1935 г. Т. XV, вып. 3

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

Фи101

НОВАЯ ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ БОРНА

П. Тартаковский, Томск

§ 1. Введение

Важность введения в круг представлений квантовой теории идеи о „поле" — основной идеи классической физики — не вызывает никаких сомнений. Однако, несмотря на то, что попытки осуществления этой задачи производятся уже в течение 5 лет крупнейшими теоретиками и таким образом создана уже особая глава квантовой теории — квантовая электродинамика, все же до недавнего времени наука не могла похвастаться слишком крупными достижениями, и в квантовой электродинамике имелся целый ряд серьезнейших затруднений и недочетов. Недавние работы Борна, не являясь еще законченной теорией, представляют, нам кажется, существенный шаг вперед в деле нового обоснования учения о поле и создания квантовой формы теории электромагнитного поля, способной дать ответ на ряд наиболее трудных и принципиальных вопросов современной физики.

Цель настоящей статьи заключается в том, чтобы познакомить читателя с основными положениями теории Борна. Предварительно, однако, мы вкратце остановимся также на некоторых предшествовавших Борну работах по квантовой электродинамике. Это, нам кажется, поможет разобраться в значении работы Борна.

§ 2. Краткий обзор развития квантовой электродинамики

Основная идея теории поля заключается в конечной скорости распространения электромагнитных взаимодействий. На этой мысли построена вся классическая электромагнитная теория; именно потому, что процессы взаимодействия материальных тел происходят не с бесконечно-большой, а с конечной скоростью, и приходится вводить понятие „поля" — физического пространства, являющегося передатчиком взаимодействий. Закон электромагнитных взаимодействий макроскопических тел с громадной степенью точности выражается основной системой уравнений поля, данной Максвеллом. Только в области микромира приходится отказаться от „классического" описания явлений, которое, как известно, приводит к неверным результатам, и перейти к новому „квантовому" описанию.

Однако первоначальное развитие квантовой механики оставалось чуждым идее поля, идее конечной скорости распространения взаимодействий между частицами материи. В самом деле, желая выразить в квантовой механике, например, взаимодействие электрона с ядром, мы просто ставим в уравнении Шредингера выражение потенциальной энергии в той же форме, в какой им пользуется обычная классическая теория дальнодействия.

Однако уже на довольно ранней стадии развития квантовой механики недостаточность такого подхода стала ясной: очевидно, например, что, рассматривая взаимодействие очень быстрых частиц, мы неизбежно должны учесть и скорость распространения взаимодействия. Точно так же и ряд специальных вопросов теории излучения привел к необходимости ввести идею поля, что только и позволило дать правильное решение соответствующих вопросов. Поскольку, однако, как в области взаимодействия частиц материи, так, в особенности, в области излучения мы имеем целый ряд специфически квантовых явлений, создание новой теории поля, новой электродинамики должно итти по „квантовому пути" — новая электродинамика должна быть квантовой. Первые шаги квантовой электродинамики, нам кажется, справедливо будет сравнить с первыми шагами старой квантовой механики: на классические законы электромагнитного поля, как они даны были максвелловыми уравнениями, налагались „квантовые условия" — поле квантовалось. В результате процесса квантования удавалось получить некоторые специфически квантовые законы, например установить, что энергия непрерывного поля оказывается квантованной — иначе говоря, состоит из определенных энергетических порций $h\nu$.

Вопрос о квантовании поля является основным для новой теории. В принципе от правильно проведенного квантования поля следовало бы ожидать разрешения самых основных и принципиальных вопросов — именно к этому и стремится Борн в своем исследовании. В нескольких словах мы остановимся на положении вопроса о квантовании поля (и на некоторых вытекающих отсюда последствиях), каким оно было до появления теории Борна. Мы будем в основном касаться двух направлений, оказавшихся впоследствии тождественными.

В одной из первых работ по квантовой электродинамике Гейзенберг и Паули [1] рассматривали наряду с системами материальных частиц электромагнитное поле как динамическую систему, поведение которой может быть описано по методу механики Гамильтона введением соответствующих координат и импульсов. „Координатами" поля (их не следует смешивать с обычными координатами пространства x_1, x_2, x_3) $(q_i)\, i = (1, 2, 3, 4)$ являются слагающие четырехмерного вектор-потенциала, три слагающих которого дают обычный вектор-потенциал A, а 4-я (временная) слагающая определяет скалярный потенциал φ поля. Каждая из координат q_i имеет определенное значение во всех точках пространства — времени. Чтобы найти соответствующие координатам им-

пульсы p_i, нужно написать подходящее выражение лагранжевой функции поля L. Тогда $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$, где $\dot{q}_i$ — производная от q_i по времени t.

Вид функции $L\left(q_i, \frac{\partial q_i}{dx_k}, \dot{q}_i\right)$ должен быть подобран так, чтобы из вариационного принципа

$$\delta \int L\left(q_i, \frac{\partial q_i}{\partial x_k}, \dot{q}_i\right) d\tau\, dt \tag{1}$$

получились необходимые уравнения поля — „уравнения движения". В частности, если мы хотим оставаться на почве классической теории, для q_i должны получиться уравнения д'Аламбера для пустоты

$$\nabla^2 q_i - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 q_i}{\partial t^2} = 0, \tag{2}$$

из которых (с некоторыми дополнительными ограничениями) можно получить систему уравнений Максвелла. Известно, например, что в классической электродинамике

$$L = \frac{1}{2}\left(\mathbf{H}^2 - \mathbf{E}^2\right), \tag{3}$$

если $\mathbf{H}$ — магнитное, а $\mathbf{E}$ — электрическое поле в соответствующих единицах.

Найдя импульсы p_i, мы можем написать и уравнения движения поля в гамильтоновой форме. Дальнейший этап — квантование поля: мы перестаем считать q_i и p_i обычными величинами, а считаем их квантовыми, т. е. операторами, для которых недействительны обычные правила умножения и потому должны быть введены „правила перестановок" по аналогии с обычными правилами квантования механических систем.

Эти правила пишутся в форме

$$[q_\alpha q_\beta] = [p_\alpha p_\beta] = 0, \quad [p_\alpha q_\beta'] = \delta_{\alpha\beta}\,\delta(r - r'), \tag{4}$$

где знак [ ] изображает квантовые скобки Пуассона *, $\delta_{\alpha\beta} = 0$ при $\alpha \neq \beta$ и $\delta_{\alpha\beta} = 1$ при $\alpha = \beta$; $\delta(x) = 1$ при $x = 0$ и равно 0 при $x \neq 0$; r и r' — радиусы-векторы двух точек пространства, для которых координаты и импульсы обозначены q и q', p и p'. Таким образом квантование поля происходит совершенно так же, как и квантование любой динамической системы.

Дирак [2] предложил другой метод квантования поля, который можно назвать „методом непосредственного квантования". Кванто-

---

* Напомним, что для сопряженной координаты и импульса q и p имеем

$$\left[qp\right] = \frac{i}{h}\left(pq - qp\right) = 1,$$

где h — постоянная Планка, деленная на 2π.

ванное поле Дирака не рассматривается как динамическая система, а играет по его выражению „более простую и фундаментальную роль“, являясь передатчиком всех взаимодействий между частицами материи.

Характерным для теории Дирака является то, что, хотя поле в духе классической теории рассматривается как нечто непрерывное, все же состояния его меняются скачками, как это имеет место вообще в теории квантов. Этим устраняется одно из фундаментальных затруднений классической электродинамики: дело в том, что последняя, рассматривая поле, создаваемое движущимся электроном, почти пренебрегает обратным воздействием поля на движение электрона (реакция поля считается малой); в других задачах при рассмотрении влияния внешнего поля на движение электрона приходится пренебрегать изменением поля, вызываемым электроном. Если эти „обратные воздействия“ не считать малыми, то теория попадает в тупик. Для квантовой теории поля, рассматривающей скачкообразные его изменения, этих затруднений не существует.

Квантованное поле передает взаимодействия между зарядами посредством системы плоских волн различных частот, распространяющихся со скоростью c. Сам Дирак рассмотрел лишь одномерный случай, Фок и Подольский [3] распространили его соображения на действительное трехмерное электромагнитное поле и получили обычный закон Кулона, как результат взаимодействия при посредстве волн. Розенфельд [4] доказал формальную эквивалентность теории Дирака и теории Гейзенберга-Паули.

Идея способа квантования поля по Дираку особенно ясно выступает в основной работе Дирака (одномерный случай). Пусть взаимодействие определяется потенциалом V и распространяется по обычным волновым законам. Тогда V является решением уравнения

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0 \tag{5}$$

и может быть образовано наложением плоских волн:

$$V = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ a_\nu e^{i\nu\left(t - \frac{x}{c}\right)} + b_\nu e^{i\nu\left(t - \frac{x}{c}\right)} \right\} d\nu. \tag{6}$$

(Здесь амплитуды типа $a_{-\nu}$ являются комплексно сопряженными с a_ν). Подставляя V в выражение энергии

$$H = \frac{1}{8\pi}\int\left\{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2\right\}dx,$$

получаем:

$$H = \frac{1}{c}\int_0^\infty \nu^2 (a_\nu a_{-\nu} + b_\nu b_{-\nu})\, d\nu. \tag{7}$$

До сих пор мы находились в области классической теории. Если мы теперь „проквантуем“ поле, то по Дираку это будет равносильно тому, что амплитуды отдельных гармонических колебаний в выражении V считаются квантовыми величинами — операторами, и мы вводим для них определенные правила перестановок. При этом мы поступаем так, что каждое a_ν и b_ν рассматривается непосредственно как отдельный гармонический осциллятор. Эти правила Дирак пишет в форме:

$$[a_\nu b_{\nu'}] = 0, \quad [a_\nu a_{\nu'}] = \frac{ic}{\nu}\,\delta(\nu + \nu'), \tag{8}$$

что в раскрытом виде дает:

$$a_\nu a_{-\nu} - a_{-\nu} a_\nu = -\frac{\hbar c}{\nu}. \tag{9}$$

Далее каждую из комплексных величин a_ν и $a_{-\nu}$ Дирак заменяет через $p + iq$ и $p - iq$. Тогда, помня, что p и q — величины квантовые, некоммутативные, и вычисляя $a_\nu a_{-\nu}$ и $a_{-\nu} a_\nu$, а также пользуясь (9), легко найти

$$a_\nu a_{-\nu} = p^2 + q^2 - \frac{\hbar c}{2\nu}. \tag{10}$$

Это выражение приводит к тому, что в выражении энергии появляется член, содержащий $p^2 + q^2$, т. е. представляющий энергию некоего осциллатора, если q считать за координату, а p за импульс. Но по квантовой механике энергия квантованного осциллатора равна $\left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\nu$, где n — целое. Если так, то подстановка (10) в (7) для части, зависящей от a, дает

$$H_a = \int_0^\infty \left\{\left(n_\nu + \frac{1}{2}\right)\hbar v - \frac{1}{2}\hbar v\right\} dv = v\int_0^\infty n_\nu \hbar v\, dv \tag{11}$$

и аналогичную формулу для H_b. Таким образом, благодаря квантованию энергия непрерывного поля оказывается суммой отдельных квантов различных частот. Числа квантов n_ν показывают, насколько „возбуждена“ данная частота. Мы можем иметь 0-квантовое, одно-, двух- и т. д. квантовые состояния поля, в определенных частотах, между которыми согласно сказанному выше происходят скачкообразные переходы (при взаимодействии с материей). Мы не станем здесь останавливаться на том, каким образом Дирак рассматривает взаимодействие зарядов. Достаточно будет указать на следующее: взаимодействие рассматривается путем последовательных приближений: нулевое соответствует невзаимодействующим частицам и нулькванговому состоянию поля; первое — одноквантовому состоянию, когда в каждой частоте имеется один квант; действие первой частицы, так сказать, испущено, но не поглощено второй; наконец, второе приближение, как раз нас интересующее, соответствует опять нулькванговому состоянию поля — действие „поглощено“ второй частицей. Именно в этом приближении и полу-

чается кулонов закон взаимодействия. Но здесь нужно отметить один существенный дефект, присущий, впрочем, всем квантовым теориям (до Борна) и содержащийся также и в классической теории. Дело в том, что рядом с выражением кулонова потенциала фигурирует бесконечная аддитивная постоянная, выражающая так называемую энергию электрона „на себя“ или „собственную“ энергию (Selbstenergie). Появление этой бесконечно-большой энергии, как справедливо указывает Борн, недопустимо для удовлетворительной физической теории. Этот недостаток имеет место как в квантовой, так и в классической теории, и корень этого дефекта теории нужно, вероятно, искать не в правилах квантования, а где-то глубже.

В качестве основных возражений против существовавших до сих пор форм квантовой электродинамики Борн [5] указывает следующие, относящиеся как к процессу квантования поля, так и к выбору основных „классических“ уравнений поля, которые затем квантуются:

1. Различие в понимании времени и координат (время — обычная величина, координаты — квантовые). 2. Отсюда вытекают затруднения с релятивистской инвариантностью, которая требует полной симметрии времени и пространства. 3. Малопонятное рассмотрение амплитуд a_ν плоских волн как квантовых величин. 4. Незамкнутость теории (наложение различных принципов — классическая электродинамика и квантовая механика). 5. Отсутствие в теории органического понятия радиуса электрона, а также естественного объяснения таких свойств электрона, как заряд, спин, отношение масс электрона и протона и т. п. на почве самих уравнений поля. Вообще электрон в квантовой электродинамике, так же как и в классической, является чем-то „извне данным“, не входящим в теорию как органическая часть. В своем требовании „включения“ электрона в основы теории поля Борн скорее приближается к старым унитарным теориям. 6. Наконец, последним замечанием является уже упомянутый вопрос о бесконечной энергии на себя.

Так как в основном отступления теории от совпадения с данными опыта обнаруживаются на расстояниях классического радиуса электрона $\frac{e^2}{m_0c^2}$, то по Борну построение новой теории прежде всего требует пересмотра „классических“ основ теории — уравнений поля, которые не следует безоговорочно брать, как это делалось раньше, из максвелловской теории. Только устранение дефектов самой классической теории даст требуемый результат. Вторым этапом в построении теории является введение подходящих правил квантования, которые были бы не простым переносом, а разумным обобщением на случай электромагнитного поля правил квантования обычной квантовой механики. Только подобранные таким образом правила квантования и могут в будущем раскрыть „загадки электрона“. Этим вопросам и посвящены две работы Борна.

§ 3. Теория поля Борна

В нашем изложении основ теории Борна мы отступим от порядка, принятого самим автором, и сперва остановимся на обобщении уравнений электромагнитного поля, т. е. на „классической" части работ Борна. При этом мы будем основываться, главным образом, на первой работе, так как она проще и требует знаний лишь в области обычной теории электромагнитного поля. Впрочем, изложение тех же вопросов во второй статье имеет более общий и строгий характер; в отдельных случаях мы будем ссылаться и на вторую работу. Предлагаемые Борном методы квантования мы рассмотрим в следующем параграфе.

При рассмотрении электромагнитного поля мы должны пользоваться четырьмя независимыми переменными (пространственные координаты и время)

$$x_1 = x,\ x_2 = y,\ x_3 = z,\ x_4 = ix_0 = ict \tag{12}$$

и четырьмя зависимыми (слагающие четырехмерного вектор-потенциала)

$$\Phi_1,\ \Phi_2,\ \Phi_3,\ \Phi_4 = i\Phi_0. \tag{13}$$

Слагающие напряжения электрического и магнитного поля, как известно, задаются при помощи величин

$$f_{kl} = \frac{\partial \Phi_l}{\partial x_k} - \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_l} = -f_{lk}, \tag{14}$$

образующих антисимметрический тензор 2-го ранга *

$$\mathbf{H} = (f_{23},\ f_{31},\ f_{12}),\ \mathbf{E} = i\,(f_{14},\ f_{24},\ f_{34}), \tag{15}$$

т. е. магнитное поле выражается через „пространственные" составляющие электромагнитного тензора (значки 1, 2, 3), электрическое — через „временные" (значок 4).

Желая найти уравнения электромагнитного поля, т. е. диференциальные уравнения, связывающие f_{kl}, мы можем воспользоваться тем же приемом, которым пользуется механика: составить подходящее выражение для лагранжевой функции L и затем применить вариационный принцип. Уравнения Эйлера для соответствующей вариационной проблемы и дадут уравнения поля, которые, таким образом, являются „уравнениями движения". Таким образом построение той или иной электромагнитной теории сводится к выбору вида лагранжевой функции. Классическая теория задает L в форме:

$$L = \frac{1}{2}\sum_{k>l} f^2_{kl} = \frac{1}{4}\sum_{k,l} f^2_{kl}. \tag{16}$$

---

* Эти формулы представляют собой не что иное, как обычные формулы электродинамики:

$$\mathbf{H} = \operatorname{rot}\mathbf{A},\ \mathbf{E} = \operatorname{grad}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t},$$

если $\mathbf{A}$ $(\Phi_1,\ \Phi_2,\ \Phi_3)$, $\varphi = \Phi_0$ и координаты и время выражены через (12).

Вводя импульсы

$$p_{kl} = \frac{\partial L}{\partial \Phi_{kl}} = \frac{\partial L}{\partial f_{kl}}, \tag{17}$$

где для сокращения положено $\frac{\partial \Phi_k}{\partial x_l} = \Phi_{kl}$, найдем в классическом случае

$$p_{kl} = f_{kl}. \tag{18}$$

Из вариационного принципа $\delta \int L d\tau = 0$ ($d\tau$—четырехмерный элемент объема) получим уравнения поля в максвелловской форме, если вспомним (15) *. Но мы уже видели, что квантование этих уравнений не приводит к удовлетворительным результатам, каким бы методом его ни производить, в том числе и предлагаемым Борном. Поэтому нужно изменить вид функции Лагранжа, т. е. перейти к новой теории поля. Это изменение, впрочем, должно быть таким, чтобы классическая функция получалась из новой в качестве предельного выражения.

Борн предлагает выбрать L в виде

$$\left.\begin{aligned} L = \frac{1}{a^2}\left(\sqrt{1 + a^2 F} - 1\right) \text{ или } L = b^2\left(\sqrt{1 + \frac{1}{b^2} F} - 1\right); \\ F = \sum_{k,l} f_{kl}^2, \ a = \frac{1}{b}. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Из соображений размерности сразу видно, что b представляет некоторое напряжение поля, которое можем назвать критическим. Если считать его большим (а мы увидим, что это так и есть), то разлагая L в ряд по степеням малой величины a, в первом приближении найдем $L = \frac{1}{2} F$, т. е. классическое выражение (16). Очевидно, выражение (19) можно было бы написать и без коэфициентов a или b, если соответствующим образом подобрать единицы напряжения поля **.

Исходя из этого выражения L, найдем для импульсов

$$p_{kl} = \frac{\partial L}{\partial f_{kl}} = \frac{f_{kl}}{\sqrt{1 + a^2 F}}. \tag{20}$$

Мы видим, что p_{kl} образует новый тензор, не совпадающий с f_{kl} и переходящий в него лишь в пределе, если положить $a = 0$.

---

* При этих обозначениях $L = \frac{1}{2}(\mathbf{H}^2 + \mathbf{E}^2)$, что и представляет классический вид лагранжевой функции поля.

** В статье Борна и Инфельда дано обоснование такого выбора лангранжевой функции. За основу берется выражение лангранжевой функции общей теории относительности $L = \sqrt{-|g_{kl}|}$, где $|g_{kl}|$ — определитель, составленный из так называемого фундаментального тензора. Полагаем $L = \sqrt{-|a_{kl}|}$, где $|a_{kl}| = g_{kl} + f_{kl}$. При переходе к галилеевой системе координат и учете предельного значения L отсюда и получается выражение (19).

Слагающие этих двух тензоров позволяют определить четыре электромагнитных вектора **E**, **D**, **H**, **B**, причем f_{kl} определяет векторы **B** и **E**, p_{kl} — векторы **H** и **D**. В первой работе эта связь выражена формулами

$$\begin{gathered}\mathbf{B}=(f_{23}, f_{31}, f_{12}),\ \mathbf{E}=i(f_{14}, f_{24}, f_{34}),\\ \mathbf{H}=(p_{23}, p_{31}, p_{12}),\ \mathbf{D}=-i(p_{14}, p_{24}, p_{34}).\end{gathered} \tag{21}$$

Применяя вариационный принцип $\delta\int L d\tau = 0$, легко получить систему уравнений

$$\sum_{l=1}^{4}\frac{\partial p_{kl}}{\partial x_l}=0, (k=1, 2, 3,4), \tag{22}$$

а из определения f_{kl} следуют тождественные соотношения

$$\sum_{l=1}^{4}\frac{\partial f_{kl}^*}{\partial x_l}=0, (k=1, 2, 3, 4), \tag{23}$$

где f_{kl}^* представляет тензор „дуальный" по отношению к f_{kl} — он получается из слагающих тензора f_{kl} заменой значков 23, 31, 12 соответственно на 14, 23, 34 и наоборот. Равенства (22) и (23) и представляют собой уравнения электромагнитного поля. По внешнему виду они полностью совпадают с уравнениями Максвелла для пустоты, в чем легко убедиться, если подставить вместо f_{kl}^* и p_{kl} их значения согласно (20). Однако эта аналогия является внешней, так как по (20) связь p_{kl} и f_{kl} (т. е. **H**, **D** с **B**, **E**) совсем не та, что в максвелловской теории: подстановка значений p_{kl} из (20) и (22) дает нелинейные диференциальные уравнения, чем теория Борна и отличается весьма резко от максвелловской; уравнения теории Максвелла оказываются лишь приближенной формой уравнений поля. Следует отметить самый факт введения четырех векторов вместо двух, что в максвелловской теории имеет смысл лишь для среды с диэлектрической постоянной и магнитной проницаемостью, отличными от единицы *.

Борн указывает, что те же уравнения поля можно получить вводя гамильтонову функцию $H=-L+\Sigma p_{kl}f_{kl}$ и считая f_{kl} функциями p_{kl} (а не наоборот, как мы делали до сих пор), для чего следует пользоваться вариационным принципом $\delta\int H d\tau = 0$, вы-

---

* Во второй статье, где расчеты проведены в более совершенном приближении, связь между векторами получается в виде:

$$\mathbf{H}=\frac{\mathbf{B}-G\mathbf{E}}{\sqrt{1+F-G^2}},\ \mathbf{D}=\frac{\mathbf{E}+G\mathbf{B}}{\sqrt{1+F-G^2}},$$

где F задается условием (19), а G также представляет собой функцию f_{kl}. При $G=0$ (приближенно) получим те же соотношения, что и получаемые непосредственно из уравнения (20).

разив H через p_{kl}. Мы имеем полную симметрию по отношению к переменным f_{kl} и p_{kl}.

В новой теории легко можно вывести „законы сохранения", представляющие обобщение классических законов сохранения энергии и импульса для электромагнитного поля.

Как и в классической электродинамике, эти законы выражаются утверждением, что четырехмерное расхождение некоторого тензора равно нулю. Лишь в пределе этот тензор переходит в тензор электромагнитной импульс-работы обычной электродинамики. Если исходить из первого способа написания уравнений поля (исходя из лагранжевой функции), то уравнения сохранения легко получить в форме:

$$\sum_l \frac{\partial}{\partial x_l}\left(L\delta_{lj} - \sum_k p_{lk} f_{kj}\right) = 0. \tag{24}$$

Второй способ вычисления дал бы:

$$\sum_l \frac{\partial}{\partial x_l}\left(H\delta_{lj} - \sum f_{lk}^* p_{kj}^*\right) = 0. \tag{25}$$

Автор предлагает считать обобщением классического тензора некоторую линейную комбинацию, которая и дает в пределе классическое значение; например, слагающая T_{44} переходит в $\frac{1}{2}$ $(\mathbf{H}^2 + \mathbf{E}^2)$, т. е. представляет классическое значение энергии поля, как и должно быть.

Отличие новой теории от обычной выявляется наиболее четко при рассмотрении задачи о покоящемся электроне (статической задачи). В этом случае вектор-потенциал равен нулю, так что:

$$\mathbf{B} = 0,\ \mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi,$$

$$L = \frac{1}{a^2}\left(\sqrt{1 - a^2\mathbf{E}^2} - 1\right) = \frac{1}{a^2}\left(\sqrt{1 - a^2(\operatorname{grad}\varphi)^2} - 1\right), \tag{26}$$

а „уравнения движения" дают:

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = 0,\ \mathbf{D}_x = \frac{\mathbf{E}_x}{\sqrt{1 - a^2\mathbf{E}^2}} = \frac{-\frac{\partial\varphi}{\partial x}}{\sqrt{1 - a^2(\operatorname{grad}\varphi)^2}}. \tag{27}$$

Если $\mathbf{D}$ не всюду непрерывно, то интеграл по поверхности, охватывающей особенную точку, не равен нулю; можно положить

$$\int \mathbf{D}_r d\sigma = 4\pi e \tag{28}$$

и рассматривать (28) как определение заряда.

В случае радиальной симметрии (особенная точка в начале координат) $\varphi = \varphi(r)$ и из (27) легко получим

$$\frac{d}{dr}(r^2\mathbf{D}_r) = 0,\ \mathbf{D}_r = \frac{\mathbf{E}_r}{\sqrt{1 - a^2\mathbf{E}^2}} = \frac{\varphi'}{\sqrt{1 - a^2\varphi'^2}}; \tag{29}$$

отсюда:

$$r^2\mathbf{D} = e.$$

Здесь e — постоянная интегрирования, которой в согласии с (29) следует придать значение заряда. Смещение $\mathbf{D}$ выразится, следовательно, как в обычной теории $\left(\mathbf{D} = \frac{e}{r^2}\right)$ и при $r = 0$ обращается в бесконечность. Подставляя значение $\mathbf{D}$ во второе из уравнений (29), получим выражение для потенциала φ:

$$\varphi = \frac{e}{r_0}\int\limits_{\frac{r}{r_0}}^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} \tag{30}$$

$\left(\text{здесь положено } \frac{r}{r_0} = x\right)$, где r_0 определяется из условия

$$r_0 = \sqrt{ae},$$

т. е. критическое напряжение поля

$$b = \frac{1}{a} = \frac{e}{r_0^2}. \tag{31}$$

Для больших значений r (30) дает приближенно $\varphi = \frac{e}{r}$, т. е. представляет обычный кулонов потенциал. При r порядка r_0 и в особенности меньших r_0 мы получаем отклонения от закона Кулона, и в точке $r = 0$ получается:

$$\varphi(0) = \frac{e}{r_0}\int\limits_0^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} = 1{,}85407\cdot\frac{e}{r_0^2}, \tag{32}$$

а не бесконечность. Это значит, что энергия нашего точечного заряда „на себя“ остается конечной. Напряжение поля направлено по радиусу и равно

$$\mathbf{E}_r = \frac{e}{r_0^2}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{r}{r_0}\right)^4}}. \tag{33}$$

При больших r опять получим кулонов закон $\mathbf{E} = \frac{e}{r^2}$. При $r = 0$ напряжение поля по абсолютной величине достигает критического значения $|\mathbf{E}| = b = \frac{e}{r_0^2}$; в этой точке напряжение поля претерпевает, очевидно, разрыв непрерывности, равный $2\frac{e}{r_0^2}$.

Таким образом, хотя мы вводим в рассмотрение электрон (заряд) как точечную неоднородность поля (особенная точка), тем не менее в теорию органически входит критический радиус r_0, который мы вправе рассматривать как радиус „электрона“. В известном смысле электрон оказывается обладающим конечными размерами. Но из

всего сказанного раньше вытекает, что такое рассмотрение не приводит к затруднениям, возникающим в классической теории в связи с допущением конечности электрона (удержание вместе его частей), так как конечность размеров представляет следствие особого вида уравнений поля и является, так сказать, кажущейся.

Рассматривая движение электрона в слабом (сравнительно с критической величиной b) внешнем поле, Борн находит выражение лагранжевой функции электрона; для этого следует сперва ввести систему координат, в которой электрон в данный момент покоится (система движется вместе с электроном). В этой системе можно представить лангранжеву функцию поля как состоящую из двух слагаемых, из которых первое в силу релятивистской инвариантности может быть выражено по типу (26), второй же член приводится просто к произведению заряда на потенциал внешнего поля φ_0.

Если первый член вычислять по формуле

$$\int L' \, dx_0 \, dy_0 \, dz_0 = \frac{4\pi}{a^2} \int_0^\infty \left(\sqrt{1 - a^2 \varphi'^2} - 1 \right) r^2 \, dr$$

(здесь x_0, y_0, z_0 — упомянутая система координат), то получается выражение $-4\pi \cdot 0{,}619 \frac{e^2}{r_0}$, которые мы можем положить равным $-4\pi m_0 c^2$. Таким образом для покоящейся массы получается уравнение:

$$m_0 c^2 = 0{,}619 \frac{e^2}{r_0}, \tag{34}$$

а лангранжева функция в этой системе координат выразится так:

$$\Lambda = m_0 c^2 + e\varphi_0.$$

Переход к системе координат, по отношению к которой электрон находится в движении, дает обычное выражение лангранжевой функции:

$$\Lambda = m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}} + e\left[\varphi_0 - \left(\frac{\mathbf{v}}{c}, \mathbf{A}\right)\right], \tag{35}$$

где $\mathbf{v}$ скорость электрона, а $\mathbf{A}$ — вектор-потенциал внешнего поля. Из (34) находим для радиуса электрона r_0 $0{,}619 \frac{e^2}{m_0 c^2}$, что дает при подстановке значений e, m_0, c величину порядка 10^{-13} *см* *. Для критического поля b получается приблизительно 10^{16} абс. единиц.

Выражение лагранжевой функции (35) показывает что, по крайней мере в первом приближении, электрон Борна подчиняется обычным классическим уравнениям движения. В связи с вопросом о массе электрона интересно отметить следующее обстоятельство,

* Во второй статье получается иной численный коэфициент, приблизительно вдвое больший.

на которое недавно было указано Я. И. Френкелем [6]. Если за исходное выражение принять значение плотности электромагнитного количества движения, которое в теории Борна следует писать в виде:

$$\mathbf{G} = \frac{1}{c} \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{H}}{\sqrt{1 - a^2(\mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2)}} \tag{36}$$

(здесь $\times$ — знак векторного умножения; значение $\mathbf{H}$ соответствует борновскому $\mathbf{B}$), то, как и в обычной электродинамике $\left(\text{когда } \mathbf{G} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{H}}{c}\right)$, для полного количества движения электрона получается

$$\mathbf{G} = \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}}},$$

причем

$$m_0 = \frac{1}{c} \frac{2}{3} \int \frac{\mathbf{E}^2}{\sqrt{1 - a^2 \mathbf{E}^2}} d\tau \tag{37}$$

вместо выражения обычной теории

$$m_0 = \frac{1}{c^2} \frac{2}{3} \int \mathbf{E}^2 d\tau. \tag{38}$$

Если через U обозначим электростатическую энергию, то (38), как известно, приводит к соотношению $m_0 = \frac{4}{3} \frac{U}{c^2}$, тогда как вычисление показывает, что для случая точечного электрона (37) дает

$$m_0 = \frac{U}{c^2}$$

в полном согласии с теорией относительности. Этим замечанием мы и закончим рассмотрение „классической" теории поля по Борну. „Загадка электрона" должна получить свое окончательное разрешение в процессе квантования уравнений поля. В результате правильно проведенного квантования поля Борн надеется получить значение заряда электрона (кратность всякого заряда элементарному), его спин и т. п. Однако этот вопрос еще нельзя считать разрешенным: в первой работе Борна лишь намечен общий путь разрешения задачи обобщения правил квантования.

§ 4. Обобщение методов квантования

Развитие квантовой механики вообще и правил квантования в частности тесно связано с классической механикой в форме Гамильтона-Якоби. Основой механики Гамильтона, как известно, является решение определенной вариационной проблемы. Введение и обобщение принципа квантования Борн связывает с решением этой вариационной проблемы по методу, предложенному Гильбертом и называемому „теоремой независимости". В наиболее про-

стых случаях (например, движение материальной точки по плоскости) применение теоремы независимости приводит к хорошо известным результатам механики и квантовой теории. Логически последовательное обобщение метода дает надежду найти правильные приемы квантования поля.

Чтобы выяснить сущность нового приема, рассмотрим примеры, разобранные Борном.

В случае движения точки по плоскости мы имеем всего три переменные x, y, z, причем за независимую считаем время x; координаты y и z являются функциями x. Обычный метод заключается в рассмотрении вариационного принципа:

$$\delta \int L(x, y, z, y', z')\,dx = 0, \tag{39}$$

который приводит к лагранжевым уравнениям

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial y'} - \frac{\partial L}{\partial y} = 0, \quad \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial z'} - \frac{\partial L}{\partial z} = 0.$$

Вместо обычного перехода к гамильтоновой форме механики введем три импульса

$$p_x = L - y'\frac{\partial L}{\partial y'} - z'\frac{\partial L}{\partial z'}, \quad p_y = \frac{\partial L}{\partial y'}, \quad p_z = \frac{\partial L}{\partial z'}, \tag{40}$$

являющиеся функциями x, y, z, y', z' и составим некоторый интеграл S по кривой C в пространстве x, y, z:

$$S = \int_C (p_x dx + p_y dy + p_z dz). \tag{41}$$

Если подобрать две функции η, ζ так, чтобы $y' = \eta(x, y, z)$, $z' = \zeta(x, y, z)$ и интеграл не зависел от формы кривой, а лишь от положения начальной и конечной точки, то

$$p_x = \frac{\partial S}{\partial x}, \quad p_y = \frac{\partial S}{\partial y}, \quad p_z = \frac{\partial S}{\partial z}. \tag{42}$$

Подбор η и ζ может быть произведен решением уравнений $\frac{\partial p_z}{\partial y} - \frac{\partial p_y}{\partial z} = 0$ и т. д. Тогда из второго и третьего уравнений (42) находим η и ζ как функции x, y, z, $\frac{\partial S}{\partial y}$, $\frac{\partial S}{\partial z}$. Подстановка этих значений в первое уравнение, если обозначить $p_x = -H$, дает уравнение Гамильтона-Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial x} + H\left(x, y, z, \frac{\partial S}{\partial y}, \frac{\partial S}{\partial z}\right) = 0. \tag{43}$$

Например в случае свободной материальной точки с массой, равной единице, будем иметь $L = \frac{1}{2}\left(y'^2 + z'^2\right)$ и легко получить уравнение Гамильтона-Якоби в виде

$$\frac{\partial S}{\partial x} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2\right] = 0,$$

решение которого можно подобрать в форме

$$S = \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2)x + \alpha y + \beta z. \tag{44}$$

Это решение, как нетрудно убедиться, выражает прямолинейное движение.

Переход к квантовой механике можно произвести либо непосредственной заменой импульсов операторами* $\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}, \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}, \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial z}$ и подстановкой их в уравнение Гамильтона-Якоби, после чего полученный оператор применяется к волновой функции ψ, либо, руководствуясь предельным переходом, будем рассматривать S как фазу волнового процесса, т. е. положим

$$\psi \longrightarrow e^{iS}$$

и затем построим функцию ψ суперпозицией плоских волн (волновой пакет):

$$\psi = \int\int \Phi(\alpha, \beta) e^{i\left[-\frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2)x + \alpha y + \beta z\right]} d\alpha d\beta. \tag{45}$$

И тем и другим способом придем к уравнению Шредингера в форме

$$\frac{1}{i}\frac{\partial\psi}{\partial x} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right) = 0. \tag{46}$$

В общем случае произвольного H получим:

$$S = -H(\alpha,\beta) + \alpha y + \beta z \tag{44'}$$

$$\psi = \int\int \Phi(\alpha, \beta) e^{i[-H(\alpha,\beta) + \alpha y + \beta z]} d\alpha d\beta \tag{45'}$$

$$\left\{\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x} + H\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}, \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial z}\right)\right\}\psi = 0. \tag{46'}$$

Случай одномерной непрерывной среды (например струна) представляет пример, когда имеется одна зависимая переменная $z(x, y)$ и две независимые (время x и координата y). Теперь вариационный принцип имеет вид

$$\delta\int L(x, y, z, z_x, z_y)\, dx dy = 0, \quad \left(z_x = \frac{\partial z}{\partial x} \ldots\right)$$

Уравнение Эйлера дает

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial L}{\partial z_x} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial L}{\partial z_y} - \frac{\partial L}{\partial z} = 0.$$

Вводя импульсы

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial z_x}, \quad p_y = \frac{\partial L}{\partial z_y}, \quad p_z = -L + z_x\frac{\partial L}{\partial z_x} + z_y\frac{\partial L}{\partial z_y}, \tag{47}$$

---

* Единицы выбраны так, что $\hbar = 1$. При обычном выборе единиц было бы $p_x = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}$ и т. д.

подбираем $z_x = \xi(x, y, z)$, $z_y = \eta(x, y, z)$ так, чтобы поверхностный интеграл

$$S = \int\int (p_x\, dy\, dz + p_y\, dz\, dx + p_z\, dx\, dy) \tag{48}$$

по поверхности F в пространстве x, y, z не зависел от формы F, а лишь от ограничивающей ее кривой C. Для определения ξ и η можем воспользоваться уравнениями:

$$\frac{\partial z_x}{\partial y} = \frac{\partial z_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial p_x}{\partial x} + \frac{\partial p_y}{\partial y} + \frac{\partial p_z}{\partial z} = 0.$$

Если (48) не зависит от формы поверхности, то можно написать

$$S = \int (X dx + Y dy + Z dz), \tag{48'}$$

причем, очевидно, должно быть

$$\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} = p_x. \tag{49}$$

Для нахождения в нашем случае континуума аналога уравнения Гамильтона-Якоби рассматриваем S как функционал (функция от функции) и вводим следующее обобщение производной (поверхностная производная). Рассмотрим интегралы по поверхности F ограниченной кривой C:

$$\sigma_{yz} = \int dy\, dz, \quad \sigma_{zx} = \int dz\, dx \ldots$$

и введем величину

$$\frac{\partial S}{\partial (yz)} = \lim \frac{S}{\sigma_{yz}} \text{ (кривая } C \text{ сокращается в точку).} \tag{50}$$

Легко видеть, что из (50) получается:

$$\frac{\partial S}{\partial (yz)} = \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z},$$

если интеграл (48) проводится в виду (48').
По (49) имеем:

$$\frac{\partial S}{\partial (yz)} = p_x, \quad \frac{\partial S}{\partial (zx)} = p_y, \quad \frac{\partial S}{\partial (xy)} = p_z. \tag{51}$$

Отсюда способом, аналогичным примененному в случае движения материальной точки, получим [полагая $p_x = H(x, y, z, p_x, p_y)$] уравнение Гамильтона-Якоби в форме:

$$\frac{\partial S}{\partial (xy)} + H\left(x, y, z \frac{\partial S}{\partial (yz)}, \frac{\partial S}{\partial (zx)}\right) = 0, \tag{52}$$

которое в отличие от прежнего случая является функциональным, а не уравнением в частных производных.

Переход к квантовой теории можно осуществить для случая

когда H не содержит x, y, z явно (лишь этот случай представляет в дальнейшем интерес), т. е. когда (52) записывается в виде

$$\frac{\partial S}{\partial(xy)} + H\left(\frac{\partial S}{\partial(yz)}, \frac{\partial S}{\partial(zx)}\right) = 0. \tag{52'}$$

Для S подбираем решение в виде

$$S = \alpha\sigma_{yz} + \beta\sigma_{zx} - H(\alpha, \beta)\sigma_{xy} \tag{53}$$

с произвольными постоянными α и β. В этом случае можно показать, что

$$\frac{\partial S}{\partial(yz)} = \alpha, \quad \frac{\partial S}{\partial(zx)} = \beta,$$

т. е. что функциональные производные заменяются простыми:

$$\frac{\partial S}{\partial(yz)} = \frac{\partial S}{\partial\sigma_{yz}}.$$

По аналогии с прежним случаем переход к квантовой механике осуществляем построением волнового пакета:

$$\psi(\sigma_{yz}, \sigma_{zy}, \sigma_{xy}) = \int\int \Phi(\alpha, \beta) e^{i[\alpha\sigma_{yz} + \beta\sigma_{zx} - H(\alpha, \beta)\sigma_{xy}]} d\alpha d\beta. \tag{54}$$

Функция ψ удовлетворяет диференциальному уравнению:

$$\left\{\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial(xy)} + H\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial(yz)}, \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial(zx)}\right)\right\}\psi = 0, \tag{55}$$

получаемому из (52) заменой импульсов соответствующими операторами.

Рассмотренное только что обобщение уравнения Гамильтона-Якоби и переход к квантовой механике легко могут быть применены и к четырехмерному континууму — электромагнитному полю. Теперь мы имеем наряду с четырьмя независимыми переменными (12) еще четыре зависимые переменные (13), и „независимый" интеграл S должен быть построен интегрированием по четырехмерной поверхности в пространстве восьми измерений.

К импульсам (17) прибавим еще

$$p_0 = L,$$

что при классическом выражении лагранжевой функции (16) приводит к

$$p_0 = \frac{1}{2}\sum_{k>l} f_{kl}^2. \tag{56}$$

Для S напишем по аналогии с (48)

$$S = \int\left\{p_0 dx + \sum_{k>l} p_{kl}\left(d\Phi_k dx^{(l)} - d\Phi_l dx^{(k)}\right)\right\}, \quad (k, l = 1, 2, 3, 4). \tag{57}$$

Здесь

$$dx = \frac{1}{i}\, dx_1 dx_2 dx_3 dx_4, \quad dx^{(1)} = \frac{1}{i}\, dx_2 dx_3 dx_4.$$

Вводя обозначения

$$\sigma_0 = \frac{1}{i}\int dx, \quad \sigma_{kl} = \frac{1}{i}\int\left(d\Phi_k dx^{(l)} - d\Phi_l dx^{(k)}\right) =$$
$$= \frac{1}{i}\int\left(\frac{\partial\Phi_k}{\partial x_l} - \frac{\partial\Phi_l}{\partial x_k}\right)dx = i\int f_{kl}dx$$

(т. е. σ_{kl} представляют своего рода усредненные значения f_{kl} по пространственно-временной области σ_0), получим уравнение Гамильтона-Якоби:

$$\frac{\partial S}{\partial \sigma_0} - \frac{1}{2}\sum_{k>l}\left(\frac{\partial S}{\partial \sigma_{kl}}\right)^2 = 0. \tag{58}$$

Переход к квантовой теории опять совершается построением волнового пакета или просто введением операторов

$$p_0 = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial \sigma_0}, \quad p_{kl} = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial \sigma_{kl}},$$

что приводит к уравнению

$$\left(p_0 - \frac{1}{2}\sum_{k,l} p_{kl}^2\right)\psi = \left\{p_0 - \frac{1}{2}\left(\mathbf{H}^2 + \mathbf{E}^2\right)\right\}\psi = 0, \tag{59}$$

так как в согласии с (18) и (15) мы должны заменить напряжения поля **H** и **E** операторами:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{i}\left(\frac{\partial}{\partial \sigma_{23}}, \frac{\partial}{\partial \sigma_{31}}, \frac{\partial}{\partial \sigma_{12}}\right), \quad \mathbf{E} = \frac{1}{i}\left(\frac{\partial}{\partial \sigma_{14}}, \frac{\partial}{\partial \sigma_{24}}, \frac{\partial}{\partial \sigma_{34}}\right).$$

Но, как указывает Борн, уравнение (59), как основанное на классическом значении лангранжевой функции поля, не может быть верно.

Однако разобранные здесь принципы квантования поля можно применить к „классической“ теории поля, основанной на виде лагранжевой функции, выбранном Борном. Это применение в настоящее время еще не доведено до конца и даны лишь общие принципы, содержащие много гипотетических моментов.

Прежде всего делается предположение, что возможно разбить рассматриваемую область мира так, чтобы она представляла „произведение“ двух дуальных * областей, т. е.

$$dx = d\sigma \cdot d\sigma', \quad V = \int dx = \sigma \cdot \sigma'. \tag{60}$$

---

* Вводя новые переменные u_1, u_2, u_3, пишем: $dx = dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 = \frac{\partial(x_1 x_2 x_3 x_4)}{\partial(u_1 u_2 u_3 u_4)} du_1 du_2 du_3 du_4 = \sum_{kl} \frac{\partial(x_k x_l)}{\partial(u_1 u_2)} \cdot \frac{(\partial x_k x_l)^*}{\partial(u_3 u_4)} du_1 du_2 du_3 du_4$, где $\frac{\partial(x_2 x_3)^*}{\partial(u_3 u_4)} = \frac{\partial(x_1 x_4)}{\partial(u_3 u_4)}$, и затем вводим „дуальные“ области

$$d\sigma = \frac{\partial(x_k x_l)}{\partial(u_1 u_2)} du_1 du_2, \quad d\sigma' = \frac{\partial(x_k x_l)^*}{\partial(u_3 u_4)} du_3 du_4.$$

Тогда (57) запишется в форме:

$$S = \int \left\{ p_0 d\sigma' d\sigma + \sum_{k>l} p_{kl} d\sigma' f_{lk} d\sigma \right\}. \tag{61}$$

Введя

$$P_0 = \int p_0 d\sigma', \; P_{kl} = \int p_{kl} d\sigma', \; F_{kl} = \int f_{kl} d\sigma, \tag{62}$$

получим вместо (61)

$$S = \int \left\{ P_0' d\sigma + \sum_{k>l} P'_{kl} dF_{lk} \right\}$$

или в наиболее простом случае:

$$S = P_0' \sigma + \sum_{k>l} P'_{kl} F_{lk}. \tag{63}$$

Далее при помощи (63) строим волновой пакет ($\psi \longrightarrow e^{iS}$) или, что то же, заменяем (62) операторами

$$P_0' = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \sigma}, \; P'_{kl} = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial F_{kl}}.$$

Тогда из уравнения Гамильтона - Якоби

$$P_0' + H(P'_{kl}) = 0$$

получим квантовое уравнение поля, подставив вместо H его значение, соответствующее лагранжевой функции (19)*:

$$\left\{ P_0' - \frac{1}{a^2} \sqrt{1 - a^2 \sum P_{kl}'} \right\} \psi = 0. \tag{64}$$

Однако и это уравнение не может быть удовлетворительным, прежде всего потому, что оператор, действующий на ψ, — нелинейный (смысл квадрата оператора рассматриваемого типа совершенно не ясен). Поэтому вместо (64), по аналогии с тем, как Дирак ввел свои знаменитые — линейные в операторах — уравнения, вместо уравнения Шредингера, будем рассматривать пару операторов

$$\left. \begin{aligned} a^2 \gamma_0 P_0' + a \sum_{k>l} \gamma_{kl} P'_{lk} - 1 \\ a^2 \gamma_0 P_0' + a \sum_{k>l} \gamma_{kl} P'_{lk} + 1 \end{aligned} \right\}, \tag{65}$$

перемножение которых дает квадрат оператора (64), если величины γ удовлетворяют условиям:

$$\gamma_0^2 = 1, \; \gamma_0 \gamma_{kl} + \gamma_{kl} \gamma_0 = 0, \; \gamma_{kl} \gamma_{mn} + \gamma_{mn} \gamma_{kl} = \delta_{km} \delta_{ln},$$

---

* Выражение гамильтоновой функции у Борна получено в виде $H = -\frac{1}{a^2} \sqrt{1 - a^2 P}$, где $P = \Sigma p_{kl}^{*2}$. В тексте малые p_{kl} заменены через большие P_{kl}, т. е. „усредненные импульсы".

аналогичным тем условиям, которым удовлетворяют матрицы Дирака.

Борн высказывает предположение, что квантовые уравнения поля, полученные с помощью операторов (65), должны объяснить не только существование элементарного заряда, но и спин электрона, а также отношение масс протона и электрона. Но проведение всех этих расчетов — дело будущего.

Недавно Вейль[7] высказал ряд сомнений в правильности того пути, по которому пошел Борн, разрабатывая методы квантования поля. Сам Борн считает полученные результаты столь необычными, что затрудняется пока дать им определенное физическое толкование.

Несомненным является, однако, то, что „классическая" часть теории Борна представляет весьма существенный интерес и является обобщением электродинамики, освобождающим ее от ряда существенных затруднений.

Примечание при корректуре. Недавно Борн и Инфельд (Proc. Roy. Soc., (A) **147**, 522, 1934) предложили другой метод квантования поля, в основу которого положены особые правила перестановки слагающих векторов **D** и **B**. Эти последние теперь считаются „независимыми переменными", тогда как **E** и **H** получаются диференцированием энергии U, рассматриваемой как функция **D** и **B**.

Уравнения поля оказываются следствием правила перестановок, особого правила диференцирования по времени и координатам и еще одного дополнительного условия. Из этих же правил вытекают законы сохранения энергии и количества движения для поля. Конкретных приложений новой формы теории пока не имеется.

ЛИТЕРАТУРА

1. W. Heisenberg u. W. Pauli, Z. Physik, **56**, 1, 1929.
2 P. A. M. Dirac, Proc Roy. Soc. (A) **136**, 453, 1932.
3. V. Fock u. B. Podolsky, Sow. Phys., **1**, 801, 1932; см. также P. Dirac, V. Fock u. B. Podolsky, Sow. Phys., **2**, 468, 1932.
4. Rosenfeld, Z. Physik, **76**, 729, 1932.
5. M. Born, Proc. Roy. Soc., (A) **143**, 410, 1934; M. Born a. L. Infeld, Proc. Roy. Soc., (A) **144**, 425, 1934.
6. J. Frenkel, Proc. Roy. Soc., (A) **146**, 930, 1934.
7. H. Weyl, Phys. Rev., **46**, 505, 1934.