УСТАНАВЛИВАЮЩИЕСЯ ПРОЦЕССЫ В АКУСТИКЕ [1])

Г. Бакгауз

Содержание

I. Введение.
II. Теория нестационарных процессов:
1. Системы с одной степенью свободы, 2. Системы со многими степенями свободы, 3. Символические методы, 4. Приближенные вычисления устанавливающихся процессов.
III. Слуховое восприятие нестационарных звуковых процессов.
5. Модель уха и устанавливающиеся процессы, 6. Восприятие высоты тона, 7. Слуховое восприятие устанавливающихся процессов, 8. Модулированные тона.

I. Введение

Ухо человека обладает способностью отличать стационарные звуки друг от друга по их силе, высоте и тембру. Сила звука определяется амплитудами основного тона и обертонов, высота тона отождествляется с частотой основного тона, а тембр является результатом наложения друг на друга гармонических обертонов с различными амплитудами, входящих в состав сложного звука. Это представление о тембре, названное Гельмгольцем [6 2]) „музыкальным тембром", являлось в течение долгого времени почти единственным предметом исследования в музыкальной акустике. С помощью все более совершенствуемой электроакустической аппаратуры удавалось открывать все более и более тонкие детали, характеризующие стационарные звуки. В учении об образовании гласных удалось значительно продвинуться в отношении установления характеристик различных гласных в зависимости от наличия определенно выраженных областей усиления обертонов (формант).

Значительные затруднения встретились впервые при попытке установить отличительные признаки звуков музыкальных инструментов. Только для очень немногих инструментов оказалось возможным установить определенные области частот, усиление которых

---

[1]) Ergebnisse d. Exakt. Naturwiss. 16, 237, 1937. Перевод Б. Г. Шпаковского.

[2]) Литература будет дана в конце статьи.

характерно для соответствующего музыкального инструмента. Из этого следовало заключить, что понятие „музыкального тембра" далеко не исчерпывает акустической характеристики различных музыкальных звуков. Особое значение имеют исследовнаия Штумпфа [20], из которых вытекает, что характеризующие каждый отдельный музыкальный инструмент акустические особенности обусловливаются не столько стационарными звуками, сколько нестационарными явлениями.

Эта точка зрения имеет очень большое значение также и для технической акустики. Прежде при изготовлении электроакустических приемных и передающих устройств и аппаратов ограничивались обсуждением вопроса о частотной зависимости передачи только при установившихся процессах. Принимая во внимание трудности, которые представляет устранение резонанса в больших механических колебательных системах, например, в громкоговорителях, обычно считается достаточно удовлетворительным, если удается добиться, чтобы более или менее равномерная частотная характеристика аппарата покрывала достаточно широкую область частот. В пределах этого диапазона считается возможным удовлетвориться незначительными неправильностями частотной характеристики, тем более, что чувствительность уха весьма невелика к амплитудным искажениям.

При этом не обращали внимания на то, что подобные незначительные пики резонансной кривой, указывающие на слабо демпфированные собственные частоты аппарата, хотя и не имеют практического значения при установившемся режиме передачи, однако при неустановившихся процессах обусловливают возникновение свободных колебаний, которые тем слабее затухают, чем резче выражены соответствующие пики резонансной кривой. Вследствие этого при обычных условиях эксплоатации возникают в результате повторных импульсов посторонние частоты, характерные только для данного аппарата и значительно искажающие правильность передачи.

Вследствие этих причин уже в течение нескольких лет в акустике изучаются нестационарные процессы. Полученные в этой области многочисленные существенные результаты будут изложены ниже. Однако весьма обширная область архитектурной акустики, в которой нестационарные процессы играют исключительно большую роль, не будет включена в настоящий обзор, так как она требует особого рассмотрения.

II. Теория нестационарных процессов

1. Системы с одной степенью свободы. Движение системы с одной степенью свободы описывается следующим диференциальным уравнением:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+r\frac{dx}{dt}+cx=P\sin\omega t,$$

где m — означает массу системы, r — коэфициент трения, а c — коэфициент упругости.

Общее решение этого уравнения имеет следующий вид:

$$x = Ae^{-\delta t}\sin(\omega_0 t + \psi) + B\sin(\omega t - \varphi), \tag{1}$$

причем

$$B = \frac{P}{m\sqrt{(\Omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega^2 r^2}{m^2}}} = \frac{P}{m\rho}; \quad \Omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}};$$

$$\varphi = \operatorname{arc\,tg}\frac{\frac{\omega r}{m}}{\Omega_0^2 - \omega^2}; \quad \delta = \frac{r}{2m}; \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m} - \frac{r^2}{4m^2}}.$$

A и ψ означают произвольные постоянные, зависящие от начальных условий; их вычисление является обычно довольно затруднительным. Если предположить, что система первоначально находилась в покое, и приложенная синусоидальная сила начала действовать внезапно в момент времени $t = 0$, то произвольные постоянные A и ψ принимают следующие частные значения:

$$A = \frac{P\omega}{m\rho^2\omega_0}\sqrt{4\delta^2\omega_0^2 + (\Omega_0^2 - \omega^2 - 2\delta^2)^2}; \quad \operatorname{tg}\psi = \frac{2\delta\omega_0}{2\delta^2 - (\Omega_0^2 - \omega^2)}.$$

Действительное движение системы в переходный период является результатом наложения двух колебательных процессов: незатухающего с амплитудой B и затухающего процесса с начальной амплитудой A.

Если частота возбуждающей силы ω близка к ω_0 — собственной частоте системы, то возникают биения, затухающие с коэфициентом затухания δ. Экспоненциальный множитель может быть представлен в следующем виде:

$$e^{-\delta t} = e^{-\frac{r}{2m}t} = e^{-\mathrm{d}\frac{t}{T_0}},$$

где $\mathrm{d} = \frac{\pi r}{\omega_0 m}$ означает логарифмический декремент, а T_0 — период собственных колебаний системы. Отсюда видно, что быстрота затухания определяется величиной логарифмического декремента или затухания[1]) колебательной системы. Чем сильнее затухание, тем скорее устанавливаются стационарные колебания. По истечении времени $\frac{T_0}{\mathrm{d}}$ устанавливающийся процесс уменьшается до $e^{-1} = 37\%$ своего первоначального значения.

Относительную величину устанавливающегося процесса можно

[1]) Под затуханием автор, очевидно, понимает применяемую иногда в научной литературе величину, обозначаемую D и определяемую через логарифмический декремент d с помощью соотношения $\mathrm{D} = \frac{\mathrm{d}}{\pi}$.

Примеч. перевод.

определить как отношение амплитуды B к начальной амплитуде A. Эта величина зависит от соотношения между собственной частотой системы и частотой возмущающей силы. Если собственная частота системы очень мала по сравнению с частотой возмущающей силы, т. е. если $\Omega_0 \ll \omega$, то

$$B = \frac{P}{m\omega}\frac{1}{\omega}; \quad A = \frac{P}{m\omega}\frac{1}{\Omega_0}, \text{ т. е. } B \ll A$$

В случае, если $\Omega_0 = \omega$, то $B = \frac{P}{\omega r}, A = \frac{P}{\omega r}\frac{\Omega_0}{\omega_0}$; следовательно, при малом затухании $B \approx A$.

Наконец, если собственная круговая частота системы значительно больше круговой частоты вынуждающей силы, т. е. если

$$\Omega_0 \gg \omega, \text{ то } B = \frac{P}{m\Omega_0^2} \text{ и } A = \frac{P}{m\Omega_0^2}\frac{\omega}{\omega_0}, \text{ т. е. } B \gg A.$$

Из приведенного анализа следует, что процесс установления колебаний обусловливает тем большие искажения, чем выше частота возбуждающей силы по сравнению с собственной частотой возбуждаемой системы.

Общий интеграл (1) позволяет также получить решение и для процесса установления равновесия при прекращении действия возбуждающей силы. Именно, если приложенная сила прекращает действовать в тот момент, когда ее величина равняется нулю, то процесс установления равновесия может быть представлен с помощью следующего уравнения: $x = A\ e^{-\delta t} \sin(\omega t + \psi)$, т. е. с помощью первого члена правой части общего интеграла (1).

2. Системы с несколькими степенями свободы. Для вычисления устанавливающихся процессов в системах с двумя степенями свободы требуется определять произвольные постоянные из начальных условий; однако это определение настолько громоздко, что практически никогда не осуществляется. В этом случае для получения строгого решения устанавливающихся процессов применяется особый метод, состоящий в том, что непериодически приложенную силу как непериодическую функцию разлагают в интегральный ряд Фурье, состоящий из бесконечного числа синусоидальных колебаний с соответственно подобранными амплитудами, а затем на основании принципа суперпозиции получают окончательное решение как результат суммирования отдельных частных решений.

Внезапное включение в момент времени $t = 0$ постоянной силы с максимальным значением K может быть представлено в виде следующего выражения:

$$k = K\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\int^{\infty} \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega\right], \tag{2}$$

причем двучлен, стоящий в скобках, принимает следующие значения: для $t < 0$ 0; для $t = 0$ $\frac{1}{2}$, для $t > 0$ 1.

Формулу (2) можно представить в следующей комплексной форме:

$$k = \frac{K}{2\pi j} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{j\omega t}}{\omega} d\omega. \tag{3}$$

Пусть постоянная сила K оказывает на систему стационарное действие $\frac{K}{W}$, где W означает некоторую функцию от ω. Уравнение движения системы можно представить так:

$$x = \frac{K}{2\pi j} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{j\omega t}}{W(\omega)\,\omega} d\omega. \tag{4}$$

Подъинтегральная функция имеет особые точки при $\omega = 0$ и $\omega = p_r$, где p_r — корень характеристического уравнения $W(\omega) = 0$. Общий случай, когда уравнение имеет многократные корни, разобран К. В. Вагнером [7]. Здесь же ограничимся случаем, когда корни уравнения конечны и однократны. Далее, нетрудно видеть, что для пассивных колебательных систем, т. е. для таких, которые сами не являются источниками энергии, мнимые части корней должны быть положительны. Если рассматривать путь интеграции в комплексной плоскости $\omega = Re^{j\vartheta}$ (рис. 1), то можно убедиться после подсчета подъинтегральной функции для верхнего полукруга, что интеграл, взятый вдоль этого полукруга при $R \to \infty$, обращается в нуль. Вместо искомого интеграла (4), взятого вдоль действительной оси, можно воспользоваться интегралом, взятым вдоль пути согласно рис. 1, и тогда на основании теории функций комплексного переменного получается

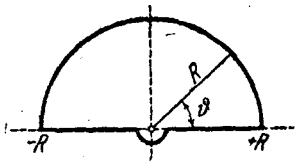

Рис. 1. Путь интегрирования функции, выражаемой формулой (4)

$$x = K\left[\frac{1}{W(0)} + \sum \frac{e^{jp_\nu t}}{p_\nu \left(\frac{\partial W}{\partial \omega}\right)_{\omega = p_\nu}}\right] = K \cdot \varphi(t). \tag{5}$$

Эта формула, впервые приведенная Хевисайдом [3] без доказательства, была впоследствии доказана К. В. Вагнером. Она дает возможность вполне строго вычислить поведение линейной пассивной системы, на которую внезапно начала действовать постоянная сила. Для этого вычисления необходимо решить алгебраическое или транс-

цендентное уравнение

$$W(\omega) = 0.$$

$\varphi(t)$ носит название „функция перехода".

Точно так же можно вычислить и действие любой меняющейся во времени силы; для этого надо разбить во времени приложенную силу на ряд бесконечно малых постоянных по величине сил, для которых известны их функции перехода (5). Если обозначить через $f(t)$ приложенную силу, начавшую действовать в момент времени $t = 0$, то поведение системы может быть описано по Карсону[11] с помощью следующего выражения:

$$x = \frac{d}{dt} \int_0^t f(t)\, \varphi(t - \lambda)\, dt. \tag{6}$$

Наиболее важным является случай действия силы, меняющейся синусоидально, начиная от момента времени $t = 0$. В этом случае надо положить $f(t) = K \sin \omega t$, или $f(t) = K e^{j\omega t}$. В последнем случае из окончательного результата надо отбросить мнимую часть для того, чтобы получить синусоидальное движение. Применяя для вычислений интерполяционную формулу Лапласа, получаем следующий результат:

$$x = K \left[\frac{e^{j\omega t}}{W(\omega)} + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{e^{jp_\nu t}}{(p_\nu - \omega)\, W'(p_\nu)} \right]. \tag{7}$$

Первый член правой части представляет незатухающие колебания, а второй член выражает сумму налагающихся друг на друга устанавливающихся колебаний. Только этот второй член представляет устанавливающийся процесс, вычисляемый при начальных условиях, соответствующих условиям включения. Если все отдельные системы могут колебаться, то все корни p_ν комплексны. Мнимые части всех корней, как выше установлено, положительны. Поэтому каждые два члена суммы, соответствующие сопряженным комплексным корням, представляют затухающее колебание. Следовательно, весь устанавливающийся процесс представляет совокупность отдельных затухающих колебаний, частота которых равна собственным частотам системы.

Пользуясь формулой (7), автор[19] рассчитал устанавливающийся процесс, возникающий в системе с двумя и тремя степенями свободы. Расчет относился к случаю двух связанных электрических колебательных контуров, к одному из которых внезапно подводится синусоидальная электродвижущая сила и вычисляется значение силы тока во втором контуре в функции времени. Это соответствует скорости второй системы при переходе к механической аналогии. Значение же величины W здесь уже соответственно другое. В случае, когда обе системы имеют одну и ту же собственную частоту (при отсутствии связи) ω_0, совпадающую с возбуждающей частотой,

и одинаковое затухание, то для значений скорости второй системы при упругой связи получается следующая формула:

$$v_2 = -\frac{P}{\sqrt{r_1 r_2}} \frac{m}{1+m^2} \Bigg[\cos \omega_0 t - \\ - \frac{\sqrt{1+m}}{2m} e^{-\omega_0 \frac{D}{2} t} \left\{ \frac{\sqrt{1+k^2}}{\nu_1} \cos(\omega_0 \nu_1 t - \varphi_1) + \right. \\ \left. + \frac{\sqrt{1-k^2}}{\nu_2} \cos(\omega_0 \nu_2 t - \varphi_2) \right\} \Bigg]. \tag{8}$$

Здесь применены следующие обозначения: P — амплитуда вынуждающей силы, k — коэфициент связи, r_1 и r_2 — соответствующие коэфициенты трения обеих систем, D — одинаковое для обеих систем затухание

$$m = \frac{k}{D}; \quad \nu_1 = \sqrt{1 + \frac{D^2}{4} + k}; \quad \nu_2 = \sqrt{1 - \frac{D^2}{4} - k};$$

$$\varphi_1 = \operatorname{arc\,tg} \frac{2+k}{2\nu_1 m}; \quad \varphi_2 = \operatorname{arc\,tg} \frac{2-k}{2\nu_2 m}.$$

В практически интересных случаях коэфициент связи и затухание имеют одинаковые значения порядка 10^{-2}. В этих случаях можно, пренебрегая высокими степенями D, упростить строгую формулу (8) и получить следующую приближенную формулу:

$$v_2 = \\ = -\frac{P}{\sqrt{r_1 r_2}} \frac{m}{1+m^2} \cos \omega_0 t \left[1 - \frac{\sqrt{1+m^2}}{m} e^{-\omega_0 \frac{D_2}{2} t} \cos\left(\omega_0 \frac{k}{2} t - \varphi\right) \right],$$

где $\varphi = \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{m}$.

Если для процесса спадания колебаний принять, что вынуждающая сила перестает действовать в тот момент, когда ее значение проходит через нуль, то процесс спадания колебаний представится следующей формулой:

$$v_2 = \frac{P}{\sqrt{r_1 r_2}} \frac{e^{-\omega_0 \frac{D}{2} t}}{\sqrt{1+m^2}} \cos \omega_0 t \cdot \cos\left(\omega_0 \frac{k}{2} t - \varphi\right). \tag{9}$$

Процесс спадания колебаний состоит в наложении друг на друга двух связанных колебаний с круговыми частотами $\omega_{1,2} = \omega_0 \left(1 \pm \frac{k}{2}\right)$, образующих биения. Так как амплитуды обоих связанных колебаний с большим приближением можно считать равными друг другу, то при возникающих биениях амплитуда спадает до нуля. Частота

биений пропорциональна коэфициенту связи k; следовательно биения происходят тем быстрее, чем сильнее связь. Колебания при спадающем процессе происходят между двумя парами огибающих кривых; одна пара кривых выражается уравнением

$$\pm e^{-\omega_0 \frac{D}{2} t} \cos\left(\omega_0 \frac{k}{2} t - \varphi\right),$$

а другая пара экспоненциальных кривых выражается уравнением

$$\pm e^{-\omega_0 \frac{D}{2} t}$$

(рис. 2). Большое практическое значение имеет главным образом вопрос о продолжительности спадающего процесса, которую можно определить как время, в течение которого колебания затухают до 10% первоначальной величины. На основании рис. 2 можно сформулировать совершенно общее положение, что спадающий процесс прекращается тем скорее, чем больше затухание. В практических случаях обычно связь настолько слаба, что огибающая кривая биений в начальной своей части не отличается от экспоненциальной кривой. На этом основании можно считать, что продолжительность спадания уменьшается с возрастанием связи или диаметра отверстия, к чему приходят и в теории фильтров.

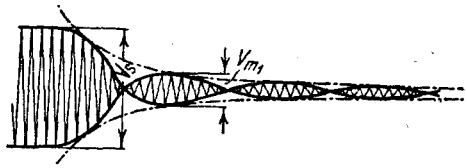

Рис. 2. Спадание колебаний системы с двумя степенями свободы

Формулы (8) и (9), выражающие строгое вычисление хода спадающего процесса, могут быть применены для того, чтобы на основании экспериментально полученных осциллограмм затухающих колебаний получить величину связи и затухания. Прежде всего путем подсчета числа колебаний, приходящихся на одно биение, можно в общем случае получить значение коэфициента связи для систем с двумя степенями свободы. Так как собственные частоты при наличии связи выражаются формулами

$$\omega_1 = \omega_0\left(1 + \frac{k}{2}\right); \quad \omega_2 = \omega_0\left(1 - \frac{k}{2}\right),$$

то, очевидно, частота биений равна $\omega_0 k$. Если обозначить через n число колебаний, приходящихся на один период биений, то $k = \frac{1}{n}$. Далее, в случае подобных четко выраженных биений, которые получаются при упругой связи при наложенных условиях, можно получить значение величины $m = \frac{k}{D}$ из отношения первого мак-

симума биений v_{m_1} к амплитуде незатухающих колебаний v_s. На основании (8) получается $v_{m_1} = v_s e^{-\frac{\pi}{m}}$, откуда

$$m = \frac{\pi}{\ln \frac{v_s}{v_{m1}}}.$$

Эти формулы были применены автором настоящей статьи [94], чтобы на основании осциллограмм затухания собственных колебаний скрипки в области ее главного резонанса вычислить как затухание отдельных частей этой системы, состоящей из струны и корпуса, так и коэфициента связи между ними. При этих опытах выполнялись условия, наложенные при выводе формулы (9). Колебания звукового давления в звуковом поле, зарегистрированные на осциллограммах, обусловливаются главным образом скоростями непосредственно невозбуждаемой системы, а именно корпуса скрипки. При соответствующем нажатии струны производится ее настройка на главный резонанс инструмента.

Связь, осуществляемая через подставку, в основном упругая. Приходится заключить, что обе системы, струна и корпус, имеют приблизительно одинаковое собственное затухание. Струна, которая сама по себе имеет значительно меньшее затухание, чем корпус, получает добавочное затухание вследствие деформации подставки.

3. Символические методы. Важные вспомогательные средства для вычисления устанавливающихся процессов, особенно в сложных случаях, когда обычные вычислительные приемы становятся очень ненаглядными, дают символические методы, предложенные Хевисайдом [3] и разработанные и строго обоснованные К. В. Вагнером [7], Бромвичем [9] и Карсоном [11]. Главное применение этих методов ранее ограничивалось электротехникой. В настоящее время Прагер [40] применил эти методы для решения механических задач. Основные приемы исследования с помощью этих методов должны быть здесь изложены.

Пусть движение системы описывается линейным диференциальным уравнением

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = z(t). \qquad (10)$$

Вместо неизвестной функции $f(t)$ вводится новая функция $F(p)$ комплексного переменного $p = \tau + j\sigma$, с помощью следующего соотношения:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} k(t, p) F(p)\, dp. \qquad (11)$$

Здесь ядро трансформации имеет следующий вид:

$$k(t, p) = \frac{e^{pt}}{p}. \tag{12}$$

Путь интеграции лежит в плоскости комплексного переменного p параллельно мнимой оси. Действительная положительная величина c выбирается так, чтобы все особые точки подъинтегральной функции лежали влево от пути интеграции. Если считать допустимым диференцирование под знаком интеграла, то получаются следующие формулы для производных от функции $f(t)$:

$$\frac{d^n}{dt^n}[f(t)] = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} k(t, p)\, p^n F(p)\, dp. \tag{13}$$

Принимаем, что как возмущающая функция $z(t)$, так и искомая функция могут быть выражены в форме (11):

$$\begin{cases} z(t) = \dfrac{1}{2\pi j}\displaystyle\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} k(t, p)\, Z(p)\, dp, & (14) \\[2ex] y(t) = \dfrac{1}{2\pi j}\displaystyle\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} k(t, p)\, Y(p)\, dp. & (15) \end{cases}$$

Внося функции из (14) и (15) в (10) и принимая во внимание (13), получаем

$$\frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} dp k(t, p)\, [(a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots$$

$$\ldots + a_1 p + a_0)\, Y(p) - Z(p)] = 0.$$

Отсюда следует, что

$$Y(p) = \frac{Z(p)}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0}.$$

Следовательно, решение диференциального уравнения выражается соотношением (15). Если вставить (12) в (11) и выполнить комплексное интегрирование, то можно убедиться, что функция $f(t)$ для отрицательных значений времени t обращается в нуль. Именно в этом заключаются особые преимущества выбора функции $F(p)$ в форме (12) при вычислении действия внезапно приложенных возмущающих сил на покоящуюся систему.

Предложенный Хевисайдом символический метод исчисления состоит в том, что в правой части формулы (11) оставляют только

$F(p)$. Формула при этом переписывается так:

$$F(p) \div\!\!\rightarrow \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{e^{pt}}{p} F(p)\,dp = f(t).$$

$F(p)$ представляет сокращенное символическое обозначение функции $f(t)$. Из (13) следует

$$\frac{d^n}{dt^n}[f(t)] \leftarrow\!\!\div p^n F(p). \tag{16}$$

Вычисления выполняются с операторами как с числами, а затем с помощью формул (14) и (15) переходят после выполнения интегрирования к собственным функциям. Имеет смысл найти значение простейших функций оператора p.

Для $F(p) = p^{-n}$ подъинтегральная функция принимает следующий вид:

$$e^{pt}\cdot p^{-n-1} = p^{-n-1} + tp^n + \ldots + \frac{t^n}{n!}p^{-1} + \ldots$$

При этом легко видеть, что $f(p)$ для $t < 0$ исчезает, для $t > 0$ при $p = 0$ лежит $(n-1)$-кратный полюс, который дает $\frac{t^n}{n!}$

Следовательно

$$p^{-n} \div\!\!\rightarrow \begin{cases} 0 & \text{для } t < 0, \\ \frac{t^n}{n!} & \text{для } t > 0. \end{cases}$$

В частном случае

$$p^0 \div\!\!\rightarrow \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{e^{pt}}{p}\,dp = 1.$$

Это имеет место при $t > 0$. На основании этого примера можно в аналогичных случаях приписывать функции значение 0 при $t < 0$.

Аналогично можно найти, если α комплексно

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{p}{p-\alpha} \div\!\!\rightarrow e^{\alpha t} \\ \frac{p}{(p-\alpha)^{n+1}} \div\!\!\rightarrow \frac{t^n}{n!}e^{\alpha t} \\ \frac{p^2}{p^2+\alpha^2} \div\!\!\rightarrow \cos\alpha t \\ \frac{\alpha p}{p^2+\alpha^2} \div\!\!\rightarrow \sin\alpha t \\ \frac{p^2}{p^2-\alpha^2} \div\!\!\rightarrow \cos\operatorname{hyp}\alpha t \\ \frac{\alpha p}{p^2-\alpha^2} \div\!\!\rightarrow \sin\operatorname{hyp}\alpha t \end{array}\right\} \tag{17}$$

Далее, из (11) и (12) следует

$$F\left(\frac{p}{a}\right) \div\!\!\rightarrow f(at). \tag{18}$$

Следовательно

$$e^{-ap} \cdot F(p) \div\!\!\rightarrow f(t-a). \tag{19}$$

Оператор e^{-ap} выражает функцию, которая при $t < a$ тождественно равна нулю, а при $t > a$ принимает значение, равное 1. Этой функцией выражается аналитически внезапно приложенный толчок; графически функция представлена на рис. 3а. Если сложить алгебраически две подобные функции, то получится функция, графически представленная на рис. 3*b* и аналитически выражаемая с помощью оператора

$$A(e^{-ap} - e^{-(a+h)p}).$$

Интегрирование этой функции в пределах от $-\infty$ до $+\infty$ дает Ah. Если при приближении h к нулю A соответственно возрастает

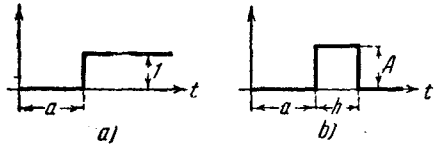

Рис. 3а и 3b. Графическое представление функции $S_1(t)$

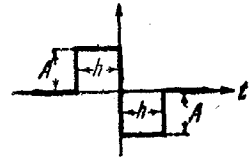

Рис. 4. Графическое представление функции $S_2(t)$

так, что произведение $Ah = 1$, то в пределе получается особая функция, которая при $t \gtrless 0$ равна нулю, а при $t = 0$ принимает бесконечное значение, так что ее интеграл от $-\infty$ до $+\infty$ имеет значение, равное 1. Аналитически эта функция может быть представлена с помощью оператора:

$$\lim_{h=0} \frac{e^{-ap} - e^{-(a+h)p}}{h} = p \cdot e^{-ap}.$$

Согласно (19) можно составить для систем $S_1(t)$ следующие символические равенства:

$$\left\{ \begin{array}{l} p \div\!\!\rightarrow S_1(t) \\ p \cdot e^{-ap} \div\!\!\rightarrow S_1(t-a) \end{array} \right\} \tag{20}$$

Легко видеть, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} S_1(t)\, dt = 1.$$

Функцию $S_1(t)$ можно рассматривать как внезапно приложенный импульс силы, который сообщает покоящейся массе в момент времени $t = 0$ скорость $v = \frac{1}{m}$.

С помощью совершенно аналогичных рассуждений, примененных к предельному случаю при h, стремящейся к 0, можно определить функцию $S_2(t)$, графически представленную на рис. 4 и выражающую два равных по величине и противоположно направленных толчка, следующих бесконечно быстро друг за другом. Такие два толчка внезапно сообщают покоящейся массе в момент $t=0$ отклонение от начального положения $s=\frac{1}{m}$. На основании изложенного определения функции получаем следующие соотношения:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} tS_2(t)\,dt=0 \quad \text{и} \quad S_2(t) \leftarrow\div p^2. \tag{21}$$

С помощью этих представлений можно определить дополнительно еще одну функцию

$$p^0 \div\!\!\rightarrow S_0(t).$$

Этот символический метод дает возможность очень изящно решать сложные задачи. Покажем его применение на двух простых примерах. Некоторая масса m находится под действием упругой силы, характеризуемой коэфициентом упругости c. Пусть в начальный момент времени $t=0$ масса смещена относительно начального положения на величину s_0 и обладает скоростью v_0. В этот начальный момент времени к ней внезапно прикладывается постоянная сила P. С помощью вышеприведенных обозначений можно составить следующее диференциальное уравнение движения:

$$m\frac{d^2s}{dt^2}+cs=PS_0(t)+v_0mS_1(t)+s_0mS_2(t).$$

На основании (16), (20) и (21) получаем

$$(p^2+\omega_0^2)\,S=\frac{P}{m}+v_0p+s_0p^2,$$

где $\frac{c}{m}=\omega_0^2$. Решая последнее уравнение относительно S, получаем

$$S(p)=\frac{P}{m\omega_0^2}\left(1-\frac{p^2}{p^2+\omega_0^2}\right)+\frac{v_0p}{p^2+\omega_0^2}+\frac{s_0p^2}{p^2+\omega_0^2}.$$

Заменяя на основании (17) операторы, получаем

$$s(t)=\frac{P}{m\omega_0^2}(1-\cos\omega_0t)+\frac{v_0}{\omega_0}\sin\omega_0t+s_0\cos\omega_0t.$$

Другой пример относится к случаю колеблющейся системы с непрерывно распределенными постоянными, а именно к однородной струне, к средине которой в начальный момент времени $t=0$ внезапно приложена постоянная сила P. Если обозначить через S натяжение струны, а через μ — массу единицы ее длины, то диферен-

циальное уравнение движения струны может быть записано так:

$$S\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \mu\frac{\partial y^2}{\partial t^2} = 0.$$

Обозначим $\frac{S}{\mu} = a^2$. На основании (18) можно получить следующее диференциальное уравнение для функции $Y(x, p)$:

$$\frac{d^2 Y}{dx^2} - \frac{p^2}{a^2} Y = 0.$$

Решением этого последнего уравнения, обращающимся при $x = 0$ в нуль, будет

$$Y = A \sin\text{hyp}\,\frac{p}{a}x.$$

Постоянная интеграция A может быть определена из условия равновесия для средины струны [1]:

$$2S\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x=\frac{l}{2}} = -P.$$

Отсюда получаем

$$A = \frac{P}{2S\frac{p}{a}\cos\text{hyp}\,\frac{pl}{2a}}.$$

Символическое решение имеет следующий вид:

$$y\left(\frac{l}{2}, t\right) \leftarrow\div \frac{Pl}{4S}\,\frac{\sin\text{hyp}\,\frac{pl}{2a}}{\frac{pl}{2a}\cos\text{hyp}\,\frac{pl}{2a}}.$$

Имеет место следующее соотношение:

$$\frac{\sin\text{hyp}\,p}{p\cos\text{hyp}\,p} = \frac{8}{\pi^2}\left(1 - \frac{p^2}{p^2 + \frac{\pi}{4}}\right) + \frac{8}{9\pi^2}\left(1 - \frac{p^2}{p^2 + \frac{9\pi^2}{4}}\right) + \ldots$$

Из этого соотношения с помощью некоторых преобразований и на основании (17) и (18) получаем искомое решение:

$$y\left(\frac{l}{2}, t\right) = \frac{Pl}{4S}\left[1 - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{8\cos(2n+1)\pi\frac{at}{l}}{(2n+1)^2\pi^2}\right].$$

Другая форма решения, которая в некоторых отношениях оказывается более наглядной, может быть получена на основании сле-

дующего разложения в ряд:

$$\frac{\sin \operatorname{hyp} p}{p \cos \operatorname{hyp} p} = \frac{1 - e^{-2p}}{p\,(1 + e^{-2p})} = \frac{1}{p}\,(1 - 2e^{-2p} + 2e^{-4p} - \ldots).$$

Этот ряд равномерно сходится, так как вдоль пути интеграции для (II) $\left|e^{-2p}\right| < 1$ на основании того, что $\mathrm{R}p(2p) > 0$.

Это разложение дает возможность интегрировать каждый член ряда и более детально истолковать решение

$$\begin{cases} \dfrac{4S}{Pl} \cdot y\left(\dfrac{l}{2}, t\right) = \dfrac{2at}{l} & \text{при } 0 < \dfrac{2at}{l} < 2, \\ \qquad\qquad = 4 - \dfrac{2at}{l} & \text{при } 2 < \dfrac{2at}{l} < 4, \\ \qquad\qquad = \dfrac{2at}{l} - 4 & \text{при } 4 < \dfrac{2at}{l} < 6 \end{cases}$$

и т. д.

Другие методы символического исчисления, в частности предложенные Шмидтом [24], изложены в статье Прагера [40], в которой также приведена литература по этому вопросу.

4. Приближенный способ расчета нестационарных процессов. При строгом расчете устанавливающихся процессов требуется решать алгебраические уравнения. Уже для системы с двумя степенями свободы получаются уравнения четвертого порядка. Представить результаты расчета в наглядной форме удается только в некоторых наиболее простых случаях. С системами с большим числом степеней свободы это сделать значительно труднее. Точное решение в этих случаях удается получить только при наложении таких условий, которые практически не выполняются. Однако и в этих случаях удается, рассматривая резонансные свойства систем, связать их с продолжительностью устанавливающегося процесса. На эту возможность впервые указал Кюпфмюллер [16].

Кюпфмюллер также первый указал на те выгоды, которые дает рассмотрение интегралов Фурье при различных способах включения. Внезапное включение постоянной силы K в начальный момент времени $t = 0$ можно на основании (2) представить в виде следующей формулы:

$$k = K\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin \omega t}{\omega}\, d\omega\right] = \frac{K}{2} + \int_0^\infty A(\omega) \sin \omega t d\omega.$$

Этот нарастающий процесс может рассматриваться как обусловленный действием постоянной силы $\frac{K}{2}$ и бесконечного ряда переменных сил $\frac{K}{\pi\omega} \sin \omega t$, находящихся в интервале частоты $d\omega$ и трактуемых строго стационарными, т. е. приложенными в течение всего

времени от $-\infty$ до $+\infty$. Множитель $A(\omega)=\frac{K}{\pi\omega}$ выражает тот вес, который имеет соответствующее колебание в образовании нарастающего процесса. Следовательно, с помощью функции $A(\omega)$ может быть представлен спектр нарастающего процесса. В рассматриваемом случае амплитуды отдельных колебаний обратно пропорциональны соответствующим частотам. Графически этот амплитудный спектр представится в виде гиперболы.

Если постоянная сила включается не мгновенно, а меняется по экспоненциальному закону с постоянной времени T по формуле $k=K\left(1-e^{-\frac{t}{T}}\right)$, то для амплитудного спектра Бюрк, Котовский и Лихте [67] получили следующее выражение:

$$A(\omega)=\frac{K}{\pi\omega}\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2T^2}}. \tag{22}$$

Спадание в области высоких частот происходит в этом случае значительно быстрее, чем при мгновенном включении постоянной силы, причем разница тем значительнее, чем больше постоянная времени T. Акустически это означает, что при таком „сглаженном" включении процесс включения представляется сопровождающимся меньшим шумом, который обусловливается главным образом высокими обертонами.

Короткий импульс, мгновенно включенный и по достижении максимального значения затухающий экспоненциально с постоянной времени T, имеет следующий амплитудный спектр (67):

$$A(\omega)=\frac{T}{\pi\sqrt{1+\omega^2T^2}}. \tag{22a}$$

В заключение интересно привести поведение электрического колебательного контура с параметрами R, L, C, находящегося в предельном случае апериодического режима, к которому в момент времени $t=0$ мгновенно подведена постоянная электродвижущая сила E. Как известно, в этом случае

$$i=\frac{2E}{R}\frac{t}{T}e^{-\frac{t}{T}},$$

где $T=\frac{2L}{R}$. Если положить $\frac{2E}{R}=1$, то для амплитудного спектра импульса тока получается

$$A(\omega)=\frac{2}{T}\frac{1}{\frac{1}{T^2}+\omega^2}. \tag{22b}$$

Если сила K включается в момент t_1, а в момент $t_2=t_1+T$ выключается, то надо сложить два процесса, выражаемых формулой (2),

но с противоположными знаками. Постоянные силы $\frac{K}{2}$ уничтожаются и получается следующий амплитудный спектр:

$$A(\omega) = \frac{2K}{\pi\omega} \sin \frac{\omega T}{2}. \tag{23}$$

И в этом случае амплитуды отдельных обертонов убывают с увеличением их частоты, однако не монотонно, а колебательно. Для всех частот, периоды которых заключают целое число T, $A\omega = 0$.

Особенно интересен случай мгновенного включения синусоидальной силы с круговой частотой Ω. В этом случае в формулу (2) вместо K надо подставить $K \sin \Omega t$. Для амплитудного спектра получается следующее выражение:

$$A(\omega) = \frac{K\Omega}{\pi(\Omega^2 - \omega^2)}. \tag{24}$$

При $\omega = \Omega$ функция $A(\omega)$ обращается в бесконечность. Кривая $A(\omega)$ имеет вид, аналогичный резонансной кривой системы без затухания с собственной частотой Ω.

Если синусоидальная сила $K(\lambda) = a \sin \Omega\lambda + b \cos \Omega\lambda$, причем $\sqrt{a^2 + b^2} = 1$, включается в момент $t = -\frac{T}{2}$ и продолжает действовать до момента $t = +\frac{T}{2}$, то амплитудный спектр по Бюрку, Котовскому и Лихте [68] имеет следующий вид:

$$\begin{cases} A(\omega) = \frac{1}{\pi} \sqrt{F^2 + G^2 + 2FG(1 - 2a^2)}, \\ \text{причем} \\ F = \frac{\sin(\Omega - \omega)\frac{T}{2}}{\Omega - \omega}, \quad G = \frac{\sin(\Omega - \omega)\frac{T}{2}}{\Omega - \omega}. \end{cases} \tag{25}$$

Если ограничиться не слишком низкими частотами и не слишком короткими временами включения, то можно пренебречь всеми членами с G как с малыми по сравнению с F^2 и получить следующее приближенное выражение:

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin(\Omega - \omega)\frac{T}{2}}{\pi - \omega}.$$

Можно получить другую форму для амплитудного спектра, если принять во внимание, что фаза при включении, как это установлено экспериментально, оказывает на ход устанавливающегося процесса второстепенное влияние. На этом основании можно положить $a = 1$ и $b = 0$. Если затем принять, что продолжительность включения T составляет целое число периодов $\frac{2\pi}{\Omega}$, не ограничивая

этим условием существенно общность рассмотрения, то получается

$$A(\omega) = \frac{2\Omega}{\pi(\Omega^2 - \omega^2)} \sin \omega \frac{T}{2}. \tag{26}$$

Отсюда легко представить себе форму кривой $A(\omega)$. Огибающая кривая имеет такую же форму, как в формуле (24). Значения (26) колеблются между огибающей кривой (24) и осью круговых частот ω так, что для всех частот $\omega = \frac{2\pi n}{T}$, где n — целое число, амплитуда соответствующего обертона обращается в нуль. Колебания происходят тем скорее, чем больше продолжительность включения T. В этом случае уже амплитуда при $\omega = \Omega$ не обращается в бесконечность, но принимает значение

$$A(\omega)_{\omega=\Omega} = \frac{T}{2\pi}, \tag{27}$$

т. е. возрастает с увеличением продолжительности включения.

При вычислении устанавливающихся процессов, возникающих вследствие причин, подобных вышерассмотренным, поступают так, что для каждого обертона амплитудного спектра рассчитывают действие по правилам, выведенным для незатухающих колебаний, и затем суммируют эти отдельные действия. Отдельное действие может быть связано с соответствующей вызывающей его причиной при помощи соотношения $s = B \cdot A(\omega)$, где коэфициент передачи B в общем случае должен быть взят в комплексной форме $B = B(\omega)e^{i\beta(\omega)}$, чтобы отразить как амплитудные искажения, так и фазовые. B и β являются функциями частоты. Интегральный результат может быть получен путем суммирования отдельных действий в форме интеграла Фурье, выражаемого в данном случае так же, как и функция B в комплексной форме:

$$S = \int_{-\infty}^{+\infty} s d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\omega) B(\omega) e^{i(\omega t + \beta)} d\omega.$$

В простейших случаях можно вычислить точное значение этого интеграла, как это было сделано Кюпфмюллером [16] для системы с одной степенью свободы. Преимущество такого способа рассмотрения состоит в том, что устанавливающиеся процессы путем введения коэфициента передачи, с помощью которого представляется частотная характеристика рассматриваемой системы, связываются с ее резонансными свойствами. В более сложных случаях поступают так, что выбирают для коэфициента передачи наиболее простые формы, приближающиеся к действительному поведению системы, и выполняют интегрирование.

Наиболее простым является случай, когда B является постоянным до некоторой предельной частоты ω_0 и за этой границей принимается исчезающе малым. Этот случай довольно близко реализуется

в высококачественных микрофонах. Что же касается угла коэфициента передачи, то его с хорошим приближением можно принять пропорциональным частоте, т. е. $\beta = \omega t_0$. Если приложить в момент $t = 0$ постоянную силу K, то получаем на основании (2)

$$x = BK\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\int_0^{\omega_0} \frac{\sin\omega(t - t_0)}{\omega}\, d\omega\right].$$

Интегрирование дает результат, выражаемый с помощью функции интегрального синуса (рис. 5)

$$x = BK\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\,\mathrm{Si}\,\omega_0(t - t_0)\right].$$

Эта формула не дает точного решения, так как в начальный момент времени $t = 0$ смещение x не равно нулю, как это должно быть, исходя из условий задачи, а обращается в нуль только при $t = -\infty$. Причина этого расхождения лежит в том, что взятая форма для фактора передачи слишком идеализирована и строго может

Рис. 5. Включение низкочастотного фильтра (по Кюпфмюллеру)

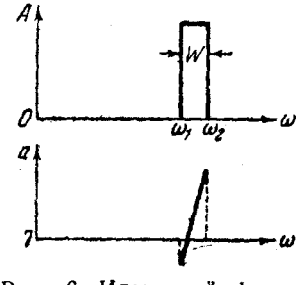

Рис. 6. Идеальный фильтр (по Кюпфмюллеру)

применяться только к системам с бесконечно большим числом степеней свободы и с бесконечно большим временем раскачки. Время нарастания τ может быть получено как проекция касательной в точке $t = t_0$ на ось абсцисс. На этом основании получаем $\tau = \frac{\pi}{\omega_0}$ или $\tau\omega_0 = \pi$. Это основное соотношение, полученное впервые Кюпфмюллером [16], устанавливает, что время нарастания для подобных идеализированных систем обратно пропорционально предельной частоте. Для того чтобы этот результат совпадал с практически получаемыми резонансными кривыми, необходимо выбрать предельную частоту ω_0 так, чтобы имело место следующее соотношение:

$$\omega_0 = \frac{1}{B(0)}\int_0^{\infty} B(\omega)\, d(\omega).$$

Практически это означает ту частоту, при которой кривая $B(\omega)$ имеет наибольшую кривизну. Особое значение имеют устанавли-

вающиеся процессы в селективных системах, которые особенно хорошо отвечают только на определенную полосу частот и очень мало отвечают на частоты, лежащие за пределами этой полосы. Наиболее простой пример представляет колебательная система с одной степенью свободы, уже рассмотренная в II, 1. Строгое решение задачи для системы с двумя степенями свободы при определенных наложенных условиях также уже дано (II, 2). В более сложных случаях можно рассматривать резонансную кривую как имеющую форму прямоугольника, а фактор передачи принять в этом диапазоне возрастающим линейно с частотой (рис. 6).

Если в момент времени $t=0$ начинает мгновенно действовать синусоидальная сила с частотою $\Omega=\frac{\omega_1+\omega_2}{2}$, т. е. равной средней частоте пропускаемого диапазона, то вычисление, подобное вышеизложенному, приводит для времени нарастания к тому же правилу Кюпфмюллера

$$\tau=\frac{2\pi}{\omega_1-\omega_2}=\frac{2\pi}{\Delta\omega}; \quad \text{или} \quad \tau\Delta\omega=2\pi.$$

Следовательно, время нарастания обратно пропорционально пропускаемой ширине частот. В практических случаях, в которых резонансная кривая не имеет формы точного прямоугольника, за предельные частоты принимаются такие, при которых резонансная кривая опускается от своего максимального значения B_{max} до $\frac{B_{max}}{\sqrt{e}}=0{,}607\ B_{max}$.

При помощи амплитудных спектров можно по способу Бюрка, Котовского и Лихте [83] получить ряд качественных выводов относительно характера и продолжительности устанавливающихся процессов. Кривая амплитудного спектра, получившегося при действии синусоидальной силы в течение времени T, имеет согласно (27) максимум $A(\omega)_{max}=\frac{T}{2\pi}$, соответствующий частоте приложенной силы. Чем длительнее продолжается тон, тем сильнее выступает частота синусоидальной силы по сравнению с другими частотами, обусловливающими шумы при включении и выключении. Если сила включается не сразу с максимальным своим значением, но постепенно с некоторой постоянной времени, то и в этом случае, так же как при включении постоянной силы, согласно (22) посторонние частоты выражены по сравнению с частотою вынуждающей силы тем слабее, чем больше время нарастания, т. е. чем мягче производится включение.

Если выбрать частоту синусоидальной силы Ω, приложенной к колебательной системе, так, чтобы она соответствовала максимуму резонансной кривой, то из амплитудного спектра еще более выделяется эта частота по сравнению с посторонними частотами. Возникающее колебание начинает мягко нарастать. Постоянная времени нарастания колебаний в системе с одной степенью свободы

определяется формулой $T = \frac{1}{fd}$, где f означает частоту, а d — логарифмический декремент. Если включение производится на крутом боку резонансной кривой, то частота вынуждающей силы менее резко выражена, а частоты, расположенные вблизи, усилены вследствие резонанса. В результате процесс включения дает амплитудный спектр, подобный получающемуся при мгновенном включении синусоидальной силы, колебания возникают очень быстро, почти сразу, и результирующая постоянная времени практически равна нулю. Наконец, если частота вынуждающей силы значительно отличается от резонансной частоты, то в амплитудном спектре выделяется область, соответствующая резонансу, а частота вынуждающей силы выражена очень слабо. В этом случае шумы при включении выделяются лучше частоты вынуждающей силы. В этом случае процесс соответствует отрицательной постоянной времени. Разобранные случаи пояснены на рис. 7.

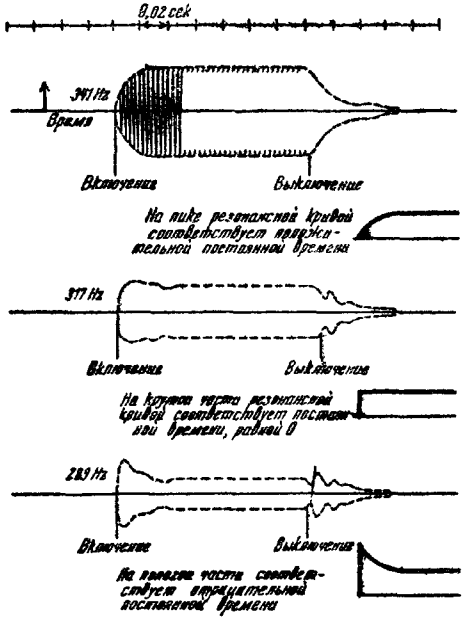

Рис. 7. Осциллограммы и упрощенные схемы некоторых типичных процессов, происходящих при включении и выключении (по Бюрку, Котовскому и Лихте)

III. Слуховое восприятие нестационарных звуковых процессов

5. Модель уха и устанавливающиеся процессы. Согласно представлениям Гельмгольца[6] основная мембрана человеческого уха состоит из большого числа волокон, настроенных на различные тона в пределах от нижнего до верхнего предела слуха. При воздействии звука отдельные волокна, собственные частоты которых совпадают с частотами воздействующего звука, начинают колебаться и возбуждают окончания слуховых нервов. Эта теория хорошо объясняет разрешающую способность уха, т. е. способность различать тоны различной частоты. Однако сразу начинают возникать затруднения при попытке объяснить восприятие нестационарных звуков. Гельмгольц определил затухание волокон мембраны, наблюдая, при какой быстроте трелей ухо перестает различать отдельные тона, переходящие в слитный звук, и отсюда за-

ключил, что логарифмический декремент затухания для всех резонаторных элементов уха один и тот же и равен 0,23. Ветцман [4] измерял быстроту трелей, при которой наблюдается слитие двух различных тонов при различных частотах, и пришел к заключению, что необходимая для этого частота трелей одинакова при всех высотах. Из этого факта следует заключить, что все резонаторы затухают в течение одного и того же времени до одинаковой доли от их начальной амплитуды, т. е. что логарифмический декремент уменьшается с увеличением частоты.

Определение затухания резонаторных элементов уха может быть выполнено и другим методом, а именно по снятой резонансной кривой. Определение остроты резонансной кривой дает непосредственно значение логарифмического декремента. Очевидно, подобные измерения могут быть выполнены только в том случае, если удается исключить колебания соседних волокон и наблюдать результат, обусловленный колебаниями изолированного волокна. Подобные условия наблюдаются при некоторых болезнях и повреждениях слухового органа, когда из всей области слухового восприятия выключаются некоторые определенные области частоты, вследствие разрушения соответствующих волокон. В этих случаях удается снять хотя бы половину резонансной кривой. Резонансная кривая оказывается поразительно острой. Ей соответствует логарифмический декремент $d = 0,0006$. Такое небольшое затухание должно обусловливать весьма продолжительный процесс нарастания колебаний; однако этого никогда не наблюдается. Подобное несоответствие приводит по мнению Бекеши [22] к заключению, что представления Гельмгольца о роли основной мембраны в процессе восприятия слуха не подтверждаются экспериментально. Бекеши показал на построенной им модели улитки, что основная мембрана при воздействии звуков средних частот колеблется одинаково по всему своему протяжению, начиная от стремени, и что только в области геликотремы она остается в покое. Теория Бекеши, обоснованная им на опытах с моделью улитки, является дальнейшим развитием и углублением резонансной теории слуха, предложенной Гельмгольцем. Селективность слухового восприятия, которая совершенно не может быть объяснена при сделанных предположениях о характере колебания основной мембраны, следует приписать другим причинам, которые были экспериментально установлены на опытах с моделью улитки. По теории Бекеши, при действии звука по обеим сторонам основной мембраны возникают вихри, местоположение которых определяется частотой звука и перемещается по направлению к геликотреме при уменьшении частоты.

Для выяснения механизма действия на ухо нестационарных звуков необходимо определить его затухание и собственную частоту. Обе эти характеристики могут быть определены из полученных собственных затухающих колебаний уха. Бекеши [37,66] удалось выполнить эти определения путем прослушивания с помощью резиновой трубки (другим наблюдателем) или регистрации с по-

мощью подводящего микрофона коротких звуковых импульсов (щелчков), возникающих в ухе при глотательных движениях. Из полученных таким способом кривых были определены значения логарифмического декремента, оказавшиеся порядка $d = 1,1 - 1,8$, и собственная частота уха порядка 1200 — 1500 Hz. Отсюда следует, что колебательные процессы, реально происходящие в среднем ухе, могут быть правильно описаны в предположении, что они находятся в предельном случае апериодичного режима. Бекеши смог выяснить на модели (с помощью стробоскопирования) механизм действия на ухо апериодических импульсов. При этом наблюдается поршнеобразное движение в области, близкой к стремени; основная мембрана моментально выпячивается в части, прилегающей к стремени, и остается в покое в части, прилегающей к геликотреме (рис. 8, сплошная кривая). Затем выпятившаяся часть основной мембраны апериодически возвращается к положению покоя, а по мембране по направлению к геликотреме распространяется волна, которая через 0,05 сек. выравнивается.

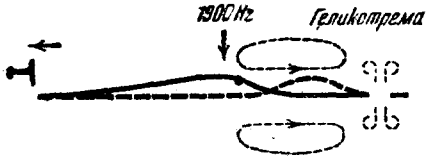

Рис. 8. Характер движения основной мембраны (по Бекеши)

Если в ухе действительно происходят процессы, наблюдаемые на моделях, то следует ожидать, что „центр тяжести" импульса во времени наступит при возбуждении уха тем раньше, чем скорее затухает бегущая к геликотреме волна. Так как эти области основной мембраны служат для восприятия тонов низких высот, то путем наложения на импульс достаточно сильного постоянного низкого тона можно совершенно замаскировать импульс в дальних частях основной мембраны. Если подвести к обоим ушам с помощью двух телефонов одновременные звуковые импульсы, причем осуществить в одном ухе маскировку звукового импульса с помощью низкого тона, то в этом ухе „центр тяжести" импульса во времени наступит раньше, чем в другом, где волна распространяется по невозмущенной основной мембране. Эти процессы вызовут субъективное смещение „звукового образа". На основании бинаурального эффекта одновременные и одинаковые звуки вызывают „звуковой образ", лежащий в средней плоскости головы. При добавлении к одному звуку маскирующего низкого тона следует ожидать смещения „звукового образа". Бекеши [36, 66] удалось на опыте наблюдать это смещение и тем самым подтвердить выводы, полученные им на модели уха.

6. Восприятие высоты тона. Сравнительно давно был подвергнут исследованию вопрос о том, сколько времени должен звучать тон, чтобы ухо могло отчетливо установить его высоту. Уже в 1873 г. Мах [1] установил, что время распознавания для тона 128 Hz составляет 35 *мсек*. Для тонов 500, 1000 и 2000 Hz Любке [14] определил минимальные времена звучания соответственно в 10, 7, 8, 6 и 7, 3 *мсек*. Исследования других авторов по этому

вопросу производились с недостаточно совершенной методикой и привели к неверным результатам. Весьма подробное исследование этого вопроса было выполнено Бюрком, Котовским и Лихте [68] с помощью методики, ранее разработанной Лаймбахом [5]. Все необходимые включения контактов во время производства измерений производились автоматически с помощью маятника Гельмгольца. Полученные ими значения минимального времени, необходимого для отчетливого восприятия высоты, на основании опытов со многими наблюдателями, выполненными при разных частотах, представлены графически на рис. 9, где кривые a и b ограничивают области определенных значений.

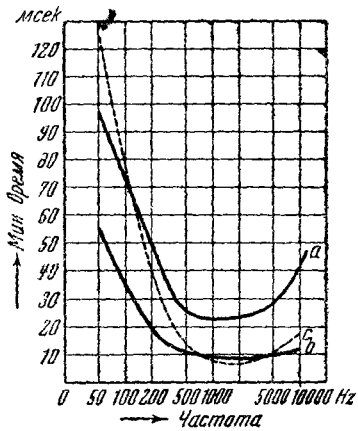

Рис. 9. Время распознавания высоты тона, представленное как функция частоты: a—верхняя граница, экспериментально установленная; b—нижняя граница, экспериментально установленная, c — вычисленная кривая (по Бюрку, Котовскому и Лихте)

При очень коротком звуковом импульсе ухо слышит звук без определенного тонального характера. При увеличении времени звучания начинает восприниматься тональный характер, который, однако, при тонах как очень высоких, так и очень низких не соответствует истинной частоте звучащего импульса. В области же средних частот, где наблюдаются наименьшие значения минимальных времен, необходимых для установления частоты, слуховые ощущения высоты с самого же начала приобретают правильный тональный характер. Воспринимаемая ухом высота коротких звуковых импульсов кажется более высокой в области низких частот и более низкой в области высоких частот. Для объяснения этого результата авторы [68] предложили следующую теорию. Если рассматривать ухо как систему с одной степенью свободы, обладающую собственной частотой Δ (при отсутствии затухания) и работающую на границе апериодического режима, и принять, что воспринимаемый ухом звуковой импульс разлагается в амплитудный спектр, изображаемый формулой (25), то получается следующее выражение для величины энергии, действующей на ухо и выраженной в функции частоты:

$$i_\omega^2 = c\,\frac{4\Delta^2\omega^2}{(\omega^2+\Delta^2)^2}\,\frac{\sin^2(\Omega-\omega)\frac{T}{2}}{(\Omega-\omega)^2}. \qquad (28)$$

Полагая, что максимум этого выражения наступает при частоте $\Omega + x$, получаем с помощью приближенного вычисления

$$\frac{x}{\Omega} = \frac{12}{\Omega^2 T^2}\,\frac{\Delta^2-\Omega^2}{\Delta^2+\Omega^2}.$$

Отсюда следует, что чем больше время звучания импульса T, тем меньше относительное смещение максимума звуковой мощности. Далее, при $\Omega < \Delta$ это смещение положительно, т. е. максимум перемещается в сторону более высоких частот, и наоборот, при $\Omega > \Delta$ относительное смещение отрицательно, т. е. максимум перемещается в сторону более низких частот. Если принять, что восприятие высоты тона определяется в основном частотой, на которую приходится максимум звуковой мощности, то приведенные теоретические соображения удовлетворительно объясняют экспериментальные факты.

Если два тона следуют друг за другом, разделенные некоторым интервалом времени, то наименьший интервал, при котором ухо еще в состоянии констатировать раздельное следование тонов от слитного их восприятия, равен по исследованиям Бюрка, Котовского и Лихте [69] вышеопределенному минимальному времени, необходимому для отчетливого восприятия высоты.

В своей другой работе Бюрк, Котовский и Лихте [79] исследовали вопрос о степени концентрации мощности в звуковом спектре, необходимой для отчетливых восприятий высоты. Полная энергия E_g, распределенная по всему звуковому спектору, может быть вычислена путем интегрирования выражения (28) по частоте в пределах от 0 до ∞. Эту полную энергию можно полагать состоящей из трех частей: $E_g = E_e + E_u + E_0$, каждая из которых может быть вычислена с помощью соответствующего интегрирования. Здесь E_e означает энергию, приходящуюся на частоты в диапазоне, окружающем воспринимаемую частоту, т. е. ограниченном частотами $(1-p)\Omega$ и $(1+p)\Omega$ соответственно. E_u означает энергию, приходящуюся на нижележащие частоты диапазона, начиная от $(1-p)\Omega$, а E_0 означает энергию, приходящуюся на вышележащие частоты, начиная от $(1+p)\Omega$. Следовательно, E_e означает собственно тональную энергию, необходимую для восприятия определенной высоты, а $E_u + E_0$ — энергию побочную. Для p принимается значение $\pm 0,05$, а собственная частота уха Δ принимается равной $2\pi \cdot 1300$. Отношение $\frac{E_e}{E_g} = \mu$ выражает относительное количество энергии, приходящейся на диапазон частот, лежащих в пределах $\pm 5\%$ от определяемой частоты. Численное значение величины μ определяется при выбранных T и разных частотах Ω так, чтобы возможно ближе подойти к экспериментально полученным кривым a и b (рис. 9). Это будет достигнуто, если принять $\mu = 0,70$. При этом предположении построена кривая c рис. 9. Из этого далее следует, что если при непрерывном распределении энергии по всему звуковому спектру отчетливо воспринимается тон определенной высоты, то 70% всей звуковой энергии должно быть сконцентрировано около определяемого тона в пределах $\pm 5\%$. С помощью дальнейших вычислений можно получить, что если при $\frac{\Omega}{2\pi} = 65$ Hz выбрать время включения T, равным $\frac{1}{3}$ минимального времени, необходимого для отчетливого установления высоты,

то $\frac{E_u}{E_g} = 0,31$, а $\frac{E_o}{E_g} = 0,3725$. Это значит, что на область частот, лежащих выше частоты звукового импульса, приходится большее количество энергии, чем на нижележащий диапазон. При подобных же допущениях для $\frac{\Omega}{2\pi} = 9100\,\mathrm{Hz}$ получаются соответственно следующие соотношения: $\frac{E_u}{E_g} = 0,504$ и $\frac{E_o}{E_g} = 0,009$.

В этом случае „центр тяжести" слухового восприятия смещается в сторону более низких частот. Эти теоретические рассуждения приводят к заключению, что очень короткие звуковые импульсы низкого тона должны казаться уху более высокими, а очень короткие звуковые импульсы высокого тона — более низкими.

Сделанное предположение о величине значения $\mu = 0,70$ было подтверждено экспериментально. Представляемая формулой (28) функция, дающая частотный спектр короткого тона, звучащего в течение времени T, имеет ход, подобный ходу резонансной кривой простой колебательной системы с максимумом, соответствующим частоте Ω и лежащим тем выше, чем длиннее время звучания T. При уменьшении же времени звучания T кривая делается более пологой. Частотный спектр подобного же характера может быть получен и другим способом. Амплитудный спектр короткого импульса может быть представлен в виде отрезка горизонтальной прямой. Если возбудить с помощью такого импульса простой колебательный контур, то его колебания можно представить в форме частотного спектра, соответствующего его резонансной кривой, т. е. в форме, существенно подобной частотному спектру очень короткого тона. Расширение резонансной кривой, происходящее вследствие уменьшения времени звучания, может быть здесь осуществлено с одинаковым результатом путем увеличения затухания колебательного контура. Опыты были поставлены так, что короткие импульсы с помощью соответствующей схемы подавались для возбуждения подходящего колебательного контура с регулируемым затуханием. Затухание подбиралось такой величины, чтобы прослушиваемый импульс обладал бы еще определенным тональным характером, высоту которого можно было достоверно установить. После возведения в квадрат получившегося при этом затухании частотного спектра и вычисления с помощью планиметра площади, было установлено, что в области, расположенной около резонансной частоты в пределах от нее $\pm 5\%$, сконцентрировано $68,6\%$ всей энергии. Этот результат находится в блестящем согласии с ранее полученным.

Приближенное значение времени распознавания высоты тона может быть получено на основании принципа, формально напоминающего принцип неопределенности, как это впервые было проделано Стьюартом [31]. Этот принцип может быть формулирован неравенством: $\Delta\nu \cdot \Delta t \geqslant 1$. Это означает, что частота тона, звучащего в течение интервала времени Δt, может быть установлена с ошибкой не меньшей чем $\Delta\nu$. Кривая *c* рис. 9 в области низких

частот до 1000 Hz соответствует этому результату, если принять, что частота определяется с точностью до целого тона.

Дополнительные данные относительно функционирования органа слуха человека были получены Боуманом [89] при исследовании вопроса о различении слухом быстрых коротко длящихся изменений высоты длительно звучащего тона. Изменения по высоте очень короткой продолжительности воспринимаются ухом как звук, не имеющий тонального характера. Восприятие высоты тона наступает, только начиная с некоторой минимальной продолжительности звучания промежуточного тона, величина которой обратно пропорциональна его частоте.

Число периодов, которые необходимы для восприятия высоты промежуточного тона, оказалось независимым от высоты и равным приблизительно 8. Из этого следует, что каждому интервалу времени d соответствует вполне определенная предельная высота промежуточного тона $\frac{8}{d}$. Этот полученный Боуманом результат в диапазоне частот от 200 до 1400 Hz находится вообще в согласии с данными, представленными на рис. 9. Далее, было найдено, что в случае очень коротких промежуточных тонов, которые воспринимаются ухом как звук без определенного тонального характера, требуется наличие около 40 Hz разницы между частотами длительно звучащего тона и короткого промежуточного тона для того, чтобы промежуточный тон мог быть вообще воспринят ухом. Если же промежуточный тон продолжает звучать настолько длинный интервал времени, что воспринимается ухом как таковой, то для него справедливы нормальные значения порога восприятия высоты. Из этих данных автор заключает, что механизм для анализа звука заложен не в центральной нервной системе, которая не в состоянии реагировать на такие короткие интервалы времени. При прослушивании двух промежуточных тонов одинаковой частоты, следующих друг за другом через определенные промежутки времени, предельную высоту тона получают из удвоенной величины интервала звучания промежуточного тона, если наблюдается субъективное смешивание, или „суммирование", промежуточных тонов. В противном случае, при отсутствии субъективного смешивания, предельная высота тона определяется из интервала звучания отдельного промежуточного тона. Например, при частоте длительно звучащего тона в 100 Hz и промежуточного тона в 530 Hz было установлено, что при величине разделительного интервала в 100 *мсек* и меньше наблюдается суммирование двух промежуточных тонов. Это суммирование происходит по обычным психологическим законам: оно не зависит от продолжительности отдельного импульса, от числа и интенсивности отдельных импульсов; следовательно суммирование является функцией нервной системы. Суммирование наблюдается также и при различных высотах промежуточных тонов. Чем больше их громкость, тем дальше могут отстоять друг от друга частоты двух промежуточных тонов, дающих субъективное впечатление суммирования. Из этих данных следует заключить, что

физиологически активная ширина основной мембраны увеличивается с возрастанием громкости. В заключение автором было исследовано большое количество звуков различной частоты, следующих друг за другом не систематически, однако через настолько большие промежутки времени, что суммирование не имело места. Оказалось, что в этом случае возникает ощущение шума. На основании этого наблюдения автор заключает, что шумы, так же как и тоны, воспринимаются кортиевым органом. Для того чтобы получилось впечатление шума, весь процесс должен продолжаться от 200 до 400 *мсек* в зависимости от интенсивности.

Шумы с непрерывным частотным спектром были исследованы Тиде [84].

Для получения шумов были использованы разряды в счетчике α-частиц, эффект Баркгаузена, микрофонные шумы и дробовой эффект. Частотный спектр дробного эффекта обладает той особенностью, что его отдельные компоненты во всем диапазоне имеют одну и ту же величину. При этих шумах также требуется время около 200 *мсек* для получения впечатления шума.

7. Слуховое восприятие устанавливающихся процессов. Согласно наблюдениям Бекеши [29] при прекращении звучания тона, происходящем по правильному экспоненциальному закону, ухом субъективно воспринимается монотонное спадание звука, пока время спадания до порога слухового восприятия не превышает 0,8 сек. При более продолжительном времени спадания, происходящем все время монотонно, ухом субъективно воспринимается минимум спустя 0,8 сек. после начала процесса спадания, независимо от начальной громкости. Причина этого заключается в том, что непрерывный процесс, продолжающийся дольше известного интервала времени, не воспринимается уже как одно целое в том смысле, как это определяется в психологии. Такой интервал называют „временем наличия". Это свойство слуха находит свое отражение и в языке: слова с большим чем четыре числом слогов весьма редки. Так как в среднем время произнесения каждого слога составляет 0,2 сек., то время произнесения четырехсложного слова составляет как раз „время наличия".

В более поздних работах того же автора [36] был подробно исследован вопрос о влиянии устанавливающихся процессов на слуховое восприятие. Временем спадания (или временем отзвука, Ausschwingdauer) называют время, в течение которого тон затухает от своего первоначального значения до порога слухового восприятия. Субъективное восприятие прекращающегося звучания, зависящее, кроме времени спадания, еще от уровня громкости [1]) и частоты, может быть определено как сила отзвука (Ausschwingstärke). При уменьшении времени отзвука наступает такое ощущение, когда ухо

---

[1]) Уровнем громкости какого-либо звука называется уровень силы равногромкого с ним тона 1000 Hz. За единицу уровня громкости принимается *фон*, соответствующий ранее установленному термину децибел.

Прим. перев.

субъективно не в состоянии уже сделать различия между мгновенным прекращением звучания и спадающим звучанием. Соответствующее этому ощущению сэбиновское время реверберации (т. е. время, в течение которого амплитуда звучащего тона уменьшается до 0,001 доли своего первоначального значения) может быть определено как физиологическое время отзвука, а соответствующее этому слуховое ощущение — как физиологическая сила отзвука. Эта терминология может быть применена также и к процессам нарастания звука (назвук) и вообще ко всем устанавливающимся процессам. Измерение физиологического времени отзвука производится так, что при постепенном уменьшении времени спадания наступает такое ощущение, когда ухо уже не может различить достигнутый процесс спадания от такого же, но характеризуемого в 10 раз меньшим временем спадания. При этих измерениях было установлено возрастание физиологического времени отзвука с уменьшением уровня громкости (рис. 10).

Рис. 10. Физиологическое время отзвука при различных уровнях громкости (по Бекеши)

Для физиологического времени нарастания звука было получено одно и то же значение 0,07 сек. при различных уровнях громкости. При более сложных процессах можно, как это заметил Ашов [93], наблюдать различие между значительно более короткими устанавливающимися процессами. Очевидно, при этом восприятии имеет значение не только продолжительность субъективного впечатления, но еще и форма огибающей кривой, а также и характер изменения амплитуд отдельных обертонов с течением времени. Бекеши нашел, что величина порога различия для времени отзвука мгновенно наступающих устанавливающихся процессов приблизительно составляет 10%. Если же устанавливающийся процесс следует за более длительно звучащим тоном, то при коротких процессах наблюдается возрастание порога различия. Если выбрать продолжительность процесса нарастания в 1,5 сек., то при уровне громкости в 60 *фон* порог различия оказался равным приблизительно 16% для частот от 800 Hz и выше; при более низких частотах величина порога различия оказалась больше и при 100 Hz составила около 27%. Относительно влияния изменений в ходе процесса спадания на слуховое восприятие было установлено, что если во время процесса спадания изменить время спадания на 10—20%, то это субъективно воспринимается как скачок в ходе кривой затухания. Это наблюдается при более длинных временах спадания — порядка 1—2 сек. При более коротких временах спадания наблюдается возрастание еще различимого ухом процентного изменения времени спадания. При процессах нарастания звука величина процентного изменения времени нарастания, едва воспринимаемого ухом, больше и составляет 20—30% при медленных процессах нарастания.

В заключение этих опытов путем обрывания процесса нарастания

до достижения им предельного значения амплитуды с сохранением ее величины, достигнутой в момент обрывания, было установлено, что нарастающий процесс при достижении им 75% своей стационарной амплитуды воспринимается ухом как уже закончившийся.

Исследованию вопроса об уровне громкости звуковых импульсов посвящены работы Штейделя [38] и Бюрка, Котовского и Лихте [67, 80]. Последние авторы при этом показали, что можно с хорошим приближением вычислить уровень громкости на основании формы звукового импульса, исходя из некоторых правдоподобных предположений о механизме действия человеческого слуха. При этом были весьма убедительно подтверждены вышеприведенные представления о механизме действия слуха.

Процесс нарастания постоянного тока, происходящий по закону $i = i_0\left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right)$, может быть представлен на основании (22) в форме следующего амплитудного спектра:

$$\frac{A(\omega)}{i_0} = \frac{1}{\pi\omega}\,\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2T^2}}.$$

При этом для несглаженного импульса с амплитудой $a < 1$. $A(\omega) = \frac{a}{\pi\omega}$ согласно (2). Для вычисления уровня громкости надо суммировать энергии отдельных частей спектра. В первом приближении можно отбросить наиболее высокие и наиболее низкие частоты и принять постоянной чувствительность уха в диапазоне от ω_1 до ω_2. При этом уровень громкости импульса сглаженной формы получается равным

$$L_A = \sqrt{\pi\int_{\omega_1}^{\omega_2}\left[\frac{A(\omega)}{i_0}\right]^2 d\omega} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{1}{\omega_1} - \frac{1}{\omega_2} + T(\operatorname{arc\,tg}\omega_1 T - \operatorname{arc\,tg}\omega_2 T)},$$

а несглаженной формы

$$L_P = \frac{a}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{1}{\omega_1} - \frac{1}{\omega_2}}.$$

Измерения состояли в том, что уровни громкости сглаженного и несглаженного импульсов сравнивались между собой и уравнивались путем изменения величины несглаженного импульса. Из уравнения $L_A = L_P$ может быть определена величина a

$$a^2 = 1 + \frac{T}{\frac{1}{\omega_1} - \frac{1}{\omega_2}}(\operatorname{arc\,tg}\omega_1 T - \operatorname{arc\,tg}\omega_2 T).$$

Экспериментальные и теоретические результаты представлены на рис. 11, на котором уровни громкости представлены в функции постоянной времени T. Кривая a получена экспериментально. Кривая c вычислена на основании вышеприведенных соображений в диапазоне частот, применяемом в телефонной аппаратуре, а именно между 300 и 2400 Hz. Еще бо́льшее совпадение может быть получено, если выбирать пределы интеграции соответственно различиям громкости на основании кривых равной громкости, так, чтобы чувствительность уха изменялась в пределах ± 6 *фон*. Таким способом получена кривая d рис. 11. На основании прекрасного совпадения теоретических выводов с экспериментальными данными следует заключить, что ухо при восприятии звуковых

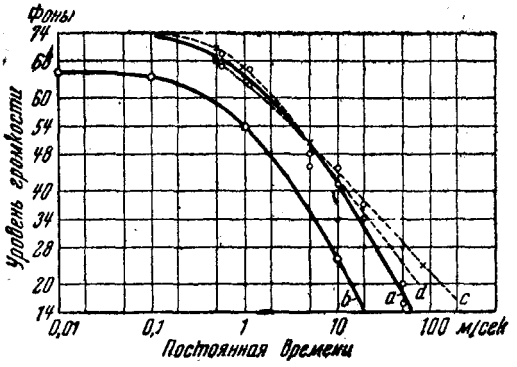

Рис. 11. Уровни громкости звуковых импульсов

импульсов можно рассматривать как линейный приемник. Штейдель [38] измерил уровень громкости импульсов в телефоне, происходящих при внезапном выключении постоянного тока, спадающего по экспоненциальному закону, при различных постоянных времени. Вычисление, выполненное на основании амплитудного спектра (22а), приводит к следующему выражению [67]:

$$L = \sqrt{\frac{T}{\pi} \operatorname{arc\,tg} \frac{T(\omega_2 - \omega_1)}{1 + \omega_1 \omega_2 T^2}}\,. \tag{29}$$

Если в диапазоне частот от ω_1 до ω_2, в котором выполняется интегрирование, использованы те же самые соображения, которые были применены при получении кривой d рис. 11, то получаются пунктирные кривые a', b', c' рис. 12, вычисленные для различных максимальных значений силы тока. Кривые a', b', c' так проведены, чтобы они совпадали для постоянной времени $T = 10^{-3}$ сек. с кривыми a, b, c, экспериментально полученными Штейделем. Совпадение теоретических и экспериментальных результатов довольно удовлетворительно, за исключением области очень малых уровней громкости. Причина этого расхождения, очевидно, лежит в том,

что взятая верхняя граница диапазона в 7500 Hz является слишком высокой для примененной при измерениях телефонной аппаратуры.

Восприятие громкости следует не мгновенно за раздражением, но наблюдается некоторая инерция слухового восприятия. Соответствующие измерения были выполнены Штейделем [38], который определил субъективное спадание громкости периодически прерывающегося тона путем маскировки его постоянным тоном, меняющимся по силе, и нашел, что спадание происходит по экспоненциальному закону со средней постоянной времени в 50 *мсек*. Дальнейшие измерения, выяснившие этот вопрос, были выполнены Бекеши [25], который наблюдал увеличение громкости тона, включаемого на короткое время, в зависимости от времени включения. Из этих измерений было выведено значение постоянной времени в 130 *мсек*. Разница между значениями, полученными Бекеши и Штейделем, довольно значительна и отчасти должна быть приписана индивидуальным особенностям наблюдателей в этих очень трудных измерениях. Кроме того, возможно, что на результаты измерений Бекеши оказали влияние шумы при выключении тона. Во всяком случае на основании этих измерений можно вывести диференциальное уравнение для уровня громкости [67], с помощью которого может быть вычислен ход уровня громкости. Как выше было уже указано, ухо при восприятии звуковых импульсов можно рассматривать как баллистический прибор, показания которого зависят от сообщенной ему энергии аналогично показаниям термоинструмента. Если через p обозначить звуковое давление, то оцениваемая громкость пропорциональна $L = \sqrt{\int_{-\infty}^{t} p^2 dt}$. Отсюда можно получить, приняв, что потери пропорциональны энергии системы, следующее диференциальное уравнение:

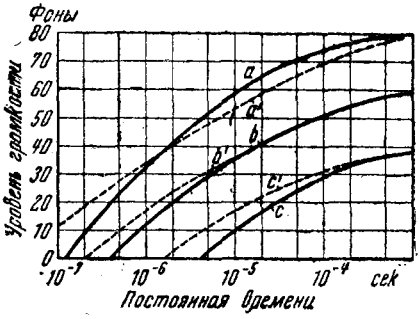

Рис. 12. Измеренные (a, b, c) и вычисленные (a', b', c') значения уровня громкости звуковых импульсов с различными начальными амплитудами и с различным временем спадания (по Бюрку, Котовскому и Лихте)

$$a \frac{d(L^2)}{dt} = p^2 - cL^2.$$

Из уравнения следует, что после мгновенного выключения синусоидального тона ухо продолжает еще сохранять ощущение звука, спадающее по экспоненциальному закону

$$L = L_0 e^{-\frac{c}{2a}t} = L_0 e^{-\frac{t}{T}},$$

где $T = \frac{2a}{c}$ означает постоянную времени слуха. Включение синусоидального тона воспринимается происходящим по следующему закону:

$$L^2 = \frac{p_0^2}{4a} T\left(1 - e^{-\frac{2t}{T}}\right). \tag{30}$$

Штейдель [38] сравнил уровень громкости L чистого тона с уровнем громкости L' звукового импульса [по (29)], причем начальное значение давления экспоненциально спадающего звукового импульса устанавливалось равным амплитуде давлений синусоидального тона. Из формул (29) и (30) получается следующее отношение уровней громкостей:

$$V = \frac{L}{L'} = \sqrt{\frac{T\pi}{4T \operatorname{arc\,tg} T \frac{\omega_2 - \omega_1}{1 + \omega_1 \omega_2 T^2}}}.$$

Вычисленные по этой формуле значения хорошо совпадают с экспериментально измеренными Штейделем (рис. 13).

Для выяснения механизма действия слуха оказались особенно плодотворными опыты с короткими щелчками, прослушиваемыми в телефоне, включенном в колебательный контур с затуханием, соответствующим предельному апериодическому режиму и возбуждаемый короткими импульсами тока. Если принять, что ухо функционирует подобно такому колебательному контуру, причем кривой, равной громкости в 50 *фон*, соответствует колебательный контур с сопротивлением 3500 Ω, индуктивностью 0,1 H и емкостью 33 400 μμF, то при учете амплитудного спектра, выражаемого формулой (22), получается следующее значение уровня громкости:

$$L = \int_0^\infty \frac{1}{T'} \frac{1}{\left(\frac{1}{T^2} + \omega^2\right)^2} \frac{1}{4 + \left(\frac{\omega}{T'} - \frac{T'}{\omega}\right)} d\omega,$$

где коэфициент затухания эквивалентного уху контура принят равным $T' = 1{,}75 \cdot 10^4$ сек.

После интегрирования получается следующая формула:

$$L = \frac{\pi}{4T} \frac{T'}{\left(\frac{1}{T} + T'\right)^3}.$$

На рис. 14 представлены для сравнения вычисленные по этой формуле значения уровня громкости (кривая *b*) и значения, экспериментально полученные Штейделем [38] (кривая *a*). Если принять во внимание, что при экспериментальных определениях частоты

до 300 Hz значительно сильнее заглушены, то исключение вычисленной энергии, приходящейся на эти частоты (кривая *c*), из общего количества вычисляемой по формуле энергии дает кривую *d*, еще ближе совпадающую с кривой *a*.

Приведенные результаты показывают, что при вычислении уровня громкости звуковых импульсов ухо можно рассматривать как линейный приемник с частотной характеристикой, соответствующей кривой чувствительности уха, и с постоянной времени, равной приблизительно 50 *мсек*. При этих опытах не было полу-

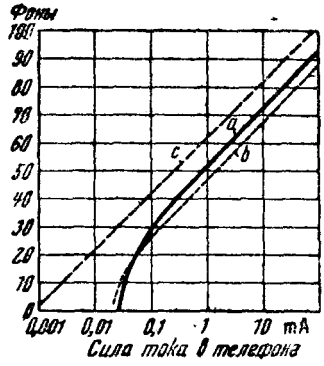

Рис. 13. Сравнение уровня громкости звуковых импульсов и длительных тонов: *a*—кривая, экспериментально полученная Штейделем; *b* — вычисленная; *c* — уровень громкости длительного тона (по Бюрку, Котовскому и Лихте)

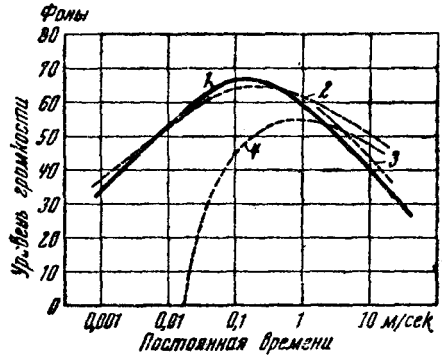

Рис. 14. Уровень громкости звуковых импульсов, вызываемых импульсами тока в апериодическом колебательном контуре (по Бюрку, Котовскому и Лихте)

чено никаких указаний на заметное влияние нелинейности органа слуха на величину громкости в смысле закона Вебера-Фехнер (логарифмического).

Вопрос об искажениях слухового восприятия, вносимых устанавливающимися явлениями, был подробно исследован Бюрком, Котовским и Лихте [83]. С помощью измерительной установки, состоящей из конденсаторного микрофона, трехкаскадного усилителя на сопротивлениях, усилителя мощности и репродуктора, были измерены постоянные времени при различных нагрузках и различных частотах. Слуховое восприятие, вызванное внезапно включенным с помощью соответствующей схемы синусоидальным тоном, сравнивалось со слуховыми впечатлениями, вызываемыми в телефоне, включенном в колебательный контур с известной и регулируемой постоянной времени. При этом в соответствии с данными, представленными на рис. 7, положительные постоянные времени наблюдаются в областях резонанса, а отрицательные — во впадинах частотной характеристики установки. Разность между крайними

значениями постоянной времени оказалась не зависящей от мощности. Однако с увеличением передаваемой мощности наблюдается смещение постоянной времени при нарастании в сторону отрицательных значений, т. е. увеличение импульсивности звука. Максимальная разность постоянной времени составляла, для исследованного громкоговорителя невысокого качества, около 7 *мсек* и вызывала отчетливо замечаемые искажения при нарастании колебаний. Для громкоговорителей лучшего качества и с более ровной частотной характеристикой максимальная разность оказалась равной только 3,5 *мсек*.

Весьма удобная схема для объективных измерений процессов нарастания колебаний была разработана Бюрком, Котовским и Лихте [83]. Колебательный процесс на входе и на выходе передающего устройства выпрямлялся и подавался на баллистический гальванометр навстречу друг другу. Аппаратура градуировалась с помощью маятника Гельмгольца. Отклонение гальванометра служило мерой для искажений при процессе нарастания колебаний. Направление отклонения зависело от того, производилось ли включение в резонансных областях или же во впадинах частотной характеристики.

8. Модулированные тона. Длительный установившийся звук, даже богатый обертонами, производит монотонное впечатление. Для оживления звука применяются особые приемы. Это осуществляется во многих музыкальных инструментах, особенно предпочитаемых именно благодаря этой предоставляемой ими возможности модулирования, а также и в певческом голосе. Обата, Хирозе и Тезима [56] сообщают о чрезвычайно своеобразной форме модулирования, которая применяется в японской школе пения и заключается в быстром изменении высоты на целый тон, происходящем с частотой модуляции в 4 Hz. В своих обширных работах Бартоломью [54] исследовал 40 певческих голосов и нашел, что у певцов с хорошо поставленными голосами при вибрато одновременно меняются высота, сила и тэмбр. Частота модулирования при этом оказывается очень постоянной и составляет для различных голосов 6—7 Hz. Максимум интенсивности, приходящейся на обертоны, при этом перемещается в пределах, превышающих октаву.

Теория модулирования изложена в работе Толми [75], который развил ранее известные вычисления и применил их для решения некоторых задач акустики. Чисто частотная модуляция может быть представлена с помощью следующего уравнения:

$$f(t) = \sin(\omega t + m \sin \mu t); \tag{31}$$

здесь $\frac{\omega}{2\pi}$ означает частоту модулируемого тона, так называемую основную частоту, $\frac{\mu}{2\pi}$ означает частоту модуляции, $m = \frac{\Delta\omega}{\mu}$ — глубину модуляции. При этом накладываются добавочные условия: $\Delta\omega \ll \omega$, $\mu \ll \omega$.

Функция, выражаемая (31), может быть разложена в ряд Фурье

$$f(t) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} J_\nu(m) \sin(\omega t + \nu\mu t). \qquad (32)$$

Здесь J_ν означает бесселеву функцию порядка ν.

Частоту модуляции μ можно в соответствии с практическим случаем рассматривать как постоянную. Далее, ширина полосы модуляции должна быть одной и той же, например составлять $^1/_4$ тона. При этом $\Delta\omega$ пропорционально ω, и коэфициент ряда $J_\nu(m)$ тем быстрее стремится к 0 при возрастании ν, чем ниже модулируемый

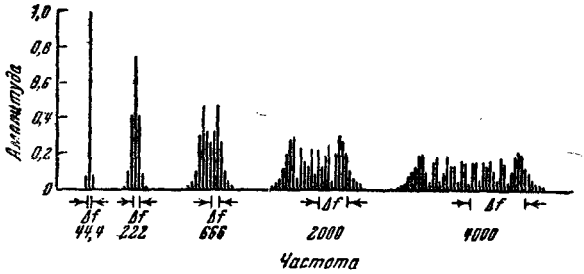

Рис. 15. Спектры частотно-модулированных тонов (по Толми)

тон. Обертоны разложения располагаются симметрично на равных интервалах по частоте около основного тона, как это следует из рис. 15 для различных основных тонов.

Если представить (32) в комплексной форме

$$f_1(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} J_\nu(m)\, e^{j(\omega t + \nu\mu t)}$$

и применить векторный способ представления колебаний и известные правила бесселевых функций к угловой скорости ω вращающегося вектора, то получим

$$f_2(t) = e^{jm \sin \mu t}.$$

Этот вектор колеблется в пределах угла $2m$, выраженного в радианах, с угловой скоростью $m\mu \cos \mu t$ около вектора, вращающегося с угловой скоростью ω.

Если наряду с модуляцией по частоте имеет место также и модуляция по амплитуде с глубиной модуляции k, то такой процесс может быть представлен с помощью следующей функции:

$$F(t) = [1 + k\cos(\mu t + \varphi)] \sum_{-\infty}^{+\infty} J_\nu(m) \sin(\omega t + \nu\mu t),$$

или же в комплексной форме, отбрасывая множитель $e^{j\omega t}$,

$$F_1(t) = \left\{1 + \frac{k}{2}\left[e^{j(\mu t+\varphi)} + e^{-j(\mu t+\varphi)}\right]\right\} \sum_{-\infty}^{+\infty} J_\nu(m)\, e^{j\nu\mu t}.$$

После несложных вычислений, основанных на применении рекурсионной формулы для бесселевых функций, получаем

$$F_1(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \sin(\omega t + \nu\mu t + \psi) \times$$

$$\times \sqrt{\left[1 + \frac{\nu k}{m}\cos\varphi\right]^2 J_\nu^2(m) + k^2 \sin^2\varphi J_\nu'^2(m)} \qquad (33)$$

где

$$\psi = \operatorname{arc\,tg} \frac{k \sin\varphi J_\nu'(m)}{\left(1 + \frac{\nu k}{m}\cos\varphi\right) J_\nu(m)}.$$

При артистическом исполнении модуляция по частоте и по амплитуде происходит или с одинаковой или с противоположной фазой, т. е. $\varphi = 0$ или $\varphi = \pi$.

В этом случае (33) принимает следующий вид:

$$F_1(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \left(1 \pm \frac{\nu k}{m}\right) J_\nu(m) \sin(\omega t + \nu\mu t),$$

причем положительный знак берется, когда $\varphi = 0$, а отрицательный, — когда $\varphi = \pi$. Последняя формула отличается от ранее приведенной формулы для чисто частотной модуляции только множителем $\left(1 \pm \frac{\nu k}{m}\right)$. Это вызывает несимметричное расположение спектра; рис. 16 показывает, что при $\varphi = 0$ усилены более высокие обертоны, а при $\varphi = \pi$ — более низкие. Это влечет за собой несовпадение „центра тяжести" слухового восприятия с основной частотой, и подобное соединение частотной и амплитудной модуляций вызывает субъективно воспринимаемое заметное смещение основной частоты. Эта несимметрия устраняется при $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

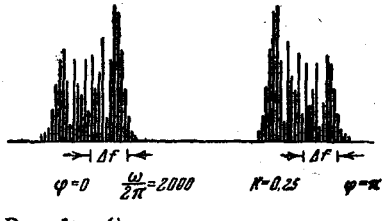

Рис. 16. Спектры тонов, модулированных по частоте и по амплитуде (по Толми)

У применяющихся музыкальных инструментов такой случай не встречается. Толми указывает, что на электромузыкальных инстру-

ментах подобный эффект может быть реализован при известных обстоятельствах.

Применяя принцип неопределенности в форме $\Delta\nu \cdot \Delta t \geqslant 1$, Кок [92] нашел, что некоторая модуляция по частоте с заданной частотой и глубиной модуляции, воспринимаемая слухом как таковая при достаточно высокой основной частоте, в низком диапазоне может быть воспринята только при понижении частоты модуляции или же при увеличении глубины модуляции, при условии сохранения постоянной частоты модуляции.

Бартоломью считает, что одно из главных требований, предъявляемых к певческому голосу, — это хорошее „вибрато". Согласно экспериментальным исследованиям было установлено, что осуществляемая с помощью электрических приборов чисто частотная модуляция действительно начинает восприниматься только по достижении известной величины глубины модуляции. До этого момента тон представляется непостоянным, слуховое восприятие напоминает амплитудную модуляцию.

(Окончание следует)