

АТОМНЫЕ КОНСТАНТЫ<sup>1)</sup>

Ф. Дэннингтон, Брунсвик

## ВВЕДЕНИЕ

Цель данного обзора: 1) пересмотреть важнейшие экспериментальные данные, результаты которых основаны на использовании целого ряда вспомогательных констант; 2) установить, какие из этих данных являются причиной известного расхождения между значениями атомных констант; 3) указать, какие экспериментальные исследования могли бы привести к разрешению возникших затруднений.

Заметное противоречие между значениями трех наиболее точно установленных атомных констант, а именно — заряда электрона  $e$ , удельного заряда его  $\frac{e}{m_0}$  и отношения  $\frac{h}{e}$ , — в течение ряда лет служило предметом обсуждения<sup>1-6</sup>. Некоторая ясность может быть получена, если наряду с тремя наиболее точно измеренными постоянными:  $e$  — из дифракции рентгеновских лучей,  $\frac{e}{m_0}$  — из электронных и спектроскопических данных и  $\frac{h}{e}$  из границы сплошного рентгеновского спектра — рассмотреть другие непосредственно измеренные комбинации этих констант. В последнее время другие комбинации либо не рассматривались вследствие меньшей точности их значений, либо приводились к виду  $\frac{e}{m_0}$  (если задано значение  $\frac{h}{e}$ ), либо к виду  $\frac{h}{e}$  (если принято значение  $\frac{e}{m_0}$ )<sup>7</sup>. Такое приведение запутывает проблему и затушевывает данные, являющиеся источником противоречия.

В настоящей работе пересмотрены восемь дополнительных типов измерений, обладающих достаточной точностью. Полученные разными методами цифры проанализированы в отношении основных законов, на которых они базируются.

Сравнение результатов различных экспериментов проводилось на диаграмме Бэрджа-Бонда<sup>8</sup>.

<sup>1)</sup> Rev. Mod. Phys., 11, 65, 1939. Перев. А. А. Ильиной.

Вообще говоря, из опыта получается

$$e = f(m_0, h),$$

но массу электрона можно исключить с помощью формулы Ридберга:

$$R_\infty = \frac{2\pi^2 e^4 m_0}{ch^3}.$$

Это значит, что результаты опыта можно представить в виде  $e = Ah^n$ , где  $A$  — некоторая постоянная, определяемая из опыта, а  $n$  — степень, в которой  $h$  входит в функцию  $f$ . Принимая для  $h$  некоторое приближенное значение  $h_0$ , можно подсчитать соответствующее значение  $e$ , если известна экспериментально определяемая величина  $A$ ; можно показать, что между вычисленной таким образом величиной  $e$  и степени  $n$  существует линейная зависимость. Метод Бэрджа-Бонда заключается в построении графика значений  $e_n$  в функции от  $n$ .

Наклон построенной таким образом прямой определяет величину  $h$  (нулевой наклон соответствует  $h = h_0$ , положительный наклон прямой показывает, что  $h > h_0$ ). Значение  $e$  дается ординатой при  $n = 0$ .

Много труда было затрачено на приведение в порядок системы вспомогательных постоянных, применяемых в настоящей работе. Тщательному рассмотрению подверглись коэффициенты перевода электрических единиц обеих интернациональных систем, а именно — системы нормального элемента (обозначим ее через  $v$ ) и системы серебряного вольтметра ( $a$ ), — в абсолютные единицы. Все достаточно важные данные были обработаны по способу наименьших квадратов. В свете работ, появившихся со времени первых исследований Бэрджа<sup>8а</sup>, чувствуется необходимость различать эти две системы интернациональных единиц, хотя существующее различие между ними, к счастью, очень невелико.

Все измерения, которые могут быть связаны с нормальным элементом, описываются нами в  $v$ -системе. Эталон сопротивления принадлежит одновременно обеим системам.

Автором вычислено заново число Фарадея. Наиболее точное значение химического атомного веса серебра приводит к  $F = 96\,493,7 \pm \pm 0,9$  интернациональных ( $a$ ) кулонов, хотя в работе Виналь и Бэтса<sup>9</sup> с иодным вольтметром приводится число  $96510,3 \pm 68$  интернациональных ( $a$ ) кулонов. Из этих цифр нами взято взвешенное среднее.

Отношение атомного веса, полученного химическим путем, к атомному весу, измеренному с помощью масс-спектрографа, вычислялось для множества изотопов кислорода по данным Комитета атома Интернационального союза химической промышленности<sup>10</sup>. Происхождение остальных констант указано в табл. 1. Нужно подчеркнуть, что пересчет всех экспериментальных данных, рассматриваемых в настоящей работе, производился с помощью этих вспомогательных констант; в тех случаях, когда используемые в настоящей статье постоянные были получены в других странах, принималась во внимание разница в употребляемых в той или иной стране единицах<sup>11</sup>.

Все погрешности даются в виде наименьших квадратичных вероятных ошибок, причем в окончательном результате берется всегда наибольшая из двух ошибок (внутренняя или внешняя)<sup>18</sup>.

Таблица 1

Вспомогательные константы, используемые в настоящей работе. Буквой (*B*) отмечены цифры Бэрджа. (*D*) — цифры, полученные автором. Литература дана в конце статьи

Обозначения	Наименование константы	Величина константы
<i>F</i>	Число Фарадея в международных кулонах ( <i>D</i> ) . . . . .	96 494,0 ± 1,5 <sup>1)</sup>
<i>c</i>	Скорость света в см/сек ( <i>B</i> <sup>12</sup> — <i>D</i> ) . . . . .	(2,99776 ± 0,00015) · 10 <sup>10</sup>
<i>p</i>	Коэффициент перевода единиц международной практической системы в абсолютные омы ( <i>D</i> ) . . . . .	1,000485 ± 0,000007
<i>q</i>	Коэффициент перевода международных единиц ( <i>a</i> ) в абсолютные амперы ( <i>D</i> ) . . . . .	0,999970 ± 0,000020
$\frac{r}{p}$	Коэффициент перевода международных единиц ( <i>v</i> ) в абсолютные амперы ( <i>D</i> ) . . . . .	0,999926 ± 0,000020
<i>r</i>	Коэффициент перевода международных единиц ( <i>v</i> ) в абсолютные вольты ( <i>D</i> ) . . . . .	1,00041 ± 0,000022
<i>R<sub>H</sub></i> <sup>1</sup>	Постоянная Ридберга для H <sup>1</sup> в см <sup>-1</sup> ( <i>B</i> <sup>13</sup> ) . . . . .	109 677,76 ± 0,05
<i>R<sub>0</sub></i>	Газовая постоянная в эрг/град/моль ( <i>B</i> <sup>13</sup> ) . . . . .	(8,3136 ± 0,0010) · 10 <sup>7</sup>
<i>k<sub>A</sub></i>	Отношение масс-спектрографических атомных весов к химическим ( <i>D</i> ) . . . . .	1,000275 ± 0,000020
<i>k<sub>λ</sub></i>	Отношение дифракционных длин волн к зигбановским (Бэрден <sup>14</sup> ) <sup>2)</sup>	1,00203 ± 0,00002
<i>R<sub>∞</sub></i>	Постоянная Ридберга для бесконечной массы в см <sup>-1</sup> ( <i>B</i> <sup>13</sup> ) . . . . .	109 737,42 ± 0,06
<i>h<sub>0</sub></i>	Произвольно принятое значение постоянной Планка в эрг сек . . . . .	6,610 · 10 <sup>-27</sup>

<sup>1)</sup> Эта вероятная ошибка не включает в себя ошибку вольтметра; последняя ошибка (±0,002%) была включена в фактор *q*. Величины *F* и *q* встречаются всюду в нашей работе в виде произведения. Таким образом в абсолютных единицах химической системы число Фарадея равно (*F* · *q*) · 10<sup>-1</sup> = 9649,11 ± 0,24 CGSM и физической системы (*F* · *q* · *k<sub>A</sub>*) · 10<sup>-1</sup> = 9651,76 ± 0,30 CGSM.

<sup>2)</sup> Робинсон<sup>15</sup> установил, что фактор перевода, полученный из работы Бэклена и Зодермана, нужно уменьшить в 2 · 10<sup>-4</sup> раз вследствие различия между ларсоновским исправленным значением длины волны алюминия *K<sub>α</sub>* и новым значением, найденным Хаглундом<sup>16</sup>. Подсчет показывает, од-

## КОМБИНАЦИИ КОНСТАНТ, ПОЛУЧЕННЫЕ НАИБОЛЕЕ ТОЧНЫМИ МЕТОДАМИ

## А. Заряд электрона из дифракционных измерений

Величина заряда электрона получается здесь следующим образом: длина волны характеристического рентгеновского излучения измеряется с помощью дифракционной решетки. Затем определяется брэгговский угол этих же лучей для кристалла кальцита, откуда с помощью брэгговского уравнения (исправленного на преломление в кальците) находится постоянная его решетки. Заряд электрона вычисляется из констант кристаллического кальцита (постоянная решетки, плотность, молекулярный вес), числа Фарадея и скорости света.

В основе этих расчетов лежит допущение о геометрическом совершенстве кристалла кальцита<sup>1)</sup>.

На основе пересчета всех упомянутых факторов, автор получил следующую величину<sup>2)</sup>:

$$e_0 = (4,8025 \pm 0,0004) \cdot 10^{-10} \text{ CGSE.}$$

Это значение нанесено на диаграмме Бэрджа-Бонда (рис. 1) в виде точки *I* для  $n=0$ . Стрелки около нее показывают вероятную ошибку.

## Б. Удельный заряд электрона

В одном из предыдущих сообщений<sup>20</sup> автор дал обзор различных методов определения  $\frac{e}{m_0}$  и их результатов; при этом было указано на имеющееся расхождение между значениями  $\frac{e}{m_0}$ , полученными из опытов со свободными электронами, и  $\frac{e}{m_0}$ , полученными из спектроскопических данных. Позже в печати появились три новые работы по определению  $\frac{e^{21-23}}{m_0}$  и опубликованы окончательные результаты еще одного исследования на эту же тему<sup>24</sup>. С появлением этих работ, как уже было указано Бэрджем<sup>25</sup>, расхождение между спектроскопическими и электронными данными исчезает. Так, применив более объ-

---

нако, что Бэрджен использовал ларсоновскую цифру, так что если принять данные Хаглунда, то фактор перевода нужно уменьшить всего лишь в  $5 \cdot 10^{-5}$  раз для результатов Бэклина и Зодермана. Среднее из них и цифр Бэрдена приводит к незначительной разнице в среднем значении фактора перевода. Появилась работа Тирена<sup>17</sup> с абсолютными длинами волн  $\lambda_1 K_{\alpha_1,2}$ . Так как его результаты вместе с цифрами Хаглунда дают величину  $k_1 = 1,00202$ , не указано заметных изменений в  $k_1$ .

1) Новая работа Дю-Монда и Больмана<sup>19</sup> подтверждает, что это предположение законно.

2) Здесь пересчитаны следующие вспомогательные произвольные постоянные: молекулярный вес кальцита  $100,090 \pm 0,005$  г; плотность при  $20^\circ \text{C}$   $2,71025 \pm 0,00006$  г/см<sup>3</sup>; период решетки при  $20^\circ \text{C}$   $(3,03566 \pm 0,00002) \times 10^{-8}$  см; фактор единичного объема кристалла  $1,09595 \pm 0,00002$ .

активный метод анализа Фурье в рассмотрении тонкой структуры, Хаустон<sup>23</sup> получил более высокое значение  $\frac{e}{m_0}$  и указал, что прежние методы могли вести к ошибкам. Бэрдэн<sup>22</sup>, измеряя показатель

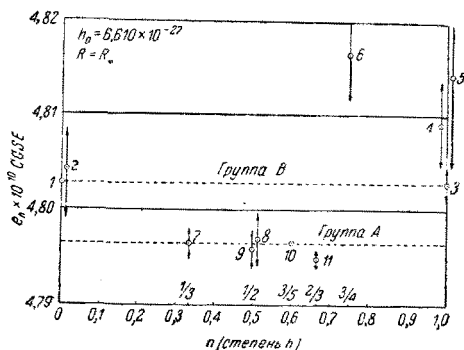


Рис. 1. Диаграмма Бэрджа-Бонда (зависимость  $e_n = Ah^{n_0}$ ) для всех известных наиболее точных, экспериментальных данных. Нанесенные на график точки рассчитаны в предположении точности длин волн, определенных с помощью дифракционной решетки. Значение  $h_0$  принято равным  $h_0 = 6,610 \cdot 10^{-27}$  эрг сек. Вероятная ошибка указана для точки 10 кружком, а в остальных случаях — стрелками. Цифровые данные см. в табл. 6.

В цифрах Шоу<sup>24</sup> заряд пересчитан в абсолютные электростатические единицы.

Взвешенное среднее всех десяти определений даст:

$$\frac{e}{m_0} = (1,7591 \pm 0,0002) \cdot 10^7 \text{ CGSM.}$$

Здесь указана внешняя вероятная ошибка. Тот факт, что  $\frac{R_e}{R_i}$  (отношение внешней вероятной ошибки к внутренней<sup>18</sup>) равно 1,39, свидетельствует о том, насколько хорошо совпадают отдельные данные<sup>2)</sup>.

Подставляя значение  $\frac{e}{m_0}$  в формулу Ридберга и беря  $h_0 = 6,610 \cdot 10^{-27}$  эрг сек, получаем:

$$\frac{e_3}{5} = (4,7963 \pm 0,0002) \cdot 10^{-10} \text{ CGSE.}$$

1) В пересчете всех данных о тонкой структуре были использованы данные Бэйнбриджа<sup>27</sup> для атомных весов в физической системе:  $H^1 = 1,00813$ ,  $H^2 = 2,01473$ ,  $He^4 = 4,00389$ . Абсолютное значение числа Фарадея в физической системе дано через  $F \cdot q \cdot k_A$  или  $9651,76 \pm 0,30$  CGSM.

2)  $\frac{R_e}{R_i}$  должно равняться единице, если нет систематических ошибок и статистических флуктуаций.

преломления рентгеновских лучей в алмазе, получил также более высокое значение  $\frac{e}{m_0}$ , вполне согласующееся с цифрами, основанными на работах со свободными электронами.

Результаты этих исследований сопоставлены в табл. 2. Цифры, опубликованные авторами, пересчитаны с помощью вспомогательных констант табл. 1. Данные Вильямса<sup>21</sup> заменены новыми данными Джибса и Вильямса, полученными ими при продолжении той же работы. В данных Шанэ и Следдинга<sup>26</sup> длины волн приведены нами к вакууму<sup>1)</sup>.

Эта цифра нанесена на рис. 1 в виде точки 10 для  $n = \frac{3}{5}$ . Размеры кружка указывают вероятную ошибку.

Таблица 2

Сводка определений  $\frac{e}{m_0}$ . Первые пять цифр получены для связанного электрона (из спектроскопических данных), остальные пять — для свободного электрона. Резкого расхождения между обеими группами не наблюдается

Экспериментатор	Дата	Метод	$\frac{e}{m_0} \cdot 10^{-7}$ CGSM	Вероятная ошибка $r \cdot 10^4$	Вес $= \frac{1}{r^2}$
Хаустон <sup>28 1)</sup> . .	1927	Тонкая структура H <sup>1</sup> —He <sup>4</sup> . . . . .	1,7607	10	1,69
Кинслер и Хаустон <sup>30</sup>	1934	Зееман-эффект . . . .	1,7571	7	3,45
Шанэ и Спеддинг <sup>26</sup>	1935	Тонкая структура H <sup>1</sup> —H <sup>2</sup> . . . . .	1,7582	4	10,57
Вильямс <sup>21</sup> . . . . .	1938	То же . . . . .	1,7580	4	10,57
Хаустон <sup>28</sup> . . . . .	1938	" " . . . . .	1,7593	5	6,76
Перри и Чевфи <sup>31</sup>	1930	Линейное ускорение	1,7610	10	1,69
Кирхнер <sup>32</sup> . . . . .	1932	То же . . . . .	1,7590	9	2,09
Дэннингтон <sup>20</sup> . . . .	1937	Отклонение в магнитном поле . . . .	1,7597	4	10,57
Шоу <sup>24</sup> . . . . .	1938	Скращенные поля . . .	1,7581	13	1,00
Бэрден <sup>22</sup> . . . . .	1938	Преломление рентгеновских лучей . .	1,7600	3	18,79
Взвешенное среднее: 1,7591 ± 0,0002					

В.  $h/e$  из границы непрерывного спектра рентгеновских лучей

Опыт заключается в определении минимального напряжения, при котором электроны еще могут возбуждать рентгеновские лучи, проходящие через спектрометр. Последний пропускает некоторую линию, длина волны которой определяется дифракционной решеткой. Измерив напряжение  $V$  и длину волны  $\lambda$ , можно получить отношение  $h/e$  из уравнения:

$$\frac{hc}{\lambda} = Ve.$$

Последняя и, повидимому, наиболее точная работа в этой области проделана Дю-Мондом и Больманом<sup>33</sup>. На построенных ими изохроматах (т. е. кривых интенсивность рентгеновских лучей — электронный

1) Исправлено Бэрджем<sup>29</sup>, однако, вероятная ошибка взята по Хаустону.

потенциал) авторы заметили неизвестный до сих пор изгиб, появляющийся при нескольких вольтах (по их оценке около 18) выше квантовой границы. В то же время известно существование другого излома приблизительно на 100 V выше этой же границы. Этот максимум может влиять на точность определения коротковолновой границы. Росс и Киркпатрик<sup>34</sup> показали, что при недостаточной разрешающей силе применяемого спектрометра изохромата должна превратиться в прямую, и полученная величина границы должна быть ниже действительной. Таким образом, при оценке этих работ чрезвычайно важно иметь сведения о разрешающей силе примененных приборов.

Таблица 3

Определение  $\frac{h}{e}$  из границы непрерывного спектра рентгеновских лучей

Экспериментаторы	Дата	$\frac{h}{e} \cdot 10^{17}$ CGSE	Оценка вероятной ошибки, указанная авторами	Вероятная ошибка, взятая при вычислении среднего
Росс и Киркпатрик <sup>34</sup> . . . . .	1934	1,3754	0,0001	0,0005
Шайтбергер <sup>35</sup> . . . . .	1935	1,3773	0,0004	0,0007
Дю-Монд и Больман <sup>38</sup> . . . . .	1937	1,3765	0,0003	0,0003
Взвешенное среднее: $(1,3763 \pm 0,0003) \cdot 10^{-17}$ CGSE				

Данные трех работ, упомянутых здесь, сопоставлены в табл. 3. Следующий факт может вызвать некоторое недоумение: Шайтбергер<sup>35</sup> пользовался спектрометром с одним кристаллом; разрешающая сила этого прибора меньше, чем у приборов, примененных в двух других работах. Согласно приведенным выше соображениям мы должны были бы ожидать более низких значений, полученных этим исследователем. Однако, против ожидания цифры Шайтбергера превышают остальные.

В этом направлении необходима дальнейшая экспериментальная и теоретическая работа<sup>1)</sup>, пока не будет достигнута достаточная точность результатов; однако вряд ли можно ожидать здесь больших изменений. Вероятную ошибку взвешенного среднего, приведенную в табл. 3, мы несколько увеличиваем. Итак, работы, рассмотренные в настоящем параграфе, дают для  $\frac{h}{e}$  следующее значение<sup>2)</sup>:

$$\frac{h}{e} = (1,3763 \pm 0,0004) \cdot 10^{17} \text{ CGSE.}$$

<sup>1)</sup> Бруннер<sup>36</sup> объясняет излом, ближайший к квантовой границе, резонансным эффектом внеядерных электронов.

<sup>2)</sup> Заметим, что невзвешенное среднее дает то же самое, а именно:  
 $\frac{h}{e} = 1,3764 \cdot 10^{-17}$  CGSE.

Подставляя сюда значение  $h_0$  из табл. 1, получаем:

$$e_1 = (4,8026 \pm 0,0014) \cdot 10^{-10} \text{CGSE.}$$

Эта цифра изображается на рис. 1 точкой 3 для  $n=1$ .

#### ДРУГИЕ КОМБИНАЦИИ КОНСТАНТ

В восьми типах экспериментов, обсуждаемых здесь, первые четыре связаны с массой электрона, остальные не зависят от нее.

А. Отношение  $\left(\frac{h}{e}\right)\left(\frac{e}{m_0}\right)^{\frac{1}{2}}$  из измерений дифракции электронов (фон-Фризен<sup>87)</sup>

В этом опыте электроны ускорялись электрическим полем до известного потенциала, а затем дифрагировались поверхностью протравленного кристалла галена и углы отклонения измерялись для нескольких порядков дифракции. Таким образом, из опыта могла быть вычислена длина волны де-Брогля, выраженная через постоянную решетки галена. Последняя была измерена в этой же лаборатории Цейпелем на том же образце кристалла, обычным рентгеновским методом.

При обработке результатов этого эксперимента фон-Фризен принимал значение  $\frac{e}{m_0}$  и пользовался формулой Ридберга, чтобы получить  $e$  и  $h$ . Без этих операций данные его опыта дают непосредственно величину  $\left(\frac{h}{e}\right)\left(\frac{e}{m_0}\right)^{\frac{1}{2}}$ , которая после пересчета имеет следующее значение:

$$\left(\frac{h}{e}\right)\left(\frac{e}{m_0}\right)^{\frac{1}{2}} = (1,00084 \pm 0,00058) \cdot 10^{-8} \text{CGSE.}$$

Вероятная ошибка получена на основании оценки экспериментальных погрешностей, указанных Фризенем, и погрешностей вспомогательных констант, приведенных в табл. 1. Наибольшая погрешность связана с измерением углов дифракции.

Из формулы Ридберга и  $h_0$  получаем для заряда электрона:

$$\frac{e_1}{3} = (4,7964 \pm 0,0019) \cdot 10^{-10} \text{CGSE.}$$

Это значение нанесено на рис. 1 в виде точки 7 для  $n=\frac{1}{3}$ . При сравнении этого эксперимента с предыдущими надо иметь в виду существенное различие между ними: последнее вычисление основано на использовании некоторой комбинации констант (например, величины  $\frac{e}{m_0}$ , принимаемой Фризенем). Первая группа опытов, обсужденная в п. А предыдущего раздела, дает на диаграмме точки, которые однозначно представляют результаты измерения. Это имеет место, когда относительное положение точки (по отношению к другим точкам) не зависит от принятых значений каких-либо сочетаний констант, употребляемых



при расчетах<sup>1)</sup>. Использование формулы Ридберга характеризует, конечно, иной метод рассмотрения. Следующее графическое построение позволит уяснить сказанное: на рис. 1 прямая линия, проведенная через точку 7, представляющую результаты Фризена, и точку 10 для  $\frac{e}{m_0}$ , должна дать значения  $e$  и  $\frac{h}{e}$  при пересечении с правой и левой шкалой (т. е. для  $n=0$  и  $n=1$ ). Если не принимать во внимание поправок автора, эти значения должны совпасть с цифрами Фризена. Их зависимость от  $\frac{e}{m_0}$  очевидна.

В.  $\frac{h}{m_0}$  из измерений дифракции электронов  
(Гнан<sup>38</sup>, Мейбон и Рупп<sup>39</sup>)

Эта работа заключается также в измерении длины волны де-Брогя для электронов, однако эти измерения отличаются от предыдущих в двух отношениях. Во-первых, вместо измерения электронных потенциалов в этих опытах измерялись скорости электронов по методу Кирхнера<sup>32</sup>, во-вторых, в качестве дифрагирующего объекта вместо кристаллов были использованы пленки.

Гнан определил константу решетки висмутовой пленки прямым сравнением с NaCl, константа которого известна из работ с рентгеновскими лучами. Константа решетки пленок золота, использованных Мейбон и Рупп, авторами не определялась. Ими было принято<sup>2)</sup>, что постоянная решетки не отличается от константы для листового золота, для которого эта величина известна из рентгеновских измерений.

Опыты этих исследователей дают следующие значения:

$$\text{Гнан: } \frac{h}{m_0} = 7,258 \pm 0,022 \text{ эрг сек/г.}$$

$$\text{Мейбон и Рупп: } \frac{h}{m_0} = 7,289 \pm 0,022 \text{ эрг сек/г.}$$

Среднее из обоих значений:

$$\frac{h}{m_0} = 7,274 \pm 0,016 \text{ эрг сек/г.}$$

Комбинируя полученную цифру с  $h_0$  и пользуясь формулой Ридберга, получаем:

$$e_{1/2} = (4,7972 \pm 0,0026) \cdot 10^{-10} \text{ CGSE.}$$

Это значение нанесено на рис. 1 в виде точки 8 для  $n=1/2$ .

Наибольшая внутренняя ошибка на 50% больше, чем внешняя вероятная ошибка. Это, может быть, указывает на то, что авторы были достаточно осторожны в оценке неточностей эксперимента.

1) Использование некоторого определенного значения  $h_0$  для построения диаграммы Бэрджа-Бонда не противоречит высказанному выше соображению, так как относительное расположение точек одно и то же при любых значениях  $h_0$ . Изменение  $h_0$  ведет к изменению вертикальных размеров диаграммы, но прямые линии остаются прямыми.

2) Это предположение вполне законно, так как постоянная решетки золота одинакова для кристаллов любого размера<sup>40</sup>. Для большинства изученных материалов это не имеет места.

В.  $\frac{h}{m_0 c}$  из Комpton-э ф ф е к т а

Опыт заключается в определении изменения длины волны  $\Delta\lambda$  квантов рентгеновских лучей, рассеянных под углом  $\theta$ , при столкновении с атомными электронами газа или твердого тела. Если принять в расчет связь электрона с ядром, то к обычному уравнению Комpton-э ф ф е к т а  $\Delta\lambda = \left(\frac{h}{m_0 c}\right)(1 - \cos \theta)$  нужно добавить отрицательный поправочный член, пропорциональный  $\lambda^2$ . Это было обосновано теоретически Россом и Киркпатриком<sup>41</sup> и Блохом<sup>42</sup> и подтверждено экспериментами Росса и Киркпатрика<sup>43</sup>. Последние произвели ряд измерений, вполне заслуживающих упоминания в настоящем обсуждении.  $\Delta\lambda$  определялось ими для трех длин волн. В качестве рассеивающего вещества применялись уголь и бериллий. Экстраполяция полученных ими цифр к нулевой длине волны (для которой поправка равна нулю) дает:

$$\frac{h}{m_0} = 7,264 \pm 0,012 \text{ эрг сек/г.}$$

Это значение было нами пересчитано к длине волны, определенной с помощью дифракционной решетки.

Пользуясь формулой Ридберга и значением  $h_0$ , получим:

$$e_{1/2} = (4,7956 \pm 0,0020) \cdot 10^{-10} \text{ CGSE.}$$

Эта цифра нанесена на рис. 1 как точка 9 для  $n = 1/2$ .

Г.  $\left(\frac{e}{m_0}\right)\left(\frac{e}{h}\right)$  из ионизации рентгеновскими лучами

Электроны вырывались из тонкой пленки или пластинки под действием рентгеновских лучей известной длины волны. Значения  $H\rho$  (магнитное поле  $\times$  радиус кривизны) измерялись для каждой отдельной группы выброшенных электронов. Энергия электрона должна равняться энергии падающего фотона минус энергия выхода. Последнюю можно получить, измеряя предельную длину волны поглощаемых лучей для уровня, с которого выбрасываются электроны. В этом уравнении имеется малая, но все же заметная ошибка, связанная с тем, что энергия вырванного электрона получается не вполне точно из частоты, соответствующей границе поглощения. Последняя пропорциональна энергии, требуемой для переноса электрона с его начального уровня на первый возможный свободный уровень<sup>44</sup>. Отсюда приблизительно энергия ионизации соседнего элемента периодической таблицы должна быть прибавлена к энергии, соответствующей частоте границы серии.

Выдающиеся работы Робинсона и его сотрудников<sup>45-48</sup> в этой области ведутся уже более 15 лет. Чтобы избежать больших погрешностей, связанных с определением предельной длины волны при поглощении рентгеновских лучей, и поправок, нужных для этого, Робинзон провел измерения с тремя различными сортами рентгеновских лучей и использовал различия в энергиях.

Разность энергий фотоэлектронов, вырванных жесткими или мягкими лучами, должна равняться разности энергий фотонов этих двух типов лучей. Из трех пар разностей, полученных для  $Mo K\alpha - Cu K\alpha_1$ ,  $Mo K\alpha - Cr K\alpha_1$  и  $Cu K\alpha_1 - Cr K\alpha_1$ , находились значения каждого начального уровня для каждого элемента. Измерения  $h\nu$  производились с электронами различных уровней для трех элементов — Au, Pt и Ag.

Вычисления, основанные на огромном количестве данных, после усреднения дают:

$$\left(\frac{e}{m_0}\right)\left(\frac{e}{h}\right) = (3,8220 \pm 0,0029) \cdot 10^{34} \text{ CGSE.}$$

Здесь, как и раньше, отношение длин волн, определенных с помощью решетки, к длинам волн зигбановской шкалы принято за  $1,00203 \pm 0,00002$ . Поправки на геометрию магнитного поля спектрографа<sup>49</sup> были излишни.

Указанная выше вероятная ошибка попрежнему была взята как предел ошибок, даваемых автором эксперимента (вероятная ошибка опытов Робинсона имела порядок одной десятой от принятого нами значения). Это было сделано с целью исключить возможную ошибку, связанную с неточным определением положения коротковолнового края линии. Измерения должны производиться для этого края линии, так как он обязан своим происхождением электронам, не испытавшим потерь энергии при выходе из пленки.

Пользуясь значением  $h_0$  из табл. 1 и применяя формулу Ридберга, получаем:

$$e_{2/3} = (4,7953) \pm 0,0006) \cdot 10^{-10} \text{ CGSE.}$$

Точка *II* для  $n = 2/3$  на рис. 1 соответствует этому значению.

Измерения энергии фотоэлектронов были произведены также Кречмером<sup>50</sup>. Он измерял не радиус кривизны путей наиболее быстрых электронов, а скорее радиус кривизны, соответствующий электронам с наиболее вероятным количеством энергии (что соответствовало пику линии). Из этого можно заключить, что его измерения нуждались в энергетических поправках. Альварец<sup>51</sup>, основываясь на измерениях толщины одной из пленок Кречмера<sup>1</sup>), указал возможную поправку, составляющую от  $+0,23$  до  $+0,47\%$ .

Поправка на ширину щели составляла  $+0,18\%$  от величины энергии<sup>2</sup>).

Суммарная поправка равна, таким образом,  $0,35 + 0,18 = +0,53\%$ . Величина  $\left(\frac{e}{m_0}\right)\left(\frac{e}{h}\right)$ , полученная из этих опытов, также перечислена на длину волны, определенную дифракционной решеткой. Соответствующее  $e_n$  имеет вид:  $e_{2/3} = 4,7922 \cdot 10^{-10} \text{ CGSE.}$

1) Кречмер сообщил автору, что при проверке других его пленок они оказались немного тоньше.

2) Альварец, очевидно, берет радиус поправки для энергетических ошибок.

Можно заметить, что это значение на  $1/1500$  ниже цифры, данной Робинзоном. Однако если в результаты Кречмера ввести только поправку на ширину щели, то величина  $e_{2/3}$  уже достаточно хорошо приближается к цифре Робинсона (превышая ее только на  $\sim 1/4400$  часть). Вследствие неопределенности поправок энергии в работе Кречмера его результаты на диаграмму не нанесены.

Д. е из опыта с масляными каплями

Как известно, определение удельного заряда в этом методе основывается на измерениях скоростей падения масляных капель в поле тяжести в отсутствии и присутствии электрического поля. Плотность капли обычно считается той же, что и для макроскопических количеств. Допускается также, что в пределе закон Стокса остается верным, так как произведение давления на радиус капли приближается к бесконечности.

Наибольшая возможная ошибка результата связана с погрешностью в определении вязкости воздуха. Сводка результатов новейших ис-

Таблица 4

Новейшие определения вязкости воздуха. Для сравнения напомним гаррингтоновское значение:  $(1822,6 \pm 1,3) \cdot 10^{-7}$  CGS

Экспериментаторы	Метод	Дата	$\eta_{230} \cdot 10^7$	Вероятная ошибка	Вес
Кельстром <sup>53</sup> . . . . .	Вращающийся цилиндр	1937	1834,9	2,7	2
Хаустон <sup>54</sup> . . . . .	То же . . . . .	1937	1829,2	4,5	1
Бонд и Ригден <sup>55</sup> . . . . .	Капиллярность . . . . .	1938	1830,3	0,7	1
Банерджи и Паттанайк <sup>56</sup>	То же . . . . .	1938	1833,3	2,1	1
Взвешенное среднее: $1832,5 \pm 1,5$ CGS					

следований в этой области дана в табл. 4<sup>1)</sup>. Среднее значение вязкости воздуха почти на полпроцента больше гаррингтоновской цифры<sup>57</sup>, которой пользовался Милликен<sup>58</sup>. Вычисленная вероятная ошибка взвешенного среднего составляла  $\pm 0,9$ . Если учесть основные погрешности опыта, ее следует увеличить до  $\pm 1,5$ .

Трудно объяснить это расхождение между старыми и новыми определениями вязкости воздуха. Ни одна из прежних цифр, ис-

1) После составления табл. 4 Маджумдар и Ваджидар<sup>52</sup> опубликовали новое определение; они нашли

$$\eta_{230} = 1834,38 \pm 0,35 \cdot 10^7 \text{ CGS.}$$

пользованных Миллиkenом, не приближается к новым. Несмотря на это, последние «высокие» значения, приведенные в табл. 4, были взяты нами для пересчета. Это являлось до некоторой степени произвольным, хотя лучшее оборудование и новейшая техника этих экспериментов могут в этом случае оправдать наш выбор.

Итак, классический опыт Миллиkenа<sup>59</sup>, в сопоставлении с более высоким значением вязкости воздуха и принятыми нами значениями вспомогательных констант, дает

$$e_0 = (4,8059 \pm 0,0052) \cdot 10^{-10} \text{ CGSE.}$$

Совсем недавно Бэклин и Флемберг<sup>60</sup> опубликовали в предварительном сообщении данные подобного же опыта. Их эксперимент, проведенный при атмосферном давлении, из 260 наблюдений скорости на девяти каплях дает:

$$e_0 = (4,7941 \pm 0,0089) \cdot 10^{-10} \text{ CGSE.}$$

(Вычисления сделаны так же, как и раньше, с использованием данных табл. 4 и вспомогательных констант.)

Ишида, Фукушима и Суэцуга<sup>61</sup> сообщили данные 1000 наблюдений скоростей для 31 капли при атмосферном давлении. Их цифры при том же подходе дают:

$$e_0 = (4,8453 \pm 0,0043) \cdot 10^{-10} \text{ CGSE,}$$

что превышает на  $\sim 0,9\%$  две предыдущие цифры и значения  $e$ , полученного из опытов с дифракционной решеткой. Работа этих авторов сделана, по видимому, достаточно точно. Она может считаться ценной дополнительной работой<sup>62</sup>, так как измерения производились на несферических каплях. Однако, в личном сообщении Ишида указал, что в его работе могла быть некоторая погрешность в определении вольтажа и что это в дальнейшем будет исправлено. Учитывая все сказанное, мы взяли среднее квадратичное из данных Миллиkenа и Бэклина и получили<sup>1)</sup>:

$$e_0 = (4,8036 \pm 0,0048) \cdot 10^{-10} \text{ CGSE.}$$

На рис. 1 этому значению соответствует точка 2 для  $n = 0$ .

Е.  $\frac{h}{e}$  из потенциалов ионизации и возбуждения

Лауренс<sup>63</sup> измерял потенциалы ионизации ртути, направляя электроны в ионизационную камеру и определяя минимальное ускоряющее напряжение, при котором возникает ионизация. Магнитный фильтр скоростей пропускал электроны, мало отличающиеся по энергии. Метод разности потенциалов, примененный для измерения электронных потенциалов, позволял избежать ошибок, связанных с контакт-

1) Чтобы получить это среднее и вероятную ошибку, необходимо, перед тем как вычислять вязкость, усреднить измерения с масляными каплями.

ными разностями потенциалов, по крайней мере в первом приближении. Для ионизационного потенциала найдено было значение  $10,40 \pm 0,02$  инт. V. Если мы подставим это значение в уравнение фотоэффекта, вместе с соответствующим значением спектроскопического терма ( $84178,5 \text{ см}^{-1}$ ) и коэффициентом  $r$  (из табл. 1), то получим:

$$\frac{h}{e} = (1,3753 \pm 0,0027) \cdot 10^{-17} \text{ эрг сек/CGSE.}$$

Ван Атта<sup>64</sup> измерил потенциалы возбуждения нескольких линий гелия, неона и аргона. Электроны, рассеянные в прямом направлении в камере столкновений, анализировались электростатическим фильтром скоростей. В большей части экспериментов энергия электронов, входящих в камеру, имела значение, во много раз превышавшее необходимое для ионизации. Потери энергии находились в долях разности потенциалов, отклонявших электроны, возбуждающие данную линию. Из каждого измеренного потенциала возбуждения (переведенного в абсолютные вольты) вместе с волновым числом соответствующего перехода можно было вычислить величину  $\frac{h}{e}$ . Взвешенное среднее, вычисленное из пяти идентичных переходов дает:

$$\frac{h}{e} = (1,3753 \pm 0,0025) \cdot 10^{-17} \text{ эрг сек/CGSE.}$$

В расчетах были использованы данные Ван Атта относительно погрешностей в определении напряжения<sup>1)</sup>. Была взята внутренняя вероятная ошибка  $\pm 0,0017$ , так как она превышала внешнюю вероятную ошибку. Вследствие наличия систематических ошибок (связанных, например, с поверхностными зарядами на отклоняющих пластинках<sup>65</sup> и с тем, что центральный пучок электронов имел отрицательный потенциал, составлявший  $\sim 2,25^0/0$  отклоняющего потенциала) вероятная ошибка была увеличена до  $\pm 0,0025$ .

Примерно год спустя Виддингтон<sup>66</sup> и его сотрудники измерили потенциалы возбуждения тех же газов. Существенным отличием их установки являлось применение  $180^\circ$ -магнитного селектора скоростей. Электронный спектр получался на сенсibilизированной маслом фотопластинке, причем электроны с полной энергией и электроны, потерявшие какие-то дискретные количества энергии, вызывали появление отдельных линий. Остроумный метод давал возможность избежать необходимость предварительного определения магнитного поля и измерений радиусов кривизны. Этот метод состоял в том, что электроны в отсутствие газа замедлялись в ионизационной камере известной разностью потенциалов, так чтобы это давало калибровочную серию линий на пластинке. Разность напряжений для электронов с полной энергией и электронов с более низкими энергиями измерялась интерполированием между соседними калибрационными линиями.

1) Не опубликовано никаких данных относительно ошибок для переходов  $\text{He } 1S_0 - 3P$  и  $\text{Ne } 1S_0 - 2P_8$ . Сравнив эти ошибки с другими и изучив кривые тока, можно принять их равными  $\pm 0,06$  и  $\pm 0,07$ .

Новейшие данные принадлежат Виддингтону и Вудруфу<sup>67</sup>. Полученные ими шесть линий<sup>1)</sup>, точность которых исключительно высока и спектроскопическая классификация вполне надежна, дают взвешенное среднее

$$\frac{h}{e} = (1,3737 \pm 0,0018) \cdot 10^{-17} \text{ эрг сек} / \text{CGSE}.$$

Здесь, опять-таки, внутренняя вероятная ошибка ( $\pm 0,0010$ ) вдвое больше внешней. Эта вероятная ошибка увеличена до  $\pm 0,0018$  вследствие возможных погрешностей, связанных с поверхностными зарядами промасленной пластинки. Виддингтон и Вудруф установили, что относительно возникновения заряда на пленке нет никаких данных, однако, они не упоминают, что ими было предпринято в этом направлении. Вероятно, что появление равновесного заряда происходит быстро, так что за время экспозиции возможны лишь небольшие изменения. Следовало бы, однако, поставить эксперимент, для выяснения существования этой ошибки<sup>2)</sup>.

Взвешенное среднее трех значений из работ Лауренса, Ван Атта и Виддингтона и Вудруфа дает:

$$\frac{h}{e} = (1,3745 \pm 0,0013) \cdot 10^{-17} \text{ эрг сек} / \text{CGSE}.$$

Здесь, как и раньше, внутренняя вероятная ошибка вдвое больше внешней. Подставляя сюда  $h_0$ , получаем:

$$e_1 = (4,8090 \pm 0,0045) \cdot 10^{-10} \text{CGSE}.$$

На рис. 1 это значение представлено точкой 4 для  $n = 1$ .

#### Ж. Постоянная Стефана-Больцмана $\sigma$

Эта постоянная получается из измерений полного излучения, исходящего от  $1 \text{ см}^2$  тела, нагретого до определенной температуры, к приемнику известной температуры. Вследствие многочисленных экспериментальных трудностей получить точные результаты почти невозможно. Несмотря на погрешности отдельных экспериментов, их многочисленность дает возможность вывести достаточно хорошее среднее.

Ладенбург<sup>68</sup> вычислил значение  $\sigma$  из результатов семи исследований, отобранных им из двадцати четырех. При этом отборе в качестве критерия были взяты следующие условия: 1) применение излучателей и приемников, достаточно близких по своим свойствам к абсолютно черному телу, и 2) наличие поправок на поглощение радиации водяными парами и  $\text{CO}_2$  в воздухе. Позднее определение  $\sigma$

1) Эти переходы следующие:

He  $1S_0 - 2^1P$  и  $1S_0 - 3^1P$ , Ne  $1S_0 - 1s_2$ , A  $1S_0 - 2p_{10}$  и  $1S_0 - 3s_1'$ .

2) Можно заметить, что хотя действие поверхностных зарядов, вероятно, должно было бы сдвинуть линию внутрь (по направлению к входной щели), ошибка в величине  $\frac{h}{e}$  должна быть положительной или отрицательной в зависимости от относительной плотности линий, связанных с данным измерением.

было повторено Мюллером<sup>69</sup> с большей тщательностью. Новые результаты Хоара<sup>70</sup> Ладенбургом не рассматривались<sup>1)</sup>. Новая сводка ре-

Таблица 5  
Определение константы Стефана-Больцмана  $\sigma$

Экспериментаторы	Год	$\sigma$	Точность в %	Вес
Герлах . . . . .	1916	5,80	$\pm 1$	1
Кобленц . . . . .	1917	5,73	$\pm 1$	1
Гофман . . . . .	1923	5,764	$\pm 1$	1
Кусман . . . . .	1924	5,795	$\pm 1$	1
Менденхолл . . . . .	1929	5,79	$\pm 1$	1
Мюллер . . . . .	1933	5,774	$\pm 1/2$	2
Взвешенное среднее: (5,775 $\pm$ 0,022) $\cdot 10^{-5}$ эрг $см^{-2} \cdot сек^{-1} град^{-4}$				

зультатов по определению  $\sigma$  дана в табл. 5. Воспользовавшись формулой Планка, получаем:

$$\frac{e}{h^{3/4}} = (2,0778 \pm 0,0020) \cdot 10^{10} \text{CGSE.}$$

Подстановка  $h_0$  дает:

$$e_{3/4} = (4,8168 \pm 0,0046) \cdot 10^{-10} \text{CGSE.}$$

Это значение представлено на рис. 1 в виде точки *б* для  $n = 3/4$ .

### 3. Постоянная излучения $c_2$

Эта постоянная встречается в законе смещения Вина. За последние пятнадцать лет нельзя назвать новых работ по определению  $c_2$ , так что приходится воспользоваться цифрой Бэрджа<sup>72</sup>, а именно

$$c_2 = 1,432 \pm 0,003 \text{ см град.}$$

В комбинации с законом излучения Планка мы получаем:

$$\frac{h}{e} = (1,3730 \pm 0,0029) \cdot 10^{-17} \text{CGSE,}$$

или, подставляя  $h_0$ ,

$$e_1 = (4,8145 \pm 0,0101) \cdot 10^{-10} \text{CGSE.}$$

Это значение<sup>2)</sup> нанесено на рис. 1 в виде точки *5* для  $n = 1$ .

1) Результаты Хоара<sup>71</sup> нельзя использовать, так как абсорбция в воздухе им не учитывалась.

2) После окончания настоящей статьи автор в разговоре с Вензелем узнал о работе Вензеля и Резера по определению константы радиации  $c_2$ , частично уже опубликованной<sup>73</sup>. Метод заключался в определении отноше-



## СВОДКА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

Результаты всех семнадцати типов экспериментов, которые мы рассмотрели выше, сведены в табл. 6. Найденные из опыта экспериментальные значения определяемой величины обозначены через  $A$ . Эти значения  $A$  могут зависеть от одной или нескольких из первых десяти констант табл. 1. Они подсчитаны в предположении правильности длин волн, определенных дифракционным путем. Значения  $e_n$ , изображенные точками на диаграмме Бэрджа-Бонда, помещены в последнем столбце табл. 6. Они получены из значений  $A$  с помощью выражений, приведенных в предпоследнем столбце. Две добавочные постоянные, использованные для этих расчетов, даны в конце табл. 1.

## АНАЛИЗ И ДИСКУССИЯ

Анализ полученных данных будет проведен двумя способами: 1) рассмотрением диаграммы Бэрджа-Бонда и 2) применением метода наименьших квадратов.

## А. Анализ диаграммы Бэрджа-Бонда

1. *Анализ причин расхождения в предположении точности определения длин волн из дифракционных измерений.* Рассматривая рис. 1, можно заметить не только хорошо известное несоответствие между значениями  $e$ ,  $\frac{h}{e}$  и  $\frac{e}{m_0}$  (точки 1, 3 и 10), но также особую и, может быть, имеющую определенное значение группировку большей половины точек (7 точек из 11) в центральной части рисунка. Точки этой группы (группа  $A$ ) лежат заметно ниже других

ния излучаемой энергии (с помощью оптического пирометра) для данной длины волны от двух тел разных температур. Вензель и Резер определили семь таких отношений; восьмое было определено Файрчайльдом, Гувером и Петерсом. Из каждого отношения определялось  $c_2$ . Взвешенное среднее для этой величины с пределами погрешности, данными авторами, получается в виде  $c_2 = 1,4361 \pm 0,0010$ . Эта цифра на  $\sim 0,30\%$  выше прежних цифр Бэрджа<sup>73</sup> и поэтому дает соответственно повышенное значение  $h/e$ , а именно:  $h/e = (1,3769 \pm 0,0010) \cdot 10^{-17}$  CGSE. Это соответствует  $e_1 = (4,8004 \pm 0,0034) \cdot 10^{-10}$  CGSE на бэрдж-бондовской диаграмме. Обращаясь к рис. 1, можно видеть, что эта точка должна была бы лежать примерно посередине между двумя пунктирными линиями при значении  $n = 1$  и иметь вероятную ошибку, практически почти равную половине расстояния между ними.

Это значение  $h/e$  гораздо ближе к непосредственно наблюдаемому значению (среднему из обратного фотоэлектрического эффекта), чем к полученным косвенным путем (см. решение I и II в табл. 9 и решение I' и II" табл. 10). Это совпадение до некоторой степени служит указанием на большую точность первых данных, а следовательно, и на то, что формула Ридберга может являться источником расхождений. Эта новая работа, действительно, заслуживает внимания, особенно потому, что метод и теория ее столь отличны, однако точность результатов недостаточна для того, чтобы предыдущее подтверждение было бы более, чем простым указанием на эту возможность. Анализ и обсуждение, проведенные в настоящей работе, нужно было бы изменить лишь в незначительной степени, если бы в рассмотрение была включена и эта новая работа.

Таблица 6

Сводка одиннадцати типов измерений и полученных экспериментальных результатов. В пятом столбце таблицы указана зависимость этих экспериментальных величин от первых десяти вспомогательных констант, приведенных в табл. 1.  $A'$  обозначает остаток  $A$  после умножения на указанную константу. В шестом столбце дается формула для  $e_n$  ( $e_n$  — величина  $e$ , представляющая данный опыт на диаграмме Бэрджа-Бонда). В последнем столбце даны значения  $e_n$ .

Точка	Тип измерения	Сочетание измеряемых констант	Экспериментальное значение $A$	Зависимость $A$ от известных констант. Формула для $A$	Формула для $e_n$	$e_n$ для диаграммы Бэрджа-Бонда CGSE-10 <sup>10</sup>
1	Дифракционная решетка	$e$	$(4,8025 \pm 0,0004) \cdot 10^{-10}$ CGSE	$(Fqck \lambda^2) A'$	$e$	$4,8025 \pm 0,0004$
2	Масляные капли	$e$	$(4,8036 \pm 0,0048) \cdot 10^{-10}$ CGSE	$\left(\frac{c}{r}\right) A'$	$e$	$4,8036 \pm 0,0048$
3	Граница сплошного рентгеновского спектра	$\frac{h}{e}$	$(1,3763 \pm 0,0004) \cdot 10^{-17}$ CGSE	$\left(\frac{k\lambda r}{e^2}\right) A' {}^1)$	$\left(\frac{1}{A}\right) h_0$	$4,8026 \pm 0,0014$
4	Ионизация и возбуждение	$\frac{h}{e}$	$(1,3745 \pm 0,0013) \cdot 10^{-17}$ CGSE	$\left(\frac{r}{e^2}\right) A'$	$\left(\frac{1}{A}\right) h_0$	$4,8090 \pm 0,0045$
5	Постоянная радиации	$\frac{h}{e}$	$(1,3730 \pm 0,0029) \cdot 10^{-17}$ CGSE	$\left(\frac{R_0}{c^2 Fq}\right) A'$	$\left(\frac{1}{A}\right) h_0$	$4,8145 \pm 0,0101$
6	Постоянная Стефана-Больцмана	$\frac{e}{h^{3/4}}$	$(2,0778 \pm 0,0020) \cdot 10^{10}$ CGSE	$\left(\frac{Fqc^{3/2}}{R_0}\right) A'$	$(A) h_0^{3/4}$	$4,8168 \pm 0,0046$
7	Электронная дифракция ( $V$ )	$\left(\frac{h}{e}\right) \left(\frac{e}{m_0}\right)^{1/2}$	$(1,00084 \pm 0,00058) \cdot 10^{-8}$ CGSE	$\left[\left(\frac{r}{c}\right)^{1/2} k\lambda\right] A' {}^2)$	$\left(\frac{cR \infty A^2}{2\pi^2}\right)^{1/2} h_0^{1/2}$	$4,7964 \pm 0,0019$
8	Электронная дифракция ( $v$ )	$\frac{h}{m_0}$	$7,274 \pm 0,016$ эрг сек/г	$(k\lambda) A'$	$\left(\frac{cR \infty A}{2\pi^2}\right)^{1/2} h_0^{1/2}$	$4,7972 \pm 0,026$
9	Комптон-эффект	$\frac{h}{m_0}$	$7,264 \pm 0,012$ эрг сек/г	$(k\lambda c) A'$	$\left(\frac{cR \infty A}{2\pi^2}\right)^{1/2} h_0^{1/2}$	$4,7956 \pm 0,0020$
10	Удельный заряд	$\frac{e}{m_0}$	$(1,7591 \pm 0,0002) \cdot 10^7$ CGSM	Зависит от метода	$\left(\frac{cR \infty A}{2\pi^2}\right)^{1/2} h_0^{3/2}$	$4,7963 \pm 0,0002$
11	Рентгеновские фотоэлектроны	$\left(\frac{e}{m_0}\right) \left(\frac{e}{h}\right)$	$(3,8220 \pm 0,0029) \cdot 10^{24}$ CGSE	$\left(\frac{c^2 p^2}{k\lambda r^2}\right) A' {}^3)$	$\left(\frac{cR \infty A}{2\pi^2}\right)^{1/2} h_0^{2/3}$	$4,7953 \pm 0,0006$

<sup>1)</sup> Во всех случаях учитывалось, в какой стране был проведен эксперимент.

<sup>2)</sup> Так как не было известно, какими электрическими стандартами (английскими или германскими) пользовался Фризен, было взято среднее значение  $r$ , а именно  $r = 1,000396 \pm 0,000060$ . Вероятная ошибка была соответственным образом увеличена.

<sup>3)</sup> Робинсон не дает указаний, что поправка  $\left(\frac{p}{r}\right)^2$  была учтена. Нами было принято значение:  $\frac{r}{p} = 0,999941 \pm 0,000020$ .

точек, находящихся справа и слева, объединяемых нами в группу  $B^1$ ). Точки первой группы дают значение  $e$  порядка  $4,796 \cdot 10^{-10}$ , в то время как верхняя группа соответствует значению  $4,803 \cdot 10^{-10}$  CGSE.

Расхождение между этими двумя значениями лежит за пределами экспериментальных погрешностей. Если это так, то причину расхождения необходимо искать в законах или уравнениях, на которых основывались вычисления  $e$ . Если из применявшихся формул только одна содержит ошибку, то ее можно найти по следующим признакам: 1) все точки, вычисленные на основе этой формулы или косвенно связанные с ней, должны находиться в хорошем согласии друг с другом, 2) все точки, не связанные с ней, должны также хорошо совпадать по своим значениям, 3) между этими двумя группами точек должно наблюдаться резкое расхождение.

В табл. 7 все одиннадцать типов измерений проанализированы в отношении основных законов или уравнений, использованных так или иначе при подсчетах. Выполнение первых двух критериев качественно указано внизу таблицы. Третий критерий выполняется почти в каждом случае. Можно видеть, что лишь группы экспериментов, связанных с формулой Ридберга или не зависящих от нее обнаруживают все указанные выше признаки.

Этими двумя группами являются упомянутые выше группы  $A$  и  $B$ . Экспериментальные данные указывают, что причиной расхождения значений основных атомных констант является формула Ридберга.

Другим возможным источником ошибок может быть уравнение фотоэффекта. Однако признаки здесь выражены относительно слабее, так как в этом случае две точки, связанные с излучением, не совпадают с «другими измерениями» (т. е. не связанными с фотоэффектом). Если эти недостаточно точные радиационные точки не включать в рассмотрение (предполагая, что появятся более точные данные) или включить их в группу, связанную с уравнением фотоэффекта, то, анализируя табл. 7, можно видеть, что это уравнение также может рассматриваться, как вероятный источник расхождений.

Большая часть дальнейшей дискуссии будет связана с вопросом, какая из этих двух возможностей кажется более вероятной.

2. *Эффект произвольных изменений в формуле Ридберга.* Немного более двух лет тому назад Бэрдж<sup>1</sup> указал на ошибочность формулы Ридберга, как на одну из трех возможных причин

противоречия между  $e$ ,  $\frac{e}{m_0}$  и  $h$ . Позже он пришел к заключению, что все зло кроется в значении  $\frac{h}{e}$ .

Несколько позднее Дю-Монд<sup>5</sup> указал, что расхождение исчезает при введении в формулу Ридберга поправочного члена  $(1 - \alpha)$ , где  $\alpha$  — постоянная тонкой структуры.

Рассуждения Дю-Монда основываются на изменениях в значении  $\frac{h}{e}$ , вычисленном из  $\frac{e}{m_0}$  и  $e$  с помощью формулы Ридберга. Из послед-

<sup>1</sup>) Две пунктирные линии  $A$  и  $B$  на рис. 1 проведены произвольно.

Таблица 7

Анализ одиннадцати типов измерений в отношении основных законов или уравнений, на которых они основаны. Законы или уравнения, используемые в том или ином типе измерения, отмечены крестиком. В конце каждого столбца указано качественно, можно ли провести прямую через отмеченные крестиком точки. Это служит испытанием их достоверности. В самом конце каждого столбца дается оценка такой же пробы для точек, не отмеченных крестиком

Точка	Тип измерения	Дифракционная решетка и рентгеновские лучи $n\lambda = d [\cos \vartheta - \cos (\vartheta + \alpha)]$	Кристаллическая решетка. Закон Брэгга $n\lambda = 2d \sin \vartheta$	Уравнения де-Брогя $\lambda = \frac{h}{mv}$	Фотоэлектрическое уравнение $\frac{hc}{\lambda} = \frac{1}{2} mv^2 = \Phi_e$	Уравнение Планка для излучения	Кристалл кальцита (геометрически совершенный) $d = \left[ \frac{Me}{2\rho Fc\Phi(\beta)} \right]^{1/2}$	Выражение постоянной Ридберга $R = \frac{2\pi^2 e^4 m_0}{ch^3}$
1	Дифракционная решетка (e) . . . . .	×	×				×	
2	Масляные капли (e) . . . . .							
3	Граница сплошного рентген. спектра . . . . .	×						
4	Ионизация и возбуждение . . . . .				×			
5	Константа излучения <sup>1)</sup> . . . . .				×			
6	Постоянная Стефана-Больцмана <sup>2)</sup> . . . . .					×		
7	Электронная дифракция (V) . . . . .	×	×	×				×
8	Электронная дифракция (v) . . . . .	×	×	×				×
9	Комптон-эффект <sup>3)</sup> . . . . .	×	×	×				×
10	Удельный заряд $\frac{e}{m_0}$ . . . . .							×
11	Рентгеновские фотоэлектроны . . . . .	×			×			×
	Совпадение точек, отмеченных крестиком (X), с прямой линией . . . . .	Чрезвычайно слабое	Хорошее	Только 2 точки	Хорошее	Только 2 точки	Только 1 точка	Очень хорошее
	То же для остальных точек . . . . .	Слабое	Очень слабое	Исключительно слабое	Очень хорошее	Исключительно слабое	Очень слабое	Блестящее

<sup>1)</sup> Константа излучения  $c_0$  встречается в законе смещения Вина, который получается из формулы Планка для излучения.

<sup>2)</sup> Формула для постоянной Стефана-Больцмана получена из формулы Планка.

<sup>3)</sup> В действительности кристалл, употреблялся, как пропускающая решетка, однако, основные явления будут такими же, как и в обычном брэгговском случае.

<sup>4)</sup> С поправкой на энергию связи электрона с ядром.

<sup>5)</sup> Эти эксперименты обратны фотоэлектрическим в том отношении, что они предполагают сохранение энергии при переходе кинетической энергии электрона в энергию фотона  $h\nu$ . Этот процесс, однако, идет в две стадии: 1) возбуждение или ионизация и 2) излучение.

него столбца табл. 7 можно усмотреть, что изменения в формуле Ридберга оказывают хорошее влияние не только на величину  $\frac{e}{m_0}$ , но также и на четыре остальные измерения.

В исправленном виде формула Ридберга выглядит следующим образом:

$$R_\infty (= 109\,737,42) = \frac{2\pi^2 e^4 m_0}{ch^3} \cdot \frac{1}{1 + \alpha}.$$

Это равносильно тому, что комбинация констант  $\left(\frac{2\pi^2 e^4 m_0}{ch^3}\right)$  увеличивается на некоторую дробь от  $\alpha$ .

Константа тонкой структуры не включена в одиннадцать типов измерений табл. 7 вследствие больших экспериментальных погрешностей в ее определении. Три самые надежные измерения величины  $\frac{1}{\alpha}$  дают:  $139,9^{74}$ ;  $137,4 \pm 0,2^{75}$ ;  $139,3^{76}$ . Среднее из них имеет

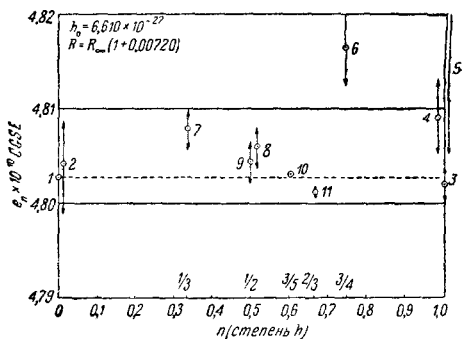


Рис. 2. Та же диаграмма, что и на рис. 1, однако, все комбинации констант, входящие в формулу Ридберга, увеличены в  $\alpha (= 7,20 \cdot 10^{-3})$  раз. При таком подсчете расхождение точек рис. 1 значительно уменьшено, хотя и не устранено вполне.

Вследствие того, что  $R_\infty$  встречается в разной степени<sup>2)</sup>, центральная группа точек (от 7 до 11) не только отошла вверх от прежнего уровня, но так же повернулась<sup>3)</sup> по часовой стрелке. При этом точки 7 и 11 оказались удаленными от некоторого среднего значения (пунктирная линия) на расстояния, в 2—3 раза превышающие пределы их экспериментальных погрешностей. (На рис. 1 та же пунк-

вид  $138,9 \pm 0,6$ . Если принять это значение,  $R_\infty$  возрастает на  $\frac{1}{138,9}$  (т. е. на  $7,2 \cdot 10^{-3}$ ) часть своего первоначального значения. Пересчитывая значения  $e_n$  (см. последний столбец таблицы) с помощью этого исправленного значения  $R_\infty$ , приходим к результатам, представленным на рис. 2. Согласованность точек как будто улучшается; особенно это заметно на следующих точках: 10 (из  $\frac{e}{m}$ ), 1 (e) и 3 ( $\frac{h}{e}$ )<sup>1)</sup>.

1) Если принять  $\frac{1}{\alpha} = 137$ , все точки поднимутся на большее расстояние, однако, совпадение останется достаточно хорошим.

2) См. предпоследний столбец табл. 6.

3) При каких-либо изменениях в значении  $R_\infty$  перемещение точек, связанных с  $R_\infty$ , можно сделать весьма наглядным, если представить себе, что эти точки нанесены на отдельный гибкий лист, который затем подвергается вертикальному сдвигу, причем правый край остается закрепленным. Изменение в значении  $h_0$  подобным же образом дает такой же сдвиг для всех точек относительно левого края.

тирная линия проходила через группу *B*.) Это обстоятельство может рассматриваться как аргумент против решения проблемы путем введения изменений в формулу Ридберга или может считаться указанием на ошибочность экспериментальных данных. Конечно, все эти соображения подчеркивают необходимость дальнейшей экспериментальной работы. Если будет найдено, что необходимы не поправки, а коренные изменения формулы Ридберга, то окончательная картина может резко измениться.

Другое противоречие, указанное на рис. 1 и 2, вносится точкой 6. Эта точка связана с опытом по определению постоянной Стефана-Больцмана. Особенностью этой точки является то, что введение поправок на поглощение излучения водяными парами или  $\text{CO}_2$  (которые учитывались в экспериментах последних лет) сместило эту точку вверх от ее прежнего положения, хорошо согласующегося с другими точками. Вопрос о том, нужно ли искать здесь другую заметную причину расхождения или нужно подвергнуть пересмотру теорию излучения Планка, — остается открытым.

3. *Эффект функциональных изменений в формуле Ридберга.* О возможности функционального, нелинейного, изменения формулы Ридберга уже упоминалось. Необходимо подчеркнуть, что функциональное изменение не может повлиять на значения  $\frac{h}{e}$ , найденные из опытов, представленных точками 7, 8, 9 или 11 в комбинации с величиной  $\frac{e}{m_0}$ <sup>1)</sup>. Графически это значит, что две точки должны

всегда определять линию, которая проходит через значение  $\frac{h}{e}$  при  $n = 1$ . Никакие функциональные изменения в формуле Ридберга не могут заставить точки 7—11 на рис. 2 совпасть или хотя бы приблизиться к пунктирной линии<sup>2)</sup>.

4. *Анализ причины расхождений при допущении идеальности кристалла кальцита.* До сих пор предполагалось, что значения длин волн, определенных с помощью дифракционной решетки, правильны. Противоположным является допущение геометрического совершенства решетки кристалла. Тем самым дается возможность, используя закон Брэгга, выразить длины волн  $\lambda$  через постоянные кристалла кальцита, а именно  $\lambda = Ce^{1/3}$ . Диаграмма Бэрджа-Бонда, построенная на основе этих расчетов, без каких-либо изменений постоянной Ридберга дана на рис. 3. Сравнивая ее с диаграммой рис. 1, можно заметить, что вся группа *A* сжалась около точки 10, представляющей значение  $e$ ,

1) Иллюстрация:  $\frac{h}{e}$ , найденное Фризенем из данных, представленных точкой 7, и величины  $\frac{e}{m_0}$  — слегка ниже точки 10, — лежит на пересечении линии, идущей через точки 7 и 10 и ординаты для  $n = 1$ . Эта точка пересечения сохраняет свое положение вне зависимости от того, что делается с формулой Ридберга (см. предыдущее примечание).

2) Это было бы невероятным случаем, когда функциональные изменения переместили бы только те точки, которые соответствуют очень небольшим порядкам  $n$  (степень  $h$ ).

полученное из  $\frac{e}{m_0}$ . Точка 10 осталась на месте. В группе В точка З сдвинулась<sup>1)</sup> от  $n=1$  до  $n=0,75$ . Разделение на две группы, так же как и раньше, хорошо заметно.

Анализ диаграммы рис. 3, проведенный по прежнему методу (см. табл. 7), приводит к таким же заключениям; поэтому нужно считать, что из представления о геометрическом совершенстве кальцита нельзя получить ничего нового.

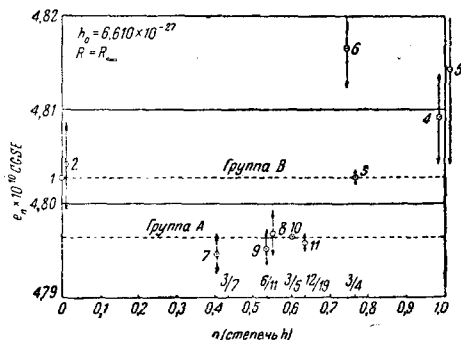


Рис. 3. Диаграмма Бэрджа-Бонда, подобная рис. 1, однако основанная на допущении геометрического совершенства кальцита при подсчетах длин волн рентгеновских лучей. Исключением является лишь точка 1, связанная также и с длинами волн, полученными из дифракционных измерений. Расхождение, наблюдаемое на рис. 1, на этом рисунке не изменилось к лучшему.

графику слева и справа, и нет ни одной точки, которая лежала бы между ними. Наоборот, нижняя группа точек (группа А) представляет собой нечто целое, причем между этими точками, несмотря на совершенно различные методы их получения, наблюдается удивительное соответствие. Следовательно, нижняя группа заслуживает гораздо больше доверия в отношении точности, чем верхняя. Если мы хотим сохранить «центр тяжести» нижней группы точек, расположенных примерно в центре фигуры, через который каким-то образом проходит линия, изображающая решение, то надо понизить или точки 1—2, или точки 3—6. Рассматривая первую из этих двух возможностей, нужно заметить, что не вполне удовлетворительное положение измерений, связанных с масляными каплями, дает повод думать, что дальнейшие эксперименты могут понизить точку 2. Однако, кажется гораздо менее вероятным, что новые опыты смогут заметно изменить положе-

5. *Возможность экспериментального происхождения причин противоречия.* До сих пор мы основывались на том, что расхождение между группами А и В превышает пределы экспериментальных погрешностей. Если отказаться от этого взгляда, то положение можно обрисовать следующим образом: точки верхней группы (группа В на рис. 1 и 3) не связаны друг с другом; они разбросаны по

<sup>1)</sup> Передвижение здесь иллюстрируется без затруднения, что удастся во всех случаях: точка З лежит на линии, определяемой точками 1 и 3 на рис. 1. Причина того, что перемещение происходит всегда по линии, определяемой точкой 1, заключается в том, что эта точка связана с использованием длин волн, полученных из дифракционных измерений, и допущением о геометрическом совершенстве кальцита. Следовательно, какая-либо точка, связанная с длиной волны, на рис. 1 и такая же точка на рис. 3 должны находиться во взаимном соответствии с точкой 1 (т. е. лежать на той же прямой).

ние точки *I*, так как эта точка связана со многими экспериментальными результатами, использованными при построении других точек <sup>1)</sup>. Далее, при пересчете большинства постоянных, связанных с этой точкой, мы не встречаем указаний на погрешности, достаточные для необходимого понижения ее значения. Первая возможность кажется, поэтому, весьма мало вероятной.

Вторая альтернатива требует понижения точек *З* и *б*. Границы экспериментальных погрешностей точки *З* установлены из нескольких определений достаточно точно. Экспериментальная, а может быть, и теоретическая, погрешность в определении двух постоянных излучения (точки *5* и *б*) в настоящее время <sup>2)</sup> отодвигает эту возможность на второй план. Точка *4*, однако, определена недостаточно точно, и дальнейшая работа <sup>3)</sup> в этом направлении крайне необходима.

Если эта маловероятная вещь все же случится и новейшие исследования дадут повышенные значения  $\frac{h}{e}$  для точек *З* и *4* (т. е. так, что эти точки понизятся и совпадут с прямой, проведенной через точки *I* и *10*), то, конечно, главное противоречие исчезнет. В этом случае останется лишь проблема о приведении сравнительно неточных раднационных точек к соответствию с другими измерениями.

С другой стороны, если более поздние работы подтвердят «низкие» значения  $\frac{h}{e}$ , т. е. точки *З* и *4* займут более высокое положение на графике, то это можно будет истолковать тремя способами: а) результаты подтверждают ошибочность формулы Ридберга; б) в уравнении фотоэффекта скрыта ошибка, ведущая к пониженному значению  $\frac{h}{e}$ ; в) применение уравнения фотоэффекта ведет к ошибке, понижающей значение  $\frac{h}{e}$ . Второе предположение требует такого изменения теории, которое должно понизить точки, связанные не только с обратным (*З* и *4*), но также и с прямым фотоэффектом (*11*), на величину, самое большее порядка одной шестой. Это сместит точку *11* ниже средней линии (*I—10* рис. 2), но не настолько, чтобы возникло другое нежелательное расхождение.

В противоположность этому предположение (в) оставляет без перемен положение точки *11*. Таким образом, надо отличать прямой и обратный фотоэффект. Действительно, точка *11*, полученная из прямого фотоэффекта, находится в прекрасном соот-

<sup>1)</sup> На рис. 1 точки *З*, *7*, *8*, *9* и *11* также связаны с длинами волн из дифракционных измерений и точки *7*, *8* и *9* получены из закона Брэгга. На рис. 3 точки *З*, *7*, *8*, *9* и *11* связаны с ним же и получены в предположении о геометрическом совершенстве кальцита.

<sup>2)</sup> Кажется вероятным, что второе расхождение (например, для точек *5* и *б*, полученных из формулы Планка) должно остаться, если даже все остальные точки будут совпадать. Ранее Шибэ <sup>83</sup> выразил сомнение в правильности формулы излучения Планка. Однако, см. новые работы в примечании к стр. 177.

<sup>3)</sup> Автор начал подобные исследования.



ветствии со всеми точками, кроме «обратных» фотоэлектрических точек 3 и 4 и относительно неточных радиационных точек 5 и 6. Однако, принять положения (б) либо (в) невозможно, так как нет таких изменений теории, которые могли бы увеличить значение  $\frac{h}{e}$  для обратного фотоэффекта, не нарушив закона сохранения энергии. Короче: фотон остается с «чересчур большой энергией»<sup>1)</sup>.

#### Б. Анализ расхождения методом наименьших квадратов<sup>2)</sup>.

1. *Метод.* В предыдущем анализе мы пользовались диаграммой Бэрджа-Бонда, как почти единственным методом графического представления всей ситуации. Однако вследствие того, что формула Ридберга, на которую приходилось опираться, подвергнута сомнению, чрезвычайно желательно, чтобы те же цифры были обработаны какими-то другими способами. Приложение<sup>3)</sup> метода наименьших квадратов к ряду уравнений, представляющих экспериментальные данные, может дать некоторые добавочные сведения относительно причин расхождений.

Применяемый нами метод наименьших квадратов в общих чертах представляет собой следующее. Имеющиеся экспериментальные данные, суммированные в одиннадцати уравнениях (для трех неизвестных  $e$ ,  $m_0$  и  $h$ ), приведены в третьем и четвертом столбцах табл. 6. Кроме того, имеем уравнение:

$$\frac{e^4 m_0}{h^3} = (1,666564 \pm 0,000083) \cdot 10^{14}, \quad (12)$$

полученное из формулы Ридберга с использованием значений  $R_\infty$  и  $c$  из табл. 1. Эти двенадцать уравнений можно свести к восьми, используя взвешенные средние для  $e$ ,  $\frac{h}{e}$  и  $\frac{h}{m_0}$ . Результаты представлены в табл. 8. Эти уравнения были приведены к линейной форме разложением в ряд Тэйлора, а затем отдельные группы были одновременно решены обычным методом наименьших квадратов<sup>4)</sup>. При этом существенным является выбор этих групп, а именно, выбор должен быть осуществлен таким образом, чтобы получить какие-то

1) Это было подчеркнуто Дю-Мондом и Большманом<sup>77</sup>.

2) В этой части работы автор следовал совету Дю-Монда: избегать всяких намеков на «окончателность», которая обычно связывается с решениями по методу наименьших квадратов и «лучшими» значениями.

3) В беседе с Р. А. Бэтсом в феврале 1937 г. и автор, и собеседник пришли к заключению, что необходимо дать решение без включения формулы Ридберга. Подсчет такого рода, использующий временные значения экспериментальных результатов, был сделан Бэтсом<sup>78</sup>.

4) См., например, Пальмера<sup>79</sup>. Вероятные ошибки функций от  $e$ ,  $m_0$  и  $h$  были получены по методу Шовенэ<sup>80</sup>. Действительно, выражение, стоящее в скобках в уравнении (83), есть квадрат обратного веса искомой функции. Отсюда умножение квадратного корня этого выражения на вероятную ошибку наблюдения с единичным весом дает внутреннюю вероятную ошибку функции, в то время как умножение того же самого количества на вероятную ошибку неизвестного единичного веса дает внешнюю вероятную ошибку функции<sup>81</sup>.

сведения об источнике противоречия. Для этого прежде всего производилось основное решение, опирающееся на классы наблюдений, стоящих вне всяких сомнений. Затем находились дополнительные решения для системы, состоящей из одного «сомнительного уравнения» и уравнений, принадлежащих к основному решению. Ряд сведений мог

Т а б л и ц а 8

Восемь найденных соотношений основных констант и типы экспериментов, на которых они основаны. Вес, приписываемый каждому измерению, вычислен по обычной формуле наименьших квадратов:

$$W = \frac{c}{r^2}$$

Обозначение	Найденные значения констант или их соотношения (в CGSE)	Вес	Тип эксперимента	№ точки (см. табл. 6 и 7, а также все рисунки)
A	$e = (4,8025 \pm 0,0004) \cdot 10^{-10}$	252,8	Дифракционная решетка Масляные капли	1
B	$\frac{h}{e} = (1,3761 \pm 0,0006) \cdot 10^{-17}$	9,3		Обратный фотоэффект Постоянная радиации $c_2$
C	$\frac{e}{h^2} = (2,0778 \pm 0,0020) \cdot 10^{10}$	1,9	Постоянная Стефана-Больцмана	6
D	$\left(\frac{h}{e}\right) \left(\frac{e}{m_0}\right)^{\frac{1}{2}} = (1,00084 \pm 0,00058) \times 10^{-8}$	5,2	Электронная дифракция (вольтаж)	7
E	$\frac{h}{m_0} = 7,268 \pm 0,010$	1,0	Электронная дифракция (скорость) Комптон-эффект	8 9
F	$\frac{e}{m_0} = (5,2734 \pm 0,0007) \cdot 10^{17}$	96,0	Удельный заряд	10
G	$\left(\frac{e}{m_0}\right) \left(\frac{e}{h}\right) = (3,8220 \pm 0,0029) \times 10^{34}$	3,1	Рентгеновские фотоэлектроны	11
H	$\frac{e^4 m}{h^3} = (1,666564 \pm 0,000083) \times 10^{14}$	698,0	Формула Ридберга	(12)

быть получен сравнением тех изменений в решении, которые вносились в него тем или иным «сомнительным» уравнением, а также сравнением основного решения с непосредственно наблюдаемыми значениями.

Укажем на сходство и различие между нашим методом и способом, употреблявшимся ранее. Операция, предложенная Бондом<sup>82</sup>

и усовершенствованная Бэрджем<sup>8</sup>, состоит в сведении трех переменных,  $e$ ,  $m_0$  и  $h$ , к двум, а именно  $e$  и  $h$ , при помощи формулы Ридберга. Полученные экспериментальные соотношения приводятся затем к линейной форме разложением в ряд Тэйлора и сохранением первого члена. Бэрдж ввел новый параметр  $e_n = a_n h_0^n$ , где  $a_n$  — численная постоянная, полученная из экспериментального значения  $A_n$  (см. предпоследний столбец табл. 6),  $h_0$  — принятое значение  $h$  и  $n$  — степень, в которой оно входит в уравнение. Это соотношение дает возможность выразить результаты в виде точек диаграммы Бэрджа-Бонда, приблизительно соответствующих прямой линии  $e_n = e + bn$ , где  $e$  — величина заряда электрона и  $b$  — наклон линии, представляющей решение по способу наименьших квадратов. Из него может быть найдено значение  $h$ . Наиболее существенной чертой этого метода является возможность графического представления экспериментальных результатов (см. рис. 1) и решения по способу наименьших квадратов (т. е. нахождение прямой линии, ближе соответствующей экспериментальным точкам). Бэрдж дал также метод вычисления вероятной ошибки.

Шибас<sup>83</sup>, независимо от Бэрджа, пользовался методом обработки по способу наименьших квадратов, который напоминает метод Бэрджа тем, что неизвестное (в данном случае  $h$ ) исключается с помощью формулы Ридберга. Получающиеся уравнения с двумя неизвестными  $e$  и  $\frac{e}{m_0}$  решаются обычными методами наименьших квадратов и поэтому не могут быть представлены графически. Вероятные ошибки не вычислены, а просто оценены.

Позднее Бэтс<sup>78</sup> тем же методом дал решение для трех неизвестных. Особенное внимание он уделил вычислению ошибок из нормальных уравнений и ошибок, подсчитанных таким образом, чтобы давать какие-то сведения о причинах противоречия.

2. *Обработка данных в предположении сомнительности формулы Ридберга и уравнения фотоэффекта.* Формула Ридберга (уравнение  $H$ ) и фотоэлектрическое уравнение (связанное с уравнениями  $B$  и  $G$ ) являются двумя возможными источниками противоречия, как это указывалось при анализе диаграммы Бэрджа-Бонда. Также упоминалось о менее важном расхождении между точками, связанными с измерениями излучения (уравнение  $C$  и в меньшей степени  $B$ ). Вследствие того, что эти точки находятся в некотором соответствии с фотоэлектрическими точками, они сгруппированы вместе с последними.

Может быть, результат наших рассуждений показался бы более ясным, если бы радиационные точки просто не включались в рассмотрение, однако это не повлияло бы заметным образом на результаты решения. Эти результаты сведены в табл. 9. Решение I — основное, так как оно опирается на классы экспериментов, лежащих вне сомнения. Решение II выполнено для тех же классов с прибавлением данных, связанных с формулой Ридберга. В решении III включены все фотоэлектрические и радиационные точки. Разности решений (см. последние два столбца) незначительны для  $e$ ,  $m_0$  и  $\frac{e}{m_0}$  и срав-

нительно велики и противоположны по знаку для  $h$ ,  $\frac{h}{e}$  и  $R_\infty$ . Это указывает на одинаковую степень расхождения между фотоэлектрическим уравнением и формулой Ридберга и всеми остальными точками. Несмотря на невозможность полностью графически представить результаты решения, полученные этим методом, частично их можно проиллюстрировать с помощью диаграммы Бэрджа-Бонда. Необходимое условие

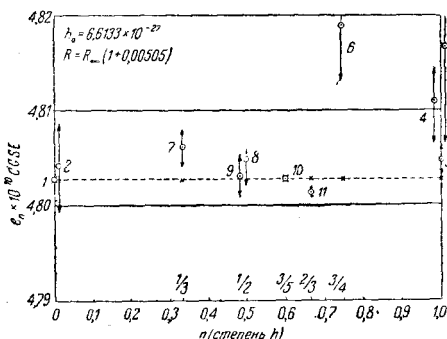


Рис. 4. Диаграмма Бэрджа-Бонда, представляющая, насколько это возможно<sup>1)</sup>, экспериментальные данные, обработанные по методу наименьших квадратов. Цифры, связанные с формулой Ридберга, не входят в этот подсчет (см. решения III табл. 9 и III' табл. 10). Пунктирная линия представляет собой полученное решение. Экспериментальные значения обозначены кружками; крестиками изображены результаты подсчета цифр по методу наименьших квадратов для различных степеней  $n$ .  $R_\infty$  вычислено по тому же методу. Длины волн взяты из дифракционных измерений.

при этом заключается в том, чтобы применяемое значение  $R_\infty$  было найдено по способу наименьших квадратов, так как в этом случае наименьшие квадратичные значения всех комбинаций констант лежат на одной прямой. Если, далее, вместо  $h_0$  воспользоваться средним квадратичным значением для  $h$ , то прямая линия, представляющая решение, будет горизонтальной. Это сделано для решения III на рис. 4. Совпадение какой-либо экспериментальной точки с прямой является, конечно, функцией расстояния соответствующего кружка от пунктирной линии, и расхождение можно оценить, взяв отношение этого расстояния к длине стрелки (т. е. вероятной ошибке). Точки 7 и 11 лежат гораздо ближе к этой прямой, чем на рис. 2.

3. *Обработка данных в предположении, что ошибка связана с обратным фотоэффектом и формулой Ридберга.* Доводом против предыдущего способа рассмотрения является то, что фотоэлектрические эксперименты бывают двух типов: прямые и непрямые и только последние находятся в противоречии с остальными измерениями [см. часть А (5) этого раздела]. Поэтому в серии решений, приведенной в настоящем параграфе, возможные источники ошибок были приписаны обращенному фотоэлектрическому уравнению (B) и уравнению Ридберга. Так же как и раньше, радиационные точки включались в одну группу с точками, полученными из обратного фотоэлектрического эффекта. Однако, результаты заметно не изменились бы, если эти точки были бы включены в рассмотрение.

1) Это нужно понимать в том смысле, что на диаграмме Бэрджа-Бонда, видоизмененной таким образом, изменение экспериментального значения любой точки до некоторой степени влияет на положение остальных точек, кроме тех, для которых  $n = 0$ . Это связано с изменениями в  $R_\infty$  и  $h_\infty$ .

Т а б л и ц а 9

Результаты обработки<sup>1)</sup> по способу наименьших квадратов. При этих расчетах возможные источники ошибок были приписаны формуле Ридберга и фотоэлектрическому уравнению. Основное решение I получено для экспериментальных работ, не внушающих сомнения. II — такое же решение, но с прибавлением работ, основанных на формуле Ридберга. III — то же, с прибавлением цифр всех фотоэлектрических экспериментов (+ постоянная радиации). Погрешности даны в виде вероятных ошибок, вычисленных из наблюдаемых уравнений<sup>2)</sup>. Обозначения  $A, B, C, D$  и т. д. см. в табл. 8

Константы	Непосредственно полученное значение (среднее)	Результаты обработки по способу наименьших квадратов			Разности <sup>3)</sup>	
		Решение I для: $(A, D, E, F)$	Решение II для: $(A, D, E, F) + (H)$	Решение III для: $(A, D, E, F) + (B, C, G)$	$(II-I) \cdot 10^4$ (кроме $R_\infty$ )	$(III-I) \cdot 10^4$ (кроме $R_\infty$ )
$e$	4,8025 $\pm 4$	4,8025 $\pm 4$	4,8025 $\pm 4$	4,8025 $\pm 7$	$0 \pm 4$	$00 \pm 7$
$m_0$	—	9,1070 $\pm 14$	9,1070 $\pm 16$	9,1073 $\pm 24$	$0 \pm 16$	$+3 \pm 24$
$h$	—	6,6189 $\pm 36$	6,6242 $\pm 10$	6,6133 $\pm 34$	$+53 \pm 36$	$-56 \pm 36$
$\frac{e}{m_0}$	1,7591 $\pm 2$	1,7591 $\pm 4$	1,7591 $\pm 3$	1,7590 $\pm 4$	$0 \pm 4$	$-1 \pm 4$
$\frac{h}{e}$	1,3761 $\pm 6$	1,3782 $\pm 7$	1,3793 $\pm 1$	1,3771 $\pm 7$	$+11 \pm 7$	$-11 \pm 7$
$R_\infty$	109 737,42 $\pm 0,06$	110 007 $\pm 177$	109 739 $\pm 8$	110 291 $\pm 167$	$-268 \pm 177$	$+284 \pm 177$

<sup>1)</sup> Нужно указать, что значение  $e$  в решении I (а также и в I' табл. 10) — не „наименьшее квадратичное“ значение. Этим хотят сказать, что значение  $e$  не влияет на цифры, полученные из опытов, не связанных с уравнением A. Это положение было ясно подтверждено замечательной диаграммой, данной Дю-Мондом в личном сообщении автору. Величина  $e$  влияет только на уравнения C и H, и поэтому в других уравнениях результирующее  $e$  есть наименьшее квадратичное значение из одного, двух или трех взятых уравнений.

<sup>2)</sup> Нужно подчеркнуть, что вероятную ошибку функции  $e, m_0$  и  $h$  нельзя найти из вероятных ошибок  $e, m_0$  и  $h$ , потому что последние величины не независимы. Необходимо возвращаться обратно к величинам, встречающимся в решениях табл. 9 и 10 (см. Шовенз<sup>80</sup>). Отношение внешней вероятной ошибки к внутренней в трех решениях табл. 9 соответственно равны 0,004; 0,73 и 1,66; в табл. 10: 0,62; 0,61 и 1,66. Взята наибольшая ошибка.

<sup>3)</sup> Из двух приведенных ошибок взята наибольшая.

Такое отличие настоящего способа обработки от предыдущего заключается только в том, что результаты прямых фотоэлектрических измерений здесь перенесены из группы ненадежных работ к группе работ, не подвергающихся сомнениям.

Результаты представлены в табл. 10. Обозначение решений — прежнее. Здесь, так же как и раньше, можно видеть, что разности

Т а б л и ц а 10

Результаты обработки по способу наименьших квадратов<sup>1)</sup>, когда источник противоречия приписывается формуле Ридберга и обратному фотоэффекту. Основное решение I' не содержит подвергнутых сомнению цифр. II' подсчитано с прибавлением цифр, основанных на формуле Ридберга, III' — то же с прибавлением обратного фотоэффекта (+ постоянная радиации). Ошибки даны так же, как и в табл. 9. Обозначения даны в табл. 8

Кон-стан-ты	Наблю-даемое значение (среднее)	Результаты обработки			Разности <sup>1)</sup>	
		Решение I' для (A, D, E, F, G)	Решение II' для (A, D, E, F, G) + H	Решение III' (=III) для (A, D, E, F, G) (B, C)	(II'—I')·10 <sup>4</sup> (кроме R <sup>∞</sup> )	(III'—I')·10 <sup>4</sup> (кроме R <sup>∞</sup> )
<i>e</i>	4,8025 ± 4	4,8025 ± 4	4,8024 ± 1	4,8025 ± 7	-1 ± 4	0 ± 7
<i>m</i> <sub>0</sub>	—	9,1073 ± 14	9,1071 ± 14	9,1073 ± 24	0 ± 14	0 ± 24
<i>h</i>	—	6,6214 ± 29	6,6242 ± 10	6,6133 ± 34	+28 ± 29	-81 ± 34
$\frac{e}{m_0}$	1,7591 ± 2	1,7591 ± 4	1,7591 ± 2	1,7590 ± 4	0 ± 4	-1 ± 4
$\frac{h}{e}$	1,3761 ± 6	1,3787 ± 7	1,3793 ± 1	1,3771 ± 7	+6 ± 7	-16 ± 7
<i>R</i> <sup>∞</sup>	109 737,42 ± 06	109 888 ± 142	109 741 ± 8	110 291 ± 167	-147 ± 142	+403 ± 142

в решениях для *e*, *m*<sub>0</sub> и  $\frac{e}{m_0}$  незначительны. Для *h*,  $\frac{h}{e}$  и *R*<sup>∞</sup> разности почти в три раза больше при добавлении фотоэлектрических точек (решение III), чем при включении точек, которые связаны с формулой Ридберга (решение II). Это, повидимому, свидетельствует о том, что источник противоречий должен быть приписан скорее обратному фотоэлектрическому эффекту, чем формуле Ридберга.

Такое утверждение становится еще более убедительным при сравнении результатов двух основных решений (табл. 11) с непосредственно

<sup>1)</sup> См. примечания к табл. 9.

полученными данными. Ни в том, ни в другом решении вычисленное значение  $R_\infty$  не отличается от спектроскопического значения больше, чем на величину погрешности. Однако, оба способа подсчета приводят к значениям  $\frac{h}{e}$ , превышающим непосредственно найденные значения на величину, почти в три раза большую экспериментальной погрешности. Это подтверждает наше предположение о том, что источник

Таблица 11

Константы	Разности	
	$I - Q$	$I' - Q$
$e$	$0 \pm 4$	$0 \pm 4$
$\frac{e}{m_0}$	$0 \pm 4$	$0 \pm 4$
$\frac{h}{e}$	$+ 21 \pm 7$	$+ 26 \pm 7$
$R_\infty$	$+ 270 \pm 177$	$+ 151 \pm 142$

расхождений связан с обратным фотоэлектрическим эффектом. Экспериментальные погрешности этих работ (особенно связанных с точкой 3) не настолько высоки, чтобы можно было ожидать появления новых измерений, способных смягчить противоречие. Следовательно, сложившееся положение требует или новой интерпретации экспериментальных результатов, или изменения в теории обратного фотоэлектрического эффекта. Первое кажется более приемлемым.

В табл. 11 дано сравнение приведенных в табл. 9 и 10 решений  $I$  и  $I'$  с непосредственно полученными величинами  $Q$ . Решение  $I'$  содержит фотоэлектрические данные, опущенные в решении  $I$ .

#### ВЫВОДЫ

В настоящей статье сопоставлены результаты всех наиболее важных измерений атомных констант  $e$ ,  $m_0$  и  $h$  или их комбинаций. Для этой цели экспериментальные данные различных авторов были обработаны следующим путем: 1) все принимавшиеся авторами значения комбинаций констант были исключены, так чтобы результаты работы представляли именно то, что дает эксперимент, 2) вспомогательные константы (как, например, число Фарадея, переводные коэффициенты и др.) были пересмотрены и пересчитаны. Обработанные таким образом экспериментальные данные сведены в табл. 6 и представлены графически на рис. 1 и 2.

Экспериментальные результаты всех типов были проанализированы в отношении основных законов или уравнений, на которых они основываются (см. табл. 7). Сравнение взаимной согласованности экспериментов, связанных с тем или иным законом, и экспериментов, не зависящих от него, несомненно указывает на то, что источник расхождений атомных констант связан с формулой Ридберга. Однако, если отбросить относительно неточные радиационные измерения, связанные с уравнением Планка, или присоединить их к результатам фотоэлектрических измерений, то появляется такое же ясное указание на неточность уравнения фотоэффекта.

Поправочный член  $\frac{1}{(1-a)}$ , введенный в формулу Ридберга, заметно снижает расхождение, но не устраняет его.

Анализ экспериментальных результатов с помощью метода наименьших квадратов, проведенный в предположении, что возможные источники ошибок лежат в формуле Ридберга или в фотоэлектрическом уравнении, не дает оснований предпочесть то или иное допущение. Этот анализ скорее приводит к указаниям на ошибочность того и другого уравнения, в виду того что результаты, которые получены из формулы Ридберга и фотоэлектрического уравнения, расходятся (в противоположных направлениях) со всеми остальными экспериментами.

Однако, тот же метод, проведенный в предположении ошибочности формулы Ридберга и теории или интерпретации обратного фотоэлектрического эффекта, дает веские указания на то, что именно последний является источником противоречия. Оправдание такого разграничения прямого и обратного фотоэффекта можно видеть в том факте, что результаты первого хорошо согласуются с остальными экспериментами, тогда как для обратного фотоэффекта этого не наблюдается.

Дальнейшее подтверждение указанной точки зрения можно найти в том, что значение  $R_{\infty}$ , вычисленное из экспериментальных результатов, стоящих вне сомнений и обработанных по методу наименьших квадратов, хорошо согласуется со спектроскопическими значениями, между тем как значение  $\frac{h}{e}$ , полученное тем же путем, отличается от наблюдаемого значения на величину, почти в три раза превышающую ошибку.

Проведенный анализ указывает на необходимость дальнейшей экспериментальной работы в следующих направлениях: 1) определение  $\frac{h}{e}$  — любыми методами и в особенности методами, не связанными с границей сплошного спектра рентгеновских лучей, так как точность, даваемая этим методом, уже достаточно высока; 2) определение  $\left(\frac{e}{m}\right) \left(\frac{e}{h}\right)$  с помощью фотоэлектронов рентгеновских лучей; 3) определение  $\left(\frac{h}{e}\right) \left(\frac{e}{m}\right)^{\frac{1}{2}}$  из измерений электронной дифракции; 4) определение  $\frac{e}{h^{\frac{3}{4}}}$  из измерений константы Стефана-Больцмана.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. R. T. Birge, Nature, **137**, 187, 1936.
2. J. W. M. Du-Mond and V. Bollman, Phys. Rev., **51**, 400, 1937; часть I и IV.
3. R. T. Birge, Phys. Rev., **52**, 241 (L), 1937.
4. R. Ladenburg, Ann. Physik, (5), **28**, 458, 1937.
5. J. W. M. Du-Mond, Phys. Rev., **52**, 1251 (L), 1937.
6. R. A. Millikan, Ann. Physik, (5), **32**, 34, 1938.



7. R. T. Birge, *Science*, **79**, 438, 1934.
8. R. T. Birge, *Phys. Rev.*, **40**, 228, 1932. См. стр. 232—5 и 252.
- 8a. R. T. Birge, *Rev. Mod. Phys.*, **1**, 14—18, 1929.
9. G. W. Winal, *Congrès Int. d'Electr.*, Paris, V. 3, s. 2. p. 117, 1932.
10. Сообщение Комитета атомов Международного химического союза, *Rev. Sci. Inst.*, **7**, 334, 1936.
11. G. W. Winal, *Nat. Bur. Stand. J. Res.*, **8**, 735, 1932.
12. R. T. Birge, *Nature*, **134**, 771, 1934.
13. R. T. Birge, *Rev. Mod. Phys.*, **1**, 60—61, 1929.
14. J. A. Bearden, *Phys. Rev.*, **48**, 385, 1935.
15. Robinson, *Phys. Soc. Rep.*, 212, 1937.
16. P. Haglund, *Z. Physik*, **94**, 369, 1935.
17. F. Tyrén, *Z. Physik*, **109**, 722, 1938.
18. R. T. Birge, *Phys. Rev.*, **40**, 213—223, 1932.
19. J. W. M. Du-Mond and V. Bollman, *Phys. Rev.*, **50**, 524, 1936; **54**, 1005, 1938.
20. F. G. Dunnington, *Phys. Rev.*, **52**, 498—501, 1937.
21. R. C. Williams, *Phys. Rev.*, **54**, 568, 1938; R. C. Gibbs and R. C. Williams, *Phys. Rev.*, **48**, 971 (L), 1938.
22. J. A. Bearden, *Phys. Rev.*, **48**, 698, 1938.
23. Частное сообщение. Тонкая структура  $H^1 - H^2$  (метод см. *Phys. Rev.*, **51**, 446, 1937).
24. A. E. Shaw, *Phys. Rev.*, **54**, 193, 1938.
25. R. T. Birge, *Phys. Rev.*, **54**, 972 (L), 1938.
26. C. D. Shane and F. H. Spedding, *Phys. Rev.*, **47**, 33, 1935.
27. Цит. по M. S. Livingston and H. A. Bethe, *Rev. Mod. Phys.*, **9**, 373, 1937.
28. W. V. Houston, *Phys. Rev.*, **30**, 608, 1927.
29. R. T. Birge, *Rev. Mod. Phys.*, **1**, 45, 1929.
30. L. E. Kinsler and W. V. Houston, *Phys. Rev.*, **45**, 104, 1934; **46**, 533 (L), 1934.
31. C. T. Perry and E. L. Chaffee, *Phys. Rev.*, **36**, 904, 1930.
32. F. Kirchner, *Ann. Physik*, (5) **8**, 975, 1931; **12**, 503, 1932.
33. J. W. M. Du-Mond and V. Bollman, *Phys. Rev.*, **51**, 400, 1937.
34. P. A. Ross and P. Kirkpatrick, *Phys. Rev.*, **45**, 454, 1934.
35. G. Schaitberger, *Ann. Physik*, (5) **24**, 84, 1935. Эта работа является продолжением работы H. Feder, *Ann. Physik*, (5) **1**, 497, 1929.
36. E. Brunner, *Phys. Rev.*, **53**, 457, 1938.
37. S. von Friesen, *Inaugural Dissertation*, Upsala, 1935.
38. J. Gnan, *Ann. Physik*, (5), **20**, 361, 1934.
39. R. v. Meibon and E. Rupp, *Ann. Physik*, (5) **13**, 725, 1932.
40. G. J. Finch and H. Wilman, *Ergebn. Exakt. Naturwiss.*, **16**, 418—9, 1937.
41. P. A. Ross and P. Kirkpatrick, *Phys. Rev.*, **45**, 223 (L), 1934.
42. F. Bloch, *Phys. Rev.*, **46**, 674, 1934.
43. P. A. Ross and P. Kirkpatrick, *Phys. Rev.*, **46**, 668, 1934.
44. A. H. Compton and S. K. Allison, *X-Rays in Theory and Experiment*, D. Van Nostrand Co., p. 662, 1935.
45. Robinson, Andrews and Irons, *Proc. Roy. Soc.*, **A143**, 48, 1933.
46. H. R. Robinson, *Proc. Phys. Soc.*, **46**, 693, 1934 (Cr  $K_{\alpha 1}$ -излучение).
47. H. R. Robinson and C. J. B. Clews, *Proc. Roy. Soc.*, **A149**, 587, 1935.
48. H. R. Robinson, *Phil. Mag.*, **22**, 1129, 1936.
49. W. A. Wooster, *Proc. Roy. Soc.*, **A114**, 729, 1927.
50. G. G. Kretschmar, *Phys. Rev.*, **43**, 417, 1933.
51. L. W. Alvarez, *Phys. Rev.*, **47**, 636 (L), 1935.
52. B. Majumdar and M. B. Vajifdar, *Proc. Ind. Acad. Sci.*, **8A**, 171, 1938.
53. G. Kellström, *Phil. Mag.*, **23**, 313, 1937.
54. W. V. Houston, *Phys. Rev.*, **52**, 751, 1937.

55. W. N. Bond, Proc. Phys. Soc., **49**, 205, 1937; P. J. Rigden, Phil. Mag., **25**, 961, 1938.
  56. G. B. Banerjea and B. Pattanaik, Nature, **141**, 1016, 1938.
  57. E. L. Harrington, Phys. Rev., (2), **8**, 738, 1916.
  58. R. A. Millikan, Electrons, Protons, Photons, Neutrons and Cosmic Rays (имеется русский перевод, изд. ГОИТИ, 1939).
  59. R. A. Millikan, Phil. Mag., (6) **34**, 1, 1917.
  60. E. Backlin and H. Flenberg, Nature, **137**, 655, 1936.
  61. Jshida, Fukushima and Suetsuga, Inst. Phys. and Chem. Res., Tokyo, Sci. Pap., **32**, 57, 1937.
  62. Y. Ishida, Ibidem, **32**, 233, 1937.
  63. E. O. Lawrence, Phys. Rev., **28**, 947, 1926.
  64. L. C. Van Atta, Phys. Rev., **38**, 876, 1931; **39**, 1012 (L), 1932.
  65. A. E. Shaw, Phys. Rev., **44**, 1009, 1933; **54**, 193, 1938.
  66. J. E. Roberts and R. Whiddington, Phil. Mag., **12**, 962, 1931.
  67. R. Whiddington and E. G. Woodroffe, Phil. Mag., **20**, 1109, 1935.
  68. R. Ladenburg, Handb. d. Physik, (2) **23**, 20, 1933.
  69. C. Müller, Z. Physik, **82**, 1, 1933.
  70. F. E. Hoare, Phil. Mag., **6**, 828, 1928; **13**, 380, 1932.
  71. F. E. Hoare, Phil. Mag., **14**, 445, 1932.
  72. R. T. Birge, Rev. Mod. Phys., **1**, 54, 1929.
  73. Wensel and Roeser, Nat. Bur. Stand. J. Res., **22**, 375, 1939.
  74. W. V. Houston and Y. M. Hsieh, Phys. Rev., **45**, 263, 1934.
  75. Spedding, Shane and Grace, Phys. Rev., **47**, 38, 1935.
  76. W. V. Houston, Phys. Rev., **51**, 446, 1937.
  77. J. Du-Mond and V. Bollmann, Phys. Rev., **51**, 400, 1937.
  78. R. A. Beth, Phys. Rev., **54**, 865, 1938.
  79. A. F. Palmer, Theory of Measurement, Ch. VII and IX, 1912.
  80. W. Chauvenet, Treatise on the Method of Least Squares, p. 541—3, 1868.
  81. R. T. Birge, Phys. Rev., **40**, 217—8, 1932.
  82. W. N. Bond, Phil. Mag., **10**, 994, 1930; **12**, 632, 1931.
  83. H. Shiba, Inst. of Phys. and Chem. Res., Tokyo, Sci. Pap., **19**, 97, 1932; **21**, 128, 1933.
-