

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

ПРОБЛЕМЫ НОВОЙ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ЭЛЕКТРОНА *

В. Вейскопф, Цюрих

1. Введение и общий обзор. 2. Волновая механика электрона Шредингера. 3. Релятивистское уравнение Шредингера. 4. Спин электрона. 5. Теория электрона Дирака. 6. Теория позитрона. 7. Взаимодействие материи и электромагнитного поля.

1. ВВЕДЕНИЕ И ОБЩИЙ ОБЗОР

Открытие Планком кванта действия вызвало переворот в физике атома; после построения квантовой или волновой механики преобразование атомной физики достигло некоторой законченности.

Основы новой атомной физики показали, какие понятия и какой образ мышления необходимы для упорядочения и для принципиального понимания всей массы вновь открытых и, казалось, противоречивых фактов. В настоящей статье будут рассмотрены границы новой атомной физики и трудности, возникшие в процессе ее развития. При этом речь будет идти не о таких вновь открытых явлениях, которые не поддаются описанию или лишь с трудом могут быть описаны квантовой механикой атома, как например, результаты физики ядра: внутри самой теории обнаружились трудности и противоречия, которые показали, что новая атомная механика может представлять лишь первое приближение к правильной теории, от истинного понимания которой мы, к сожалению, еще слишком далеки.

Атомная механика по существу представляет механику электронов или других весьма легких частиц, находящихся под влиянием электромагнитных полей.

Классическая механика и электродинамика применимы к столь малым частицам лишь с большим ограничением. Ограничение это связано с соотношением неточностей Гейзенберга: так например, не имеет никакого физического смысла одновременно задавать положение и импульс электрона с произвольной точностью. Допустимая точность столь велика, что это ограничение не имеет значения в макроскопической картине; однако, для электрона это

* Naturwissenschaften 23, 631, 1935, перев. С. А. Каменецкого

ограничение имеет коренное значение, препятствуя точному пространственно-временному определению состояния движения. Это обстоятельство дает ключ к пониманию кажущегося противоречия в поведении электрона, который обнаруживает то свойства волны, то свойства частицы; это противоречие можно рассматривать просто как трудность мысленного представления, так как однозначное экспериментальное разрешение вопроса о правильности волновой или корпускулярной картины — так, чтобы можно было считать одну за истинную, а другую — за ложную, — невозможно: для этого необходимо было бы производить измерения с большей точностью, чем это допускает ограничение Гейзенберга.

Всякое состояние движения электрона может быть в квантовой механике описано некоторой волновой функцией. Опыты с преломлением и интерференцией электронных лучей показали, что существенные черты наблюдаемых явлений движения можно представить в виде распространения волн, причем волны могут налагаться и уничтожаться, как это хорошо известно для других волновых полей (принцип суперпозиции волн материи). Однако, в самой основе волновой механики заложено то обстоятельство, что для описания всех свойств электрона непригодны ни чисто корпускулярная, ни чисто волновая картины.

Поэтому волновая функция, относящаяся к некоторому состоянию движения, не есть подпадающая измерению волна, распространяющаяся в пространстве и во времени, хотя она и обладает соответствующими свойствами в некоторых опытах. Ее физическое значение менее конкретно; скорее она имеет символический характер; но именно благодаря этому значение волновой функции шире: при помощи этой же функции можно рассчитать результаты и таких экспериментов, в которых электрон проявляется как корпускула.

Волновые функции электрона определяются волновым уравнением, которое было впервые получено Шредингером. В настоящей статье мы займемся специально развитием теории электронов за пределы шредингеровской волновой механики.

Квантовая механика, построенная на основе волнового уравнения Шредингера, представляет собой законченную и внутренне непротиворечивую теорию, которая имеет значительные достижения. Она дала возможность объяснить кажущиеся парадоксы, которые неизбежны при наглядной пространственно-временной трактовке атомных явлений, и сумела истолковать качественно и количественно большое число важных опытных фактов атомной физики.

Сюда относятся: структура и значения спектральных термов атомов и молекул, если отвлечься от мультиплетной структуры термов, интенсивность и правила отбора спектральных линий, явления рассеяния и Раман-эффект, гемеоплярная связь и еще многое другое, чего мы здесь не будем перечислять в отдельности.

Однако, шредингеровская волновая механика должна рассматриваться только как первое приближение к действительности по следующим причинам:

а) она не удовлетворяет требованиям теории относительности, а потому может быть применима только к частицам, скорость которых мала по сравнению со скоростью света;

б) она вовсе не учитывает спина электрона, который прежде всего проявляется в явлениях мультиплетной структуры спектральных термов и в аномальном эффекте Зеемана;

в) она не рассматривает процесса возникновения или исчезновения положительного и отрицательного электронов при поглощении или испускании света (возникновение пар электронов);

г) она не разрешает существовавших уже в классической теории электронов трудностей, связанных со строением электрона и приводящих к бесконечной энергии собственного электромагнитного поля.

Перечисленные здесь проблемы требуют расширения волновой механики, которое, однако, не могло быть проведено так, чтобы при этом не пострадали первоначальная законченность и непротиворечивость теории. Все попытки, сделанные в этом направлении, приводили, наряду с изумительно хорошими количественными результатами, к новым проблемам и противоречиям, так что мы до сих пор еще очень далеки от полной и законченной теории электрона.

Возможность превращения света в вещество и обратно в настоящее время доказана уже многочисленными экспериментами. Поэтому мы лишь вкратце укажем, что можно сказать относительно этого процесса, не прибегая к каким-нибудь дальнейшим гипотезам, касающимся самого механизма явления. Результаты экспериментов ограничиваются только тем, что поглощение света может породить один отрицательный и один положительный электрон. Так как на основании теории относительности всякая масса m эквивалентна количеству энергии mc^2 (где c — скорость света в вакууме), то количество поглощенной световой энергии должно быть по меньшей мере равно $2mc^2$, если за m принять массу электронов, одинаковую для обоих видов электронов. Излишек поглощенной энергии перейдет в кинетическую энергию обоих возникших электронов. Таким образом если рассматриваемый процесс происходит в результате поглощения лишь одного единственного светового кванта, то частота света должна быть по меньшей мере равна $\frac{2mc^2}{h}$ и, следовательно, длина волны — меньше 25 X. Итак, речь может здесь идти только об очень жестком γ -излучении.

Далее, из закона сохранения суммарного импульса можно заключить, что возникновение пары электронов при поглощении единственного светового кванта может происходить не в свободном от всякого поля пространстве, а только вблизи сильно заряженных ядер, которые могут принять излишек импульса светового кванта благодаря наличию у них электрического поля. Если, например, мы предположим, что квант света имел энергию $h\nu$, лишь немного превышающую $2mc^2$, то он должен был обладать импульсом

$\frac{h\nu}{c} \sim 2 mc^2$, который присущ только электронам, движущимся со скоростями, близкими к скорости света. Но этот значительный импульс не может быть воспринят возникающей парой электронов, так как почти вся энергия светового кванта будет затрачена на образование самих масс электронов, так что эта пара электронов получит совершенно незначительную кинетическую энергию. Но два световых кванта, сумма энергий которых равна по меньшей мере $2 mc^2$, могут породить пару электронов и в пространстве, свободном от полей.

Аналогичные рассуждения можно применить и для обратного процесса — уничтожения одного положительного и одного отрицательного электрона с излучением одного или нескольких световых квантов; они всегда оправдываются на опыте, поскольку вообще при современных экспериментальных возможностях может быть осуществлена количественная проверка.

В следующем разделе мы рассмотрим прежде всего волновую механику Шредингера, чтобы установить связь с дальнейшими рассуждениями. Третий раздел посвящен релятивистскому обобщению волновой механики, проведенному Шредингером и Гордоном, которое приводит к так называемому скалярному релятивистскому волновому уравнению. От этой попытки скоро пришлось отказаться, так как она, с одной стороны, не могла учесть спина электрона, а, с другой стороны, она приводит к положительным и отрицательным зарядам электронов. Это последнее обстоятельство до открытия положительных электронов (которое произошло значительно позже установления скалярного релятивистского волнового уравнения) представляло недостаток; в настоящее время это обобщение представляет большой интерес и, пожалуй, заслуживает более детального рассмотрения. Четвертый раздел рассматривает влияние спина на волновую механику: волны электрона должны быть рассматриваемы как имеющие несколько компонент. Однако, свойства спина требуют своеобразного релятивистского обобщения, что и привело к установлению волнового уравнения Дирака, как мы увидим в пятом разделе. Благодаря этому удалось охватить одновременно свойства спина и релятивистские свойства электрона, причем при применении ко многим атомным проблемам были получены исключительно хорошие количественные результаты. К сожалению, это волновое уравнение содержит замечательные состояния электрона, в которых он обладает отрицательной массой и которые никоим образом нельзя исключить. Дирак своей смелой идеей теории „дырок“ хотел превратить этот недостаток в преимущество и вместе с тем объяснить существование и возникновение положительных электронов. Об этой попытке и ее проблематике будет сказано ниже, в шестом разделе. Наконец, в последнем разделе рассматриваются трудности, получающиеся при учете взаимодействия электрона и электромагнитного поля, которые, повидимому, должны привести к пересмотру наших представлений относительно связи между материей и полем.

2. Волновая механика электрона Шредингера

При построении волновой механики электрона лучше всего исходить из прямолинейных движений в пустом пространстве, свободном от действия сил. Волновые функции, соответствующие этим движениям, легко непосредственно определить из опыта. Именно, опыты с преломлением и интерференцией электронных лучей показали, что следует представлять их в виде плоских волн, длина волны которых λ связана с импульсом p электрона соотношением де-Броглия $\lambda = \frac{h}{p}$. Это соотношение должно быть положено в основу всякой волновой теории электронов. Однако, в то время как длина волны может быть непосредственно определена из опыта, частота волн задается только известным в квантовой теории света соотношением между частотой и энергией электрона E : $h\nu = E$. Это соотношение нельзя экспериментально проверить, так как частота волны материи не представляет собой непосредственно измеримой физической величины (об этом см. ниже). Однако, задание длины волны и частоты полностью определяет плоскую волну; таким образом, если известны оба эти определяющих данных, то можно сразу же написать волновое уравнение электрона, движущегося в пространстве, свободном от действия сил.

В основу волновой механики Шредингера положены нерелятивистская механика и электродинамика электрона. Поэтому кинетическая энергия свободного электрона здесь имеет вид:

$$E = \frac{m}{2} v^2 = \frac{1}{2m} p^2, \quad (1)$$

откуда непосредственно вытекает соотношение между частотой $\nu = \frac{E}{h}$ и длиной волны $\lambda = \frac{h}{p}$ для волны, связанной с электроном в пространстве, свободном от действия сил:

$$\nu = \frac{h}{2m} \frac{1}{\lambda^2}. \quad (2)$$

Таким образом мы получили волновое уравнение Шредингера для пустого пространства. В самом деле, единственное дифференциальное уравнение, которое допускает эти и только эти волновые функции, есть

$$\Delta\psi = +\frac{4\pi^2 m}{h} \frac{\partial\psi}{\partial t} \quad (\Delta \text{ оператор Лапласа}). \quad (3)$$

Так, волновая функция, представляющая решение этого уравнения, имеет вид

$$\psi = \exp \left[\frac{2\pi i}{h} (p_x x + p_y y + p_z z) \right] \cdot \exp \left(i \frac{p^2}{hm} t \right).$$

Вид волновых функций, соответствующих движениям в электромагнитных полях, не получается непосредственно из опыта. Поэтому волновое уравнение, которое определяет поведение этих функций,

должно быть соответствующим образом обобщено, что может быть проведено в полном согласии с известным из электродинамики влиянием полей на заряженную частицу. Для того чтобы обобщить уравнение на движения в силовых полях, пользуются тем фактом, что вид волнового уравнения тесно связан с соотношением (1) между энергией и импульсом. Именно, если рассматривать величины E и p как „операторы“:

$$E \rightarrow -\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial t}, \quad p_x \rightarrow \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x}, \quad p_y \rightarrow \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial y}, \quad p_z \rightarrow \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial z}, \quad (4)$$

действующие на волновую функцию, то соотношение (1) непосредственно переходит в волновое уравнение. Но соотношение между энергией и импульсом в присутствии электромагнитных полей известно из классической теории электронов, так что можно построить соответствующим образом волновое уравнение. В электростатическом поле, определяемом потенциалом V , энергия электрона дается выражением:

$$E = \frac{p^2}{2m} + eV, \quad (5)$$

где e обозначает заряд электрона.

Если электрическое поле E не статическое и если имеются также и магнитные поля H , то для описания их необходимо добавить векторный потенциал A с тремя компонентами A_x , A_y , A_z , откуда получаем напряженности полей:

$$E = -\text{grad } V - \frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial t}, \quad H = \text{rot } A$$

Соотношение между энергией и импульсом в нерелятивистской механике электрона имеет для этого случая вид:

$$E = \frac{1}{2m} \left(p - \frac{e}{c} A \right)^2 + eV. \quad (6)$$

Если мы опять положим в основу вышеупомянутый принцип построения волнового уравнения, то получим из (5) следующее соотношение для статических полей:

$$-\frac{h^2}{8\pi^2 m} \Delta \psi + eV\psi = \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial \psi}{\partial t}. \quad (7)$$

Это — не что иное как известное волновое уравнение Шредингера. Получающиеся из него волновые функции должны представлять различные состояния движения, которые может принимать электрон в силовом поле V . Каждое из этих состояний можно представить как наложение ряда так называемых стационарных состояний, аналогично тому, как в случае колебаний мембраны всегда можно представить их в виде наложения собственных колебаний. Стационарные состояния характеризуются тем, что их волновая функция совершает монохроматическое колебание во времени.

На основе соотношения между энергией и частотой можно приписать им определенную энергию, которая получается путем умножения частоты на h , между тем как те состояния, которые представляют суперпозицию стационарных состояний различной частоты, не могут обладать определенной энергией.

Если написать волновую функцию стационарного состояния в виде:

$$\psi = \varphi \cdot \exp 2\pi i \nu t = \varphi \cdot \exp \frac{2\pi i}{h} Et,$$

где ясно виден монохроматический характер зависимости от времени, то, подставив эту функцию в (7), получим для φ следующее уравнение:

$$\Delta \varphi + \frac{8\pi^2 m}{h^2} (E - eV) \varphi = 0.$$

Это — известное уравнение Шредингера, независимое от времени. Оно определяет энергию стационарных состояний и вид соответствующих волновых функций.

Исходя из соотношения $E = h\nu$, мы должны были бы считать, что энергия стационарных состояний должна быть всегда положительной, если при этом под частотой ν понимать как обычно число колебаний в секунду, которое, конечно, не может быть отрицательным. Однако, при подходящей нормировке потенциальной энергии возможны такие состояния, полная энергия которых отрицательна; так например, энергия связанных состояний водородного атома по большей части рассматривается как отрицательная. В действительности же частота волны материи имеет скорее абстрактное значение: колебания этой волны никогда не наблюдаются, и только разность частот двух стационарных состояний проявляется в виде частоты спектральной линии. Смысл „отрицательной частоты“ состоит в следующем: колебание собственной функции представляют при помощи множителя $\exp 2\pi i \nu t$; при этом, как обычно в теории колебаний, пишут $e^{2\pi i \nu t}$ вместо $\cos 2\pi \nu t$ только ради простоты вычислений, принимая в расчет только действительную часть написанного выражения.

В волновой механике, однако, множитель $\exp 2\pi i \nu t$ имеет самостоятельное значение. Одно только действительное колебание $\cos 2\pi \nu t$ или $\sin 2\pi \nu t$ не удовлетворяло бы волновому уравнению. Волновая функция необходимо комплексна, что становится понятным только в том случае, если рассматривать ее лишь как вспомогательную величину для вычислений, не имеющую никакого непосредственного физического значения. При этом следует строго различать случаи, когда зависимость от времени дана множителем $e^{+2\pi i \nu t}$ и $e^{-2\pi i \nu t}$, между тем как при обыкновенном колебании в обоих случаях получалось бы по существу одно и то же. В этом смысле мы и будем для случая $e^{-2\pi i \nu t}$ говорить об „отрицательной частоте“ и тем самым определять такую зависимость от времени, которая в данном случае физически имеет смысл отрицатель-

ной энергии. Если предположить, что потенциальная энергия равна нулю, т. е. рассматривать свободно движущуюся частицу, то следует ожидать, что чисто кинетическая энергия всегда положительна. И в самом деле, для этого случая волновое уравнение Шредингера также допускает волновые функции только с положительной частотой, так как в данном случае

$$\nu = \frac{p^2}{2mh}.$$

Непосредственный физический результат, который можно получить из волновой функции, это — вероятность найти электрон в определенной точке пространства. Эта вероятность непосредственно определяется интенсивностью волны в заданной точке, причем под интенсивностью, так же как и в теории механических колебаний, следует понимать квадрат модуля амплитуды волны. Часто представляют себе заряд электрона распространенным на всю область волновой функции („размытым“) в том смысле, что величина заряда в любой точке области должна соответствовать вероятности найти электрон в этой точке. Подобное „облако заряда“ во многих отношениях (однако не во всех) передает физическое поведение рассматриваемого состояния электрона. Плотность заряда ρ облака в определенной точке равна заряду электрона e , помноженному на вероятность найти электрон в данной точке: $\rho = e \psi^2$. Плотность заряда должна удовлетворять условию, чтобы сумма имеющихся в пространстве зарядов оставалась всегда постоянной. Так как ρ в данном случае пропорционально интенсивности волновой функции, то это требование означает, что полная интенсивность волновой функции (интеграл интенсивности, распространенный на все пространство) не зависит от времени. Это требование и в самом деле удовлетворяется для произвольной волновой функции в силу волнового уравнения.

Наряду с плотностью заряда ρ вводят также и понятие плотности тока i , которая определяется вероятностью найти электрон движущимся в определенном направлении*. Выражение для плотности тока определяется уже тем требованием, чтобы при возрастании плотности заряда в одной точке за счет уменьшения ее в другой точке получалась определенная плотность тока, соответствующая переносу заряда (это соотношение количественно устанавливается так называемым уравнением непрерывности для заряда и тока). Это рассуждение показывает, что плотность тока i получается из волновой функции ψ при помощи соотношения

$$i = \frac{e}{m} \frac{h}{4\pi i} (\psi \operatorname{grad} \psi^* - \psi^* \operatorname{grad} \psi), \quad (8)$$

* Точнее: $\frac{i}{e}$ представляет вероятность, что электрон в течение 1 сек. проходит единицу площади в направлении, перпендикулярном к i .

где через ψ^* обозначена величина, комплексно сопряженная с ψ . Как легко видеть, плотность тока зависит от градиента волновой функции. При быстром пространственном изменении значения ψ (малая длина волны) скорость электрона очень велика. Выражения для плотности заряда и плотности тока не только тесно связаны между собой, но и непосредственно вытекают из самого волнового уравнения. Никакое соотношение другого вида не могло бы удовлетворять, с одной стороны, постоянству полного заряда, а с другой стороны, указанной связи обоих выражений на основе волнового уравнения.

В волновое уравнение Шредингера (7) входит только действие статического электрического поля. Для того чтобы обобщить это уравнение также на движения, происходящие под влиянием переменных во времени электромагнитных возмущений, следует при построении волнового уравнения исходить из соотношения (6) между энергией и импульсом, которое содержит также и векторные потенциалы. Таким путем мы приходим к обобщенному волновому уравнению:

$$-\frac{\hbar^2}{8\pi^2 m} \Delta \psi - \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{e}{mc} \mathbf{A} \cdot \text{grad} \psi + \frac{e}{2mc^2} \mathbf{A}^2 \psi + eV\psi = \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial \psi}{\partial t}.$$

При помощи этого уравнения можно рассмотреть также и влияние света на электрон.

Это влияние большей частью выражают так, что вычисляют вероятность на единицу времени, с которой электрон под влиянием волны света переходит из одного стационарного состояния k в другое состояние l . Эта вероятность перехода определяется выражением

$$W = \frac{8\pi^3 e^2}{3\hbar^2} s(\nu) |A_{kl}|^2, \quad (9)$$

где через $s(\nu)$ обозначена плотность излучения той частоты, которая соответствует разности энергий обоих стационарных состояний, а через A_{kl} — так называемый элемент матрицы перехода, который можно вычислить из волновых функций φ_k и φ_l обоих состояний.

Как видно из этих рассуждений, электрон может лишь в том случае изменить свое состояние в атоме, когда на него действуют электромагнитные поля. Таким образом мы получаем только поглощение и испускание света под влиянием падающего излучения. Для объяснения спонтанного испускания светового кванта необходимо обобщить теорию дальше, причем так, чтобы применить квантовую теорию не просто к электрону, но также и к электромагнитному полю. Простейшее следствие, которое получается отсюда, это — существование световых квантов: энергия электромагнитного колебания частоты ν может составлять только целое кратное кванта $h\nu$. Далее, квантовая теория требует наличия так называемых „нулевых колебаний“; так, всякий осциллятор в состоянии наименьшей

энергии находится не в абсолютном покое, а совершает колебания около положения покоя. Поэтому амплитуды электромагнитных колебаний также не могут полностью уничтожиться; они по крайней мере должны испытывать нулевые колебания. Квантовая природа электромагнитного поля имеет следствием нулевые колебания силы поля в пространстве, свободном от световых квантов, представляющем состояние с наименьшей энергией.

Нулевые колебания действуют на электрон так же, как и обычные электрические колебания, и могут изменять его состояние, но только в направлении перехода его в состояние с более низким уровнем энергии, так как пустое пространство может только поглощать, но не отдавать энергию. Таким образом получается спонтанное испускание света, как непосредственное следствие существования этих своеобразных нулевых полей. Спонтанное испускание света представляет собой эмиссию светового кванта, вызванную нулевыми колебаниями пустого пространства. Амплитуды электромагнитных нулевых колебаний должны соответствовать плотности излучения

$$s_0(\nu) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3},$$

так что, подставив эту плотность в формулу (9), мы получим вероятность спонтанной эмиссии.

Волновую механику Шредингера можно без особых трудностей применить к системам, состоящим из нескольких электронов. Волновые функции, описывающие состояние движения таких систем, зависят от координат положения всех составляющих систему n электронов, а потому они представляются весьма ненаглядными, так как относятся к пространству $3n$ измерений. Здесь и в дальнейшем мы не будем останавливаться на специальных методах задачи многих тел квантовой механики, так как для принципиального понимания квантовой механики в этом нет необходимости.

Один из существенных результатов квантовой механики многих тел состоит в изменении классической статистики. Полная неразличимость электронов между собой приводит к тому, что все те состояния, которые отличаются одно от другого только перестановкой отдельных электронов, представляются в точности той же волновой функцией, так что их следует рассматривать как одно единственное состояние. Однако волновая механика принципиально допускает две возможности, и только опыт может решить в пользу одной из них: именно, волновые функции могут выражаться симметрично или антисимметрично в координатах частицы. Первое означает, что в одном и том же состоянии движения может находиться произвольное количество частиц, что приводит к статистике Бозе; второе имеет следствием то, что все электроны должны иметь различные состояния движения, что приводит к статистике Ферми. Опыт показал, что электроны удовлетворяют статистике Ферми; они следуют так называемому запрету Паули: в одном и том же квантовом состоянии нельзя встретить более, чем один электрон. Если учесть

рассматриваемое в § 4 собственное вращение электрона, которое может происходить в двух взаимопротивоположных направлениях, то отсюда получится, что в одном и том же состоянии движения могут одновременно находиться максимум два электрона с противоположно направленными спинами.

Одним из очень существенных недостатков квантовой механики является то, что сама теория не может определить, следует ли электрон запрету Паули или подчиняется статистике Бозе. Только опыт может решить дело в пользу одной из возможностей. Тем не менее блестящее экспериментальное подтверждение всех тех явлений, которые вытекают из запрета Паули,—построение периодической системы элементов, теория металлической проводимости и т. д.,—следует рассматривать как большое достижение волновой механики.

3. Релятивистское уравнение Шредингера

Волновое уравнение Шредингера не удовлетворяет требованиям теории относительности, так как оно исходит из классической механики электрона, которая, как известно, применима только при небольших скоростях. Так, соотношение между кинетической энергией и импульсом при прямолинейном движении электрона, свободного от действия сил, при больших скоростях выражается уже не в виде (1), а в виде

$$E^2 = c^2 p^2 + m^2 c^4. \quad (10)$$

В выражение энергии входит также энергия mc^2 массы электрона. И, действительно, это выражение для импульсов p малых по сравнению с mc переходит в $E = mc^2 + \frac{p^2}{2m}$, т. е. в сумму энергии массы и нерелятивистской кинетической энергии. Частоты свободных волн электронов должны быть, следовательно, связаны в релятивистском волновом уравнении с длиной волны λ соотношением

$$v^2 = \frac{c^2}{\lambda^2} + \frac{m^2 c^4}{h^2}, \quad (11)$$

если исходить из основных соотношений $E = h\nu$ и $p = \frac{h}{\lambda}$. Отсюда опять-таки необходимо следует в качестве релятивистского волнового уравнения электрона, движущегося в пространстве, свободном от действия сил^{1,2}

$$\Delta\psi - \frac{4\pi^2 m^2 \cdot c^2}{h^2} \psi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}. \quad (12)$$

Это уравнение называют „скалярным релятивистским волновым уравнением“, так как волновые функции ψ здесь представляют скалярные функции пространства в противоположность волновому уравнению Дирака, функции которого являются величинами, обладающими в известном смысле направлением (спин).

Обобщение уравнения для случая движений в электромагнитных силовых полях происходит на основе обобщенного релятивистского соотношения между энергией и импульсом, известного из теории электронов; именно, вместо (6) при больших скоростях имеет место соотношение:

$$(E - eV)^2 = c^2 \left(p - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 + m^2 c^4.$$

Применяя снова операторы (4), получим отсюда полное скалярное волновое уравнение. Однако, в дальнейшем этот специальный вид уравнения нам не понадобится.

Получающиеся волновые функции весьма похожи на те, которые соответствуют уравнению Шредингера. Однако, существенная разница состоит в том, что в данном случае число состояний движения вдвое больше. Так, для случая движения без действия сил согласно нерелятивистской формуле (2) каждой длине волны соответствует только одно положительное значение γ , между тем как релятивистское выражение (11) допускает одну положительную и одну отрицательную частоту (при этом мы придаем знаку частоты формальное значение, указанное в предыдущем разделе). Было бы естественно приписать состояниям с отрицательной частотой отрицательные энергии. Однако более подробное исследование показывает, что энергия в релятивистском уравнении Шредингера зависит только от абсолютной величины, а не от знака частоты*. Таким образом, в противоположность нерелятивистской волновой механике (а также и релятивистской теории вращающегося электрона Дирака), здесь мы имеем $E = h\gamma$. Отрицательный знак частоты обозначает здесь лишь то, что соответствующие состояния представляются электронами с отрицательным зарядом $-e$ **. Это утверждение можно доказать, рассматривая соответствующее поведение этих волновых функций в электрических полях; можно также применить выражение для плотности заряда и убедиться, дает ли оно для волновых функций с отрицательной частотой заряд обратного знака. Действительно, скалярное релятивистское волновое уравнение приводит к новому выражению для плотности заряда, причем здесь мы уже не имеем пропорциональности между плотностью заряда и интенсивностью волновой функции, а именно:

$$\rho = \frac{e}{mc^2} \frac{\hbar}{4\pi i} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right).$$

Отсюда легко видеть, что плотность заряда зависит от знака частоты в том смысле, что состояния с отрицательной частотой про-

* Этот результат можно получить путем квантования волнового уравнения (12)³. Впрочем, подобное же соотношение имеет место и для световых волн, для которых существует аналогичное волновое уравнение.

** Буквою e мы всюду обозначаем действительный отрицательный заряд электрона, так что противоположный заряд $-e$ есть заряд положительный.

являются в виде движений электрона с зарядом обратного знака. Из релятивистского волнового уравнения отсюда непосредственно следовало бы существование электрона с положительным и отрицательным зарядами.

Здесь уже плотность заряда не может быть связана с интенсивностью волновой функции; в самом деле, при наложении, например, положительно заряженной волны на отрицательно заряженную может получиться большая интенсивность без повышения плотности заряда. Волновое уравнение же требует исключительно сохранения суммарного заряда, так что суммарная интенсивность волновых функций может измениться при некоторых возмущениях. Так как суммарную интенсивность волн материи можно рассматривать как выражение всего наличного количества материи, то отсюда следует, что общее количество материи не должно оставаться постоянным*. Оказывается, что эти изменения по существу могут происходить только под влиянием света высокой частоты, причем должно одновременно исчезнуть или возникнуть столько же положительной, сколько и отрицательной материи. Это явление оказывается тождественным с возникновением и уничтожением пар электронов при поглощении или испускании γ -лучей³. Более детальные вычисления позволяют получить также и количественные результаты, которые целиком совпадают с теми результатами, которые мы в настоящее время можем получить экспериментальным путем.

Скалярное релятивистское волновое уравнение заведомо не дает правильного представления электрона, так как оно не содержит спина электрона. Оно дает неправильные значения термов тонкой структуры водородного атома и неверную формулу рассеяния γ -лучей электронами. Кроме того, оказывается, что оно применимо только к таким частицам, которые подчиняются статистике Бозе. Однако вместе с тем оно показывает, что простейшее релятивистское обобщение уравнения Шредингера приводит непринужденно к существованию противоположно заряженных электронов и к их возникновению и уничтожению под действием света; таким образом эти процессы содержатся глубже в формализме волновой механики, чем это могло бы казаться на основании теории дырок, сопряженной со столькими трудностями.

4. Спин электрона

Рассмотрев физическое содержание простого релятивистского обобщения волнового уравнения Шредингера, мы обратимся теперь к попыткам построения этого волнового уравнения с учетом спина. Оказалось, что нельзя рассматривать влияния спина на механику электрона независимо от релятивистского обобщения. Уже на спектральных термах видно, что вызываемые спином возмущения (мультиплетное расщепление) имеют тот же порядок величины, как сме-

* Это само по себе наглядное соотношение получается также путем квантования волнового уравнения (12)³.

шение термов, требуемое релятивистской поправкой. У тяжелых элементов, для которых большие скорости электронов вызывают уже сильные отклонения от нерелятивистской кинематики, обнаруживаются также и расщепления тонкой структуры, имеющие порядок величины грубой структуры. В волновой механике Шредингера до сих пор мы имели волновые функции скалярной природы, как например, звуковые волны в газах, которые описывают распространение скалярной величины (изменение давления воздуха). Наличие собственного вращения электрона приводит к необходимости представлять волновые функции как величины со многими компонентами, как например, электромагнитные волны, представляющие распространение обоих полей с шестью компонентами.

Для того чтобы понять, как описывается спин электрона в квантовой механике, необходимо рассматривать свойства вращательного импульса частиц атома. Величина вращательного импульса может принимать лишь значения $\sqrt{l(l+1)} \frac{h}{2\pi}$, где l — целое или полуцелое число. Если принять произвольное направление в пространстве за ось Z , то возможны лишь такие состояния вращения, для которых Z -компонента вращательного импульса принимает одно из $2l+1$ значений:

$$l \frac{h}{2\pi}, (l-1) \frac{h}{2\pi} \dots -l \frac{h}{2\pi}$$

или комбинационные состояния, получающиеся путем сложения этих состояний. Всякое состояние вращения частицы с вращательным импульсом $\sqrt{l(l+1)} \frac{h}{2\pi}$ может быть представлено как наложение указанных $2l+1$ „элементарных состояний вращения“. Для вращательного импульса собственного вращения электрона, как вытекает из многих экспериментальных данных, всегда следует полагать $l = \frac{1}{2}$. Отсюда получаем для него величину $\sqrt{\frac{3}{4}} \frac{h}{2\pi}$. Таким образом всякое состояние спина может быть получено путем сложения $2l+1=2$ элементарных состояний, причем следует их брать так, чтобы у одного компонента спина была равна в определенном направлении $+\frac{1}{2} \frac{h}{2\pi}$, а у другого $-\frac{1}{2} \frac{h}{2\pi}$. Говорят также, что одно состояние имеет параллельный спин, а другое — антипараллельный в данном направлении.

Составление произвольного спина из двух элементарных состояний формально аналогично получению произвольного состояния поляризации световой волны путем сложения двух взаимно перпендикулярно поляризованных световых волн. Аналогия состоит в том, что в обоих случаях оба элементарные колебания не являются твердо установленными заранее; в случае световой волны можно ориентировать в пространстве оба взаимно перпендикулярных направления поляризации произвольным образом по отношению к на-

правлению волны; вращая оба эти направления, можно получать различные разложения того же самого колебательного состояния. Точно так же при разложении состояния спина можно произвольно выбирать указанные направления и разлагать общее состояние спина на эти элементарные составляющие, имеющие в избранном направлении компоненты $+\frac{h}{4\pi}$ и $-\frac{h}{4\pi}$.

Однако аналогию эту нельзя проводить слишком далеко. Разложение света на два взаимно перпендикулярных колебания есть простое разложение вектора на две компоненты. Разложение собственного вращения электрона на две компоненты имеет уже потому совершенно иную природу, что здесь компоненты должны быть противоположно направлены. Для того чтобы ясно выразить это положение вещей, вводится особая величина, соответствующая собственному вращательному импульсу электрона и называемая спинором, а обе компоненты называются компонентами спинора. Таким образом и формально весьма важные правила преобразования компонент спинора будут иными, чем правила преобразования компонент вектора. Приведем один пример: при повороте системы координат вокруг оси X на угол α Z -компонента вектора, первоначально параллельного оси Z , будет уменьшена в отношении $\cos \alpha$. Компонента спинора первоначально расположенного параллельно оси Z спина, уменьшится в отношении $\cos \frac{\alpha}{2}$.

Вследствие наличия спина уже невозможно описывать состояние электрона простой скалярной волной ψ . Если бы спин представлял вращение, допускающее классическое описание, т. е. если бы его вращательный импульс представлял обыкновенный вектор с тремя задаваемыми компонентами, то было бы естественно представлять волну, связанную с электроном как волну вектора, причем вектор ψ с тремя компонентами ψ_x, ψ_y, ψ_z должен лежать в направлении вращательного импульса. Но вращение с импульсом $\sqrt{\frac{3}{4}} \frac{h}{2\pi}$ можно описать только спинором с двумя спинорными компонентами, так что подходящим представлением для электронной волны будет „спинорная волна“ ψ , причем „спинор ψ “ состоит из обеих спинорных компонент $\psi_s, \psi_{\bar{s}}$. Значение компонент для определенной спинорной волны зависит, конечно, от выбранной системы координат, т. е. от направления (Z -оси), в котором берутся элементарные состояния. Так например, для электронной волны, спин которой имеет Z -компоненту, в точности равную $+\frac{h}{4\pi}$, исчезает компонента спинора $\psi_{\bar{s}}$, соответствующая противоположному спину. В координатной системе с другим направлением оси Z обе компоненты будут отличны от нуля.

Волновое уравнение для волновой функции со многими компонентами состоит из нескольких уравнений для каждой компоненты, которые могут быть связаны друг с другом так, что поведение какой-нибудь одной компоненты не будет независимым от осталь-

ных. Несмотря на то, что свойства спина электронов нельзя рассматривать без учета релятивистской механики, можно так обобщить нерелятивистское уравнение Шредингера, что оно, по крайней мере приближенно, будет описывать поведение двух компонентных спинорных волновых функций. Такое расширение мы здесь кратко и рассмотрим.

Волновое уравнение для движения без действия сил должно быть тождественным для обеих компонент с прежним уравнением Шредингера, так как в пространстве, свободном от действия сил, спин не может оказывать влияния на движение электрона. Это мы выразим символическим волновым уравнением.

$$\Delta\psi = -\frac{4\pi im}{h} \frac{\partial\psi}{\partial t},$$

где вместо ψ следует подставлять как ψ_a , так и ψ_b . При наличии электрических или магнитных полей на движение электрона оказывает влияние магнитный момент, связанный с собственным вращением. Всякое как угодно направленное вращение электрических зарядов вызывает магнитный момент, пропорциональный вращательному импульсу (механический момент); коэффициент пропорциональности полностью зависит от распределения вращающегося заряда. Если точечный заряд обращается вокруг некоторого центра, то магнитный момент M равен произведению вращательного импульса на $\frac{e}{2mc}$. Это соотношение удовлетворяется, например, для движения электрона по орбите вокруг атомного ядра. Соответствующий множитель для собственного вращения электрона по классическим представлениям должен был бы зависеть от внутреннего строения электрона. Мы его позаимствуем из опыта, который показал, что этот множитель здесь вдвое больше, чем коэффициент пропорциональности при движении по орбите. Таким образом магнитный момент электрона равен $\frac{e}{mc}s$, где s — вращательный импульс спина. Величина магнитного момента равна, следовательно, $\sqrt{\frac{3}{4}} \frac{e}{mc} \frac{h}{2\pi}$, а Z -компонента в каком-нибудь направлении, принимаемом за ось Z , всегда $+\frac{e}{mc} \frac{h}{4\pi}$ или $-\frac{e}{mc} \frac{h}{4\pi}$. Только лишь волновое уравнение Дирака приводит к этим значениям, не обращая ни к каким опытным данным.

Магнитный момент электрона становится заметным при движении в магнитном поле H , так как он вызывает тогда дополнительную потенциальную энергию $V^* = M \cdot H$, которая определяется скалярным произведением H на магнитный момент спина. Но и электрическое поле оказывает действие на спин, что совершенно понятно, так как всякое электрическое поле E имеет магнитную компоненту для движущегося электрона (отсюда понятно также расщепление термов благодаря спину в атомах, где нет никаких магнитных сил). И то и другое действие должны быть соответ-

ствующим образом учтены в волновых уравнениях обеих компонент ψ_α и ψ_β .

Влияние электрического поля на спин не может быть последовательно получено в нерелятивистской теории, так как само по себе магнитное действие поля на движущийся электрон представляет релятивистский эффект. Однако можно приближенно описать это действие путем прибавления к потенциальной энергии добавочного члена $V_E = \frac{2}{2mc} \mathbf{p} \times \mathbf{E} \cdot \mathbf{M}$, который представляет влияние поля $\mathbf{E}$ на спин электрона движущегося и обладающего импульсом $\mathbf{p}$. Тогда влияние спина может быть учтено в волновом уравнении Шредингера (7), если обычную потенциальную энергию V увеличить, добавив влияние магнитного поля V^* и электрического поля V_E . Наконец, если выразить магнитный момент $\mathbf{M}$ через $\mathbf{s}$ —вращательный импульс спина: $\mathbf{M} = \frac{e}{mc} \mathbf{s}$, то получим так называемое волновое уравнение Паули для обеих компонент спинора ψ_α и ψ_β ⁴

$$-\frac{\hbar^2}{8\pi^2m} \Delta \Psi + e \left\{ V + \frac{e}{mc} \mathbf{H} \cdot \mathbf{s} + \frac{e}{2mc^2} \mathbf{p} \times \mathbf{E} \cdot \mathbf{s} \right\} \Psi = \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial \Psi}{\partial t}. \quad (13)$$

Значение $\mathbf{p}$, входящее в V_E , хорошо известно. Компоненты этого вектора p_x, p_y, p_z следует заменить в волновом уравнении операторами (4). Теперь следует столкновать соответствующее значение вектора спина $\mathbf{s}$ в волновом уравнении.

Точно так же, как вместо произведения $p_x \psi$ вводится новая функция, а именно: $\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial \psi}{\partial x}$, так и произведение $s_x \Psi$ порождает новую спинорную функцию, которая, однако, не получается из ψ при помощи математической операции, а получается путем перестановки компонент спинора. Так, имеем:

$$\begin{aligned} s_x \psi_\alpha &= \frac{\hbar}{4\pi} \psi_\beta, & s_y \psi_\alpha &= -i \frac{\hbar}{4\pi} \psi_\beta, & s_z \psi_\alpha &= \frac{\hbar}{4\pi} \psi_\alpha, \\ s_x \psi_\beta &= \frac{\hbar}{4\pi} \psi_\alpha, & s_y \psi_\beta &= +i \frac{\hbar}{4\pi} \psi_\alpha, & s_z \psi_\beta &= -\frac{\hbar}{4\pi} \psi_\beta. \end{aligned}$$

Таким путем получается связь между обоими волновыми уравнениями для ψ_α и ψ_β , причем ψ_β входит в первое уравнение, а ψ_α во второе. Получающиеся из волнового уравнения Паули волновые функции весьма похожи на функции уравнения Шредингера, так как добавочный член, возникающий в результате спина, вообще очень мал. Но здесь всякое стационарное состояние удваивается вследствие двух возможных ориентаций спина. Волновые функции обоих состояний подобного дублета по существу отличаются только различным отношением амплитуд между компонентами ψ_α и ψ_β .

* Магнитные члены уравнения Шредингера ради простоты здесь опущены.

Не приходится ожидать, чтобы волновое уравнение Паули качественно правильно отражало все эффекты спина, так как релятивистские возмущения всегда имеют тот же порядок величины. Впрочем, это приближенно учитывается тем, что влияние электрического поля на спин уменьшается наполовину (множитель Томаса). Прогресс, осуществляемый этим уравнением по сравнению с уравнением Шредингера, состоит в качественном объяснении мультиплетной структуры и прежде всего в полном учете аномального эффекта Зеемана в слабых магнитных полях и эффекта Пашен-Бака в сильных полях. В самом деле, волновые уравнения Паули объясняют с точки зрения волновой механики известное сложение векторов вращательного импульса от движения по орбите и от спина в один общий вращательный импульс и приводят, кроме того, к множителю g Ланде, как коэффициенту пропорциональности между механическим и магнитным моментами состояния атома, вращательный импульс которого складывается частично из орбитальных моментов, а частично из спин-момента.

Следует, однако, указать, что магнитный спин-эффект не получается непосредственно из самого волнового уравнения, как это имеет место для магнитного момента, получающегося в результате обращения по орбите вокруг ядра; этот последний момент вытекает с необходимостью из поведения плотности тока соответствующей волновой функции. Магнитный спин-момент берется из опыта и добавляется в качестве дополнительного члена к $\mathcal{H}$ в волновом уравнении, между тем в исчерпывающей теории он должен был бы вытекать непосредственно из спинарных свойств электронной волны. Этому требованию удовлетворяет только релятивистская теория спина электрона Дирака.

5. ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОНА ДИРАКА

Последовательное релятивистское волновое уравнение для волновых функций спинора имеет столь странный и непривычный характер, что понимание его, пожалуй, возможно только с помощью аналогии, которую легче всего дать, пользуясь структурой уравнений Максвелла.

Как известно, векторы электрического и магнитного поля кинематически тесно связаны между собой. Чисто электрическое поле, рассматриваемое движущимся наблюдателем, перестает быть таковым и содержит также и магнитные компоненты. Поэтому оба поля рассматриваются не как поля, характеризующиеся двумя различными векторами, а как части одной и той же величины, так называемого шестикомпонентного тензора поля, характеризующегося векторными компонентами векторов электрического и магнитного полей. При переходе к движущейся системе вектор электрического поля дает частично и компоненту магнитного поля, так же как вектор поля, параллельный оси X , при вращении вокруг оси Z дает и составляющую по оси Y .

Волновое уравнение распространения электрического и магнитного поля в вакууме, как известно, имеет вид

$$\Delta F = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2},$$

причем вместо F можно подставлять каждую из компонент вектора поля в отдельности. Отсюда следует, что каждая компонента распространяется в виде волны со скоростью c ; однако отсюда нельзя вывести взаимной связи между полями. Для этого необходимы уравнения Максвелла для вакуума:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \text{rot } \mathbf{H},$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = - \text{rot } \mathbf{E}.$$

Эти уравнения устанавливают связь между обоими полями и в частности указывают, что всякая электрическая волна должна сопровождаться магнитной. В уравнения Максвелла входят только первые производные векторов поля; эти уравнения шире, чем волновое уравнение; последнее может быть из них выведено.

Вернемся теперь к двухкомпонентным спинорным волновым функциям электрона. Оказалось, что невозможно полное описание электронной волны двумя компонентами спинора. Наряду с волной ψ должна быть и другая спинорная волна φ с компонентами φ_α и φ_β , которые находятся в такой же связи с ψ -волной, как вектор магнитного поля с вектором электрического поля. При переходе к системе отсчета, обладающей другим движением, часть ψ -волны переходит в φ -волну. Поэтому обе пары компонент ψ и φ объединяют в один „релятивистский спинор“ с четырьмя компонентами $\psi_\alpha, \psi_\beta, \varphi_\alpha, \varphi_\beta$, которые представляют аналог шестикомпонентного тензора поля. Впрочем, для скоростей электронов, малых по сравнению со скоростью света c , сопровождающая спинорная волна φ весьма слаба по сравнению с ψ , что, пожалуй, можно считать аналогичным тому факту, что при медленно движущихся зарядах вектор магнитного поля также всегда мал по сравнению с электрическим. Поэтому в нерелятивистском волновом уравнении вращающегося электрона можно было совсем пренебречь второй спинорной волной. Но для быстрых частиц, к которым нерелятивистская механика уже неприменима, порядок величины ψ -волны и φ -волны одинаков. Физическое значение φ -волн мы рассмотрим ниже.

Волновое уравнение для электрона, движущегося в пространстве, свободном от действия сил, определяется, как обычно, фундаментальными соотношениями между величинами, характеризующими частицу (E, p) и волновыми параметрами (ν, λ):

$$h \cdot \nu = E, \quad \frac{h}{\lambda} = p.$$

Релятивистское соотношение между импульсом и энергией $E^2 = c^2 p^2 + m^2 c^4$ непосредственно приводит к соотношению

$$\nu = \frac{c^2}{\lambda^2} + \frac{m^2 c^4}{h^2} \quad (11)$$

между частотой и длиной волны электронных волн. Единственным волновым уравнением, приводящим к таким волнам, является уже указанное в § 3 уравнение:

$$\Delta \Phi - 4\pi^2 \frac{m^2 c^2}{h^2} \Phi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}, \quad (14)$$

которое должно удовлетворяться, если вместо Φ подставлять любую из четырех компонент $\psi_\alpha, \psi_\beta, \varphi_\alpha, \varphi_\beta$. Это волновое уравнение похоже на волновое уравнение электромагнитного поля; оно отличается членом $4\pi^2 \frac{m^2 c^2}{h^2} \Phi$, благодаря которому удовлетворяется соотношение (11), между тем как для световых волн всегда имеет место соотношение $\nu = \frac{c}{\lambda}$. Если бы Φ была скаляром, то это волновое уравнение второго порядка полностью определяло бы поведение волновой функции. В самом деле, из уравнения (14) можно получить лишь поведение каждой компоненты самой по себе, но не соотношения между ними. Эти соотношения должны быть установлены только специальными уравнениями Дирака⁵:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial x} - i \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial z} + \frac{2\pi i m c}{h} \psi_\alpha,$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \psi_\beta}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x} + i \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial z} + \frac{2\pi i m c}{h} \psi_\beta,$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial t} = \frac{\partial \psi_\beta}{\partial x} - i \frac{\partial \psi_\beta}{\partial y} + \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial z} - \frac{2\pi i m c}{h} \varphi_\alpha,$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial t} = \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial x} + i \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial y} - \frac{\partial \psi_\beta}{\partial z} - \frac{2\pi i m c}{h} \varphi_\beta,$$

впрочем, вид этих уравнений, так же как и существование φ -волн, необходимо следует из требования, чтобы электронная волна представляла четырехкомпонентную релятивистскую спинорную волну и чтобы волновое уравнение (14) удовлетворялось для компонент. Построение этих уравнений похоже на построение уравнений Максвелла. Производная по времени одной волны ψ определяется некоторой комбинацией пространственных производных второй волны φ . Уравнения Дирака более общи, чем волновое уравнение (14), которое может быть выведено из уравнения Дирака, которое кроме волнового уравнения, содержит также и соотношения между компонентами, например требование, чтобы всякая ψ -волна сопровождала-

лась некоторой φ -волной. Однако указанная здесь аналогия имеет свои границы: уравнения Максвелла устанавливают соотношения между двумя трехкомпонентными векторными величинами $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, которые можно представить в виде одного шестикомпонентного тензора поля; уравнения Дирака дают соотношения между двумя двухкомпонентными спинорными величинами ψ и φ , которые складываются вместе в один четырехкомпонентный релятивистский спинор.

Можно объединить уравнения Дирака, если воспользоваться символическими векторами и величинами, которые преобразуют стоящие рядом с ними функции в иные (подобно вектору $\mathbf{s}$ в предшествующем разделе). Тогда все четыре уравнения можно написать в виде:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \alpha_x \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \alpha_y \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \alpha_z \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{2\pi i m c}{h} \beta \Phi. \quad (15)$$

Вместо Φ следует подставить каждую из компонент $\psi_\alpha, \psi_\beta, \varphi_\alpha, \varphi_\beta$, причем символические компоненты $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ вектора α и символическая величина β имеют следующее значение: умножение на α_x приводит к преобразованию:

$$\begin{pmatrix} \psi_\alpha \rightarrow \varphi_\beta \\ \psi_\beta \rightarrow \varphi_\alpha \\ \varphi_\alpha \rightarrow \psi_\beta \\ \varphi_\beta \rightarrow \psi_\alpha \end{pmatrix}$$

Точно так же

для α_y :

$$\begin{pmatrix} \psi_\alpha \rightarrow -i\varphi_\beta \\ \psi_\beta \rightarrow i\varphi_\alpha \\ \varphi_\alpha \rightarrow -i\psi_\beta \\ \varphi_\beta \rightarrow i\psi_\alpha \end{pmatrix}$$

для α_z :

$$\begin{pmatrix} \psi_\alpha \rightarrow \varphi_\alpha \\ \psi_\beta \rightarrow -\varphi_\beta \\ \varphi_\alpha \rightarrow \psi_\beta \\ \varphi_\beta \rightarrow -\psi_\alpha \end{pmatrix}$$

для β :

$$\begin{pmatrix} \psi_\alpha \rightarrow \psi_\alpha \\ \psi_\beta \rightarrow \psi_\beta \\ \varphi_\alpha \rightarrow -\varphi_\alpha \\ \varphi_\beta \rightarrow -\varphi_\beta \end{pmatrix}$$

Символическое уравнение (15) есть волновое уравнение электрона Дирака для свободного от действия сил пространства.

Обобщение этого уравнения на движения в силовых полях производится опять-таки при помощи соотношений между энергией и импульсом электрона, известных из релятивистской динамики электрона:

$$(E - eV)^2 = c^2 \left(p^2 - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 + m^2 c^4. \quad (16)$$

Влияние электромагнитного поля учитывается здесь тем, что к энергии добавляется член $-eV$, а к импульсу член $-\frac{e}{c} \mathbf{A}$. Для того что-

бы получить соответствующее изменение волнового уравнения, нужно прибавить потенциалы eV и $-\frac{e}{c}A$ к тем выражениям, которые соответствуют энергии и импульсу в силу соотношения (4). Таким образом следует сделать подстановки:

$$\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \rightarrow \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial \Phi}{\partial t} - eV\Phi,$$

$$\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \rightarrow \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{e}{c} A_x \Phi$$

и т. д.

После этих подстановок мы получим полное волновое уравнение Дирака:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{2\pi i}{hc} eV\Phi = & \alpha_x \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{2\pi i e}{hc} A_x \right) \Phi + \\ & + \alpha_y \left(\frac{\partial}{\partial y} - \frac{2\pi i e}{hc} A_y \right) \Phi + \\ & + \alpha_z \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{2\pi i e}{hc} A_z \right) \Phi + \\ & + \beta \frac{2\pi i mc}{h} \Phi. \end{aligned}$$

Как ни различен внешний вид уравнений Дирака и Шредингера, между ними все же существует внутреннее сродство. В самом деле, если скорость частиц весьма мала, то вследствие малости функций φ_x и φ_y обе эти функции легко исключить, в результате чего получается для ψ_x и ψ_z как раз уравнение Шредингера с малыми добавочными членами, учитывающими магнитное действие спина; при этом по существу мы имеем уравнение в виде уравнений Паули (13), описанных в предыдущем разделе. Это показывает, что уравнения Дирака действительно представляют обобщение волнового уравнения Шредингера. В предельном случае для малых скоростей малые функции φ_x и φ_y можно вычислить непосредственно из ψ_x и ψ_z . В этом случае приближенно будем иметь:

$$\begin{aligned} \varphi_x &= \frac{h}{4\pi i mc} \left(\frac{\partial \psi_z}{\partial x} - i \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \frac{\partial \psi_x}{\partial z} \right), \\ \varphi_y &= \frac{h}{4\pi i mc} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + i \frac{\partial \psi_z}{\partial y} - \frac{\partial \psi_y}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (17)$$

Отсюда видно, что φ_x и φ_y пропорциональны производным волновых функций ψ , которые в свою очередь пропорциональны скоростям частиц.

Как же вычисляется плотность заряда и плотность тока из четырехкомпонентных волновых функций? Как мы показали в раз-

деле 2, при помощи уравнения Шредингера выражения эти с необходимостью получаются из волнового уравнения, если учесть все те свойства этих величин, которые вытекают из сохранения количества электричества. Плотность заряда оказывается опять пропорциональной интенсивности волн и именно сумме интенсивностей четырех компонент:

$$\rho = e(|\psi_\alpha|^2 + |\psi_\beta|^2 + |\varphi_\alpha|^2 + |\varphi_\beta|^2). \quad (18)$$

Полный заряд (интеграл плотности заряда ρ , распространенный на все пространство) здесь также пропорционален суммарной интенсивности волновой функции. Поэтому здесь из постоянства полного заряда вытекает также и постоянство количества материи в противоположность тому, что было в случае скалярного релятивистского уравнения. Таким образом волновое уравнение Дирака не могло бы учесть возникновения пар электронов путем поглощения света. Из плотности заряда ρ можно найти выражение для плотности тока, если принять во внимание, что всякое приращение заряда в одной точке за счет какой-нибудь другой вызывает ток между обеими точками. Три компоненты плотности тока i имеют вид:

$$\begin{aligned} i_x &= ec(\psi_\alpha^* \varphi_\beta + \psi_\beta^* \varphi_\alpha + \varphi_\alpha^* \psi_\beta + \varphi_\beta^* \psi_\alpha), \\ i_y &= ec(i\psi_\alpha^* \varphi_\beta - i\psi_\beta^* \varphi_\alpha - i\varphi_\alpha^* \psi_\beta - i\varphi_\beta^* \psi_\alpha), \\ i_z &= ec(\psi_\alpha^* \varphi_\alpha - \psi_\beta^* \varphi_\beta + \varphi_\alpha^* \psi_\alpha - \varphi_\beta^* \psi_\beta). \end{aligned} \quad (19)$$

В этих выражениях компонента ψ всюду множается на компоненту φ . Таким образом мы видим, что замечательные φ -компоненты волновой функции, введенные только на основании требований теории относительности, проявляются и в физически измеримых величинах. Они в силу (18) вносят свою часть в плотность заряда и даже весьма существенно определяют компоненты тока.

Выражения для плотности тока сильно отличаются от выражений Шредингера:

$$i_x = \frac{he}{4\pi mi} \left(\psi \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} \right),$$

приведенных в 2-м разделе (формула 8). Прежде всего, повидимому, отсутствуют производные волновой функции, которые имели главное значение для скорости частицы. Однако на самом деле эти производные содержатся известным образом в функциях φ , которые в силу (17) приближенно получаются из пространственных производных функций ψ .

Для того чтобы убедиться в отличии новых плотностей тока от шредингеровских, весьма поучительно будет разложить вновь полученные выражения на две части ⁶, причем так, чтобы одна часть i' была тождественна с плотностью тока уравнения Шредин.

гера и содержала бы токи Шредингера для всех четырех компонент, а другая ψ' соответствовала бы току покоя. В то время как первая часть во всех отношениях соответствует действительному механическому перемещению электрона, вторая часть приводит к замкнутым круговым токам, сопровождающим всякое движение электрона. Эти круговые токи вызывают магнитный момент, величина которого в точности равна действительному моменту электронного спина. Таким образом магнитный момент спина электрона непосредственно следует из структуры уравнения Дирака и соответствующих этому уравнению выражений для плотности тока. Следовательно, требование, чтобы магнитные свойства спина непосредственно вытекали из спинорной природы волновых функций, здесь удовлетворяется.

Решение уравнения Дирака для случая движения электрона в силовом поле представляет более трудную математическую задачу, нежели решение уравнения Шредингера, вследствие наличия здесь четырех компонент. Однако и здесь можно получить все состояния движения путем сложения стационарных состояний, характеризующихся тем, что их волновые функции, т. е. все четыре компоненты, совершают монохроматические колебания одной и той же частоты. Частоты ν , которые образуют стационарные состояния, дают допустимые значения энергии $h\nu$ электрона в заданном силовом поле. Таким путем можно получить при вычислении водородного атома спектральные термы и их тонкую структуру в точном количественном согласии с опытом.

Количественная проверка волнового уравнения Дирака была проведена также при помощи рассеяния света свободными электронами (Комптон-эффект); именно, вычисление дает для интенсивности рассеянного света так называемую формулу Клейна-Нишины, которая в точности подтвердилась при проверке и для света весьма малой длины волны⁷. Возможна была также и проверка при помощи эксперимента с „поляризованными“ электронными лучами (под „поляризованными“ лучами понимают лучи электронов с одинаковыми спинами). Именно, можно путем рассеяния в силовых полях обычного электронного луча, в котором оба возможных расположения спина встречаются одинаково часто, добиться ослабления одной компоненты, в результате чего получится „частично поляризованный“ луч. Однако, количественное определение получающихся здесь закономерностей еще недостаточно проверено теоретически и экспериментально.

Если сравнить состояние электрона, соответствующее волновым уравнениям Шредингера и Дирака, то можно убедиться, что каждому состоянию, возможному для уравнения Шредингера, соответствуют в уравнении Дирака два состояния с противоположно направленными спинами. Но кроме этого удвоения состояний, находящегося в полном согласии с опытом (дублетная структура термов атомов с одним оптическим электроном), волновым уравнениям Дирака соответствуют еще другие лишние состояния, которые приводят к большим трудностям. Это такие состояния, в которых движение

электрона в электрических полях происходит так, как если заряд электрона равнялся бы не e , а $-e$. Они вполне аналогичны тем, которые были в скалярном релятивистском волновом уравнении (§ 3) и которые там действительно можно было приписать электронам с противоположным зарядом $-e$. Однако, такой выход из положения для волнового уравнения Дирака невозможен, так как плотность заряда по формуле (18) имеет для всех состояний один и тот же знак. В самом деле, она пропорциональна интенсивности волн, а интенсивность, как квадрат амплитуды, всегда положительна. К сожалению, противоположное обычному поведение электрона здесь объясняется весьма неудовлетворительным образом, а именно так, что таким состояниям необходимо приписать отрицательную кинетическую энергию, или, что то же самое, отрицательную массу.

Волновые функции этих состояний с отрицательной массой отличаются от обычных состояний прежде всего формой зависимости от времени, а именно их колебания определяются величиной $e^{-2\pi i \nu t}$. Появление „отрицательной частоты“ связано с отрицательной кинетической энергией. Следует только отметить, что „отрицательная частота“ сама по себе еще не дает права сделать вывод об отрицательной энергии — в скалярном релятивистском волновом уравнении отсюда следует только наличие противоположного заряда; то, что здесь энергия находится в таком прямом соотношении с частотой волновой функции, можно показать только при более детальном исследовании волнового уравнения. Волновые функции состояний с отрицательной массой характеризуются, кроме того, тем что у них компоненты ψ и φ обмениваются ролями. Таким образом в случае медленных движений ψ -волны очень слабы, а φ -волны удовлетворяют приближенному уравнению Шредингера с отрицательной массой электрона.

Рассмотрим теперь в качестве поясняющего примера получающийся из волнового уравнения Дирака энергетический спектр свободного электрона (рис. 1). Наинизшим уровнем энергии для обычных состояний с положительной массой обладает состояние покоя; в этом случае энергия определяется исключительно энергией покоя mc^2 . К этому уровню примыкает в направлении вверх непрерывный спектр, содержащий значения энергий прямолинейных движений во всех направлениях и со всевозможными скоростями. Каждое из этих состояний следует считать дважды в соответствии с двумя возможными ориентациями спина. Но, кроме того, имеются еще состояния с отрицательной массой, которые представляют точное зеркальное отражение состояний с положительной массой и которые, начиная с mc^2 энергии покоящегося электрона с отрицательной массой, распространяются до $-\infty$. Аналогичный энергетический спектр электрона в кулоновом поле (водородный атом) (рис. 2) отличается от спектра свободного электрона появлением дискретных состояний, обладающих энергией меньшей, чем энергия покоя mc^2 , так как связанные состояния обладают меньшими энергиями, чем энергия покоя свободного электрона. Самое низшее

из этих состояний только весьма мало — приблизительно на $\frac{1}{(137)^2} mc^2$ — отличается от энергии покоя. На рис. 2 это расстояние взято большим. Непрерывные состояния выше mc^2 соответствуют ионизированному атому. Связанные состояния представляют узкие дублеты, так как оба расположения спина, вследствие наличия кулонова поля, обладают не вполне точно одинаковой энергией. Спектр

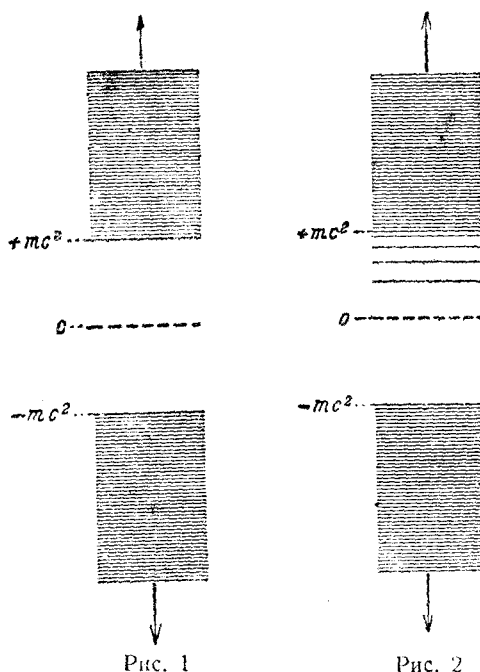


Рис. 1

Рис. 2

Рис. 1. Уровни энергии свободного электрона согласно волновому уравнению Дирака

Рис. 2. Уровни энергии электрона, связанного с ядром, согласно волновому уравнению Дирака (схематическое представление). (Расстояние между дискретным спектром и границей непрерывного спектра $+mc^2$ сильно увеличено; дублетная природа линий не показана).

отрицательных энергий не имеет дискретных состояний, так как электрон с отрицательной массой (так же, как положительно заряженный электрон) отталкивается атомным ядром, а потому и не может оказаться в связанном состоянии. Возможность состояний электрона с отрицательной массой, конечно, находится в противоречии с опытом. Так как этим состояниям соответствует энергия, расположенная глубже, чем энергия, соответствующая нормальным состояниям, то должны были бы наблюдаться спонтанные переходы к состояниям с отрицательной энергией с одновременным испусканием излучения. Вычисление дает для подобного процесса значительную вероятность перехода; следовательно, электрон с положительной массой должен был бы, испуская свет, превращаться в электрон с отрицательной массой.

Было сделано много попыток исключить состояния с отрицательной массой из волнового уравнения. Однако это до сих пор не удалось без того, чтобы не повлиять существенно на остальные результаты. Появление критических состояний теснейшим образом связано с представлением электронного спина Дираком; и тем не менее, ввиду исключительно хорошего согласия с опытом многих выводов, приходится допустить, что эта теория в значительной степени совпадает с действительностью.

6. ТЕОРИЯ ПОЗИТРОНА

Как для волнового уравнения Шредингера, так и для уравнения Дирака характерно то, что плотность заряда пропорциональна интенсивности волновой функции. В этом случае теорема о сохранении суммарного заряда должна иметь следствием также и сохранение суммарной интенсивности. Физически это означает, что количество материи при любых внешних воздействиях остается неизменным, т. е. что количество элементарных частиц постоянно. Это обстоятельство, которое считалось необходимой предпосылкой до открытия позитрона, в настоящее время должно рассматриваться как серьезный недостаток, так как вследствие происходящего в природе возникновения пар электронов правильно отражать действительность может только такое волновое уравнение, которое связано с переменным числом частиц. В качестве примера такого уравнения мы приводили в разделе 3 скалярное релятивистское волновое уравнение, у которого суммарная интенсивность волновых функций не обязательно сохраняется постоянной. Однако скалярная волновая функция никоим образом не соответствует действительности; существование спина заставило рассматривать волновые функции, как имеющие несколько компонент, благодаря чему мы с необходимостью пришли к волновым уравнениям Дирака для четырех компонент, так что неизменность числа частиц и наличие состояний с отрицательной массой представляются неразрывно связанными с волномеханическим представлением электронного спина.

Дирак хотел устранить одновременно оба противоречия с опытом своей смелой теорией позитронов⁹. Он предположил, что все состояния с отрицательной массой заняты каждое одним электроном. Согласно принципу Паули тогда невозможен переход из состояния с положительной массой в занятое состояние с отрицательной массой, так как в каждом из таких состояний может находиться только один единственный электрон. Но электроны с отрицательной массой должны быть физически ненаблюдаемы, и образуемое ими электрическое поле должно быть каким-то образом компенсировано. Наоборот, когда какой-нибудь электрон переходит из области отрицательных энергий в область положительных энергий, то получающаяся вследствие этого „дырка“ в множестве электронов с отрицательной массой должна обнаружиться в виде недостающего отрицательного заряда, т. е. в виде положительного заряда. Эта дырка подчиняется законам движения положительного заряда, так как

множество электронов, „охватывающих“ дырку, вследствие отрицательности их массы должно вести себя в силовых полях противоположно обычному, т. е. должно обнаруживать свойства положительного заряда.

Для иллюстрации этого мы можем воспользоваться схемами термов, изображенными на рис. 1 и 2, где все отрицательные уровни энергии должны быть заняты. Тогда легко видеть, что квант света с энергией, большей $2mc^2$, был бы в состоянии перепрыгнуть через свободное пространство между верхними и нижними термами и поднять один из электронов из отрицательного энергетического уровня в положительный, образовав тем самым одну дырку и один обыкновенный электрон с положительной энергией. В первом разделе было показано, что вследствие сохранения суммарного импульса в пространстве, свободном от действия сил, это возможно только под действием двух световых квантов, сумма энергий которых по меньшей мере равна $2mc^2$. Вблизи сильно заряженных атомных ядер возникновение пары электронов может произойти и под действием только одного светового кванта, обладающего достаточной энергией.

На основании такого представления возможно подсчитать, пользуясь волновым уравнением Дирака, вероятность возникновения одного электрона и одной дырки под действием γ -луча. Эта вероятность тождественна с вероятностью перехода от некоторого уровня с отрицательной массой к уровню с положительной массой, которую можно подсчитать по твердо установленным правилам, исходя из волновых функций, соответствующих обоим уровням. Такое вычисление было проведено для образования пары электронов вблизи тяжелых ядер и оказалось в поразительно точном согласии с полученными до сих пор экспериментальными результатами¹⁰. Так, если световой квант частоты $\nu > \frac{2mc^2}{h}$ проникает в кулоново поле атомного ядра с зарядом Ze , то для процесса возникновения пары электронов с поглощением кванта приближенно получаем:

$$q = \left(\frac{e^2}{mc^2} \right) \frac{Z^2 e^2}{hc} \left(\frac{28}{9} \ln \frac{2h\nu}{mc^2} - \frac{218}{27} \right).$$

Аналогичным образом можно убедиться, что теория дырок дает уничтожение одного электрона и одного позитрона с испусканием света. В самом деле, электрон с положительной массой * всегда может, испустив свет, перейти в незанятое состояние с отрицательной массой — занять „дырку“; при этом дырка заполняется, и вместе с тем и электрон и дырка исчезают. И здесь также теорема импульсов для пространства, свободного от действия сил, требует эмиссии двух световых квантов.

* Не смешивать с положительным электроном, который по теории дырок представляет собой отсутствующий отрицательный электрон с отрицательной массой.

Проблематика теории дырок упирается в представление, что все состояния с отрицательной массой, число которых бесконечно, должны быть заняты электронами. Это бесконечно большое число электронов должно, разумеется, создавать в любой точке пространства бесконечную плотность заряда и поле бесконечно большой напряженности. Требование теории дырок, чтобы эти заряды не были заметны, нельзя согласовать с последовательным применением волнового уравнения Дирака, согласно которому состояниям с отрицательной массой также должен быть приписан определенный заряд. Однако еще более проблематична возможность количественно учесть это. Если под этим понимать, что электроны в отрицательных состояниях вообще не производят никакого электромагнитного действия, то они не должны были бы реагировать также и на световую волну, так что переход к положительным состояниям энергии с поглощением света был бы невозможен. Другое объяснение состоит в том, что электронам оставляют их электромагнитные свойства, бесконечную же плотность заряда устраняют тем, что просто всегда из всякого результата теории вычитают эту плотность. Подобные попытки, однако, не привели ни к какому однозначному результату, так как вычитание бесконечных величин одной из другой математически не может быть однозначно сформулировано.

Всякое внешнее поле, например, электрическое поле атомного ядра, также оказывает на электроны с отрицательной массой известное действие и, следовательно, изменяет распределение их зарядов в пространстве. Возникает вопрос, можно ли заметить это изменение распределения зарядов благодаря тому, что оно вызывает вблизи самого ядра дополнительное электрическое поле, изменяющее поведение поля ядра? Теория дырок не в состоянии однозначно ответить на этот вопрос, так как нельзя решить, остается ли незамеченным суммарное распределение зарядов электронов с отрицательной массой или будут ли заметны хотя бы изменения, вызываемые внешними полями. Последнее заключение более вероятно потому, что дырки в распределении зарядов следует считать наблюдаемыми в виде положительных частиц; следовательно, небольшие изменения, вызываемые электрическими полями, заведомо должны быть также заметными.

Эта проблема приводит, кроме того, еще к одному существенному усложнению, а именно, вычисление показывает, что и все изменения в распределении заряда в состояниях с отрицательной энергией, которые вызываются малыми внешними полями, также бесконечно велики¹¹. Конечно, изменение в каждом отдельном состоянии очень мало, но сумма таких изменений, взятая по бесконечно большому числу электронов, бесконечно велика. Однако эта трудность, пожалуй, является трудностью иного порядка, так как мы еще очень мало знаем о взаимодействиях между электрическими полями и частицами с очень высокой отрицательной или положительной энергией (об этом речь будет идти в следующем разделе). Если наши предположения относительно этого взаимо

действия окажутся неподходящими, то все же можно думать, что эти изменения конечны, хотя быть может и велики.

Таким образом следует признать, что теория дырок еще никак не преодолела тех трудностей, которые связаны с основной предпосылкой этой теории — наличием бесконечно большого числа состояний с отрицательной энергией. Тем не менее, бесспорное количественное согласие между теоретическими расчетами превращения электрона с отрицательной массой в электрон с положительной массой и действительно происходящим в природе возникновением пар электронов показывает, что теория дырок каким-то образом должна быть связана с действительностью.

Как уже было показано, при рассмотрении бесконечной плотности заряда, теория дырок учитывает, хотя и не однозначно, определенное влияние электрических полей на „пустое пространство“. По представлению теории дырок „пустое пространство“ заполнено теми электронами, которые занимают состояния с отрицательной массой. Внешние электромагнитные поля изменяют распределение зарядов электронов, в результате чего могут возникать явления, которые называются диэлектрической поляризацией вакуума. Диэлектрические явления в обыкновенной материи происходят подобным же образом при смещении заряда внутри материи, вызываемом внешним полем, действующим на эту материю.

Следует заметить, что диэлектрическая постоянная вакуума, одинаковая для всех точек, не могла бы быть экспериментально обнаружена, так как она просто уменьшала бы все заряды в одном и том же отношении, и, следовательно, не было бы никакой возможности определить истинные заряды. Поэтому физический интерес может представлять только диэлектрическая постоянная, зависящая от силы поля или от частоты изменения поля во времени. Первая проводила бы к изменениям в пространственной структуре силовых полей, а вторая проявлялась бы при излучении в виде зависимости действующих зарядов электронов от частоты света.

Возможность подобного влияния вакуума не связана исключительно с несколько сомнительной быть может концепцией теории дырок, а может быть обоснована с более общей точки зрения. Возникновение пар электронов из вакуума под действием световых волн высокой частоты представляет собой экспериментально установленное взаимодействие между электромагнитным полем и „вакуумом“, так что свободно можно предположить, что такое взаимодействие не ограничивается только световыми волнами высокой частоты. Если луч света высокой частоты поглощается в сильном электрическом поле, порождая пары электронов, то вполне вероятно, что сильные поля должны воздействовать также и на свет меньшей частоты, по крайней мере отклоняя лучи света, что должно приводить к рассеянию света в электрических полях. С этим процессом было бы связано также и рассеяние одного светового луча другими, так что уже нельзя было бы считать, что две световые волны могут проходить одна сквозь другую без всяких изменений.

Расчет таких процессов на основе современных представлений возникновения пар электронов, связанных с теорией дырок, представляет трудности, так как эта теория не может быть сформулирована без противоречий. В последнее время Дирак и Гейзенберг пытались найти выражение самого общего вида для новых свойств вакуума, так чтобы оно не находилось в противоречии с известными в настоящее время опытными данными¹². Если потребовать, чтобы возникновение пар электронов определялось такими же формулами, как в теории дырок, — так как эти формулы хорошо подтверждаются на опыте, то можно прийти формально к результатам, которые, пожалуй, в самом общем виде будут правильны, хотя такой способ является не однозначным и ни в какой мере не безусловно обязательным. Такими методами, например, было определено эффективное сечение для рассеяния светового кванта другим квантом¹³, причем получилась величина

$$q \sim \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \cdot \left(\frac{e^2}{hc} \right)^2 \cdot \frac{\lambda_0^4}{h^2},$$

где $\frac{\lambda_0}{\lambda}$ — отношение длины волны Комптона * к средней длине волны рассеивающего и рассеянного световых квантов. Таким образом численное значение этой площади равно примерно 10^{-30} см² для γ -лучей и 10^{-70} см² для лучей видимого света.

7. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ МЕЖДУ МАТЕРИЕЙ И ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМ ПОЛЕМ

Взаимодействие между электромагнитным полем и электроном описывается в квантовой механике „методом соответствия“. Это означает, что в квантовой механике заимствуют соотношение между силой поля и зарядом, получающееся из уравнений Максвелла и классической теории электронов, и затем видоизменяют это соотношение настолько, насколько этого требуют волново-механическая природа зарядов и квантовая природа света. Действие поля на заряды и возникновение поля под действием зарядов одинаково, как это известно из старой теории электронов; только получающееся в результате состояния движения отличается от соответствующих состояний движений обычной частицы вследствие волновой природы электронов.

На этой основе оказалось возможным в принципе построить квантовую электродинамику, которая содержала бы не только соотношение между электромагнитным полем и одним электроном, но и учитывала бы взаимодействие многих электронов между собой. В самом деле, последнее всегда можно разложить на возникновение поля под действием электронов и на действие созданного поля на электроны. Эта программа, впервые проведенная Гейзен-

* Длиной волны Комптона называется входящая в эффект Комптона длина волны $\lambda_0 = \frac{h}{mc}$.

бергом и Паули, наталкивается на глубокие внутренние затруднения, которые будут рассмотрены ниже.

Еще до появления квантовой теории, электродинамика электрона содержала ряд нерешенных проблем, связанных прежде всего с вопросом о пространственных размерах электрона. Электрическое поле электрона обладает некоторым количеством энергии, которая всегда связана с электроном. Эту энергию называют собственной электрической энергией электрона. Сила поля на расстоянии r от покоящегося электрона, как известно, равна $\frac{e}{r^2}$ и, следовательно, она тем больше, чем ближе подойти к электрону. Если рассматривать электрон как точечный заряд, то при этом возникают бесконечно большие поля, которые приводят к бесконечно большой собственной энергии. Но по теории относительности всякая энергия E должна обладать массой $\frac{E}{c^2}$, так что необходимо приписать электрону конечный радиус уже для того, чтобы он обладал конечной массой. Так как энергия поля $E_{\text{поля}}$ покоящегося электрона с радиусом r_0 равна $\frac{e^2}{2r_0}$, то радиус электрона принимают вообще столь большим, чтобы масса, получающаяся из его энергии поля, $m \sim \frac{e^2}{r_0 c^2}$ была бы в точности равна наблюдаемой массе электрона $m = 9 \cdot 10^{-28}$. Отсюда следует, что радиус электрона должен иметь величину порядка $r_0 \sim \frac{e^2}{mc^2}$.

Однако введение конечного протяжения электрона приводит в волновой механике к новым трудностям. Казалось бы, что представление „электронного облака“ — размытого по всей области волновой функции заряда — решает эту проблему, так как в волновой механике, повидимому, заряд всегда имеет конечное протяжение, а потому и не приводит ни к каким чрезмерно большим полям. Однако неправильно непосредственно отождествлять волновую функцию, распространенную на конечную область, с зарядом. Действительно, эта волновая функция представляет только вероятность найти электрон в целом в некоторой точке данной области.

Если же приписать электрону конечную протяженность, то можно прийти к противоречию с простейшими законами суперпозиции электронных волн. Именно, если имеются волны с достаточно малой длиной волны, то всегда можно путем наложения построить волновой пакет, интенсивность которого сконцентрирована в произвольно малой области. А так как длины волн электронов обратно пропорциональны импульсу электрона, то можно найти волны произвольно малой длины у электронов с достаточно большими импульсами. Поэтому конечный радиус электрона коренным образом противоречит квантовой механике, так что все попытки беспрепятственно ввести его в теорию до сих пор оставались безуспешными.

Теперь понятно, что вычисление собственной энергии электрона приводит к бесконечно большим значениям также и в квантовой

механике. Эту энергию необходимо причислить к энергии состояния электрона. Так как собственная энергия в различных состояниях движения электрона должна быть весьма различна, то введение собственной энергии совершенно изменяет разности энергии между различными стационарными состояниями атома, и мы должны были бы иметь бесконечное смещение спектральных линий. В действительности, смещение спектральных линий, вызванное добавочной собственной энергией, должно быть весьма мало, так как оно не обнаруживается экспериментально. Таким образом теория как будто терпит полный крах, когда пытаются учесть поле, созданное электроном. Напротив, результаты квантовой механики по вычислению состояний движения электронов в атомах показывают, что действие внешних полей на электрон может быть правильно учтено. Повидимому, неудачу теории следует отнести, главным образом, к взаимодействию между полем излучения и волновыми функциями с весьма малой длиной волны, которые, повидимому, невозможно представлять обычным „методом соответствия“. Здесь идет речь о волнах, короче классического значения радиуса электрона $\frac{e^2}{mc^2}$, обладающих энергией, превышающей $7 \cdot 10^7$ V.

Интересно указать здесь на то, что и вообще только вследствие слабой связи между зарядом и полем возможно было построить квантовую механику материи без четкого понимания этой связи. Наблюдение стационарных состояний энергии в атоме возможно только лишь потому, что время пребывания в одном состоянии, вследствие слабой связи с полем излучения, весьма велико по сравнению с периодами других колебательных процессов в атоме. В качестве меры связи между электроном и полем можно воспользоваться известной зоммерфельдовской постоянной тонкой структуры $\alpha = 2\pi \frac{e^2}{hc} = \frac{1}{137}$. Здесь α —безразмерная величина, представляющая отношение чисто электрической величины e^2 к имеющему ту же размерность произведению hc основных постоянных квантовой механики и релятивистской механики. Так например, продолжительность первого возбужденного состояния водородного атома равна приблизительно $\left(\frac{1}{\alpha}\right)^3$ периодам света, излучаемого при переходе к невозбужденному состоянию. Таким образом чем меньше α (т. е. связь между электроном и полем излучения), тем дольше остается в стационарном состоянии электрон, не возмущенный полем излучения. Дальнейший пример того, что как раз именно малая величина отношения $\frac{2\pi e^2}{hc}$ облегчает возможность широких применений квантовой механики без решения проблемы собственной энергии, состоит в следующем. Как уже упомянуто, к трудностям, связанным с появлением слишком большой собственной энергии, приводят как раз именно те волны электронов, длина волн которых меньше классической величины радиуса электрона $\frac{e^2}{mc^2}$. Но встречающиеся при движениях электрона в атоме

длины волн обычно имеют величину по меньшей мере $\frac{h}{2\pi mc}$, т. е. по меньшей мере в $\frac{1}{\alpha}$ раз больше критической длины волны. Но если бы отношение α не было столь малым, то квантовая механика была бы неприменима уже к внутренним электронам тяжелых атомов.

Последовательное перенесение классической электродинамики в квантовую механику оказалось невозможным, так как оно наталкивается на внутренние противоречия в связи с получающимися бесконечно большими энергиями поля. Новые открытия возникновения материи под действием света, повидимому, указывают, что классическая электродинамика в самых своих основах представляет лишь приближение. В самом деле, уравнения Максвелла требуют существования электромагнитных волн в пустом пространстве, которые могут налагаться и распространяться вполне независимо друг от друга. В предыдущем разделе мы уже указывали на то, что факт возможности возникновения под действием света пары электронов ограничивает свободу прохождения сквозь пространство световых лучей. Рассеяние света в сильных электрических полях или посредством других световых лучей означает, что уравнения Максвелла для вакуума могут быть правильны лишь приближенно. И в самом деле, добавочные члены к уравнениям Максвелла хорошо представляют некоторые отклонения в поведении полей лишь постольку, поскольку дело касается частот, настолько малых, что не может быть речи о возникновении пар электронов¹³.

Интересно отметить, что при таком представлении мы приходим к более тесной связи между полем и материей. В то время как нельзя представить себе материю без электромагнитного поля вследствие того, что она состоит из заряженных частиц, до сих пор предполагалось, что поля могут существовать в пустом пространстве независимо от материи. Однако ситуация, получившаяся в результате открытия позитрона, показывает, что такую независимость также нельзя считать справедливой, так как сами поля либо непосредственно создают материю, либо вызывают состояния поляризации, сходные с материей.

Было сделано много опытов для того, чтобы установить более тесную связь между полем волн материи и электромагнитным полем. Существенное различие между обоими видами волн состоит в том, что волны электронов представляют четырехкомпонентные спиноры, между тем как световые волны получаются из двух векторов поля. Де-Брогль пытался установить формальную связь, основываясь на том, что легко можно составить из произведений двух спиноров величины, обладающие свойствами векторов¹⁵. Одним из примеров таких величин может служить определяемая формулами (19) плотность тока. Подобным же образом можно построить величины, обладающие свойствами, подобными свойствам шести компонент электромагнитного поля. То обстоятельство, что формально можно построить вектор из двух спиноров, но нельзя

представить спинор при помощи векторов, заставило де-Брогля утверждать, что электромагнитное поле векторов E и H можно получить из спинорных волн; впрочем, при этом де-Брогль хотел воспользоваться волновой функцией так называемого „нейтрино“. Это — незаряженные частицы меньшей, чем электроны, массы, которые играют некоторую роль в физике ядра. Согласно этому представлению один световой квант должен получаться из двух нейтрино; но он мог бы, пожалуй, получаться точно так же из волновых функций одного положительного и одного отрицательного электрона, которые при этой связи давали бы незаряженный фотон. Однако, одно из существенных затруднений при таком построении поля из волновых функций материи состоит в том, что спинорные частицы — электроны, нейтрино — подчиняются статистике Ферми, так что в одинаковом состоянии могут находиться не больше двух подобных частиц с противоположно направленными спинами. Комбинация их — фотон — должна, однако, удовлетворять статистике Бозе. Но, как известно, система из двух связанных частиц, которые сами подчиняются статистике Ферми, будет подчиняться статистике Бозе только в том случае, если эти частицы связаны очень большой силой. Для предположений о существовании, а тем более о поведении подобных сил, мы не имеем никакого исходного пункта, а потому до сих пор не удалось продолжить плодотворно задуманную де-Броглем попытку; таким образом эта идея, повидимому, имеет в настоящее время только формальное, а не физическое значение.

Была предпринята попытка пойти и обратным путем — построить материю из электромагнитного поля¹⁶. Ми еще до появления волновой механики высказывал мысль об изменении основных уравнений электродинамики с целью разрешить вопрос о строении и собственной энергии электрона. Попытки Ми, которые в последнее время были с успехом продолжены Борном и Инфельдом, исходят из того, что материальный электрон нельзя противопоставлять электромагнитному полю, как нечто существенно отличное, и что необходимо так изменить законы поля, чтобы поле обладало известными особенностями, узлами, движения и действия которых на поле по существу совпадали бы с подобными действиями электрона, но так, чтобы при этом были устранены указанные трудности. В электродинамике Борна и Инфельда эта задача в основных чертах разрешена, и следует заметить, что предпринятые изменения уравнений Максвелла приводят к рассеянию света электромагнитными полями в пустом пространстве, так же как это получалось из теории дырок. Однако применение волновой механики к таким электронам и объяснение всех связанных с ними явлений (например, спина и возникновение пар электронов), повидимому, наталкивается на непреодолимые трудности.

ЛИТЕРАТУРА

1. E. Schrödinger, Ann. Physik **81**, 129, 1926.
 2. W. Gordon, Z. Physik, **40**, 117, 1926.
 3. W. Pauli u. V. Weisskopf, Helvet. phys. Acta, **7**, 710, 1934.
 4. W. Pauli, Z. Physik, **43**, 601, 1927.
 5. P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc., **117**, 610, **118**, 351, 1928.
 6. W. Gordon, Z. Physik, **50**, 630, 1927.
 7. O. Klein u. N. Nishina, Z. Physik, **52**, 853, 1929.
 8. N. F. Mott, Proc. Roy. Soc., **124**, 425, 1929; F. Sauter, Ann. Physik, **67**, 320, 1931; H. Hellmann, Z. Physik, **69**, 495, 1931; V. Weisskopf, Z. Physik, **93**, 561, 1935.
 9. P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc., **126**, 360, 133, 1931.
 10. I. R. Oppenheimer u. Plesset, Phys. Rev., **44**, 53, 1933; H. Bethe u. W. Heitler, Proc. Roy. Soc., **146**, 83, 1934.
 11. P. A. M. Dirac, Rapport du Congrès Solvay 1933; R. Peierls, Proc. Roy. Soc., **147**, 420, 1934; I. R. Oppenheimer u. W. Furry, Phys. Rev. **45**, 245, 1934.
 12. P. A. M. Dirac, Proc. Camb. phil. Soc., **30**, 150, 1934; W. Heisenberg, Z. Physik, **90**, 209, 1934.
 13. H. Euler u. R. Kockel, Naturwiss., **23**, 246, 1935.
 14. I. Waller, Z. Physik, **62**, 673, 1930; I. R. Oppenheimer, Phys. Rev., **35**, 461, 1930.
 15. L. de Broglie, C. R., **195**, 536, 577, 1932; G. Wentzel, Z. Physik, **92**, 337, 1934; P. Jordan, Z. Physik, **93**, 464, 1935.
 16. M. Born u. L. Infeld, Proc. Roy. Soc., **144**, 425; **147**, 522, 1934; **150** 141, 1935; G. Mie, Ann. Physik, **37**, 511; **39**, 1, 1912.
-