

W. 23

## ФОКУСИРОВКА ИОННОГО ПУЧКА И ЭНЕРГИЯ ИОНОВ В ЦИКЛОТРОНЕ

А. Н. Мурин, Ленинград

Со времени первой работы Коккрофта и Уолтона по искусственному расщеплению ядер пучком быстрых протонов в многочисленных физических лабораториях непрерывно ведется работа по развитию методов получения быстрых ионов. Из всех созданных при этом приборов самым замечательным безусловно является изобретенный Лоуренсом и Ливингстоном циклотрон.

Принцип действия циклотрона прост — многократное ускорение ионов, движущихся в магнитном поле в резонанс с переменным электрическим полем высокой частоты. В циклотроне ионы много раз проходят ускоряющую их, сравнительно незначительную, порядка 50 kV, разность потенциалов и достигают, таким образом, колоссальной энергии.

Между двумя полыми полуцилиндрическими электродами — дуантами, имеющими форму разрезанной поперек коробки из-под торта, прикладывается переменная разность потенциалов, источником которой является генератор высокой частоты. Перпендикулярно плоскостям крышек дуантов, следовательно, перпендикулярно электрическому полю, создается сильное однородное магнитное поле. Рис. 1 схематически изображает распределение электрического и магнитного поля в циклотроне.

Источник ионов находится вблизи центра циклотрона. Ионы ускоряются в электрическом поле между дуантами. Внутри же дуантов электрическое поле равно нулю и ионы, если предположить в первом приближении, что траектории их лежат в плоскости, параллельной крышкам дуантов, движутся под влиянием магнитного поля по круговым орбитам.

Пройдя пол-окружности, ион попадает в электрическое поле, частота которого подобрана таким образом, что за время движения иона внутри дуанта поле меняет свое направление; точнее говоря, период электрического поля равен периоду кругового движения

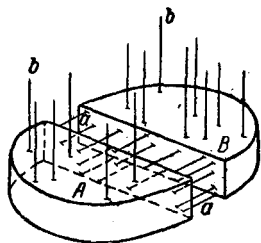


Рис. 1. А и В — дуанты циклотрона.

*a* — силовые линии электрического поля, *b* — линии магнитного поля

иона; поэтому ионы повторно ускоряются полем между дуантами (рис. 2).

Период обращения иона по окружности

$$T = \frac{2\pi m}{eH}, \quad (1)$$

где  $m$  — масса иона,  $e$  — заряд в электромагнитных единицах,  $H$  — напряженность магнитного поля. Радиус окружности, описываемый ионом, будет:

$$\rho = \frac{mv}{eH}, \quad (2)$$

где  $v$  — скорость движения иона. Энергия иона  $W$  при этом равна:

$$W = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2} \cdot \frac{4\pi^2 \rho^2}{T^2} = \frac{e^2}{2m} \rho^2 H^2. \quad (3)$$

По мере возрастания скорости иона он будет двигаться по окружности все большего радиуса и, наконец, достигнет края дуантов. Здесь ионный пучок может быть использован либо внутри самой дуантной камеры, либо с помощью поперечного электрического поля отклонен и через платиновое окно выведен наружу. Энергия ионов на выходе из камеры может быть вычислена по формуле (3), если подставить вместо  $\rho$  — радиуса орбиты — радиус камеры. Для большого циклотрона в Беркли (США) с радиусом камеры 60 см и магнитным полем в 18 000 эрстед мы получаем следующие предельные значения для энергии протонов, дейтронов и  $\alpha$ -частиц:

протоны и  $\alpha$ -частицы — 58 MeV  
 дейтроны — 29 MeV.

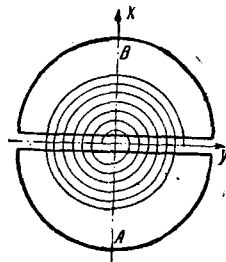


Рис. 2. Траектория иона в циклотроне; электрическое поле направлено параллельно оси  $x$ .  $A$  и  $B$  — дуанты

Интенсивность ионного пучка на выходе из циклотрона сравнительно велика. Ионный ток на выходе нового циклотрона в Беркли уже сейчас достигает 90  $\mu$ A, что далеко не является возможным пределом.

Если учесть еще, что ширина ионного пучка на выходе может быть сделанной меньше 1 мм, то становится совершенно ясным, что ионный пучок, выходящий из циклотрона, — идеальный объект для ряда экспериментов по расщеплению атомных ядер.

Уже в первой своей работе Лоуренс и Ливингстон обратили внимание на то, что интенсивность ионного пучка по выходе составляет весьма значительную долю интенсивности ионного источника. Лоуренс и Ливингстон работали с циклотроном, дающим протоны энергией в 1 220 000 eV. Максимальная разность потенциалов на уантах была 4 000 V, так что для достижения окончательной энергии ионы должны были претерпеть по меньшей мере триста ускорений. При напряженности магнитного поля в 10 000 эрстед период обращения иона по окружности [см. уравнение (1)] равнялся

$0,7 \cdot 10^{-7}$  сек.; таким образом, время пребывания иона в циклотроне было порядка  $0,7 \cdot 10^{-7} \cdot \frac{300}{2} = 10^{-5}$  сек. Ионы образовались (с помощью бомбардировки молекул водорода электронами) во всем промежутке между дуантами. Высота дуантов (расстояние между крышками) равнялась 1 см.

Для того чтобы за время в  $10^{-5}$  сек. ион сместился в направлении крышек дуантов на 1 см, достаточно, чтобы составляющая его скорости, перпендикулярная крышкам, была  $\frac{1}{10^{-5}} = 10^5$  см/сек.

Тепловая скорость протона (при комнатной температуре) — порядка  $3 \cdot 10^5$  см/сек. Если учесть еще рассеивающее действие объемного заряда, контактных эдс и неоднородность магнитного и ускоряющего

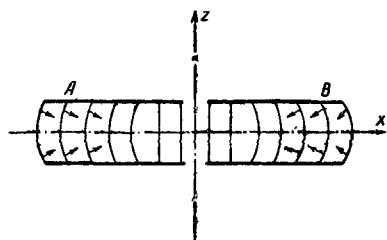


Рис. 3. Магнитное поле циклотрона; стрелками указано направление силы Лоренца

электрического поля, то в первый момент кажется очевидным, что «диффузия» ионов к крышкам дуантов будет настолько сильной, что интенсивность пучка на выходе станет совершенно незначительной и практически просто равной нулю (ионы, казалось бы, должны попадать на крышки дуантов, не доходя до выходной щели). Но, как сразу же было указано Лоуренсом и Ливингстоном, в результате не-

однородности электрического и магнитного поля в циклотроне сила Лоренца  $F = e(\mathbf{E} + [\mathbf{v}\mathbf{H}])$  имеет составляющую, направленную к центральной плоскости<sup>1)</sup> камеры. Электрическое поле между дуантами, подобно электронной линзе, фокусирует ионный пучок, собирая его к центральной плоскости. Подробное описание этого эффекта дано ниже. Магнитное поле действует аналогично, но его фокусирующее действие значительно сильнее. Магнитное поле всех работающих в настоящее время циклотронов ослабевает к краю камеры. Причиной этого является насыщение железа полюсных наконечников магнита циклотрона. На рис. 3 изображен вид магнитных силовых линий; видно, что они выгнуты к центру циклотрона. Как легко видеть, сила Лоренца  $e[\mathbf{v}\mathbf{H}]$  имеет в этом случае составляющую, направленную всегда к центральной плоскости. Существование этой составляющей обуславливает энергичную фокусировку ионного пучка, благодаря которой и возможно достижение высоких энергий ионов и больших интенсивностей.

Естественно, что на вопрос о движении ионов в циклотроне и, в частности, на вопрос о фокусировке ионного пучка скоро обратили свое внимание многочисленные исследователи как теоретики, так и экспериментаторы. Достаточно указать на работы Бете, Розе, Хургина, Томаса и других исследователей. При этом в первых же работах (Бете, Розе и Хургина) было обращено внимание на следующее. Как указано выше, период обращения иона по

<sup>1)</sup> Срединной плоскости, параллельной крышкам дуантов.

окружности должен совпадать с периодом электрического поля или, иначе говоря, движение иона должно быть в резонансе с колебаниями электрического поля. При возрастании скорости иона масса его возрастает по закону

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cong m_0 \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \right), \quad (4)$$

где  $m_0$  — масса покоя. Следовательно [см. уравнение (1)], для того, чтобы период обращения иона  $T$  был величиной постоянной, — а только при этом условии и возможно точное соблюдение резонанса, — магнитное поле  $H$  должно быть не однородно, а возрастать по радиусу к краю камеры, так же как ионная масса, т. е. как  $\left( 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \right)$ . Но для фокусировки ионного пучка, без которой вообще невозможна работа циклотрона, магнитное поле должно не возрастать, а, наоборот, ослабевать к периферии камеры <sup>1)</sup>.

Таким образом, идеального резонанса между изменением электро поля и движением иона, т. е. полного совпадения периода  $p$  и периода обращения иона, быть не может — возможно только приближенное равенство. Как было показано Бете, Розе и одновременно Хургиным, это приводит к тому, что во всяком фокусирующем ионный пучок магнитном поле число возможных ускорений иона оказывается ограниченным, и, следовательно, существует предел достижимой энергии ионов.

Дальнейшие работы (Розе, Томас, Шифф, Вильсон) были посвящены подробному исследованию влияния магнитных полей различного вида на фокусировку ионного пучка и предельную энергию ионов в циклотроне. При этом были получены очень интересные результаты, особенно Томасом, указавшим на возможность использования в циклотроне аксиально несимметричных магнитных полей, дающих своеобразный фокусирующий эффект и позволяющих почти идеально точно удовлетворить условию резонанса.

Перейдем теперь к более детальному изложению. Так как взаимодействием электрического и магнитного поля в циклотроне можно пренебречь, другими словами, можно пренебречь магнитными полями, наведенными токами смещения и проводимости, то мы разберем отдельно действие электрического и магнитного поля.

Электрическая фокусировка существенна только во внутренней области циклотрона, т. е. для расстояний от центра, значительно меньших радиуса дуантов. В этой области можно считать  $E_y = 0$  и  $\frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{\partial E_z}{\partial y} = 0$  (система координат та же, что на рис. 2 и 3). Таким образом, в этой области потенциал электрического поля  $U$  не зависит от  $y$  и равен

$$U_t = U(x, z) \cos(\omega t + \theta). \quad (5)$$

<sup>1)</sup> Возрастающее к краю камеры магнитное поле дефокусирует пучок, давая составляющую силы Лоренца, направленную от центральной плоскости.

### ФОКУСИРОВКА ЭЛЕКТРИЧЕСКИМ ПОЛЕМ

Разность потенциалов на дуантах  $V$  меняется со временем  $t$  по тому же закону

$$V = V_0 \cos(\omega t + \theta).$$

Время  $t$  будем отсчитывать от момента прохождения иона через центр ускоряющей области между дуантами.

Электрическое поле и его фаза, а следовательно, и разность потенциалов  $V$  не успевают значительно измениться за время прохождения иона через промежуток между дуантами, и при вычислении приращения энергии иона в результате одного ускорения мы можем считать эту разность постоянной. Но тогда приращение энергии иона  $\Delta W$  будет просто равно:

$$\Delta W = e V_0 [\cos(\omega t + \theta)_{t=0}] = e V_0 \cos \theta. \quad (6)$$

Здесь, как и всюду ниже,  $\theta$  — фаза электрического поля в момент ускорения.  $\Delta W > 0$  соответствует ускорению иона, что будет

при  $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ ; при  $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3}{2}\pi$   $\Delta W < 0$  и ион замедляется.

$\theta = 0$  соответствует максимально возможному ускорению.

В области, где электрическая фокусировка существенна, т. е. вблизи центра камеры, магнитное поле очень однородно и обуслов-

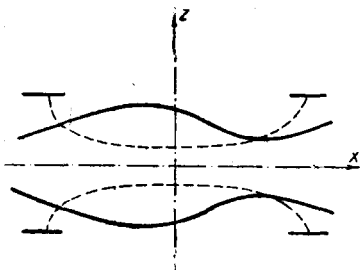


Рис. 4. Движение иона в промежутке между дуантами. Пунктиром изображены силовые линии электрического поля

от центральной плоскости — пучок дефокусируется.

Если пренебречь изменением электрического поля за время прохождения иона сквозь линзу и изменением скорости частицы при этом, то фокусировка и дефокусировка взаимно компенсируют друг друга. Предположим теперь, что электрическое поле ослабевает за время ускорения иона ( $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ); ясно, что такое поле должно фокусировать пучок, так как фокусировка при входе ионов в линзу при этом сильнее, чем дефокусировка при выходе. Наоборот, возрастающее электрическое поле ( $-\frac{\pi}{2} < \theta < 0$ ) действует дефоку-

ленная им сила Лоренца не имеет составляющей, направленной к центральной плоскости. Следовательно, в этой области магнитное поле не фокусирует ионный пучок. Фокусировка осуществляется здесь исключительно электрическим полем между дуантами, силовые линии которого изображены на рис. 4. Мы видим, что ускоряющая область действует, как электрическая линза. Когда ионы входят в линзу, они отклоняются к центральной плоскости — ионный пучок фокусируется, когда же ионы выходят из линзы, они отклоняются

сирующим образом. Отклонение ионов, связанное с изменением их скорости, при прохождении через линзу всегда дает фокусировку, так как ион, входя в линзу, имеет скорость, меньшую, чем выходя из нее, и, следовательно, пребывает в фокусирующем поле дольше, чем в дефокусирующем.

Фокусирующее действие электрического поля, связанное с изменением его во времени, должно играть наиболее существенную роль тогда, когда поле изменяется быстро, т. е. когда  $\frac{\partial V}{\partial t}$  достигает максимума, что будет при

$\theta = \frac{\pi}{2}$ . Фокусировка, возникающая вследствие изменения скорости ионов при прохождении линзы, напротив, существенна при максимальном значении ускоряющего поля, т. е. при значениях  $\theta$ , близких к нулю.

При отрицательных значениях  $\theta$ , близких к нулю, фокусировка «изменением скорости иона» доминирует над дефокусировкой «изменением поля во времени»; поэтому сфокусированный пучок ионов получается в интервале  $\theta$ , несколько большем половины цикла электрического поля, т. е. при  $-\alpha < \theta < \frac{\pi}{2}$  ( $0 < \alpha \ll \frac{\pi}{2}$ ).

Розе, исследуя движение ионов при многократном ускорении в однородном магнитном поле, пришел к выводу, что при положительных  $\theta$  мы имеем дело с колебаниями около центральной плоскости с медленно возрастающей амплитудой — амплитуда растет пропорционально корню четвертой степени из энергии ионов (рис. 5)<sup>1)</sup>. Для отрицательных и достаточно далеких от нуля  $\theta$  движение иона теряет колебательный характер и  $z$  возрастает экспоненциально с числом оборотов, т. е. мы имеем энергичную дефокусировку ионного пучка.

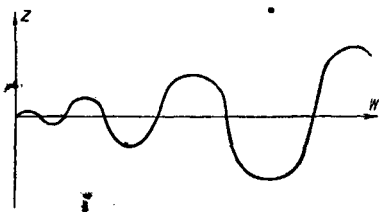


Рис. 5. Отклонение иона от центральной плоскости при возрастании его энергии  $W$

### ФОКУСИРОВКА МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ

Для ионов, претерпевших значительное число ускорений, фокусировка электрическим полем не должна более играть существенной роли, так как относительное изменение скорости при отдельном ускорении становится малым, и за время прохождения ионов через линзу (область между дуантами) электрическое поле не успевает существенно измениться во времени.

<sup>1)</sup> В этом случае

$$z \approx A \left( \frac{W}{\sin \theta} \right)^{\frac{1}{4}} \cdot \sin \left[ \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^n dn \left( \frac{e V_0 \sin \theta}{W} \right)^{\frac{1}{2}} \right],$$

где  $A$  — постоянная, а  $n$  — число ускорений.

Не так обстоит дело с магнитной фокусировкой. Прежде всего, ион подвергается действию магнитного поля на всем протяжении своего пути, а не только в промежутке между дуантами, что имеет место в случае электрического поля. Фокусирующее действие магнитного поля не является, таким образом, дифференциальным эффектом, т. е. разностью между фокусировкой и дефокусировкой. Кроме того, сила Лоренца растет со скоростью частицы. Если ввести цилиндрические координаты с осью  $OZ$ , направленной по оси циклотрона, то оценка порядка отклонения ионов в направлении оси  $Z$  за один оборот дает:

$$\Delta z \sim \frac{evH_r}{m} \cdot \frac{4\pi^2 r^2}{2v^2} \cong \frac{eH_r \pi \cdot r}{m v}, \quad (7)$$

где  $H_r$  — составляющая магнитного поля, направленная к (или от) оси  $OZ$ , а  $v$  — частота колебания электрического поля.  $H_r$  обычно растет к краю магнита; следовательно, с удалением ионов от центра камеры, т. е. с возрастанием  $r$ , магнитная фокусировка должна играть все большую и большую роль.

В циклотроне наконечники магнита всегда расположены симметрично относительно центральной плоскости и аксиально симметрично относительно оси  $OZ$ . Напряженность магнитного поля удовлетворяет поэтому следующим соотношениям:

$$\left. \begin{aligned} H_z(r, z) &= H_z(r, -z), \\ H_r(r, z) &= -H_r(r, -z), \\ H_\varphi &= 0, \\ \text{rot } \mathbf{H} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Для полного соблюдения условия резонанса, с учетом релятивистского изменения массы иона, магнитное поле должно возрастать от

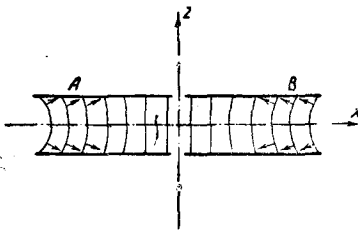


Рис. 6. Дефокусирующее ионный пучок магнитное поле; стрелками указано направление силы Лоренца

оси циклотрона  $OZ$  к краю камеры, но для возрастающего с увеличением  $r$  магнитного поля, удовлетворяющего равенствам (8), линии поля отклоняются так, как показано на рис. 6. Ионы, орбиты которых не лежат в центральной плоскости, будут отклоняться от нее, и ионный пучок будет дефокусироваться; этот эффект пропорционален относительному изменению магнитного поля, и, таким образом, пропорционален  $\frac{v^2}{c^2}$ .

[см. уравнения (1) и (4)].

Для фокусировки ионного пучка магнитное поле должно ослабевать по радиусу. В этом случае магнитные силовые линии вогнуты к центру циклотрона и сила Лоренца имеет составляющую по направлению к центральной плоскости (рис. 3). Но в случае такого поля время обращения иона вокруг оси, как это видно из уравнения (1)

( $H$  следует заменить на  $H_z$ ), возрастает с возрастанием скорости ( $m$  возрастает, а  $H$  убывает к краю камеры). Таким образом, условие резонанса между колебаниями электрического поля и обращением иона может соблюдаться только приближенно и фаза  $\theta$  будет меняться от ускорения к ускорению. После некоторого числа ускорений изменение  $\theta$  может стать столь значительным, что ион попадет не в ускоряющее, а в замедляющее поле.

Подчеркнем еще раз, что, как показывают и опыт, и теория, без магнитной фокусировки нельзя получить пучка ионов на выходе из циклотрона. Невозможность же одновременного удовлетворения резонанса и фокусировки вынуждает нас идти на некоторый компромисс, подбирая такое магнитное поле, которое достаточно хорошо фокусировало бы пучок и в то же время не меняло бы слишком сильно фазы электрического поля от ускорения к ускорению.

Максимальное суммарное изменение фазы  $\theta$  за время всех ускорений, которым мы можем располагать, если не хотим допустить попадания иона в замедляющее поле, равно  $2\pi$ , а не  $\pi$ , как может показаться с первого взгляда. Дело в том, что можно сделать магнитное поле в центре камеры больше резонансного, а на краю меньше (рис. 7); тогда в начале своего движения ион будет опережать изменение электрического поля —  $\theta$  будет убывать от ускорения к ускорению, а после того, как траектория иона пересечет резонансное поле, ион будет отставать от поля —  $\theta$  будет возрастать. При этом условии фаза может меняться от  $\frac{\pi}{2}$  до  $-\frac{\pi}{2}$  в первой и от  $-\frac{\pi}{2}$  до  $\frac{\pi}{2}$  во второй части пути, без того, чтобы ион попал в замедляющее поле. Это и дает суммарное изменение фазы в  $2\pi$ . Рис. 8 схематически поясняет это рассуждение:  $t_1, t_2, t_3$  и т. д. — моменты последовательных ускорений иона.  $V = V_A - V_B$ ; в моменты времени  $t_1, t_3, t_5, t_7, t_9$  ион движется от дуанта А к дуанту В, в моменты  $t_2, t_4, t_6, t_8, t_{10}$  от В к А. В момент  $t_6 = t_{рез}$  траектория иона пересекает резонансное поле. Само собой разумеется, что истинное число ускорений во много раз больше, и  $\theta$  меняется от ускорения к ускорению гораздо медленнее.

Чем большей фокусировки ионного пучка мы хотим добиться, тем резче должно быть спадание магнитного поля к краю циклотрона, тем быстрее будет меняться  $\theta$ , тем меньше число оборотов будет в нашем распоряжении и тем меньше предельные энергии ионов сможем мы получить на выходе. Если мы хотим получить большую интенсивность выходящего пучка, то нельзя ограничиться ионами

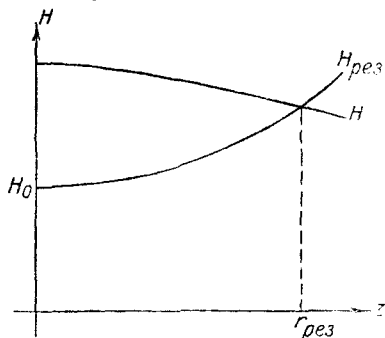


Рис. 7

$H$  — эффективное поле;  $H_{рез}$  — поле, дающее идеальный резонанс

этом условии фаза может меняться от  $\frac{\pi}{2}$  до  $-\frac{\pi}{2}$  в первой и от  $-\frac{\pi}{2}$  до  $\frac{\pi}{2}$  во второй части пути, без того, чтобы ион попал в замедляющее поле.

Это и дает суммарное изменение фазы в  $2\pi$ . Рис. 8 схематически поясняет это рассуждение:  $t_1, t_2, t_3$  и т. д. — моменты последовательных ускорений иона.  $V = V_A - V_B$ ; в моменты времени  $t_1, t_3, t_5, t_7, t_9$  ион движется от дуанта А к дуанту В, в моменты  $t_2, t_4, t_6, t_8, t_{10}$  от В к А. В момент  $t_6 = t_{рез}$  траектория иона пересекает резонансное поле. Само собой разумеется, что истинное число ускорений во много раз больше, и  $\theta$  меняется от ускорения к ускорению гораздо медленнее.

Чем большей фокусировки ионного пучка мы хотим добиться, тем резче должно быть спадание магнитного поля к краю циклотрона, тем быстрее будет меняться  $\theta$ , тем меньше число оборотов будет в нашем распоряжении и тем меньше предельные энергии ионов сможем мы получить на выходе. Если мы хотим получить большую интенсивность выходящего пучка, то нельзя ограничиться ионами



с начальной фазой  $\theta$ , равной или очень близкой к  $\frac{\pi}{2}$ , т. е. использовать ионный источник в течение незначительной доли полного цикла электрического поля. Если же мы хотим использовать все ионы с начальными фазами  $\theta_0$ , такими, что  $\theta'_0 < \theta_0 < \frac{\pi}{2}$ , то полное изменение фазы иона должно быть не больше  $\pi + 2\theta'_0$  (рис. 8, *b*), т. е. число возможных ускорений и соответственно окончательная энергия становятся меньше. Одним словом, если мы хотим получить лучшую фокусировку и большую интенсивность, приходится поступиться энергией ионов и, наоборот, стремясь к возможно большим энергиям, мы теряем в интенсивности.

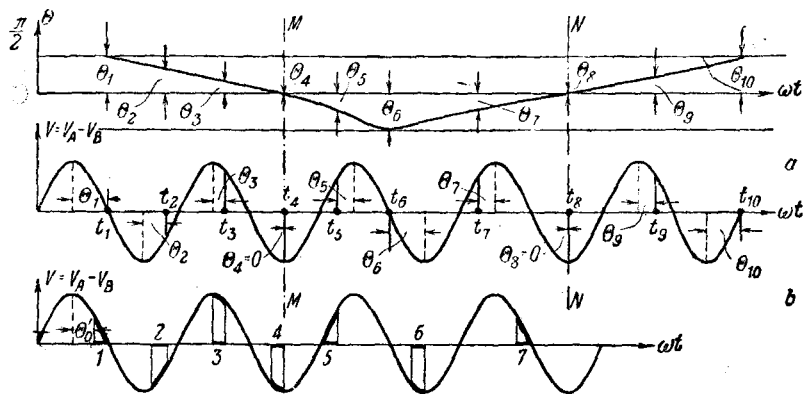


Рис. 8. Рисунок показывает, как изменяется фаза  $\theta$  от ускорения к ускорению

На рис. 8, *b* — начальные фазы ионов (см. точки на отрезке 1) лежат между  $\theta'_0$  и  $\frac{\pi}{2}$ . В моменты времени, изображаемые точками на отрезке 5, траектории ионов пересекают резонансное поле. Из сравнения рис. 8, *a* и *b* видно, что в случае *b* число допустимых ускорений стало меньше. Рисунок носит совершенно схематический характер

Проиллюстрируем все эти рассуждения на простом примере однородного магнитного поля <sup>1)</sup>; при этом мы будем следовать работам Розе.

Такое магнитное поле не дает фокусировки ионного пучка. Фокусировка и дефокусировка осуществляются исключительно электрическим полем; следовательно, мы должны избегать фаз  $\theta$ , близких к  $-\frac{\pi}{2}$ , так как при этом электрическое поле дефокусирует пучок (см. выше). Если мы потребуем, чтобы фаза электрического поля  $\theta$  оставалась положительной, т. е. чтобы электрическое поле ослабевало во время прохождения иона между дуантами, то мы будем иметь фокусировку, правда, довольно слабую, так как амплитуда колебаний ионов по оси  $Z$  будет все же медленно возрастать, как  $W^{1/4}$ .

<sup>1)</sup> Практически таким полем пользоваться, конечно, нецелесообразно.

Условие  $\theta > 0$  позволяет нам располагать общим изменением фазы  $\theta$  максимум в  $\pi$ . С помощью рис. 8 может быть пояснен и этот случай — надо только «выбросить» часть рисунка, лежащую между прямыми  $MM$  и  $NN$ . В первой части пути, до пересечения траекторий иона резонансного поля,  $\theta$  убывает от  $\frac{\pi}{2}$  до нуля, во второй части возрастает от нуля до  $\frac{\pi}{2}$ ;  $t_4 = t_8 = t_{рез}$ . Если мы хотим, соблюдая условие  $\theta > 0$ , использовать все ионы с начальной фазой между  $\theta'_0$  и  $\frac{\pi}{2}$  ( $0 < \theta'_0 < \frac{\pi}{2}$ ), то полное изменение фазы должно быть не больше  $2\theta'_0$ ; но, конечно, не имеет смысла делать это изменение меньше, так как последнее означало бы, что мы не используем полного числа всех возможных ускорений и тем самым не достигаем максимально возможной энергии ионов. Как легко видеть, в этом случае начальная фаза  $\theta_0$  и конечная фаза (на выходе)  $\theta_1$  равны, т. е.  $\theta_0 = \theta_1$  (для любого из используемых ионов).

Действительно, в первой «дорезонансной» части пути фаза уменьшается на  $\theta'_0$ , а во второй возрастает на ту же самую величину. Условием  $\theta_0 = \theta_1$  мы воспользуемся в дальнейших расчетах.

Обозначим число ускорений, которые претерпел ион до некоторого момента времени, через  $n-1$ . Тогда изменение фазы  $\Delta\theta$  иона за  $n$ -ый полуоборот равно:

$$\Delta\theta \approx \frac{d\theta}{dn} = \pi \left( \frac{H_{рез}}{H_z} - 1 \right) \quad (9)$$

( $H_{рез}$  — резонансное поле, различное на различных расстояниях от центра из-за релятивистской зависимости массы от скорости).

Представим  $H_z$  в виде:

$$H_z = H_0 (1 + h), \quad (10)$$

где  $H_0$  — резонансное поле в центре циклотрона, а  $h > 0$ , так как из наших рассуждений следует, что для получения ионов возможно большей энергии в центре поле должно быть больше резонансного. Изменение энергии иона  $\Delta W$  за  $n$ -ое ускорение будет:

$$\Delta W = \frac{dW}{dn} = e V_0 \cos \theta. \quad (11)$$

$V_0$  — амплитуда колебаний разности потенциалов на дуантах. Из (9) и (11) имеем:

$$\frac{d \sin \theta}{dW} = \frac{\pi}{e V_0} \left( \frac{H_{рез}}{H_z} - 1 \right), \quad (12)$$

но так как  $H_{рез}$  должно возрастать к краю циклотрона как ионная масса, т. е. как

$$\left( 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \right) = \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{m_0 v^2}{m_0 c^2} \right) = 1 + \frac{W}{m_0 c^2},$$

то

$$H_{рез} = H_0 \left( 1 + \frac{W}{m_0 c^2} \right). \quad (13)$$

С помощью уравнений (10) и (13) мы получаем вместо (12)

$$\frac{d \sin \theta}{dW} = \frac{\pi}{eV_0} \left( \frac{W}{m_0 c^2} - h \right). \quad (14)$$

Интегрируя уравнение (14), имеем:

$$\sin \theta = \frac{\pi}{eV_0} \left( \frac{W^2}{2m_0 c^2} - hW \right) + \sin \theta_0; \quad (15)$$

здесь  $\theta_0$  — начальная фаза.

Приравнявая  $\frac{d \sin \theta}{dW}$  нулю, мы находим, что  $\sin \theta$  достигает минимума при

$$W_1 = hm_0 c^2 \quad (16)$$

в той же точке, где магнитное поле равно резонансному. Согласно уравнению (15)

$$\sin \theta_{\min} = \frac{\pi}{eV_0} \left( \frac{W_1^2}{2m_0 c^2} - hW_1 \right) + \sin \theta_0. \quad (17)$$

При данном  $h$  и  $V_0$ ,  $\sin \theta_{\min}$  равен нулю для некоторого значения  $\theta'_0$  начальной фазы  $\theta_0$ , т. е.

$$0 = \frac{\pi}{eV_0} \left( \frac{W_1^2}{2m_0 c^2} - hW_1 \right) + \sin \theta'_0. \quad (18)$$

Желая получить фокусированный пучок ионов, мы потребовали, чтобы  $\theta$  и, следовательно,  $\sin \theta$  были больше нуля, поэтому для нас «пригодны» все ионы с начальной фазой между  $\frac{\pi}{2}$  и  $\theta'_0$ . Не желая терять ни в энергии, ни в интенсивности, мы, как говорилось выше, должны положить окончательную фазу  $\theta_1$  равной начальной  $\theta_0$ . Тогда из условия  $\theta_1 = \theta_0$  и уравнения (15), написанного для конца пути:

$$\sin \theta_1 = \frac{\pi}{eV_0} \left( \frac{W_{\kappa p}^2}{2m_0 c^2} - hW_{\kappa p} \right) + \sin \theta'_0, \quad (19)$$

где  $W_{\kappa p}$  — окончательная энергия ионов, мы получаем:

$$\frac{W_{\kappa p}^2}{2m_0 c^2} - hW_{\kappa p} = 0, \quad (20)$$

т. е.

$$W_{\kappa p} = 2m_0 c^2 h. \quad (21)$$

Сравнивая (21) и (16), мы видим, что

$$W_{\kappa p} = 2W_1. \quad (22)$$

Значит (18), можно переписать так:

$$0 = \frac{\pi}{eV_0} \left( \frac{W_{\kappa p}^2}{8m_0 c^2} - \frac{hW_{\kappa p}}{2} \right) + \sin \theta'_0. \quad (23)$$

Из (21) и (23) можно определить как  $W_{\kappa p}$ , так и  $h$ :

$$W_{\kappa p} = 4 \cdot \sqrt{\frac{1}{2\pi} \cdot eV_0 m_0 c^2 \sin \theta'_0}, \quad (24)$$

$$h = \sqrt{\frac{2eV_0 \sin \theta'_0}{\pi m_0 c^2}}. \quad (25)$$

Для  $V_0 = 50$  kV и  $\theta'_0 = \frac{\pi}{2}$ , т. е. для «нулевой» интенсивности, эти равенства дают 10,9 MeV для протонов, 15,4 MeV для дейтронов и 30,8 MeV для  $\alpha$ -частиц. Для  $\sin \theta'_0 = 0,9$  эти энергии должны быть понижены на 50%. При этом  $\theta'_0 = 64^\circ$ , и мы используем источник ионов в течение 30% всего времени его работы.

$\hbar$  оказывается равным  $0,55 \cdot 10^{-2}$  для протонов,  $0,39 \cdot 10^{-2}$  для дейтронов и  $\alpha$ -частиц. Мы видим, что магнитное поле должно быть больше резонансного в центре только на долю процента. Следует заметить, что результирующая энергия чрезвычайно чувствительна к точному значению  $\hbar$ . Достаточно сказать, что при  $\hbar = 0$  окончательная энергия снижается вдвое против указанного. Заметим еще, что если при решении нашей задачи мы поступились бы фокусировкой, т. е. считали бы допустимыми также значения  $\theta$  между нулем и  $-\frac{\pi}{2}$ , то для предельно [возможных энергий в однородном магнитном поле мы получили бы значение в  $\sqrt{2}$  раза большее.

Этот расчет надо было бы вести совершенно так же, как и выше; только наименьшее значение  $\sin \theta$  следовало бы положить равным  $-1$  и вместо уравнения (18) писать:

$$-1 = \frac{\pi}{eV_0} \left( \frac{W_1^2}{2m_0c^2} - \hbar W_1 \right) + \sin \theta'_0. \quad (26)$$

Тогда для энергии ионов в однородном магнитном поле мы получили бы:

$$W_{кр} = 4 \sqrt{\frac{1}{2\pi} eV_0 m_0 c^2 (1 + \sin \theta'_0)}, \quad (27)$$

$$\hbar = \sqrt{\frac{2eV_0 (1 + \sin \theta'_0)}{\pi m_0 c^2}}. \quad (28)$$

Эти формулы в несколько отличном виде были впервые получены Хургиным.

Для магнитного поля, дающего фокусировку и, следовательно, допускающего полное изменение  $\theta$  до  $2\pi$  (например, для поля, спадающего квадратично с расстоянием от центра так, чтобы компенсировать дефокусировку электрическим полем вблизи  $\theta = -\frac{\pi}{2}$ ), мы получим значения, близкие к вычисляемым по формуле (27), т. е. (в пределе) около 15,5 MeV для протонов, 22 MeV для дейтронов и 43 MeV для  $\alpha$ -частиц. Подробный расчет и строгое обоснование этого результата мы опускаем.

Надо отметить, что предельная энергия ионов растет с напряжением на дуантах как  $\sqrt{V_0}$ ; поэтому развитие циклотрона и идет в направлении увеличения этого напряжения; в частности, напряжение на дуантах циклотрона в Беркли достигает 200 kV. Отметим в заключение, что во внешней части орбиты иона, там, где действует магнитная фокусировка, амплитуда колебаний иона по оси  $Z$  пропорциональна  $-\frac{d \lg H}{d \lg r}$ , т. е. фокусирующий эффект зависит от

относительного изменения магнитного поля с радиусом и, если градиент магнитного поля достаточно быстро спадает к краю дуантов, как это обычно и бывает, высота ионного пучка будет уменьшаться в периферийной области камеры циклотрона.

### ФОКУСИРОВКА ПО ТОМАСУ

До сих пор мы полагали, что напряженность магнитного поля является функцией только  $r$  и  $z$ <sup>1)</sup> и не зависит от азимутального угла  $\varphi$ . В этом случае магнитная фокусировка возможна только при ослаблении поля к краю циклотрона, и у нас нет возможности удовлетворить условию резонанса на всем протяжении пути иона. Но, как впервые показал Томас, мы можем, меняя поля по азимуту, создать силу, фокусирующую ионный пучок и при соответственно выбранном углом и радиальном изменении поля добиться как фокусировки, так и почти идеально точного соблюдения резонанса, т. е. равенства частоты вращения иона вокруг оси циклотрона частоте переменного электрического поля.

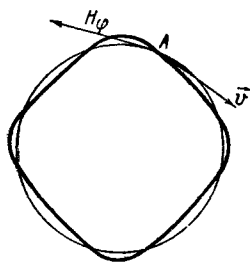


Рис. 9.  $H_z$  направлено на читателя

Рассмотрим прежде всего путь заряженной частицы, движущейся с постоянной скоростью в магнитном поле, меняющемся в зависимости от азимутального угла  $\varphi$  и не зависящем от  $r$ . В рассматриваемом случае мы не требуем больше аксиальной симметрии поля относительно оси  $OZ$ , ограничиваясь условиями симметричности магнитных линий относительно центральной плоскости. Напряженность этого поля удовлетворяет следующим уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} H_z(\varphi, z) &= H_z(\varphi, -z), \\ H_\varphi(\varphi, z) &= -H_\varphi(\varphi, -z), \\ H_r &= 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Рассмотрим движение иона в таком поле. Угол  $\varphi$  мы будем отсчитывать в направлении вращения иона. На рис. 9 изображена замкнутая орбита иона, лежащая в центральной плоскости. Траектория частицы должна иметь большую кривизну там, где поле сильнее, и если путь иона — замкнутая кривая, то ион должен в этом месте удаляться на большее расстояние от центра, чем в тех точках поля, где оно слабее. На рис. 9 вблизи точки  $A$  поле ослабевает с возрастанием азимутального угла  $\varphi$ . Линии магнитного поля обращены своей выпуклостью в сторону уменьшения магнитного поля; следовательно, вблизи  $A$  в сторону возрастания  $\varphi$ , т. е.  $H_\varphi < 0$  над центральной плоскостью и  $H_\varphi > 0$  под ней. Допустим теперь, что

<sup>1)</sup>  $r$  — расстояние от оси циклотрона,  $z$  — расстояние от центральной плоскости. Ось  $Z$  направлена по магнитному полю.

путь иона не лежит в центральной плоскости, и на рис. 9 изображена проекция пути иона на центральную плоскость. Для определенности будем считать, что в точке  $A$  ион движется над центральной плоскостью, т. е. в точке  $A$   $H_{\varphi} < 0$ . Тогда, обратившись к рисунку, мы видим, что сила Лоренца имеет составляющую, направленную к центральной плоскости  $F_z = e[\mathbf{v}\mathbf{H}_{\varphi}]^1$ , и, следовательно, пучок ионов в этом месте фокусируется. Как легко видеть, фокусировка происходит и там, где поле растет с углом. Этот фокусировочный эффект пропорционален произведению относительного изменения расстояния от центра и относительного изменения магнитного поля и, следовательно, в конечном счете пропорционален квадрату относительного изменения магнитного поля с азимутальным углом.

Таким образом, не меняя магнитного поля по радиусу, мы с помощью фокусировки по Томасу можем получить фокусированный пучок ионов. Мы видели, что поле, дающее резонанс, возрастает по радиусу и дает дефокусировочный эффект, пропорциональный  $\frac{v^2}{c^2}$ . Естественно попытаться скомпенсировать эту дефокусировку, меняя магнитное поле по азимуту так, чтобы относительное его изменение (скажем, на угол в один радиан) было пропорционально  $\frac{v}{c}$ . Томасу, а за ним Шиффу, удалось указать такие поля, которые дают фокусировку и резонанс во всяком случае до таких скоростей ионов, что в расчете можно пренебречь величинами порядка  $\frac{v^3}{c^3}$  по сравнению с  $\frac{v}{c}$  и  $\frac{v^2}{c^2}$ . Мы укажем здесь формулу этих полей, не приводя всех вычислений, с помощью которых они получены. Это поля вида:

$$H = \frac{m_0 \omega c}{e} \left[ 1 + A \frac{\omega r}{c} \cos n\varphi + B \left( \frac{\omega r}{c} \right)^2 \right] \quad (30)$$

( $n = 3$  или  $4$ ),

где  $e$  — заряд иона в электрических единицах, а  $\omega$  — циклическая частота вращения иона,  $A$  и  $B$  — постоянные, которые должны удовлетворять следующим условиям резонанса:

при  $n = 3$

$$B = \frac{1}{2} - \frac{A^2}{8}, \quad (31)$$

при  $n = 4$

$$B = \frac{1}{2} - \frac{A^2}{15}. \quad (32)$$

Для достижения полей вида (30) магнитные наконечники должны иметь волнистую поверхность<sup>2)</sup>, подобно наконечникам, изображенным на рис. 10.

1) При расчете фокусирующей силы можно считать, что скорость иона параллельна центральной плоскости.

2) Конечно, для получения такой поверхности надо пользоваться «шимами» (см. ниже).

При  $A > A_0$ , где

$$A_0 = \sqrt{\frac{4}{3}} \quad (33)$$

для  $n=3$  и

$$A_0 = \sqrt{\frac{30}{19}} \quad (34)$$

для  $n=4$ , движение иона по оси  $z$  носит колебательный характер. При  $A < A_0$  расстояние иона от центральной плоскости экспоненциально возрастает. Первый

случай дает фокусировку, второй дефокусировку. Фокусировка будет тем лучше, чем больше  $A$  и чем меньше, следовательно,  $B$ . В качестве меры фокусировки мы можем принять число оборотов со средним радиусом  $a$ , описанных за одно полное колебание по оси  $z$ . Это число будет тем меньше, чем сильнее фокусировка. При выполнении условия резонанса число оборотов равно

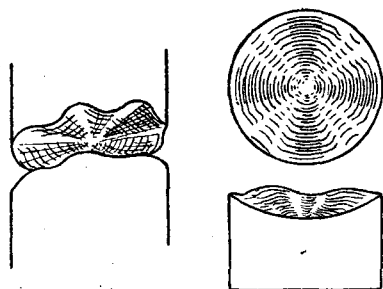


Рис. 10. Наконечники магнита с волнистой поверхностью

$\frac{c}{a\omega} \left[ \left( \frac{A}{A_0} \right)^2 - 1 \right]^{-1/2}$  как для случая  $n=3$ , так и для случая  $n=4$ .

В формуле (30) обращает на себя внимание то, что период изменения магнитного поля по азимуту здесь равен  $\frac{2\pi}{n}$ , где  $n=3$  или 4.

Это обстоятельство связано с вопросом о стабильности ионных орбит. Для простоты рассуждения забудем на время об ускоряющем электрическом поле и предположим, что магнитное поле имеет вид:

$$H = \frac{m_0 \omega c}{e} \left[ 1 + A \frac{\omega r}{c} \cos \varphi \right]. \quad (35)$$

Слагаемое, пропорциональное  $\cos \varphi$ , увеличивает кривизну траектории там, где  $\cos \varphi > 0$ , и уменьшает там, где  $\cos \varphi < 0$ . В результате орбита будет иметь вид, изображенный на рис. 11, и мы видим, что «центр» орбиты перемещается в направлении оси  $X$ -ов.

Рис. 11. Траектория иона в магнитном поле вида, изображаемого уравнением (35) ( $\mathbf{v} \perp \mathbf{H}$ )

Если учесть зависящее от радиуса  $r$  слагаемое  $B \left( \frac{\omega r}{c} \right)^2$  из (30) и ускоряющее электрическое поле циклотрона, то вид орбиты, конечно, изменится, но основное в рассматриваемом явлении — непрерывное, нарастающее с увеличивающейся скоростью иона сползание центра сохранится.

В магнитном поле вида

$$H = \frac{m_0 \omega c}{e} \left( 1 + A \frac{\omega r}{c} \cos 2\varphi \right) \quad (36)$$

существует семейство замкнутых орбит, центр которых совпадает с центром поля, но эти орбиты не стабильны, т. е. если какое-нибудь малое возмущение сместит орбиту так, что центр ее не будет более совпадать с центром поля, то центр орбиты начнет смещаться аналогично тому, как это было в случае поля, содержащего слагаемое, пропорциональное  $\cos \varphi$ . Введение электрического поля и части магнитного поля, зависящей от радиуса, опять не меняет сути явления.

Ясно, что часть магнитного поля, пропорциональная  $\cos \varphi$  и  $\cos 2\varphi$ , нарушает правильность движения иона через циклотрон, заставляет частицы достигать внешней части камеры по путям различного радиуса и с различными энергиями. При достаточно большой величине эти слагаемые так расстроят резонанс между периодом вращения иона и изменением электрического поля, что частицы никогда не достигнут больших энергий. Составляющие магнитного поля, пропорциональные  $\cos n\varphi$ , где  $n=3$  или 4, или, более обще, поля с периодом  $\frac{2\pi}{3}$ ,  $\frac{2\pi}{4}$ , дают стабильные орбиты, т. е. малое случайное возмущение орбиты не вызывает скольжения центра орбиты, а лишь заставляет его совершать малые колебания около центра камеры.

Таким образом, указанные Томасом и Шиффом поля дают стабильные, фокусированные и находящиеся в резонансе с электрическим полем орбиты.

Мы видим, что форма магнитного поля циклотрона оказывает значительное влияние на проходящий в нем ионный пучок. Еще раньше, чем вопрос этот был исследован теоретиками Бете, Розе, Томасом, Хургиним и др., экспериментаторы, в лице Лоуренса, обнаружили чрезвычайную чувствительность ионного пучка ко всякому, даже незначительному изменению магнитного поля. Уже в первых своих работах Лоуренс применил «шиммы», т. е. железные прокладки между наконечниками магнита и крышками дуантов. Эти «шиммы» изменяют вид магнитного поля в камере; применяя их, удается значительно увеличить энергию и интенсивность ионного пучка, выходящего из циклотрона. Размеры, форма и расположение этих шиммов подбираются обычно чисто экспериментально. В этой области безусловно остается сделать еще многое и для теоретика, и для экспериментатора. В частности, экспериментальное осуществление магнитных полей, указанных Шиффом и Томасом, чрезвычайно затруднительно и даже едва ли осуществимо, но, сохранив основную идею Томаса — изменение магнитного поля с азимутальным углом, — можно попытаться найти экспериментально легче осуществимые магнитные поля, дающие так же, как и в случае Томаса—Шиффа, фокусировку, резонанс и стабильность.

Для советских физиков проблемы, связанные с работой циклотрона, становятся тем более актуальными, что в настоящий момент



кроме работающего циклотрона Радиевого института АН СССР строится мощный циклотрон Физико-технического института АН СССР, и намечаются к постройке циклотроны Украинской академии наук и Физического института Академии наук СССР в Москве.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Я. Л. Хургин, ДАН СССР, **19**, 237, 1938.
  2. M. E. Rose, Phys. Rev., **53**, 392, 1938.
  3. L. I. Schiff, Phys. Rev., **54**, 1114, 1938.
  4. L. H. Thomas, Phys. Rev., **54**, 580, 1938.
  5. R. R. Wilson, Phys. Rev., **53**, 408, 1938.
  6. Bethe, Rose, Phys. Rev., **52**, 1255, 1937.
-