)}\right]^{1/2}=\\
&=\Theta(l+1,\ m-1)-\Theta(l-1,\ m-1).
\end{aligned}\right\} \tag{10.13}$$

Окончательно, функция U может быть записана в виде

$$U=krj_l(kr)\,\Theta(l,\ m)\,e^{im\varphi}, \tag{10.14}$$

где $|m|\leqslant l$ и $l=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$

С помощью (10.5) можно найти следующие выражения для компонент поля в случае колебаний E-типа:

$$\left.\begin{aligned}
E_r &= \frac{k^2}{r^2} l(+1) U,\\
E_\theta &= \frac{k}{r}\frac{\partial}{\partial(kr)}[krj_l(kr)]\frac{\partial}{\partial\theta}\Theta(l,m)e^{im\varphi},\\
E_\varphi &= \frac{ikm}{r}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial(kr)}[krj_l(kr)]\Theta(l,m)e^{im\varphi},\\
H_r &= 0,\\
H_\theta &= -\frac{km}{r\sin\theta}U.\\
H_\varphi &= -\frac{ik}{r}[krj_l(kr)]\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}e^{im\varphi}.
\end{aligned}\right\} \quad (10.15)$$

Граничные условия требуют, чтобы на границе, при $r=R$, где R — радиус сферы, компоненты E_θ и E_φ обращались в нуль. Следовательно, для колебаний E-типа волновое число k должно удовлетворять соотношению

$$kR = S_{nl}, \quad (10.16)$$

где S_{nl} — корни уравнения

$$\frac{d}{dx}xj_l(x) = 0.$$

Аналогично, для колебаний H-типа имеем следующие выражения для компонент поля:

$$\left.\begin{aligned}
&E_r = 0, \quad H_r = \frac{k^2}{r^2} l(l+1) U,\\
&E_\theta = \frac{km}{r\sin\theta}U, \qquad H_\theta = \frac{k}{r}\frac{\partial}{\partial(kr)}[krj_l(kr)]\times\frac{\partial\Theta(l,m)}{\partial\theta}e^{im\varphi},\\
&E_\varphi = \frac{ik}{r}krj_l(kr)\frac{\partial\Theta(l,m)}{\partial\theta}e^{im\varphi}, \qquad H_\varphi = \frac{ikm}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial(kr)}\times\\
&\qquad\times[krj_l(kr)]\Theta(l,m)e^{im\varphi}.
\end{aligned}\right\} \quad (10.17)$$

Для колебаний магнитного типа граничные условия приводят к равенству

$$kR = T_{nl}, \quad (10.18)$$

где T_{nl} — корни уравнения $j_l(x) = 0$.

Мы будем обозначать оба типа колебаний символами $E(n_1l_1m)$ и $H(n,l,m)$. Анализ уравнений (10.5) и (10.17) показывает, что не существует решений, соответствующих значениям $l=0$ и $m=0$. Наименьшее значение l, при котором существует решение, — $l=1$.

Так как корни S_{nl} и T_{nl} не зависят от числа m, при каждом

значении n и l существует $2l+1$ различных колебаний E-типа и H-типа, отличающихся друг от друга значением m, но имеющих одну и ту же частоту. Это $2l+1$-кратное вырождение возникает из-за сферической симметрии резонатора.

Значения корней уравнений (10.16) и (10.18), отвечающих фундаментальным частотам колебаний, равны

$$S_{11}=2{,}74, \quad T_{11}=4{,}49. \tag{10.19}$$

Следовательно, резонансная длина волны для колебания E (11) равна 2,29 R. Сферические функции, определяемые уравнением (10.12), остаются конечными на всей сфере, включая и особые точки $\theta=0$ и $\theta=\pi$ уравнения (10.8), и представляют поэтому решение задачи на всей сфере.

Сферическими координатами можно пользоваться также при рассмотрении конического резонатора, ограниченного поверхностями $r=R$ и $\theta=\theta_0$, а также для резонатора в виде сферы с двумя коническими вырезами, т. е. области $0<r<R$, $\theta_0<\theta<O_1$. В этих случаях, однако, нужно пользоваться несколько более общим решением (10.5), имеющим особенность в полюсах $\theta=0$, $\theta=\pi$, которые исключаются из области.

Резонатор в виде сферы с коническими вырезами. Рассмотрим, например, фундаментальное колебание E-типа для сферы с коническими вырезами [8]. Для этого случая удобно выбрать функцию U в виде

$$U=\left(\lg\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right)\sin\frac{kr}{kr}. \tag{10.20}$$

При нахождении решения для всей сферы этот вид U не годился, так как U имеет при этом логарифмическую особенность при $\theta=0$. Он соответствует, очевидно, исключённому из предыдущего решения случаю $l=0$. С помощью (10.15) можно найти, что неисчезающими компонентами поля являются только

$$\left.\begin{aligned} E_\theta &= k^2\left(\frac{1}{\sin\theta}\right)\frac{\cos kr}{kr}, \\ H_\varphi &= -ik^2\frac{1}{\sin\theta}\frac{\sin kr}{kr}. \end{aligned}\right\} \tag{10.21}$$

Так как E_r и E_φ равны нулю всюду, граничное условие на поверхности $r=R$ гласит $E_\theta=0$. Это требование будет выполнено, если

$$kR=\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$$

независимо от положения других границ области.

Колебанию с наинизшей частотой отвечает значение n, равное нулю. При этом его длина волны в точности равна учетверённому радиусу сферы. В написанном решении E_θ стремится к бесконеч-

ности при приближённом r к нулю. Однако, линейный интеграл от вектора напряжённости поля E, взятый по кривой $r = \text{const}$. от одного выреза до другого, остаётся при этом конечным.

Примеры. 1. Показать, что значение Q для фундаментальной частоты такого резонатора равно

$$Q = \left(\frac{4R}{\rho\mu}\right)^{1/2} \frac{\lg \operatorname{tg}\frac{\theta_1}{2} - \lg \operatorname{tg}\frac{\theta_0}{2}}{\lg \operatorname{tg}\frac{\theta_1}{2} - \lg \operatorname{tg}\frac{\theta_0}{2}} + I(\csc\theta_1 + \csc\theta_0),$$

где

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x}{x}\, dx = 0{,}825.$$

Показать, что если $\theta_1 = \pi - \theta_0$, Q как функция угла θ_0 имеет максимум при $\theta_0 = 34°$.

2. Показать, что шунтовое сопротивление этого собственного колебания, если разность потенциалов измеряется между вершинами

$$S = 120\left(\frac{4R}{\rho\mu}\right)^{1/2} \frac{\lg^2\left(\operatorname{tg}\frac{\theta_1}{2} : \operatorname{tg}\frac{\theta_0}{2}\right)}{\lg\left(\operatorname{tg}\frac{\theta_1}{2} : \operatorname{tg}\frac{\theta_1}{2}\right) + I(\csc\theta_1 + \csc\theta_0)}.$$

Показать, что при $\theta_1 = \theta_0 - \pi$ оно имеет максимум при $\theta_0 \approx 9°$.

(Окончание в следующем выпуске.)

ЛИТЕРАТУРА

1. Jeans, Dynamical Theory of Gases, Cambridge Univ. Press, London, 1921, 3th Edit., Ch. 16; Fowler, Statistical Mechanics, ibid. 2-nd Edit., Ch. 4.
2. E. Fermi, Rev. Mod. Phys., 4, 87, 1932; W. Heitler, Quantum Theory of Radiation, Oxford Univ. Press, London, 1936, p. 40; Гейтлер, Квантовая теория излучения, ГТТИ, 1940.
3. Stratton, Electromagnetic Theory, McGraw-Hill, New-York, 1941, Ch. 6; Bateman, Electrical and Optical Wave Motion, Cambridge Univ. Press, London, 1915; Borgnis, Ann. d. Physik, 35, 359, 1939.
4. Borgnis, Z. Hochfrequenztech., 56, 47, 1940.
5. W. W. Hansen, J. App. Phys., 10, 38, 1939.
6. Barrow a. Mieher, Proc. I. R. E., 28, 184, 1940.
7. Terman, Radio Engineering, McGraw-Hill, New-York, 1937, a. 37 a. Ch. 3.
8. W. W. Hansen a. R. D. Richtmyer, J. App. Phys., 10, 189, 1939.