# ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ФЛЮКТУАЦИИ И ПРЕДЕЛ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПРИБОРОВ

*В. Л. Грановский, Москва*

## I. Тепловой эффект

### Теоретические представления

1. Возникшее в последней четверти прошлого века представление об атомной структуре электричества (Гельмгольц) получило в последующем развитии экспериментальной физики свое полное и всестороннее подтверждение. Изучение носителей электричества в твердых, жидких и газообразных средах как проводящих, так и диэлектрических, показало, что во всех этих случаях электричество появляется в виде отдельных атомов, получивших наименование электронов *. Те же самые электроны были обнаружены внутри атомов всех химических элементов как их составные части. Величина электрона, определенная различными методами, оказывалась всегда одной и той же и равной (по Милликену) $e = 1{,}591 \cdot 10^{-19}$ кулона. Предполагать существование более мелких электрических зарядов в настоящее время, повидимому, нет оснований.

Установление атомности электричества повлекло за собой внесение в учение об электричестве кинетических представлений. Основатели классической электронной теории Дж. Томсон, Друде, Лорентц строили теорию электрических явлений в металлах, опираясь на представление об участии атомов электричества в тепловом движении наряду с атомами металла. Электроны в проводнике никогда не остаются в покое; напротив, они движутся с различными и беспорядочно направленными скоростями во всех участках металла. Такое движение не исчезает и при наличии общего тока; наложение электрического поля вызывает дополнительное общее перемещение всех электронов, которое накладывается на их неупорядоченное тепловое движение. Эта

* Этот термин, первоначально обозначавший просто элементарное количество электричества, независимо от его знака и связанной с ним массы, в дальнейшем был специализирован для обозначения только атомов отрицательного электричества. В настоящее время (1933 г.) намечается возвращение к первоначальному употреблению этого слова; мы будем придерживаться в дальнейшем изложении именно такого смысла слова „электрон".

картина дала возможность построить теорию металлической электро- и теплопроводности, удовлетворительно объясняющую ряд основных закономерностей в этой области. Построение электронной теории металлов основано на тех же методах, на которых строится кинетическая теория вещества — на методах статистики. Хаотическое движение многочисленных электронов подчинено законам случайности; изучение этих движений может быть произведено только с помощью статистики, опирающейся на теорию вероятностей. При таком подходе все величины, характеризующие поведение электронов в массе, как то: сила тока, плотность заряда, разность потенциалов в любом участке проводника, оказываются статистическими величинами со всеми особенностями последних.

2. Одной из характернейших черт, присущих всем статистическим величинам, является пространственно-временное непостоянство. В качестве простого примера возьмем число молекул, встречающихся в 1 *мм*³ газа при нормальных условиях. Это число в среднем равно $\nu = \frac{6{,}06 \cdot 10^{23}}{22\,400 \cdot 10^3} = 2{,}71 \cdot 10^{16}$. Однако это вовсе не значит, что в каждом кубическом миллиметре какого-нибудь большого сосуда содержится именно столько молекул. Напротив, теория вероятностей учит, что такое равномерное распределение молекул по отдельным участкам в высшей степени мало вероятно. Если бы мы могли в какой-либо момент времени сделать мгновенный снимок с изучаемого объема газа, притом такой, чтобы на нем были видны все молекулы, то мы нашли бы следующее распределение их по отдельным клеткам. Чаще всего попадались бы клетки, в которых находилось по $\nu = 2{,}71 \cdot 10^{16}$ молекул; однако были бы и такие клетки, в которых число молекул $n$ меньше или больше $\nu$. При этом, чем сильнее $n$ отличается от $\nu$, тем меньше клеток нашли бы мы с соответствующим числом молекул. Тот же результат можно было бы получить другим путем, именно, вместо того чтобы один раз определить распределение молекул во всем объеме, мы могли бы определить число молекул только в одной клетке, но повторить это очень много раз. Мы нашли бы, что чаще всего в этой клетке находится именно $2{,}71 \cdot 10^{16}$ молекул; бывает, однако, что в нее попадают лишние молекулы, или, наоборот, нехватает до среднего некоторого числа молекул. Частость наблюдения $n$ молекул в данном объеме есть функция с максимумом при $n = \nu$, резко падающая по обе стороны от максимума и быстро стремящаяся к нулю. Если всю эту картину перевести на язык макроскопических величин, то число молекул в единице объема будет представлять собой плотность газа. Предыдущий результат мы тогда сформулируем так: плотность газа в различных местах испытывает небольшие беспорядочные колебания около среднего значения. Причиной этих колебаний

является тепловое движение молекул; в отсутствие движения плотность оставалась бы всюду неизменной. Таким колебаниям подвержена не только плотность среды; другие параметры, например, температура, давление и т. д. являются тоже статистическими величинами, и также определены вполне только в среднем. Эти колебания макроскопических параметров, происходящие вследствие молекулярных движений, носят общее название флюктуаций. Теория флюктуаций была развита Эйнштейном и Смолуховским[1]; она оказалась чрезвычайно плодотворной, так как дала возможность объяснить происхождение и закономерности ряда явлений — голубого цвета неба, рассеяния света веществами в критическом состоянии (опалесценция), броуновского движения. Выведенные из этой теории формулы позволили на основании различных опытных данных определить число молекул в одной граммолекуле $N$ — эту основную постоянную атомной физики.

Законы статистической физики приводят к математическим выражениям, определяющим вероятность флюктуаций. Допустим, что нас интересует какой-либо параметр, относящийся к данной массе газа. Пусть средняя величина его есть $\lambda_0$. Какова вероятность того, что он примет значение $\lambda \neq \lambda_0$? Ответ на этот вопрос можно получить из формулы Больцмана, связывающей вероятность данного состояния газа с его энтропией. Если вероятность состояния, при котором рассматриваемый параметр имеет значение, равное $\lambda$, обозначить $W(\lambda)$, а энтропию этого состояния — через $S$, то

$$S = k \ln W, \tag{1}$$

где $k = \frac{R}{N}$ — постоянная Больцмана, равная $1{,}37 \cdot 10^{-16}$ *эрг·град*.

Чтобы из данного состояния перевести газ в нормальное состояние, при котором параметр равен $\lambda_0$, нужно вообще совершить некоторую работу $A$; если процесс должен происходить при постоянной энергии, то соответствующее $A$ количество тепла $Q$ должно быть отнято от газа. Из термодинамики известно, что

$$A = \int dE - \int T\,dS,$$

где $E$ — энергия, $T$ — абсолютная температура. Но $dE = 0$ по условию; далее, так как на практике приходится иметь дело только с наибольшими отклонениями от средних величин, то можно считать во время этого небольшого перехода температуру $T$ постоянной. Тогда

$$A = -T(S - S_0), \tag{2}$$

что представляет собой величину изменения свободной энергии газа.

Из формулы (1) находим:

$$S - S_0 = k \ln \frac{W}{W_0};$$

вставляя это выражение в (2), получим:

$$A = -kT \ln \frac{W}{W_0},$$

откуда

$$W = W_0 e^{-\frac{A}{kT}}. \qquad (3)$$

Работа $A$, очевидно, есть функция параметра $\lambda$; чем сильнее отличается $\lambda$ от $\lambda_0$, тем большая работа нужна для перехода между этими состояниями. Поэтому $A$ можно разложить в ряд Маклорена по степеням $(\lambda - \lambda_0)$. Так как $\lambda = \lambda_0$ соответствует состоянию равновесия, то этот ряд начнется только с члена 2-го порядка:

$$A = a(\lambda - \lambda_0)^2 + \ldots$$

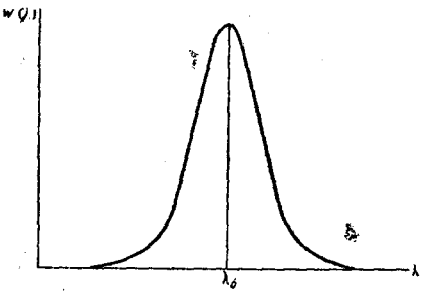

Рис. 1.

Как уже было отмечено выше, мы ограничиваемся только небольшими отклонениями. Это может быть теперь задним числом оправдано на основании формулы (3). Из нее видно что при больших отклонениях, когда $A$ велико, вероятность $W$ крайне мала ($A$ входит в показатель степени). Поэтому, если мы такие редко встречающиеся случаи будем рассматривать неточно, общая строгость теории пострадает мало. Пользуясь этим, ограничимся в разложении $A$ первым членом и вставим его в формулу (3); найдем:

$$W = W_0 e^{-\frac{a}{kT}(\lambda - \lambda_0)^2}. \qquad (3')$$

Строго говоря, ставить вопрос о вероятности того, что параметр имеет значение точно равное $\lambda$, — неправильно. Более рационально искать вероятность того, что рассматриваемый параметр лежит в пределах от $\lambda$ до $\lambda + d\lambda$. Вероятность этого

$$W(\lambda)\, d\lambda = W_0 e^{-\frac{a}{kT}(\lambda - \lambda_0)^2} d\lambda. \qquad (3'')$$

Полученный закон аналогичен закону распределения случайных ошибок по Гауссу; графическое изображение его имеет вид, показанный на рис. 1.

Для определения величины $W_0$ мы воспользуемся тем обстоятельством, что сумма вероятностей всех отклонений равна единице:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} W(\lambda) d\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} W_0 e^{-\frac{a}{kT}(\lambda - \lambda_0)^2} d\lambda = W_0 \sqrt{\frac{\pi kT}{a}} = 1.$$

Отсюда

$$W_0 = \sqrt{\frac{a}{\pi kT}}. \qquad (3'''^*)$$

Вычислим теперь, каково среднее значение $A$, т. е. насколько в среднем отличается свободная энергия системы от нормальной. Будем обозначать средние величины горизонтальными чертами над буквами:

$$\overline{A} = a\,\overline{(\lambda-\lambda_0)^2} = a\int_{-\infty}^{+\infty}(\lambda-\lambda_0)^2\,W(\lambda)\,d\lambda =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} a\,(\lambda-\lambda_0)^2\,W_0\,e^{-\frac{a}{kT}(\lambda-\lambda_0)^2}\,d\lambda.$$

Вставив вместо $W_0$ его значение, найденное выше, мы можем преобразовать интеграл к виду:

$$\frac{kT}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{a}{kT}(\lambda-\lambda_0)^2\,e^{-\frac{a}{kT}(\lambda-\lambda_0)^2}\,d\left[\sqrt{\frac{a}{kT}}(\lambda-\lambda_0)\right] =$$

$$= \frac{kT}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\xi^2 e^{-\xi^2}\,d\xi.$$

Последний интеграл равен $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, следовательно,

$$\overline{A} = \frac{kT}{2}. \qquad (4)$$

Эта замечательная формула показывает, что для любого газа при любых условиях средняя энергия флюктуаций равна средней энергии поступательного движения одной молекулы в определенном направлении. Полученный результат может быть рассматриваем как некоторое расширение закона равномерного распределения энергии по степеням свободы; не только энергия каждой степени свободы одной молекулы, но и энергия каждой

---

* Интеграл, написанный в тексте, может быть преобразован так:

$$W_0\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{a}{kT}(\lambda-\lambda_0)^2}\,d\lambda = W_0\sqrt{\frac{kT}{a}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{a}{kT}(\lambda-\lambda_0)^2}\,d\left[\sqrt{\frac{a}{kT}}(\lambda-\lambda_0)\right] =$$

$$= W_0\cdot\sqrt{\frac{kT}{a}}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2}\,d\xi,$$

где обозначено: $\sqrt{\frac{a}{kT}}(\lambda-\lambda_0) = \xi$; последний интеграл, как известно из курсов анализа, равен $\sqrt{\pi}$, откуда следует результат, приведенный в тексте.

степени свободы всей рассматриваемой системы в целом должна в среднем равняться $\frac{kT}{2}$.

3. Если электрические заряды, находящиеся в проводниках, подвержены тепловому движению, то из предыдущего изложения следует, что в их распределении внутри проводника также должны иметь место флюктуации. Чтобы конкретизировать картину, примем, что положительные ионы в проводнике связаны прочно в определенную решетку, в которой каждый ион занимает определенное место, а отрицательные заряды движутся между ними более или менее свободно. Тогда легко видеть, что в отдельные короткие промежутки времени в каждом маленьком объеме внутри проводника количество наличных отрицательных зарядов будут непостоянным. Оно может становиться то больше, то меньше количества положительных зарядов; соответственно с этим заряд и потенциал рассматриваемого объема будут колебаться по величине и по знаку. Внутри проводника должны все время возникать самопроизвольные разности потенциалов; вызываемые ими „микроскопические" токи будут эти разности потенциалов выравнивать. Представим себе цепь, обладающую определенной емкостью $C$, самоиндукцией $L$ и омическим сопротивлением $r$. Такая цепь не останется безучастной по отношению к происходящим в ней местным флюктуациям тока и напряжения. Разность потенциалов и сила тока во всей цепи будут также подвержены флюктуациям. Если к цепи никакой внешней электродвижущей силы не приложено, то сила тока в ней в среднем будет равна нулю. Но в отдельные моменты в ней будут течь токи флюктуационного происхождения и возникать соответствующие разности потенциалов. На это впервые указал Эйнштейн в 1907 г.

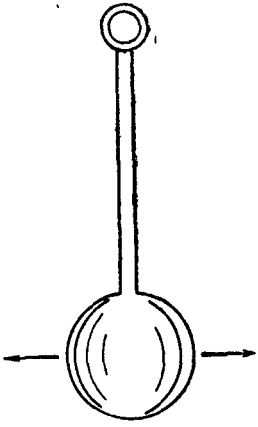

Рис. 2.

Чтобы пояснить эту идею, рассмотрим простую механическую аналогию. Возьмем маятник, способный совершать колебания только в одной плоскости. Если маятник толкнуть, он будет совершать затухающие колебания. Первоначально сообщенная ему энергия будет уменьшаться благодаря сопротивлению воздуха. По уравнению затухающего колебания амплитуда его должна с течением времени стать сколь угодно малой. Однако на самом деле этого не будет. Толчки отдельных молекул будут сообщать маятнику новые колебания, которые в свою очередь будут затухать, снова возобновляться и т. д. После того как первоначальное движение затухло, маятник будет пребывать в своего рода броуновском движении, поддерживаемом молекулами окружающего воздуха. Теория этого движения также была

дана Эйнштейном и Смолуховским. Применяя закон равномерного распределения энергии по степеням свободы, можно написать, что средняя кинетическая энергия маятника

$$\frac{M\overline{v^2}}{2}=\frac{kT}{2}.$$

Средняя потенциальная энергия при колебательном движении равна средней кинетической; поэтому

$$\overline{E}_{пот}=\frac{kT}{2},$$

а полная энергия маятника

$$\overline{E}=\overline{E}_{кин}+\overline{E}_{пот}=kT.$$

В этом примере очень ясно видна та двойственная роль, которую играет тепловое движение молекул воздуха. Оно создает 1) трение, вызывающее затухание движений, 2) импульсы, возобновляющие движение. Все это рассуждение можно целиком перенести на флюктуации в электрическом контуре.

Параметрами, определяющими состояние контура, являются сила тока $i$ и напряжение $v$. На основании изложенного в § можно ожидать, что после прекращения всяких колебаний, вызванных сторонними электродвижущими силами, в цепи останутся колебания, вызванные тепловым движением. Энергия и должна быть такова, что

$$\frac{L\overline{i^2}}{2}=\frac{kT}{2} \qquad (1$$

и

$$\frac{C\overline{v^2}}{2}=\frac{kT}{2}. \qquad ($$

Интересно оценить порядок величины этих токов и напряжений. Величина $\frac{kT}{2}$ при температуре $17^\circ$ C $=290^\circ$ K равн $2{,}0\cdot10^{-14}$ эрг. Полагая, как это делал Эйнштейн, $C=5000$ *c.* найдем:

$$v_{средн}{}^*=\sqrt{\overline{v^2}}=\sqrt{\frac{kT}{C}}=\sqrt{\frac{4{,}0\cdot10^{-14}}{5\cdot10^3}}=2{,}8\cdot10^{-9}\ CGS\ \text{единиц}$$
$$=8{,}4\cdot10^{-7}\ \text{V}.$$

При $L=0{,}1$ генри $=10$ *см* найдем:

$$i_{средн}=\sqrt{\overline{i^2}}=\sqrt{\frac{4{,}0\cdot10^{-14}}{10^8}}=2\cdot10^{-11}\ \text{вебера}=2\cdot10^{-10}\ \text{A}.$$

Таковы средние величины электрических флюктуаций при данных $C$ и $L$. Истинные значения $i$ и $v$ могут быть и меньш

* Под „средними" $i$, $v$ и т. д. мы в этой статье будем все время подразумевать средне-квадратичные.

и больше этих средних; вероятность каждого отдельного значения определяется формулой (3″), в которой вместо $a$ должно быть вставлено $\frac{L}{2}$ или $\frac{C}{2}$, а $W_0$ определено из условия

$$\int_{-\infty}^{+\infty} W(\lambda)\, d\lambda = 1,$$

т. е. по формуле (3‴).

Заметим, что в выражение средней энергии электрических флюктуаций совершенно не входят величины, характеризующие цепь: это выражение содержит только температуру и универсальную постоянную $k = \frac{R}{N}$. Исходя из этого, Эйнштейн в той же заметке 1907 г.[2] предложил использовать наблюдение электрических флюктуаций для определения числа Авогадро $N$. Опыт должен был быть осуществлен по следующей схеме. Конденсатор емкости порядка указанной выше (5000 *см*) замыкается накоротко и затем размыкается. В момент размыкания на нем осталось некоторое напряжение, среднюю величину которого мы уже подсчитывали. Если после размыкания развести обкладки конденсатора так, чтобы емкость уменьшилась, например до 10 *см*, то напряжение между ними возрастет до:

$$v_1 = 8 \cdot 10^{-7} \cdot \frac{5000}{10} = 4 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{V}.$$

Такую разность потенциалов можно заметить с помощью наиболее чувствительных электрометров. Повторяя опыт достаточно много раз, можно из среднего результата определить $k$ и $N$.

В таком виде это предложение, насколько известно автору настоящей статьи, реализовано не было. Как указывает Эйнштейн, трудно осуществлять требуемые его предложением замыкания и размыкания, не вызывая при этом всяких побочных электродвижущих сил того же или большего порядка, которые будут скрадывать искомое явление. В дальнейшем мы опишем ряд работ, доказавших существование электрических флюктуаций теплового происхождения, однако совершенно другими методами.

4. Теоретическое исследование электрических флюктуаций, начатое Эйнштейном, было продолжено Г. Л. де-Гааз-Лорентц[3] в интересной монографии, посвященной броуновскому движению. Эта исследовательница рассмотрела более детально флюктуации в цепи с одной степенью свободы и разобрала ряд новых случаев; к изложению ее результатов мы теперь переходим.

Пусть изучаемая нами цепь состоит из проводника с самоиндукцией $L$ и сопротивлением $r$. Такая цепь может обладать только магнитной энергией, которая в среднем равна

$$\frac{L\overline{i^2}}{2} = \frac{kT}{2}.$$

Средняя сила тока $\sqrt{\overline{i^2}}$ определяется формулой

$$\sqrt{\overline{i^2}} = \sqrt{\frac{kT}{L}}. \tag{5'}$$

Благодаря наличию сопротивления каждый возникший в этой цепи ток должен затухать по уравнению

$$i = i_0 e^{-\frac{r}{L}t}.$$

Для поддержания тока на определенном уровне к цепи должна быть приложена электродвижущая сила. Поэтому можем феноменологически представить действие теплового движения как некоторую быстро меняющуюся электродвижущую силу, которую обозначим через $E$. Тогда уравнение для силы тока в этом контуре можно написать так:

$$L\frac{di}{dt} + ri = E. \tag{7}$$

Пользуясь уравнением (7) и законом равномерного распределения энергии, можно получить некоторые сведения о порядке величины и свойствах электродвижущей силы $E$. де Гааз Лорентц пользуется для этого вывода методом, разработанным Эйнштейном и Гопфом [4]. Проинтегрируем уравнение (7) за промежуток времени $\tau$ настолько малый, чтобы $i$ не изменилось значительно. Тогда найдем:

$$L(i_2 - i_1) + ri_1\tau = \int E\,dt, \text{ или } Li_2 = (L - r\tau)\,i_1 + \int E\,dt.$$

Возведем последнее равенство в квадрат и возьмем средне за достаточно большой промежуток времени от всех входящи в него членов:

$$L^2\overline{i_2^2} = (L - r\tau)^2\,\overline{i_1^2} + 2\,(L - r\tau)\,\overline{i_1\int E\,dt} + \overline{\left\{\int E\,dt\right\}^2}.$$

Величина и знак э. д. с. $E$ никак не зависит от предшес вовавшей силы тока $i_1$; в среднем они одинаково часто мог быть одного знака и разных знаков. Поэтому за достаточ большое время

$$\overline{i_1\int E\,dt} = 0$$

и

$$L^2\overline{i_2^2} = (L - r\tau)^2\overline{i_1^2} + \overline{X^2}, \tag{8}$$

где буквой $X$ обозначен $\int E\,dt$ — „импульс" электродвижущ силы за время $\tau$. Так как в среднем должно быть

$$\overline{i_1^2} = \overline{i_2^2} = \overline{i^2},$$

то из равенства (8) следует:

$$\overline{X^2} = L^2\overline{i^2} - (L - r\tau)^2\overline{i^2} = (2rL\tau - r^2\tau^2)\overline{i^2}.$$

Выберем промежуток времени $\tau \ll \frac{L}{r}$, т. е. много меньш чем время, в течение которого сила тока в данной цепи уме

шается в $l$ раз. Тогда в последней скобке вторым членом можно пренебречь. Так как

$$L\overline{i^2} = kT,$$

то окончательно находим:

$$\overline{X^2} = 2rkT\tau. \tag{9}$$

Эта важная формула дает представление о характере и величине „электродвижущих импульсов", вызывающих флюктуации тока. Их средний квадрат пропорционален времени и омическому сопротивлению цепи; индуктивное сопротивление не играет никакой роли. Пропорциональность первой степени времени можно пояснить следующим рассуждением. Рассмотрим два последовательных промежутка времени $\tau_1$ и $\tau_2$. Полный импульс $X$ будет равен алгебраической сумме импульсов за оба промежутка:

$$X = X_1 + X_2.$$

Возведем в квадрат и возьмем среднее по времени:

$$\overline{X^2} = \overline{X_1^2} + \overline{2X_1X_2} + \overline{X_2^2}.$$

Ввиду полной независимости последовательных импульсов друг от друга

$$\overline{X_1X_2} = 0$$

и, следовательно,

$$\overline{X^2} = \overline{X_1^2} + \overline{X_2^2},$$

откуда видно, что квадрат импульса за время $2\tau$ вдвое больше, чем за время $\tau$.

Аналогичным рассуждением можно показать, что $\overline{X^2}$ должно быть пропорционально 1-й степени $r$. Для этого нужно взять два последовательно соединенных куска провода одинаковой длины и сопротивления и рассмотреть суммарный импульс в них. По существу же связь между $\overline{X^2}$ и $r$ (и только $r$, а не $L$) проистекает из того, что оба они — результат теплового движения.

Перейдем к случаю двух связанных цепей, обладающих сопротивлением $r_1$, $r_2$ и коэфициентами самоиндукции $L_1$, $L_2$. Коэфициент взаимной индукции между ними пусть будет $M$. Уравнения, которым удовлетворяют токи в обеих цепях, будут иметь вид:

$$L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} = -i_1r_1 + E_1,$$

$$L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} = -i_2r_2 + E_2.$$

Аналогично тому, как это было сделано для одной цепи, проинтегрируем эти равенства за малый промежуток времени. Найдем:

$$L_1(i_1' - i_1) + M(i_2' - i_2) = -i_1r_1\tau + X_1,$$

или

$$L_1 i_1' + M i_2' = L_1 i_1 + M i_2 - i_1 r_1 \tau + X_1,$$

и соответствующее равенство для 2-й цепи. Возведем это равенство в квадрат и возьмем среднее за достаточно большой промежуток времени:

$$\overline{(L_1 i_1' + M i_2')^2} = \overline{(L_1 i_1 + M i_2)^2} - \overline{2 i_1 r_1 \tau (L_1 i_1 + M i_2)} + \overline{X_1^2}.$$

Член, содержащий $\tau^2$, мы отбрасываем ввиду его малости, а остальные члены исчезнут при усреднении. Так как

$$\overline{(L_1 i_1' + M i_2')^2} = \overline{(L_1 i_1 + M i_2)^2},$$

то от предыдущего равенства остается:

$$\overline{X_1^2} - \overline{2 i_1 r_1 \tau (L_1 i_1 + M i_2)} = 0,$$

или принимая во внимание, что [см. формулу (9)]

$$\overline{X_1^2} = 2 r_1 k T \tau,$$

получим:

$$\overline{i_1 (L_1 i_1 + M i_2)} = kT.$$

Таким же образом из уравнения для второй цепи найдем, что

$$\overline{i_2 (L_2 i_2 + M i_1)} = kT.$$

Разделив на 2 и сложив оба последних равенства, мы увидим, что

$$\overline{\frac{1}{2} L_1 i_1^2 + M i_1 i_2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2} = kT. \qquad (10)$$

Этот результат показывает, что средняя энергия двух связанных цепей равна кинетической энергии, приходящейся на две степени свободы.

Де-Гааз доказывает, далее, что средняя энергия электрической цепи не зависит от особенностей ее конструкции, если только число степеней свободы ее остается неизменным. Так, например, разбирается цепь, составленная из двух разных металлов. В такой цепи могут возникать самопроизвольно разности температур между обоими спаями, как это было показано в одной из ранних работ Эйнштейна.[5] Эти разности температур дадут начало термоэлектрическим токам в цепи. Средняя величина квадрата силы тока оказывается, тем не менее,

$$\overline{i^2} = \frac{kT}{L}$$

и средняя магнитная энергия в цепи

$$\frac{1}{2} L \overline{i^2} = \frac{1}{2} kT.$$

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ им. В. А. СТЕКЛОВА С. С. С. Р.

5. Наконец, приведем полностью разбор Де-Гааз-Лоренца еще одного вопроса, представляющего непосредственно практический

интерес для техники электрических измерений. Именно, рассмотрим движение магнитной стрелки, подвешенной в центре кругового проводника, под действием флюктуационных токов, возникающих в последнем. Введем следующие обозначения: $R$ — радиус провода, $r$ — сопротивление провода, $i$ — сила тока в нем, $H$ — напряженность образуемого им в центре круга магнитного поля $\left(H=\frac{2\pi i}{R}\right)$, $M$ — магнитный момент стрелки, $Q$ — момент инерции стрелки, $\vartheta$ — угол отклонения стрелки от плоскости проводника.

Сначала ограничимся случаем стрелки, помещенной в вакуум, и не удерживаемой в положении равновесия никакими упругими силами. Тогда броуновское движение стрелки будет вызываться только импульсами от флюктуационных токов в проводнике. Если предположить, что стрелка очень мала по сравнению с $R$ и, следовательно, поле, в котором она движется, можно считать однородным, то момент пары сил, вращающей ее, выразится так:

$$P=HM\cos\vartheta=\frac{2\pi i}{R}M\cos\vartheta\cong\frac{2\pi iM}{R}, \tag{11}$$

если мы ограничимся только рассмотрением очень малых отклонений.

При своем движении стрелка будет тормозиться индукционными токами, возникающими в круговом проводнике при ее вращении. Сила этих токов

$$i_{инд}=\frac{E_{инд}}{r}=-\frac{1}{r}\frac{dN}{dt},$$

где $N$ — магнитный поток стрелки, пронизывающий контур проводника. Его мы определим, пользуясь теоремой об эквивалентности магнита и тока. Рассматриваемую стрелку с магнитным моментом $M$ можно заменить катушкой с числом витков $n$ и площадью сечения $O$, причем по катушке должен течь ток $j$ такой, чтобы

$$nOj=M.$$

Далее, поток, создаваемый током $j$ в катушке и пронизывающий контур кругового проводника, равен потоку, который был вызван током той же силы $j$ в круговом проводнике и пронизывал бы сечение катушки. Последний можно написать так:

$$N=\frac{2\pi j}{R}Qn\cdot\sin\vartheta=\frac{2\pi M}{R}\sin\vartheta.$$

Следовательно,

$$i_{инд}=-\frac{2\pi M}{Rr}\cos\vartheta\frac{d\vartheta}{dt}\cong-\frac{2\pi M}{Rr}\frac{d\vartheta}{dt},$$

где снова положено $\cos\vartheta\cong1$.

Тормозящая пара сил, действующая на стрелку, выразится следующей формулой:

$$P_s=\frac{2\pi i_{инд}}{R}M=-\frac{4\pi^2M^2}{R^2r}\frac{d\vartheta}{dt}.$$

Теперь можно написать уравнение движения стрелки. Обозначив $\frac{d\vartheta}{dt} = \omega$, напишем, пренебрегая действием земного магнитного поля на стрелку*

$$Q\frac{d\omega}{dt} = \frac{2\pi iM}{R} - \frac{4\pi^2M^2}{R^2r}\omega. \tag{12}$$

Это уравнение такого же вида, как уравнение (7) для тока в изолированной цепи. Изучать его можно также, применяя метод Эйнштейна и Гопфа.

Проинтегрируем его за малое время $\tau$, такое, чтобы $\omega$ изменилась очень мало. Найдем:

$$Q(\omega' - \omega) = \frac{2\pi M}{R}\int\limits_{(\tau)} i\,dt - \frac{4\pi^2M^2}{R^2r}\omega\tau;$$

учитывая, что $\int i\,dt = e$ — количеству электричества, протекающего за время $\tau$, перепишем результат интегрирования в виде:

$$Q\omega' = \left[Q - \frac{4\pi^2M^2}{R^2r}\tau\right]\omega + \frac{2\pi M}{R}e.$$

Возведем в квадрат и возьмем среднее за большой промежуток времени:

$$Q^2\overline{\omega'^2} = \left[Q^2 - \frac{8\pi^2M^2}{R^2r}Q\tau\right]\overline{\omega^2} + \frac{4\pi^2M^2}{R^2}\overline{e^2}. \tag{13}$$

Как и раньше, здесь опущен член с $\tau^2$ ввиду его малости и член, содержащий $e\omega$, так как последняя величина равна нулю. Для $\overline{e^2}$ де-Гааз-Лорентц, пользуясь аналогией с формулой Эйнштейна, определяющей квадрат среднего продвижения броуновской частицы в каком-либо определенном направлении, дает выражение:

$$\overline{e^2} = \frac{2kT}{r}\tau.$$

Вставим это выражение в формулу (13); заметив, что $\overline{\omega'^2} = \overline{\omega^2}$, и сократив соответствующие члены, найдем после упрощений:

$$\overline{Q\omega^2} = \overline{kT}.$$

Следовательно, и в этом случае средняя кинетическая энергия стрелки, представляющей собой тело с одной степенью свободы, оказывается равной:

$$\frac{1}{2}Q\,\overline{\omega^2} = \frac{1}{2}kT.$$

Тепер поместим всю систему в воздух и рассмотрим, как скажется присутствие последнего на движении стрелки. Попреж-

* Это можно сделать, если весь прибор помещен в железный панцырь достаточной толщины или если земное магнитное поле компенсировано встречным полем.

нему будем считать, что никакой направляющей силы, как то: земного поля, упругости нити и т. д, нет. Тогда в уравнение движения стрелки (12) войдут дополнительно два члена; один из них, равный $-w\omega$, представит собой сопротивление воздуха, другой — импульсы, получаемые стрелкой от молекул газа; его мы обозначим через $F$:

$$Q\frac{d\omega}{dt}=\frac{2\pi iM}{R}+F-\frac{4\pi^2M^2}{R^2r}\omega-w\omega. \qquad (12')$$

Поступаем так же, как в предыдущем случае: интегрируем за время $\tau$ и собираем подобные члены:

$$Q\omega'=\left(Q-w\tau-\frac{4\pi^2M^2}{R\cdot r}\tau\right)\omega+\frac{2\pi M}{R}e+Y,$$

где

$$Y=\int\limits_{(\tau)}Fdt.$$

Возводим в квадрат и усредняем за большой промежуток времени; принимая во внимание, что $\overline{(\omega')^2}=\overline{\omega^2}_1$, $\overline{Ye}=0$, $\overline{Y\omega}=0$ и $\overline{\omega e}=0$ и отбрасывая член с $\tau^2$, найдем:

$$2Q\left(w\tau+\frac{4\pi^2M^2}{R^2r}\tau\right)\overline{\omega^2}=\frac{4\pi^2M^2}{R^2}\overline{e^2}+\overline{Y^2}. \qquad (13')$$

Величина $\overline{e^2}$, как уже указывалось, выражается так:

$$\overline{e^2}=\frac{2kT}{r}\tau.$$

Что касается $\overline{Y^2}$, то эта величина выводится из рассмотрения броуновского движения стрелки в воздухе в отсутствие проводника. Закон равномерного распределения энергии дает в этом случае для $\overline{Y^2}$ выражение:

$$\overline{Y^2}=2kTw\tau,$$

которое вполне аналогично выражению (9) для $\overline{X^2}$ в замкнутой цепи. Вставим значение $\overline{e^2}$ и $\overline{Y^2}$ в (13'), и сократим на

$$2\left(w\tau+\frac{4\pi^2M^2}{R^2r}\tau\right);$$

останется

$$Q\overline{\omega^2}=kT.$$

Следовательно, для кинетической энергии $\frac{1}{2}Q\overline{\omega^2}$ остается в силе выражение, выведенное для случая стрелки в вакууме.

Этот замечательный результат показывает, что каков бы ни был механизм передачи молекулярного движения определенному телу, энергия движения в среднем остается той же. Несколько различных факторов вызывают вместе не бо́льшие флюктуации, чем каждый из них в отдельности. Причина этого ясно видна в ходе предыдущего вывода. Каждый процесс, способный выз-

вать броуновское движение данной системы, играет по отношению к ней двойную роль; с одной стороны, он возбуждает ее движение беспорядочными импульсами, с другой стороны, тормозит ее движение своим сопротивлением. При одновременном действии нескольких факторов складываются, с одной стороны, их импульсы, с другой стороны,— их сопротивления. Поэтому результирующее движение не усиливается и не ослабевает. Можно это обстоятельство легко проиллюстрировать на том факте, что энергия броуновского движения не зависит от давления окружающего газа, т. е. от частоты ударов молекул. Чем чаще ударяют молекулы, тем большие импульсы в единицу времени передают они колеблющейся системе; однако тем больше и то сопротивление, которое они оказывают ее движению.

Из этого, однако, не следует, что величина сопротивления не играет никакой роли. Она сказывается в характере движения, в его большей или меньшей правильности. При малых сопротивлениях, а следовательно редких толчках, система, совершающая броуновское движение, движется в течение более долгого времени непрерывно; при увеличении сопротивления число разрывов скорости в единицу времени возрастает. Маятник, висящий в атмосферном воздухе, совершает весьма беспорядочные движения, в которых почти нет намека на его собственный период. Наоборот, в высоком вакууме его движение представляло бы собой значительные отрезки полного колебания и даже целые колебания, начальная фаза которых по временам скачкообразно меняется.

В случае электрических колебаний мы должны иметь при малом сопротивлении почти чистый собственный тон контура; если такие флюктуации усилить и наблюдать с помощью телефона, мы услышали бы музыкальный тон. При большом сопротивлении контура флюктуации в нем были бы слышны как шорох. Это обстоятельство было отмечено В. Шоттки.[6]

## Тепловое движение и предел чувствительности гальванометров

6. Открытие и изучение электрических флюктуаций имеет не только теоретическое значение. Развитие техники слабых электрических токов за последние десятилетия вводило постепенно в поле деятельности электрика-экспериментатора и практика все более и более слабые токи и напряжения. Еще раньше в лабораторной практике приходилось встречаться с измерениями крайне малых токов; эта потребность разрешалась более или менее удовлетворительно рядом разработанных систем гальванометров и электрометров. Изобретение катодной лампы и создание многоламповых усилителей, допускающих чудовищные усиления по напряжению, по току, по мощности, дали в руки электриков новые, гораздо более богатые средства работы со слабыми токами.

Развитие радио, внедрение в технику фотоэлементов, новые виды связи, звуковое кино, телевидение и т. д сделали токи порядка $10^{-8} - 10^{-10}$ A и напряжения порядка $10^{-3} - 10^{-4}$ V ходовыми объектами техники. Широкое распространение слаботочной техники вызвало повышенные требования к точности и простоте электроизмерительной слаботочной аппаратуры; старые панцырные гальванометры с их тяжелой защитой, сложной и неудобной в обращении системой астазии, с огромными периодами, чрезвычайно удлинявшими время наблюдения, уже не могли удовлетворить современным запросам. Конструкторская мысль откликнулась на эти требования новыми конструкциями, как, например, сдвоенными гальванометрами по типу термореле Молля и Бургера[7] и его многочисленных вариантов, которые далеко превзошли по чувствительности старые приборы, будучи в то же время значительно доступнее и проще в употреблении. Естественно, что усиление работы в области крайне слабых токов заставило экспериментаторов обратить внимание на существование электрических флюктуаций. К этому вопросу почти одновременно пришли с двух сторон, изучая, с одной стороны, предельные возможности гальванометров, с другой стороны, анализируя помехи существующие при работе ламповых приемников и усилителей. Любопытно отметить, что между работами Эйнштейна и де-Гааз-Лорентц, заложившими основы теории электрических флюктуаций, и переносом вопроса о флюктуациях в практическую плоскость прошел почти десяток лет; именно за это время и была открыта и освоена катодная лампа.

Значение электрических флюктуаций в технике слабых токов состоит в том, что ими ставится определенный предел для чувствительности* электрических приборов. Это относится как к измерительным приборам (гальванометрам, электрометрам), так и к приемным и усилительным устройствам. В самом деле, во всяком проводнике по вышеизложенной теории происходят самопроизвольные движения электричества, возникают микротоки и микронапряжения. Пусть в какой-нибудь цепи должен течь ток, величину которого нужно измерить; несколько упрощая положение вещей, можно сказать, что это исполнимо только в том случае, если сила измеряемого тока превышает среднюю силу флюктуационных токов. Если же ток, подлежащий измерению, слабее, чем токи, происходящие от теплового движения, то его нельзя измерить, даже если чувствительность гальванометра достаточна для этого; в этом случае измеряемый ток

* Точнее было бы говорить не о пределе чувствительности, а о наименьшем количестве электрической энергии, доступном для измерения. На чувствительность в обычном ее понимании, т. е. величину $\frac{\delta x}{\delta q}$, где $x$ — показание прибора, а $q$ — измеряемая величина, броуновское движение ограничений не накладывает. Однако такая терминология — „предел чувствительности" — в ходу у большинства авторов, пишущих по этому вопросу.

будет маскироваться флюктуациями (как мы увидим дальше, в такой форме это положение недостаточно точно; в него должна быть внесена поправка).

То же самое в основном относится и к работе приемных устройств. Если сигнал, получающийся в радиоприемнике, слабее, чем эффект теплового движения, то мы не сможем его разобрать; он будет перекрываться флюктуационными токами. Поэтому изучение электрических флюктуаций должно дать практической электротехнике и электрометрии указания, каковы пределы наблюдаемых электрических величин, от каких факторов эти пределы зависят и что нужно сделать, чтобы их по возможности снизить.

7. Начнем изложение вопроса с рассмотрения предела чувствительности гальванометров. Основной факт с полной ясностью вскрыт в работе де-Гааз-Лорентц в части, касающейся броуновского движения магнитной стрелки внутри кольцевого проводника. Рассмотренный ею случай представляет собой не что иное, как тангенс-буссоль, прототип гальванометра с подвижным магнитом, при рассмотрении которой для простоты были опущены направляющие силы. Мы видели, что стрелка этого гальванометра должна находиться в броуновском движении, средняя кинетическая энергия которого

$$\frac{1}{2} Q\overline{\omega^2} = \frac{1}{2} kT.$$

На самом деле при рассмотрении движения стрелки гальванометра нельзя отбрасывать направляющую силу, так как почти все принятые конструкции электроизмерительных приборов не могли бы служить для измерения без этой силы; она задает и нулевую точку, и чувствительность прибора. Это значит, что кроме кинетической энергии, подвижная система в гальванометре должна иметь и потенциальную энергию. Если обозначить угол отклонения через $\varphi$, а направляющую силу $f = -\Delta\varphi$, то средняя потенциальная энергия магнитной системы будет:

$$\frac{1}{2} \Delta\overline{\varphi^2} = \frac{1}{2} kT. \tag{14}$$

Отсюда находим

$$\varphi_{средн} = \sqrt{\overline{\varphi^2}} = \sqrt{\frac{kT}{\Delta}};$$

таково то среднее отклонение, которому будет подвержена стрелка в результате флюктуационных толчков. Напомним, что эта величина не зависит от того, находится ли стрелка в вакууме или в атмосфере какого-либо газа, т. е. действуют ли на нее только токи, текущие в проводнике, или также и молекулы газа. Такие же колебания будут происходить и в гальванометре с подвижной катушкой. Вывод де-Гааз-Лорентц здесь должен быть обращен. Флюктуации тока будут происходить в подвиж-

ной катушке. В поле неподвижных магнитов она будет испытывать импульсы, которые не дадут ей оставаться неподвижной. К этим импульсам прибавятся еще толчки молекул воздуха; на амплитуду колебаний катушки это обстоятельство не повлияет. Последние останутся и в том случае, если катушка гальванометра разомкнута и флюктуации тока не происходят. В этом случае колебания катушки будут происходить всецело от движения молекул воздуха. Изинг[8,11] первый указал на эти явления, как на практический предел чувствительности гальванометра.

Его работы были продолжены Цернике[12], Орнштейном и сотрудниками[13,14] и Черни[15]. В результате мы имеем отчетливую, хотя и далеко не во всех деталях завершенную картину, рисующую роль флюктуаций в гальванометрии.

Прежде всего выясним, каковы те ошибки, которые происходят от теплового движения при однократном измерении силы тока. Пусть измеряемая сила тока $\delta i$ вызывает отклонение гальванометра на угол $\delta\varphi$. Если $\delta\varphi$ меньше, чем $\varphi_{средн}$, определяемое по формуле (14), то ясно, что отсчет по гальванометру будет иллюзорным. Мы не сможем при однократном отсчете сказать, происходит ли полученное отклонение от измеряемого тока или от флюктуаций. Чтобы иметь какую-либо уверенность в значении наблюдаемого отклонения, нужно, чтобы оно было больше $\varphi_{средн}$, притом, чем больше $\delta\varphi$, тем больше надежность результата. Чтобы судить о том, какова вероятность принять флюктуационое отклонение за измеряемую величину, приведем следующую таблицу, заимствованную из статьи М. Черни.

ТАБЛИЦА 1

| Отклонение | Энергия отклоненной катушки | Вероятность флюктуации |
|---|---|---|
| $\geqslant 1\cdot\varphi_{средн}$ | $\geqslant 1\cdot\frac{1}{2}kT$ | 0,317 |
| $\geqslant 2\cdot\varphi_{средн}$ | $\geqslant 4\cdot\frac{1}{2}kT$ | 0,045 |
| $\geqslant 3\cdot\varphi_{средн}$ | $\geqslant 9\cdot\frac{1}{2}kT$ | 0,003 |
| $\geqslant 4\cdot\varphi_{средн}$ | $\geqslant 16\cdot\frac{1}{2}kT$ | 0,00006 |

Величины, стоящие в последнем столбце, вычислены, исходя из формулы (3″); именно, вероятность того, что самопроизвольное отклонение будет равно или больше $\varphi$, выразится так:

$$W = \int_{\varphi}^{\infty} W(\varphi)d\varphi = \int_{\varphi}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\varphi^2}} e^{-\frac{A\varphi^2}{kT}} d\varphi.$$

Таблица показывает, что для отклонений, в 3—4 раза превышающих величину флюктуаций, вероятность совершенно ошибочного отсчета очень мала. Если же мы будем определять

по гальванометру токи, вызывающие отклонения порядка $\varphi_{средн}$, то из трех случаев один раз мы будем принимать за действие измеряемого тока случайное отклонение гальванометра. Для $\varphi < \varphi_{средн}$ вероятность ошибки еще больше. Поэтому Изинг считает надежными только отсчеты $\geqslant 4\varphi_{средн}$. При таких отклонениях практически можно не сомневаться, что они вызваны действительно посторонним током. Однако это не значит, что величина полученного отсчета показывает величину силы тока с точностью, равной 0,00006. Вероятная ошибка отсчета может быть в первом приближении определена следующим образом. Средняя абсолютная величина самопроизвольного отклонения гальванометра

$$|\bar{\varphi}| = 2\int_0^\infty \varphi W(\varphi)d\varphi = \frac{2}{\sqrt{2\pi\varphi^2}}\int_0^\infty \varphi e^{-\frac{\Delta\varphi^2}{kT}}d\varphi = \sqrt{\frac{2kT}{\pi\Delta}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\varphi_{средн}.$$

Эта величина и представляет собой вероятную ошибку отдельного измерения. Если отклонение $\varphi = 4\varphi_{средн}$, то вероятная относительная ошибка измерения будет:

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\varphi_{средн}}{4\varphi_{средн}} \cong 0{,}20.$$

Но этот результат не может считаться строгим. При точном рассмотрении, нужно считать ошибкой отдельного наблюдения разность самопроизвольных отклонений гальванометра в начале и в конце измерения. Эти отклонения не являются вполне независимыми друг от друга. Величина конечного отклонения зависит от величины начального отклонения; более вероятно, что в конце измерения будут иметь место отклонения, не очень удаленные от начального, в особенности, если промежуток времени, занимаемый измерением, не очень велик. Такого рода влияние предыдущего состояния на вероятность последующего было рассмотрено М. Смолуховским в теории броуновского движения; Смолуховский назвал его „вероятностным последействием“ (Wahrscheinlichkeitsnachwirkung). Такая величина должна войти и в точную теорию броуновского движения гальванометра; однако эта работа еще по настоящее время (1933) не сделана.

Перейдем теперь к определению тех сил тока и напряжений, которым соответствует вышеописанный предел точности измерения.

Для этого нужно, кроме уже определенного предела точности отсчитываемой непосредственно величины (например, угла отклонения), знать чувствительность гальванометра по току и напряжению, выраженную в единицах этой величины. Изинг делает это следующим образом.

Подвижная часть гальванометра, через который течет ток $\delta i$, испытывает действие пары сил, момент которой равен $B\delta i$; величину $B$ назовем „динамической постоянной“ гальванометра. Пусть

отклонение гальванометра равно $\delta x$, причем $x$ — величина любой размерности — угол отклонения, смещение „зайчика" на шкале, число делений и т. д.; противодействующий момент, развиваемый гальванометром при таком отклонении, равен $-A\delta x$, где A — обобщенная сила при $\delta x = 1$, ее обычно называют „направляющей силой". Условие равновесия:

$$A\delta x = B\delta i. \tag{15}$$

Чувствительность гальванометра определяется равенством

$$S_i = \frac{\delta x}{\delta i} \tag{16}$$

(„токовая" чувствительность):

или

$$S_v = \frac{\delta x}{\delta v}$$

(„вольтовая" чувствительность).

Определяя $\frac{\delta x}{\delta i}$ из равенства (15), найдем:

$$S_i = \frac{B}{A}. \tag{16'}$$

Для каждого рода инструментов можно найти определенное соотношение между $B$, $A$ и рядом непосредственно измеряемых величин. Это соотношение вместе с (16') и условием

$$\frac{1}{2} A\overline{\delta x^2} = \frac{1}{2} kT$$

и дает искомую предельную величину чувствительности. Напишем частоту собственных недемпфированных колебаний катушки:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{A}{K}},$$

где $K$ — момент инерции.

Далее, коэфициент затухания колебаний катушки:

$$\lambda = \frac{p_0}{2K} + \frac{B^2}{2KR},$$

где $p_0$ — коэфициент трения катушки в воздухе, $R$ — ее омическое сопротивление *. Если $R$ не очень велико, то второй член

* Это равенство выводится следующим путем. Тормозящий момент, действующий на катушку, складывается из сопротивления воздуха — $p_0\dot{\varphi}$ и электродинамической пары сил, обусловленной индукционным током в катушке. Последний равен:

$$i_{инд} = -\frac{snH}{R}\frac{d\varphi}{dt},$$

где $s$ — площадь катушки, $n$ — число витков, $H$ — напряженность магнитного поля. Момент противодействующей пары:

$$M_{инд} = snH \cdot i_{инд} = -\frac{s^2 n^2 H^2}{R}\frac{d\varphi}{dt}.$$

Так как $snH = B$, то $M_{инд} = -\frac{B^2}{R}\dot{\varphi}$, а полный тормозящий момент: $M = -\left(p_0 + \frac{B^2}{R}\right)\cdot\dot{\varphi} = p_1\dot{\varphi}$. Далее, $\lambda = \frac{p_1}{2K}$, откуда находим формулу, данную в тексте.

в выражении для $\lambda$, представляющий электромагнитное торможение, обычно велик по сравнению с первым, дающим величину торможения воздухом; поэтому мы первый член отбросим. Тем самым в качестве причины движения мы принимаем фактически только флюктуации тока в катушке. Предположим, что мы рассматриваем наиболее интересный для практики случай критического затухания, при котором

$$\omega_0 = \lambda.$$

В силу написанных выше формул это дает:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{A}{K}} = \frac{B^2}{2KR}$$

или

$$B = \sqrt{2KR\omega_0}.$$

Вставляя

$$K = \frac{A}{\omega_0^2},$$

находим

$$B = \sqrt{\frac{2AR}{\omega_0}}$$

и

$$s_i = \frac{B}{A} = \sqrt{\frac{2R}{A\omega_0}}.$$

Наименьший отсчет, обладающий по Изингу некоторой достоверностью

$$x_{\min} = 4x_{средн} = 4\sqrt{\frac{kT}{A}}.$$

Отсюда минимальная сила тока, определимая надежно с помощью данного гальванометра:

$$i_{\min} = \frac{x_{\min}}{s_i} = 4\sqrt{\frac{kT\omega_0}{2R}} = 4\sqrt{\frac{\pi kT}{R\vartheta_0}}, \qquad (17)$$

где $\vartheta_0$ — период колебаний катушки в отсутствии трения.

Эта величина в 4 раза больше, чем средний флюктуационный ток, протекающий через катушку гальванометра, о силе которого мы можем судить по величине среднего отклонения:

$$i_{средн} = \frac{x_{средн}}{s_i} = \sqrt{\frac{\pi kT}{R\vartheta_0}}.$$

Из этих формул видно, что абсолютного предела для измеримой силы тока нет. Увеличивая сопротивление и период гальванометра, мы можем получить возможность измерить сколько угодно слабые токи. Но для заданного гальванометра формула (17) характеризует предельную точность одного отсчета. Последняя оговорка имеет существенное значение. Если изме-

ряемый ток не изменяется длительно, и мы производим наблюдения так долго, что можем вывести с некоторой достоверностью новое положение нулевой точки, как среднее из множества отсчетов, то можно ошибку уменьшить как угодно. Тот же результат получится, если мы будем неограничено увеличивать период гальванометра; в обоих случаях время, необходимое для одного отсчета неограничено возрастет. Из формулы (17) видно, что при этом предел измеримой силы тока стремится к нулю. Второе замечание, которое нужно сделать по поводу формулы (17), состоит в том, что она предполагает точно известным начальное положение нулевой точки. На практике часто поступают иначе, а именно, отсчитывают показание прибора непосредственно до включения и затем после включения и успокоения прибора. В этом случае, как мы уже указывали, должна быть учтена Wahrscheinlichkeitsnachwirkung. Если же ею пренебречь, то в качестве приближения получаем среднюю ошибку в $\sqrt{2}$ раз большей, чем при точно определенной нулевой точке.

Предел точности измерения напряжения легко получить из формулы (17):

$$v_{\min} = i_{\min} R = 4\sqrt{\frac{\pi kTR}{\vartheta_0}} = 4v_{\text{средн}}. \qquad (17')$$

После сказанного выше о пределе для измерения силы тока формула (17′) вряд ли нуждается в пояснениях. Интересно отметить, что в обеих формулах особенности измерительного прибора представлены только собственным периодом и сопротивлением, все остальные величины, включая и чувствительность, выпали из окончательного результата. От системы гальванометра полученный результат не зависит; в частности, он всецело относится

ТАБЛИЦА 2

| $R$ (ом) | $\vartheta_0 = 2$ сек. | | $\vartheta_0 = 8$ сек. | |
|---|---|---|---|---|
| | $i_{\text{средн}}$ (A) | $v_{\text{средн}}$ (V) | $i_{\text{средн}}$ (A) | $v_{\text{средн}}$ (V) |
| 1 | $7{,}92 \cdot 10^{-11}$ | $0{,}792 \cdot 10^{-10}$ | $3{,}96 \cdot 10^{-11}$ | $3{,}96 \cdot 10^{-11}$ |
| 10 | $2{,}50 \cdot 10^{-11}$ | $2{,}50 \cdot 10^{-10}$ | $1{,}25 \cdot 10^{-11}$ | $1{,}25 \cdot 10^{-10}$ |
| $10^2$ | $7{,}92 \cdot 10^{-12}$ | $7{,}92 \cdot 10^{-10}$ | $3{,}96 \cdot 10^{-12}$ | $3{,}96 \cdot 10^{-10}$ |
| $10^3$ | $2{,}50 \cdot 10^{-12}$ | $2{,}50 \cdot 10^{-9}$ | $1{,}25 \cdot 10^{-12}$ | $1{,}25 \cdot 10^{-9}$ |
| $10^4$ | $7{,}92 \cdot 10^{-13}$ | $7{,}92 \cdot 10^{-9}$ | $3{,}96 \cdot 10^{-13}$ | $3{,}96 \cdot 10^{-9}$ |
| $10^5$ | $2{,}50 \cdot 10^{-13}$ | $2{,}50 \cdot 10^{-8}$ | $1{,}25 \cdot 10^{-13}$ | $1{,}25 \cdot 10^{-8}$ |
| $10^6$ | $0{,}792 \cdot 10^{-13}$ | $7{,}92 \cdot 10^{-8}$ | $3{,}96 \cdot 10^{-14}$ | $3{,}96 \cdot 10^{-8}$ |

и к гальванометрам с подвижными магнитами. Чтобы иллюстрировать эти формулы конкретными примерами, приводим табл. 2 для $i_{\text{средн}}$ и $v_{\text{средн}}$, вычисленную Изингом для разных $\vartheta_0$ и $R$. Напомним, что $i_{\min}$ и $v_{\min}$ в 4 раза больше.

Эта таблица показывает, что флюктуации электрических величин имеют порядок, которого уже достигла чувствительность современных гальванометров. Поэтому естественно спросить, не были ли такие флюктуации замечены при работе с высокочувствительными гальванометрами? Оказывается, исследователи, конструировавшие крайне чувствительные гальванометры и радиомикрометры *, уже давно столкнулись с наличием непрекращающихся движений нулевой точки. Их приписывали обычно воздействию различных внешних толчков, передаваемых подвесу через стены здания, опоры гальванометра, воздух и т. д. (так называемые микросейсмические толчки). Однако с течением времени выяснилось, что эти движения не могут быть полностью устранены никакими способами, защищающими гальванометр от внешних толчков, как то: усовершенствованные способы подвешивания гальванометра, увеличение его массы и т. д., что эти движения происходят одинаково в весьма различных местностях [12]. Предложенный Моллем и Бургером способ увеличения наблюдаемого отклонения с помощью диференциального термоэлемента и второго гальванометра позволил с еще большей ясностью наблюдать и изучать эти движения. В своей работе Молль и Бургер [7,16] приводят ряд кривых, представляющих регистрацию движений катушки первого гальванометра при различных увеличениях. Эти кривые воспроизведены на рис. 3. На них хорошо видны как беспорядочный характер движений, так и их постоянная (в среднем) величина. Изинг подверг одну из этих кривых (*d*, соответствующую стократному усилению тер-

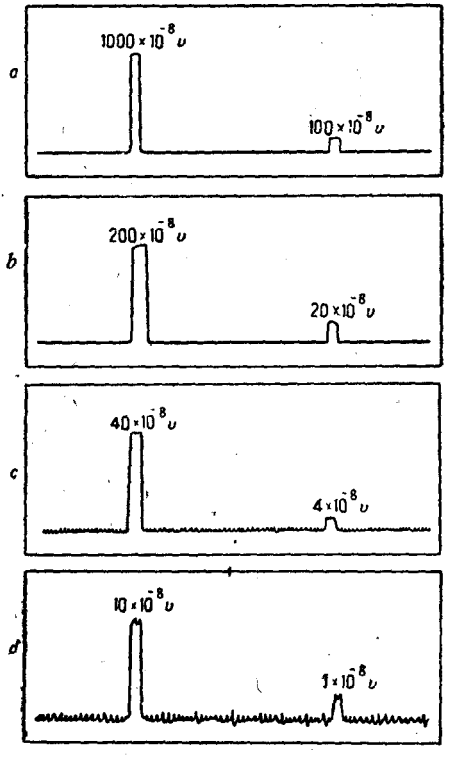


Рис. 3.** Регистрация нулевой точки и отклонений гальванометра при различных увеличениях термореле.

* Комбинация радиационного термоэлемента с гальванометром в одном приборе: виток, состоящий из двух различных проволок, подвешенный на тонкой нити в магнитном поле.

** Воспроизведение подлинных осциллограмм (рис. 3 и 5) заменено схематическими рисунками.

мореле) количественному анализу. Было взято 3 отрезка этой кривой; на отрезке *I* было измерено отклонение в 190 точках, на отрезке *II* — в 390 точках, на отрезке *III* — в 105 точках (всего 685 точек). Для большей точности измерения Изинг увеличил фотографическим путем масштаб кривых в 10,3 раза. Оказалось, что отклонения имели следующую величину:

Для отрезка *I*: $\sum x^2 = 778{,}1$ *мм*², $\overline{x^2} = \frac{778{,}1}{190} = 4{,}10$ *мм*²,

Для отрезка *II*: $\sum x^2 = 1524{,}6$ *мм*², $\overline{x^2} = \frac{1524{,}6}{390} = 3{,}91$ *мм*²,

Для отрезка *III*: $\sum x^2 = 343{,}5$ *мм*², $\overline{x^2} = \frac{343{,}5}{105} = 3{,}27$ *мм*²,

Для всех отрезков: $\sum x^2 = 2646{,}6$ *мм*², $\overline{x^2} = \frac{2646{,}2}{685} = 3{,}86$ *мм*²,

Отсюда

$$x_{средн.} = \sqrt{\overline{x^2}} = 1{,}97 \text{ мм}.$$

Как видно из данных Молля и Бургера, напряжение $1 \cdot 10^{-7}$ V вызывало отклонение $x = 213{,}5$ *мм*; следовательно, $x_{средн} = 1{,}97$ *мм* соответствует $v_{средн} = 9{,}2 \cdot 10^{-10}$ V *. Период гальванометра Изинг определяет по данным авторов в $\vartheta_0 = 1{,}6$ сек, внутреннее сопротивление его $R = 50\ \Omega$. Отсюда, пользуясь формулой (17′), найдем, что по теории Изинга, должно было быть $v_{средн} = 6{,}3 \cdot 10^{-10}$ V. Из сопоставления теоретической и наблюденной величин Изинг делает вывод, что в опытах Молля и Бургера движения катушки в большей части (на 2/3) вызывались броуновским движением и только небольшая часть происходила от посторонних (микросейсмических) толчков. На самом деле, вследствие неточности градуировки, выведенная Изингом из данных Молля и Бургера величина флюктуаций меньше действительной; но сделанный им вывод качественно правилен.

В. Эйнтховен с сотрудниками [17] также наблюдали броуновское движение, исследуя струнный гальванометр с крайне тонкой нитью. Они установили, что спонтанные колебания струны действительно происходят от флюктуационных толчков. Степень затухания не влияет на величину качаний нити, но сильно влияет на характер их протекания во времени в том смысле, как это было указано на стр. 819: чем меньше затухание, тем больше сказывается собственный период струны. Последнее наблюдение является подтверждением закона равномерного распределения энергии в применении к рассматриваемому виду флюктуаций.

---

* Градуировка показаний термореле, полученных при быстрых движениях первого гальванометра, путем сравнения с длительным постоянным отклонением, вообще неправильна и влечет некоторую ошибку (см. дальше стр. 834)

Ф. Цернике[19] осуществил установку, действующую по принципу термореле Молля и Бургера, но значительно превосходящую его по чувствительности. Не приводя никаких подробностей, автор указывает, что существенную часть ее составляет диференциальный термостолбик, соединенный с гальванометром того же автора (изготовляется фирмой Кипп и Цонен, Голландия). Это устройство дает возможность увеличить отклонение первого гальванометра в 12 000 раз, т. е. при длине светового пути в 50 *см* иметь чувствительность, соответствующую удалению шкалы на 6 *км*! В такой установке амплитуда спонтанных колебаний достигает 60 *мм*. Впоследствии Цернике с другой, менее чувствительной установкой подтвердил результаты Эйнтховена о влиянии степени демпфирования на броуновское движение. Амплитуда флюктуаций, равная 3 *мм*, не менялась при замыкании первого гальванометра накоротко, а также при перемене местами первого и второго гальванометров. Но ход флюктуаций во времени менялся резко: при разомкнутом гальванометре световой указатель совершал каждый раз несколько правильных качаний подряд, при замкнутом на-коротко—двигался беспорядочно взад и вперед.

Наконец, в прошлом (1932) году Изингу удалось наблюдать флюктуации гальванометра с вращающейся катушкой, не прибегая к усилению его отклонений с помощью термореле. В своем стремлении к решению этой задачи Изинг руководствовался следующей идеей: гальванометром с предельной чувствительностью, ограниченной только флюктуациями, может быть только гальванометр с вращающейся катушкой. Гальванометры с подвижными магнитами слишком чувствительны к внешним воздействиям, в особенности к вариациям магнитного поля; поэтому их порог чувствительности лежит на практике значительно выше уровня флюктуаций. Что касается гальванометров с подвижными катушками, то их чувствительность обычно недостаточно высока; усиление же ее помощью второго гальванометра и светового реле вообще вводит новые источники ошибок. В основных чертах конструкция гальванометра Изинга такова. Легкая круглая катушка (диаметр 17,4 *мм*, 25 витков проволоки диаметра 0,05 *мм*) насажена на ось, которой служит кусок тонкой стеклянной трубочки. Катушка удерживается двумя кварцевыми нитями (длина 5 *мм*, диаметр 8 μ), натянутыми с помощью пружинок. Такое крепление катушки, как оказалось, обеспечивает ей хорошую устойчивость относительно внешних сотрясений. Для отсчета угла поворота катушки к ней прикреплен перпендикулярно к оси вращения кусок кварцевой нити (длина—35 *мм*), служащий указателем. Он рассматривается в микроскоп с увеличением порядка 10 000 раз при визуальном наблюдении и в 1500—2000 раз при фотографической регистрации. Для этого части, образующие собственно гальванометр, помещены прямо на предметный столик микроскопа. С целью

увеличить точность отсчета Изинг вводит в ход лучей центральную диафрагму, а источник света берет в форме узкой, ярко освещенной щели. Тогда в поле зрения (или на экране, в случае проекции) отчетливо виден ряд дифракционных полос, которые и служат для отсчета смещения. Чтобы еще далее повысить чувствительность своего прибора, Изинг применяет электростатическую астазию: указатель покрывается проводящим слоем, который через посредство тонкой проволоки соединен с одним из концов обмотки катушки; вокруг указателя создается электрическое поле двумя пластинками, образующими конденсатор. Знак и величина поля подбираются такими, чтобы по возможности уменьшить направляющую силу, действующую на катушку. Оказалось, что для нормальной работы гальванометра эта астазия излишня; Изинг пользовался ею только для изменения направляющей силы при изучении броуновского движения.

ТАБЛИЦА 3

| Способ наблюдения | Направленная сила | Число измерит. точек | $\overline{\lvert\varphi\rvert} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot 10^7$ | Примечание |
|---|---|---|---|---|
| Визуально | $0{,}142\ \frac{дин}{см}$ | 41 | 4,31 | |
| „ | 0,142 „ | 30 | 6,70 | |
| „ | 0,142 „ | 83 | 6,46 | |
| „ | 0,142 „ | 54 | 5,42 | |
| | | 208 | 5,81 | |
| Фотографич. | 0,142 „ | 62 | 7,98 | во внешн. цепи нормальн. сопротивление |
| „ | 0,142 „ | 47 | 5,64 | во внешней цепи катушка |
| „ | 0,142 „ | 47 | 6,11 | замкнут накоротко |
| „ | 0,142 „ | 51 | 5,06 | |
| „ | 0,142 „ | 100 | 9,85 | замкнут накоротко; наличие возмущений |
| „ | 0,142 „ | 51 | 6,02 | во внешней цепи катушка |
| „ | $\frac{0{,}142}{10.2} = 0{,}0139\ \frac{дин}{см}$ | 50 | 16,6 | вычислен. величина $16{,}8 \cdot 10^7$ |
| „ | $\frac{0{,}142}{4{,}0} = 0{,}0356\ \frac{дин}{см}$ | 51 | 8,52 | вычислен. величина $10{,}6 \cdot 10^7$ |

На фотографиях, полученных Изингом, действительно видны флюктуации нулевой точки гальванометра. Их величину Изинг определял, построив сначала усредненную кривую, представляющую плавное перемещение гальванометра от посторонних электродвижущих сил, и отсчитывая от нее отклонения в ту и другую

стороны. Таким образом были обработаны многочисленные кривые, полученные как визуальным, так и фотографическим путем. При этом варьировались условия опыта: включалось стороннее сопротивление, менялась направляющая сила и т. д. Результаты даны в табл. 3; $|\bar{\varphi}|$ представляет собой среднюю абсолютную величину отклонения; помножив ее на $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$, мы получим $\sqrt{\overline{\varphi^2}}$ (см. выше стр. 823).

Среднее из наблюдений при $\Delta = 0{,}142\ \frac{дин}{см}$ — $|\bar{\varphi}|\sqrt{\frac{\pi}{2}} = 5{,}90 \cdot 10^{-7}$; вводя поправку на ошибки измерения (ошибки при наводке микроскопа на максимум почернения и др.), автор уменьшает эту величину до $5{,}60 \cdot 10^{-7}$. Вычисленная по формуле $\frac{1}{2}\Delta\,\overline{x^2} = \frac{1}{2}kT$ величина $\sqrt{\overline{x^2}} = 5{,}31 \cdot 10^{-7}$; расхождение — около 6%. При $\Delta = 0{,}0139\ \frac{дин}{см}$ совпадение оказывается очень хорошим, при $\Delta = 0{,}0356\ \frac{дин}{см}$ — довольно скверным.

В итоге, несмотря на довольно большой разброс точек, нужно признать, что результаты этих измерений подтверждают теорию опирающуюся на закон равномерного распределения энергии. Для характеристики точности полученных результатов можно попробовать определить из них постоянную Больцмана $k$ по формуле $k = \frac{\Delta\,\overline{x^2}}{T}$. Найдем

| | | |
|---|---|---|
| для $\Delta = 0{,}142$ | *дин/см* | $k = 1{,}53 \cdot 10^{-16}$ *эрг·град*$^{-1}$ |
| „ $\Delta = 0{,}0139$ | „ | $k = 1{,}32 \cdot 10^{-16}$ „ „ |
| „ $\Delta = 0{,}03\ 6$ | „ | $k = 0{,}89 \cdot 10^{-16}$ „ „ |
| среднее (не взвешенное) | | $k = 1{,}25 \cdot 10^{-16}$ *эрг·град*$^{-1}$ |

Принятая в настоящее время величина $k = 1{,}37 \cdot 10^{-16}$ *эрг·град*$^{-1}$. Расхождение получается около 8,7%; если первому значению (при $k = 0{,}142\ \frac{дин}{см}$), полученному из большого числа наблюдений, придать больший вес, то расхождение станет меньше. Впрочем, принимая во внимание характер и условия опыта, нужно признать, что оно и так невелико.

8. Перечисленные работы доказали, что спонтанные движения подвижной системы гальванометра по величине и характеру являются броуновским движением. Чтобы полностью завершить исследование вопроса, нужно было установить пропорциональность энергии этого движения температуре в согласии с законом равномерного распределения энергии по степеням свободы. Этим была бы окончательно установлена связь самопроизвольных колебаний гальванометров с тепловым движением.

К сожалению, непосредственная проверка в наиболее простой (принципиально) форме — повышение или понижение температуры всей цепи, включая и температуру гальванометра, в несколько раз и определение средней величины флюктуаций при новой температуре — представляет ряд технических трудностей. Поэтому Орнштейн, Бургер, Тэйлор и Клерксон[14] пошли по несколько иному пути. Они включали последовательно с гальванометром катушку с коэфициентом самоиндукции $L_2$ и сопротивлением $r_2$ и варьировали ее температуру, сохраняя температуру гальванометра неизменной. Тогда, как показывает теория, данная Орнштейном[13,14], энергия флюктуаций тока в цепи выразится формулой:

$$\frac{(L_1+L_2)\,\overline{i^2}}{2}=\frac{k}{2}\left(\frac{r_1}{r_1+r_2}T_1+\frac{r_2}{r_2+r_2}T_2\right), \tag{18}$$

где $L_1$, $r_1$ и $T_1$ — самоиндукция, сопротивление и температура гальванометра, $L_2$, $r_2$ и $T_2$ — самоиндукция, сопротивление и температура катушки (вывод этой формулы — см. в добавл. 1).

При $T_1=T_2$ формула (18) переходит в вид, отвечающий элементарному закону равномерного распределения энергии. Для потенциальной энергии катушки гальванометра находим в предположении, что сопротивление воздуха мало по сравнению с электромагнитным торможением, ту же самую величину:

$$\frac{\overline{\Delta\vartheta^2}}{2}=\frac{k}{2}\,\frac{r_1T_1+r_2T_2}{r_1+r_2}. \tag{18'}$$

Последняя формула и была подвергнута экспериментальной проверке. Установка состояла из гальванометра Молля с сопротивлением $r_1=45\,\Omega$ и катушки манганиновой проволоки сопротивлением в $137\,\Omega$ или $400\,\Omega$, намотанной бифилярно. Движения гальванометра усиливались с помощью термореле Молля и Бургера. Чтобы устранить посторонние влияния на цепь, был принят целый ряд различных предосторожностей. Так, первый гальванометр был помещен в специальный тяжелый металлический ящик; для защиты от электростатических действий все провода были взяты в свинцовую оболочку. Соединение гальванометра с манганиновой катушкой было осуществлено через посредство двух массивных металлических брусков, изолированных друг от друга только тонким листком слюды и обернутых снаружи ватой; этим достигалось почти полное равенство температур обоих контактов и в значительной степени устранялись вредные термоэлектродвижущие силы. Помимо этих и ряда других мер, имевших целью защиту первичной цепи от помех, были исследованы и в значительной части устранены причины, вызывавшие непостоянство тока в цепи термореле, как, например, непостоянство излучения освещающей лампы. В результате стабильность установки была доведена до такой степени, что оказалось возможным зарегистрировать и количественно сравнить между со-

бой броуновское движение подвеса гальванометра в двух случаях: а) манганиновая катушка при комнатной температуре, б) катушка при температуре жидкого воздуха. Общая схема установки приведена на рис. 4. Кривые, записанные регистрирующим аппаратом, воспроизведены на следующем рис. 5. Первые четыре кривых подтверждают уже известное нам влияние степени затухания на форму кривой. Кривые *5—8* показывают влияние температуры одного участка цепи на амплитуду броуновского движения. Ввиду наличия плавного смещения („ползания") нулевой точки, авторы, обрабатывая эти кривые, вычис-

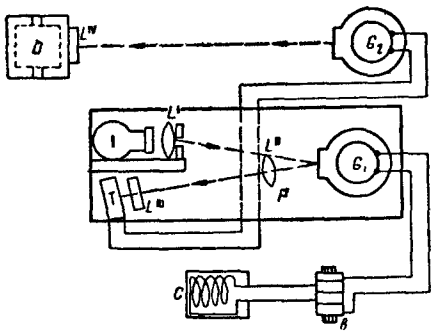


Рис. 4. Схема включения термореле в опыте Орнштейна и сотрудников: $G_1$ — первый гальванометр, $G_2$ — второй гальванометр, $C$ — манганиновая катушка, $b$ — контактные бруски, $I$-источник света, $L^I$ сферические линзы, $L^{III}$, $L^{IV}$-цилиндрические линзы, $T$ — термоэлемент, $D$ регистрирующий барабан, $P$-металлический ящик.

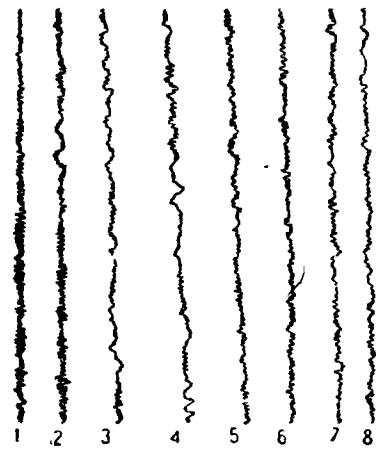


Рис. 5. 1,2 — гальванометр разомкнут; 3,4-гальванометр замкнут; 5,6 — катушка в жидком воздухе; 7,8 — катушка при комнатной температуре.

ляли не самые отклонения $x$, а разность последовательных значений $x_1 - x_2$. Среднее значение этой величины $|\overline{x_1 - x_2}|$ отличается от $|\overline{x}|$ только численным множителем. Для определения $|\overline{x_1 - x_2}|$ проводится приблизительно на-глаз нулевая линия, делится на равные интервалы и в конце этих интервалов определяется отклонение $x$; при составлении разностей последовательных величин $x$ ошибки от медленного смещения нуля почти полностью уничтожаются. Найденные таким образом значения $|\overline{x_1 - x_2}|$ из кривых *5—6* и *7—8* относятся между собой, как 1 : 0,77. Это отношение удовлетворительно согласуется с величиной, которую дает формула (18′), если в нёе вставить : $r_1 = 45\ \Omega$, $T_1 = 290°$, $r_2 = 135\ \Omega$ и $T_2$ — в одном случае равное 290°, в другом равное 90° (жидкий кислород); вычисленное отношение равно 1 : 0,70. Абсолютных значений отклонений или соответствующих им флюктуаций тока авторы не определяют, так как применяемая ими установка с термореле Молль-Бургера показы-

вает меньшие величины, чем существующие в действительности; причиной этого является тепловая и механическая инерция вторичной системы. Но на отношении средних колебаний при двух разных температурах эти искажения не сказываются. Что касается всякого рода толчков, сотрясений и т. д., то их наличие влияет на упомянутое отношение, а именно, приближает его к единице (эти возмущения не зависят от температуры частей цепи, и следовательно, в обоих случаях к броуновским движениям катушки прибавляется одна и та же величина). Поэтому найденная на опыте величина $\frac{1}{0{,}77}$ ближе к единице, чем теоретическая $\frac{1}{0{,}70}$. Учитывая это, мы должны констатировать, что работа Орнштейна и сотрудников дала достаточное экспериментальное подтверждение закону $\frac{1}{2}kT$.

9. Установление предела чувствительности электроизмерительных приборов, зависящего от теплового движения, ставит перед наукой задачу: насколько возможно снизить этот предел. Формулы (17) и (17′) дают указания на те шаги, которые в первую очередь должны быть сделаны. Во-первых, период гальванометра должен быть сделан как можно большим. Во-вторых, нужно соответственно выбрать сопротивление гальванометра: если желательна большая чувствительность по току, то $R$ должно быть большим; если нужна большая чувствительность по напряжению, то $R$, наоборот, необходимо уменьшить. Однако и тот и другой параметр практически можно менять только в известных пределах. Чрезмерно большие $\vartheta_0$ неудобны для работы; очень большие $R$ невыгодны, так как уменьшают достижимое при данном типе гальванометра отклонение; очень малые $R$ трудно реализовать на практике, если сохранить требование высокой чувствительности. Возникает вопрос: при данных $\vartheta_0$ и $R$ какими другими факторами можно воспользоваться для улучшения предельной чувствительности? Одним из факторов, значение которого должно быть рассмотрено, является затухание гальванометра. Излагая выше теорию флюктуаций гальванометра, мы предполагали, что затухание является критическим и что сопротивлением воздуха можно пренебречь по сравнению с электромагнитным торможением. В одной из последующих работ [11] Изинг рассматривает предельную чувствительность гальванометра при произвольном затухании. В этом случае вместо равенства

$$\frac{B^2}{2KR} = \omega_0$$

нужно написать более общее выражение

$$\frac{B^2}{2KR} = n_2\omega_0,$$

где $n_2$ — мера электромагнитного демпфирования, причем для случая критического демпфирования и в отсутствии воздушного

торможения $n_2 = 1$. Величина $n_2$ войдет во все последующие формулы; в результате мы найдем:

$$i_{\min} = 4\sqrt{\frac{\pi kT}{R\vartheta_0} \cdot \frac{1}{n_2}} \tag{17''}$$

и аналогично

$$v_{\min} = 4\sqrt{\frac{\pi kTR}{\vartheta_0} \cdot \frac{1}{n_2}}. \tag{17'''}$$

Изинг ставит вопрос о наинизшем пороге чувствительности не при постоянном $\vartheta_0$, а при постоянном времени отсчета $\tau$. Последнюю величину он определяет, как промежуток времени, к концу которого отклонение достигает конечного значения с некоторым наперед заданным приближением. Величины $\tau$ и $\vartheta_0$ пропорциональны друг другу; фактор пропорциональности

$$\frac{\tau}{\vartheta_0} = f(n)$$

зависит только от величины

$$n = \frac{\lambda}{\omega_0}$$

меры полного затухания ($n$ определено в тех же единицах, что и $n_2$, т. е. для критического случая $n = 1$). Далее, $n$ и $n_2$ связаны между собой условием:

$$n = n_1 + n_2;$$

$n_1$ — величина, показывающая роль воздушного демпфирования и не зависящая от цепи. Результаты, найденные Изингом, таковы: если $n_1 \ll 1$, то порог чувствительности гальванометра при данном $\tau$ наинизший, когда полное затухание близко к критическому, т. е. $n \sim 1$. Если $n > 1$, то порог незначительно повышается и даже при $n = \infty$ всего на 20% выше минимального значения. Наоборот, при уменьшении $n < 1$ $i_{\min}$ и $v_{\min}$ очень быстро возрастают. Для случая $n_1$ не очень малого приходится брать $n_2 > 1$, а следовательно и $n > 1$, так, чтобы $n \gg n_1$. Как окончательный вывод, нужно констатировать, что за счет демпфирования снизить порог чувствительности можно только путем увеличения времени отсчета.

М. Черни [15] дал новый, весьма интересный подход к рассматриваемому вопросу, позволивший осветить с одной, очень простой точки зрения все полученные результаты и выявивший новое существенное обстоятельство. Черни рассматривает процесс измерения тока гальванометром прежде всего, как превращение части электрической энергии в потенциальную энергию закрученной нити или пружины. Последняя величина испытывает флюктуации, причем средняя (в отсутствии постоянного тока):

$$\overline{E}_{пот} = \frac{1}{2}\Delta \cdot \overline{\varphi^2} = \frac{1}{2}kT.$$

Поэтому тепловое движение создает абсолютный (при данной температуре) предел для измерения электрической энергии, подводимой к гальванометру за один отсчет. Последняя равна

$$U = VI\tau.$$

Отсюда мы видим, что можно измерить сколь угодно слабый ток, если время $\tau$ и напряжение $V$ сделать достаточно большими; соответственное утверждение относится и к измерению $V$. Но здесь всплывает и новое обстоятельство. Именно, не вся энергия $U$, подводимая к гальванометру, переходит в потенциальную энергию катушки $E_{пот}$; на практике всегда

$$U > E_{пот},$$

или можно еще написать

$$E_{пот} = \eta \cdot U,$$

где $\eta < 1$; величину $\eta$ назовем коэфициентом полезного действия гальванометра. Так как $E_{пот}$ должно быть больше $\frac{1}{2}kT$ (для удовлетворения требования Изинга: $x_{\min} = 4x_{средн}$ нужно, чтобы $E_{пот} = 16 \cdot \frac{1}{2}kT$), что вообще запишется так:

$$E_{пот} = a \cdot \frac{1}{2}kT$$

($a$ — „фактор надежности"), то

$$U = \frac{1}{\eta}E_{пот} = \frac{1}{\eta} \cdot a \cdot \frac{1}{2}kT. \tag{19}$$

Черни указывает на необходимость, в целях улучшения предельных возможностей электроизмерительных приборов, повышения коэфициента полезного действия $\eta$. Для пояснения этого он вычисляет, какое количество энергии потребляется гальванометром от источника, сколько из нее расходуется на работу отклонения и сколько на джоулево тепло. Расчет ведется для различных степеней демпфирования. Результаты настолько поучительны, что мы приведем часть из них, опуская вывод, впрочем, очень несложный (состоящий в решении уравнения движения катушки).

В последующих таблицах дано: $t$ — время от начала отсчета, $\frac{\varphi}{\varphi_\infty}$ — отношение отклонения, достигнутого в момент времени $t$ к окончательному отклонению, $\eta = \frac{E_{пот}}{V^2 t/r}$ — отношение потенциальной энергии ко всей энергии, которая могла бы быть получена от источника к моменту $t$*, наконец, $\frac{Q}{V \cdot t/r}$, где $Q$ — выделившаяся джоулева теплота. Во всех случаях положено $\theta_0 = 40$ сек.

* В действительности потребленная энергия несколько меньше чем $\frac{V^2 t}{r}$; это происходит потому, что развивающаяся при вращении противоэлектродвижущая сила индукции несколько замедляет ее расходование.

Эти таблицы показывают, что наиболее невыгодным является случай слабого демпфирования. Однако даже в лучшем случае критического демпфирования наибольшее значение, которого достигает коэфициент полезного действия, не превышает 22%; это происходит через половину периода после начала измерения, когда отклонение достигло только 82% конечной величины. По меткому замечанию Черни, „наибольшее действие" гальванометра состоит в нагревании комнаты! Как бы „утешение" Черни показывает, что существуют измерительные приборы, в которых воспринимаемая энергия используется еще гораздо хуже. Так, например, радиационные термоэлементы наиболее совершенных конструкций при измерении очень слабых радиаций не могут дать коэфициента полезного действия больше, чем $10^{-9}$, а практически $\eta$ достигает у них значения $10^{-10}$.

Основной результат работы Черни тот, что дальнейшего снижения порога чувствительности измерительных приборов можно ожидать только от увеличения их энергетического к. п. д.

**Тепловое движение как источник шума в катодных усилителях.**

Замечательные свойства катодной лампы как усили-

ТАБЛИЦА 4

Случай критического демпфирования ($\lambda = \omega_0$, $n = n_2 = 1$)

| $t$ (сек) | $\frac{\varphi}{\varphi_\infty}$ | $\eta = \frac{E_{пот}}{\frac{V^2 t}{r}}$ | $\frac{Q}{\frac{V^2 t}{r}}$ |
|---|---|---|---|
| 2 | 0,040 | 0,005 | 0,565 |
| 6 | 0,243 | 0,063 | 0,274 |
| 10 | 0,466 | 0,138 | 0,[illegible]00 |
| 16 | 0,715 | 0,204 | 0,2[illegible]0 |
| 20 | 0,[illegible]21 | 0,214 | 0,[illegible]57 |
| 24 | 0,890 | 0,210 | 0,316 |
| 32 | 0,960 | 0,184 | 0,434 |
| 40 | 0,986 | 0,155 | 0,531 |
| 48 | 0,995 | 0,131 | 0,605 |
| ↓ | ↓ | ↓ | ↓ |
| ∞ | 1,000 | 0,000 | 1,000 |

Сильно демпфированное периодическое движение ($n_2 = 10$)

| $t$ (сек) | $\frac{\varphi}{\varphi_\infty}$ | $\eta$ |
|---|---|---|
| 10 | 0,073 | 0,034 |
| 20 | 0,146 | 0,068 |
| 30 | 0,210 | 0,094 |
| 40 | 0,269 | 0,115 |
| 50 | 0,325 | 0,134 |
| 1[illegible]0 | 0,543 | 0,[illegible]87 |
| 200 | 0,792 | 0,199 |
| 3[illegible]0 | 0,906 | 0,174 |
| 400 | 0,959 | 0,1[illegible]6 |
| 600 | 0,991 | 0,104 |

Слабо демпфированное периодическое движение ($n_2 = 0,1$)

| $t$ (сек) | $\frac{\varphi}{\varphi_\infty}$ | $\eta$ |
|---|---|---|
| 5,7 | 0,349 | 0,0[illegible]4 |
| 10,7 | 1,000 | 0,057 |
| 15,7 | 1,555 | 0,098 |
| 20,7 | 1,7[illegible]5 | 0,091 |
| 25[illegible]8 | 1,473 | 0,054 |
| 30,8 | 1,0[illegible]0 | 0,021 |
| 35,8 | 0,596 | 0,006 |
| ↓ | ↓ | ↓ |
| 292 | 1,000 | 0,0[illegible]2 |
| 297 | 1,007 | 0,002 |
| 302 | 1,009 | 0,002 |

теля открыли, как известно, новую эру в технике слабых электрических токов. Последовательное применение нескольких ламп позволяет осуществить усиление тока или напряжения в миллионы раз и выше. Первое время после возникновения этой новой слаботочной техники можно было думать, что могущество катодной лампы в смысле усиления слабых токов почти беспредельно; вопрос сводился только к увеличению числа ламп и коэфициента усиления каждой из них. Однако практика показала, что предел восприятию крайне слабых токов кладут так называемые „шумы", которые всегда слышны, если к выходу такого усилителя присоединить телефон. Причинами этих шумов могут быть: механические и электромагнитные воздействия на усилитель, непостоянство напряжения питающих его батарей, неравномерность электронной эмиссии, несовершенство изоляции в лампах, наличие остатков газа в них и т. д. С этими явлениями возможно вести борьбу и добиться, если не полного их устранения, то во всяком случае значительного снижения их.

В 1918 г. Шоттки[6] указал на то, что даже при полной ликвидации всех причин, перечисленных выше, некоторый шумовой фон в усилителе все-таки должен остаться. Причины его принципиально не устранимы и лежат в самой природе вещей. Это, во-первых, уже описанное выше тепловое движение зарядов в проводниках, во-вторых, неоднородность электронного тока в лампе, зависящая от атомности электричества. Последнему явлению, которому Шоттки дал название „дробового эффекта" (Schrot-effekt), будет посвящена вторая часть настоящего обзора. Сейчас мы рассмотрим влияние теплового движения.

Пусть между сеткой и катодом первой лампы усилителя включен какой-либо проводник. Таким проводником может быть, например, контур, связанный с антенной приемной радиостанции. В этом проводнике, вследствие теплового движения возникают электродвижущие силы, зависящие от его температуры и сопротивления, см. формулу (9). На концах его, соединенных с лампой, появляется соответствующая разность потенциалов, вызывающая изменение электронного тока в лампе. Эти изменения тока, усиленные в дальнейшем следующими лампами, и создают шумовой фон. Если антенна принимает сигнал, который на сетке 1-й лампы даст напряжение меньшее, чем то, которое возникает благодаря флюктуациям, то сигнал потонет в шумовом фоне и его нельзя будет разобрать. Шоттки оценивает минимальную мощность, необходимую на входе усилителя для получения слышимого сигнала, следующим путем. Энергия переменного тока, который должен находиться во входном контуре, чтобы дать на выходе отчетливо слышимый тон, должна быть не ниже энергии флюктуаций, т. е.

$$\frac{\overline{Li^2}}{2} = \frac{kT}{2},$$

Мощность, необходимая для поддержания такого тока:

$$W = \overline{ri^2} = \frac{r}{L} kT, \tag{20}$$

где $\frac{r}{L}$ = константа затухания контура — на практике имеет значение порядка $10^3$—$10^4$ сек.$^{-1}$. Полагая ее равной $10^3$ сек.$^{-1}$ и $kT = 4 \cdot 10^{-14}$ *эрг*, найдем:

$$W = 4 \cdot 10^{-11} \frac{эрг}{сек} = 4 \cdot 10^{-18}\ \mathrm{W}.\ *$$

На практике порог мощности, доступный приему и воспроизведению, лежит обычно выше по уже упоминавшимся причинам.

Тепловой эффект в усилителе в почти чистом виде был наблюден и изучен Дж. Б. Джонсоном[18—20]. Ему удалось показать, что часть шума, производимого усилителем, зависит от сопротивления входа, а не от ламп. Исходя из того, что эта компонента шума, как это известно из практики и следует из теории, растет вместе с сопротивлением, Джонсон применял в своей работе сопротивления входа от 100 000 Ω и выше. При этих условиях тепловое движение значительно перевешивало остальные источники шумов.

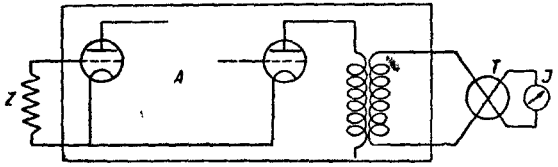

Рис. 6. Принципиальная схема опытов Джонсона.

Принципиальная схема установки, с которой работал Джонсон, весьма проста (рис. 6). К сетке и катоду первой лампы усилителя присоединялось высокоомное сопротивление. На выходе усилителя был включен через посредство трансформатора вакуумный термоэлемент, соединенный с гальванометром постоянного тока. Ток, даваемый термоэлементом, был в точности пропорционален квадрату протекавшего через него тока; поэтому показания гальванометра определялись квадратом напряжения на входе усилителя. Это обстоятельство весьма важно, так как оно дает возможность наблюдать на опыте величину, выведенной теоретически.

К сожалению, Джонсон приводит очень мало данных о деталях своей установки. Усилитель-шестикаскадный, с различными лампами в разных каскадах. Переходы между ними—на трансформаторах или дросселях. Исключение составлял только один каскад, содержавший или настроенный контур, включенный, как показано на рис. 7, или полосовой фильтр, пропускавший частоты от 500 до 1000 сек.$^{-1}$. Весь усилитель в целом был тщательно заэкранирован от механических, акустических и электромагнитных воздействий со стороны. Частотная характе-

* Мы увидим далее, что более подробная теория Найквиста приводит к несколько иному выражению.

ристика усилителя могла быть регулируема как по ширине, так и по положению максимума усиления путем изменения одного из элементов резонансного контура ($L_1$, $L_2$, $R$). Градуировка производилась в ограниченном интервале частот (например от 200 до 2200 сек.$^{-1}$), однако достаточно большом для того, чтобы остальные частоты давали только незначительную долю всей площади, охваченной частотной характеристикой.

Теория, развитая Найквистом [21, 22], показывает, что ток на выходе усилителя выражается следующим равенством:

$$\overline{J^2} = \frac{2kT}{\pi} \int_0^\infty R(\omega)\, Y^2(\omega)\, d\omega, \tag{21}$$

где $R(\omega)$ — ваттная слагающая сопротивления входа, $Y(\omega)$ — отношение тока на выходе к вызывающему его напряжению на входе при частоте $\omega$; $Y = \frac{di_{вых}}{dv_{вх}}$, иначе говоря, крутизна амплитудной характеристики усилителя. Вывод Найквиста, по нашему мнению, не может считаться бесспорным (см. добавление 2-е). Однако полученная им формула хорошо подтвердилась опытами Джонсона.

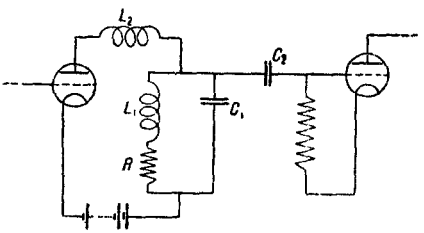


Рис. 7. Настроенный каскад усилителя Джонсона.

В качестве испытуемых сопротивлений были испробованы образцы различных материалов: угольные нити, проволоки из адвенса *, платиновые и медные слои, нанесенные испарением на стекло, далее продажные тушевые сопротивления для „гридлика", наконец, электролитические сопротивления — растворы NaCl, $CuSO_4$, $K_2Cr_2O_4$, $Ca(NO_3)_2$ в воде и $H_2SO_4$ в этиловом спирте. Величины сопротивлений варьировали от $0{,}5 \cdot 10^5$ до $9 \cdot 10^5$ Ω. Полное значение ваттного сопротивления определяется, кроме омического сопротивления $R_0$, еще тем, что параллельно ему во входную цепь усилителя включена емкость $C$, складывающаяся из емкости проводников и емкости входа усилителя. В этом случае, как легко вычислить,

$$R(\omega) = \frac{R_0}{1 + \omega^2 C^2 R_0^2}.$$

Величины $R_0$ и $C$ при каждом опыте измерялись непосредственно на месте, т. е. после присоединения сопротивления к усилителю.

* Американский сплав, очень близкий по составу и свойствам к константану.

Определенный интеграл, стоящий в равенстве (21), вычислялся графически. При этом вводилась поправка на ту часть площади, которая не была промерена на опыте. В случаях острой настройки усилителя, когда подинтегральная функция только на небольшом интервале частот сильно отлична от нуля, $R(\omega)$ можно вынести за знак интеграла и взять его значение для некоторой средней $\omega$; тогда графически остается вычислить только $\int_0^\infty Y^2(\omega)\,d\omega$. Если сохранять такую острую настройку без изменения, то можно, меняя $R_0$, изучать зависимость $\overline{J^2}$ от $R$. При этом нет даже необходимости знать всю частотную характеристику; достаточно контролировать только одну точку, например максимум усиления. Зная $Y_{max}$, можно измерив на выходе $\overline{J^2}$, вычислить такое $\overline{V^2}$ на входе, которое вызвало бы данное $\overline{J^2}$, и считать эту величину $\overline{V^2}$ мерой флюктуаций во входной цепи. Результаты приведены на рис. 8 и 9. Первый из них представляет зависимость $\overline{V^2}$ от ваттного сопротивления $R(\omega)$ для различных веществ. Мы видим из этого рисунка, во-первых, что величина флюктуаций при данном сопротивлении не зависит от вещества проводника, не зависит даже от рода проводимости — ионной или электронной; во-вторых, что квадрат напряжения во входной цепи в среднем очень точно пропорционален сопротивлению. Величина $\overline{W} = \frac{\overline{V^2}}{R}$ — эквивалентная мощность на входе — оказывается постоянной во всех этих случаях. Второй рисунок (9) представляет зависимость $\overline{V^2}$ от $R_0$ при заданном $C$; опытные точки ложатся близко к вычисленной кривой.

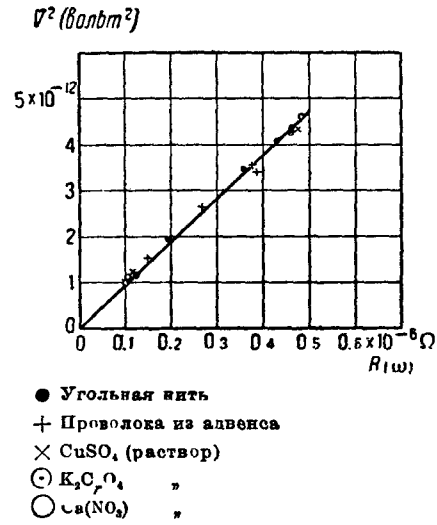


Рис. 8. Зависимость теплового эффекта от ваттной слагающей сопротивления входа.

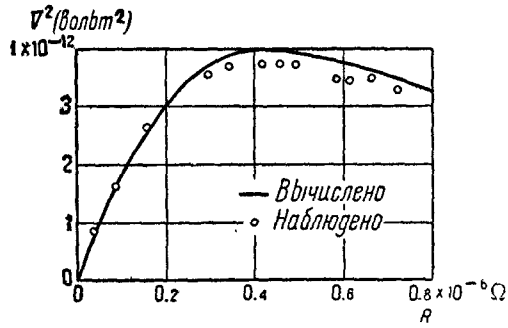


Рис. 9. Зависимость теплового эффекта от омического сопротивления входной цепи.

Далее Джонсон определил зависимость $\frac{\overline{V^2}}{R_0}$ от абсолютной температуры. Для этого температура сопротивления менялась от —183° С (жидкий воздух) до 100° С (кипящая вода). На рис. 10 приведены результаты для трех проволок с различным сопротивлением, сделанных из адвенса.

Во всех трех случаях эквивалентная мощность флюктуаций оказалась одной и той же линейной функцией температуры. Такой же результат был получен со всеми остальными испытанными сопротивлениями как твердыми, так и жидкими (электролитами). Этот факт убедительнее всего доказывает тепловое происхождение явления и приложимость к нему закона равномерного распределения энергии по степеням свободы. Заметим, что точность результатов в этих опытах значительно выше, чем в работах с гальванометрами.

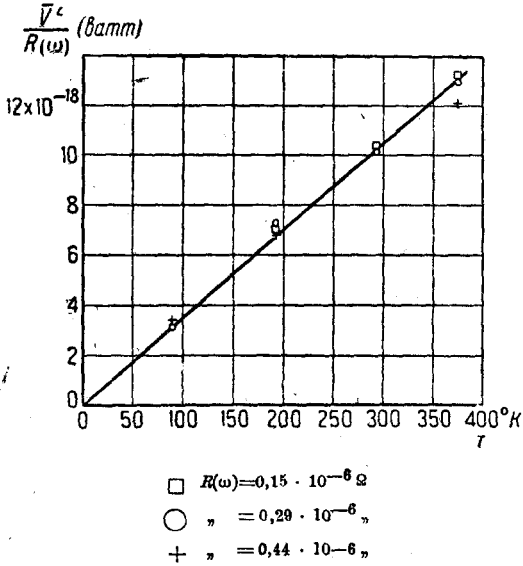


Рис. 10. Зависимость теплового эффекта от температуры.

Чтобы окончательно проверить ту точность, с которой подтверждается уравнение (21), Джонсон произвел ряд абсолютных измерений с точным определением площади частотной характеристики и из них вычислил, пользуясь уравнением (21), значение постоянной Больцмана $k$. Результаты приведены в табл. 5.

Среднее из найденных значений $k = 1{,}27 \cdot 10^{-16} \frac{эрг}{град}$ при средней ошибке в 13%. Принятое в настоящее время значение $k = 1{,}37 \cdot 10^{-16} \frac{эрг}{град}$ на 7,5% отличается от полученного из опытов Джонсона. Учитывая, что все значения $k$, полученные при различных частотах от 295 до 1830 сек.$^{-1}$, оказываются довольно близкими к истинной величине, можно считать формулу (21) проверенной на опыте, а вместе с ней и самое представление о сущности явления.

Формула (21) дает возможность составить более точное представление о распределении флюктуационной электродвижущей силы по спектру. Предположим, что входное сопротивление не зависит от частоты $R(\omega) = R = \text{const}$, далее, что усилитель имеет

ТАБЛИЦА 5

| № | Частота (сек.$^{-1}$) | $T(^\circ K)$ | $R(\omega)\cdot 10^{-6}$ Ω | $\int_0^\infty Y^2(\omega)d\omega \times 10^{-10}$ | $\int_0^\infty R(\omega)Y^2(\omega)d\omega \times 10^{-16}$ | $\Delta S$ (%) | $\overline{J^2}\cdot 10^6$ (амп.) | $k\cdot 10^{16}$ эрг/град |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1010 | 298 | 0,526 | 0,213 | | 12,0 | 2,7 | 1,27 |
| 2 | 2023 | „ | 0,470 | 0,272 | | 26 2 | 2,8 | 1,15 |
| 3 | 1418 | „ | 0,508 | 0,361 | | 15,6 | 3,8 | 1,09 |
| 4 | „ | „ | „ | 0,188 | | 42,3 | 1,8 | 0,99 |
| 5 | 295 | „ | 0,548 | 0,252 | | 3,3 | 3,1 | 1,18 |
| 6 | „ | „ | „ | 0,202 | | 15,8 | 2,0 | 0,95 |
| 7 | 302 | „ | „ | 0,221 | | 12,4 | 2,7 | 1,18 |
| 8 | „ | „ | „ | 0,195 | | 15.3 | 2.3 | 1,13 |
| 9 | 653 | „ | 0,541 | 0,747 | | 6.8 | 10,4 | 1,14 |
| 10 | „ | „ | „ | 0,645 | | 12 9 | 8,6 | 1,30 |
| 11 | 1418 | „ | 0,508 | 0,236 | | 18,5 | 3,5 | 1,26 |
| 12 | „ | „ | „ | 0,161 | | 41,3 | 1,7 | 1,09 |
| 13 | 1465 | „ | 0,505 | 1,93 | | 18,7 | 21,2 | 1,14 |
| 14 | „ | „ | „ | 1,75 | | 20,3 | 19,1 | 1,14 |
| 15 | 635 | „ | 0,541 | 0,594 | | 8,8 | 8,9 | 1,46 |
| 16 | „ | „ | „ | 0,139 | | 35,0 | 2,1 | 1,47 |
| 17 | „ | „ | „ | 0,597 | | 10,9 | 7,8 | 1,28 |
| 18 | 643 | 295 | 0,44 | | 0,439 | 0 | 11,0 | 1,38 |
| 19 | 645 | 297 | „ | | 0,396 | 0 | 11,1 | 1,49 |
| 20 | 1830 | 301 | „ | | 0,913 | 0 | 19,8 | 1,13 |
| 21 | 500—1000 | 299 | „ | | 0,831 | 0 | 25.9 | 1,64 |
| 22 | „ | 300 | „ | | 0,662 | 0 | 21,5 | 1,70 |
| 23 | „ | 300 | „ | | 0,832 | 0 | 26,0 | 1,63 |

частотную характеристику такого вида: $Y(\omega)=0$ для $0<\omega<\omega_1$, $Y(\omega)=Y=\text{const}$ для $\omega_1<\omega<\omega_2$ и, наконец, $Y(\omega)=0$ для $\omega>\omega_2$, т. е. усилитель пропускает только полосу от $\omega_1$ до $\omega_2$, причем внутри нее усиление постоянно. Тогда

$$\overline{J^2}=\frac{2kT}{\pi}RY^2(\omega_2-\omega_1)=4kTRY^2(f_2-f_1), \tag{21'}$$

где $f_1$ и $f_2$ — частоты соответствующие краям полосы пропускания $f_1=\frac{\omega_1}{2\pi}, f_2=\frac{\omega_2}{2\pi}$. Так как $Y$ есть отношение тока на выходе к вызывающему его напряжению на входе, то из (21′) видно, что флюктуационные напряжения, действующие на вход усилителя, эквивалентны переменному напряжению с частотой, лежащей между $f_1$ и $f_2$, определяемому следующим равенством:

$$V^2=4kTR\,(f_2-f_1). \tag{22}$$

Эту величину можно принять за средний квадрат эффективной электродвижущей силы флюктуаций данного интервала частот и писать:

$$\overline{E^2}=4kTR\,(f_2-f_1). \tag{22'}$$

Из формулы (22′) видно, что величина $\overline{E^2}$ пропорциональна ширине интервала частот $f_2 - f_1$ и не зависит от самой частоты. Аналогичное обстоятельство имеет место всегда при разложении в спектр квадрата величины, имеющей совершенно случайный характер; мы встретимся с таким же случаем во II части настоящего обзора при рассмотрении дробового эффекта.

Определим, наконец, эквивалентную мощность флюктуаций для данного интервала частот:

$$W = \frac{\overline{E^2}}{R} = 4kT(f_2 - f_1), \tag{23}$$

т. е. эквивалентная мощность пропорциональна абсолютной температуре и интервалу частот и не зависит больше ни от каких других факторов. Для оценки порядка величин $W$ и $\overline{E^2}$ положим вместе с Джонсоном: $T = 300°$ K, $f_2 - f_1 = 5000$ сек.$^{-1}$ (обычный диапозон звуковой передачи), $R = 0{,}5 \cdot 10^6 \Omega$.

Тогда

$$W = 1{,}6 \cdot 10^{-13} \cdot 5000 = 8 \cdot 10^{-10} \frac{эрг}{сек} = 0{,}8 \cdot 10^{-16} \text{ W}.$$

$$\overline{E^2} = W \cdot R = 0{,}4 \cdot 10^{-10} \text{ V}^{-2},$$

$$E_{эфф} = \sqrt{\overline{E^2}} \approx 0{,}64 \cdot 10^{-5} \text{ V}.$$

Формулы (22′) и (23) дают указания на те меры, которые можно применять для снижения шумов от теплового движения. Это 1) уменьшать входное сопротивление, 2) уменьшать его температуру, 3) сузить до совершенно необходимых пределов полосу пропускания усилителя. Наибольший практический интерес представляет последнее указание. В тех случаях, когда дело идет об усилении тока определенной частоты, выгодно пользоваться усилителем с крайне острой настройкой.

В конце своей работы Джонсон указывает, что источником тепловых шумов может служить не только внешнее сопротивление, присоединенное к сетке лампы, но и внутреннее сопротивление самой лампы. Если сопротивление в цепи сетки достаточно велико, то этот новый источник шумов играет второстепенную роль; однако при уменьшении внешнего сопротивления его значение возрастает. Вопрос этот более подробно рассмотрен в работе Левеллайна [23].

Резюмируя эту часть обзора, можно констатировать, что существование электрических флюктуаций, как следствия теплового движения, установлено экспериментально различными методами, причем величина их оказалась отвечающей выводам теории, опирающейся на закон равномерного распределения энергии по степеням свободы. В значительной степени выяснена их роль, как предела для действия электрических приборов, и разобраны те возможности, которые нужно использовать для дальнейшего отодвигания этого предела.

## Добавление 1

Л. С. Орнштейн [13, 14] вывел формулу для средней энергии флюктуаций в цепи, содержащей участки с разными температурами, пользуясь найденным им новым методом рассмотрения флюктуационных проблем. Приведем сначала вывод Орнштейна для случая равномерно нагретой цепи, чтобы ознакомить читателя с этим методом *, а затем — для случая различных температур.

1. Уравнение тока в цепи, содержащей самоиндукцию и сопротивление, пишем, как выше:

$$L\frac{di}{di}+ri=E(t), \tag{A}$$

где $E$ — электродвижущая сила флюктуаций. Интегрируем это уравнение:

$$i=i_0 e^{-\frac{r}{L}t}+\frac{1}{L}e^{-\frac{r}{L}t}\int_0^t E(\xi)\,e^{\frac{r}{L}\xi}\,d\xi. \tag{B}$$

Вычислим средний квадрат силы тока в момент времени $t$, считая начальную силу тока $i_0$ заданной:

$$\overline{i^2}=i_0^2 e^{-\frac{2r}{L}t}+\frac{1}{L^2}e^{-\frac{2r}{L}t}\overline{\left\{\int_0^t E(\xi)\,e^{\frac{r}{L}\xi}\,d\xi\right\}^2}. \tag{C}$$

Член, содержащий интеграл в 1-й степени, пропадает, так как

$$\overline{E(\xi)}=0.$$

Средний квадрат этого интеграла можно преобразовать так

$$\overline{\left\{\int_0^t E(\xi)\cdot e^{\frac{r}{L}\xi}\,d\xi\right\}^2}=\int_0^t\int_0^t \overline{E(\xi)\cdot E(\eta)}\,e^{\frac{r}{L}(\xi+\eta)}\,d\xi\,d\eta.$$

Среднее значение $\overline{E(\xi)\cdot E(\eta)}$ отлично от нуля, однако только для очень близких моментов времени $\xi$ и $\eta$, так как вследствие совершенной произвольности функции $E(t)$ для более удаленных моментов значения этой функции независимы друг от друга. Поэтому можно полагать

$$\eta=\xi+\psi,$$

* Насколько нам известно, на русском языке еще изложен не был.

где $\psi$ — очень малая величина.

$$\int_0^t\int_0^t \overline{E(\xi)\cdot E(\eta)\cdot e^{\frac{r}{L}(\xi+\eta)}}\,d\xi\,d\eta =$$

$$= \int \overline{E(\xi)\cdot E(\xi+\psi)}\,d\psi \int_0^t e^{\frac{2r}{L}\xi}\,d\xi.$$

Первый интеграл в правой части не зависит от $\xi$, кроме того, подинтегральная функция обращается в нуль для всех не очень малых $\psi$. Мы можем поэтому взять пределы интеграции от $-\infty$ до $+\infty$ и ввести обозначение

$$\int_{-\infty}^{+\infty} E(\xi)\cdot E(\xi+\psi)\,d\psi = \overline{EE}. \tag{D}$$

Далее,

$$\int_0^t e^{\frac{2r}{L}\xi}\,d\xi = \frac{L}{2r}\left(e^{\frac{2r}{L}t}-1\right).$$

Поэтому уравнение (C) перепишется следующим образом:

$$i^2 = i_0^2\cdot e^{\frac{2r}{L}t} + \frac{1}{2rL}\left(1-e^{\frac{2r}{L}t}\right)\overline{EE}. \tag{E}$$

Умножив это выражение на $\frac{L}{2}$, мы получим среднюю энергию флюктуационных токов, которая по закону равномерного распределения энергии должна равняться $\frac{kT}{2}$. Пусть от начала прошел достаточно большой промежуток времени: $t\to\infty$. Тогда из (E) найдем:

$$\frac{L\overline{i^2}}{2} = \frac{1}{2rL}\overline{EE}\cdot\frac{L}{2} = \frac{1}{4r}\overline{EE} = \frac{kT}{2},$$

откуда

$$\overline{EE} = 2rkT. \tag{F}$$

Пользуясь точно таким же способом, Орнштейн доказывает, что для механической системы, находящейся в броуновском движении под действием случайной силы $F(t)$, представляющей собой толчки молекул, можно написать:

$$\overline{FF} = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi)\cdot F(\xi+\psi)\,d\psi = 2\beta kT, \tag{F'}$$

где $\beta$ — коэфициент трения, испытываемого данной системой.

2. Далее, рассмотрим движение катушки гальванометра с замкнутой цепью, находящейся в броуновском движении от двух причин: флюктуаций тока и толчков молекул воздуха. Уравнения движения этой катушки:

$$K\vartheta + \beta\vartheta + A\vartheta + Bi = F,$$

$$L\frac{di}{dt} + ri - B\vartheta = E, \tag{G}$$

где обозначения выбраны в соответствии с прежними:

$\vartheta$ — угол отклонения катушки, $K$ — момент инерции катушки, $A$ — направляющая сила, $B$ — динамическая постоянная, $\beta$ — коэфициент трения; остальные обозначения понятны. Как только что было выведено:

$$\overline{FF} = 2\beta kT, \ \overline{EE} = 2rkT;$$

на эти величины связь между механическими и электрическими параметрами системы не влияет. Далее, вследствие полной независимости флюктуационных толчков той и другой природы:

$$\overline{EF} = 0. \tag{F''}$$

Ограничиваясь случаем большого $r$ и критического демпфирования: $4KA = \left(\beta + \frac{B^2}{r}\right)^2$, Орнштейн показывает, что для $\frac{A\vartheta^2}{2}$, $\frac{K\vartheta^2}{2}$ и $\frac{L\overline{i^2}}{2}$ получаются значения, равные $\frac{kT}{2}$. Для этого он сначала решает уравнение (G) без правых частей подстановкой $\theta = ae^{pt}$, $i = be^{pt}$, причем для $p$ находятся три значения и устанавливается связь между $a$ и $b$. Далее, методом вариации постоянных определяются значения $a_1$, $a_2$, $a_3$ так, чтобы удовлетворить уравнениям (G) с правыми частями. Оказывается, что для больших $t$

$$i = \frac{1}{L} e^{-\frac{r}{L}t} \int_0^t e^{\frac{r}{L}\xi} E(\xi)\, d\xi$$

и

$$\vartheta = \frac{1}{p_1 - p_2} \frac{1}{K} \left\{ e^{-p_1 t} \int_0^t e^{p_1 \xi} \left[ F(\xi) - \frac{B}{r} E(\xi) \right] d\xi - \right.$$

$$\left. - e^{-p_2 t} \int_0^t e^{p_2 t} \left[ F(\xi) - \frac{B}{r} E(\xi) \right] d\xi \right\},$$

где $p_1 = -\omega + \frac{BL}{r}$, $p_2 = -\omega - \frac{BL}{r}$ и $\omega = \sqrt{\frac{A}{K}}$ — собственная частота катушки гальванометра. Заметим, что величина силы тока $i$ в этом случае в точности совпадает с выражением (B)

при достаточно больших $t$, когда первым членом можно пренебречь. Это совпадение произошло вследствие того, что $r$ принято очень большим; естественно, что при этом электродвижущие силы, индуцированные благодаря вращению катушки, не могут вызвать заметных токов, тогда как электродвижущие силы $E$, возникающие в самом проводнике катушки вследствие теплового движения, растут вместе с $r$. Поэтому здесь, как и в предыдущем случае:

$$\overline{i^2} = \frac{1}{L} kT$$

и

$$\frac{L\overline{i^2}}{2} = \frac{kT}{2}.$$

Далее,

$$\overline{\vartheta^2} = \frac{1}{(p_1 - p_2)^2} \frac{1}{k^2} \left\{ e^{-2p_1 t} \overline{\left[ \int_0^t e^{p_1 \xi} (F - \frac{B}{r} E) d\xi \right]^2} + \right.$$

$$+ e^{-2p_2 t} \overline{\left[ \int_0^t e^{p_2 \xi} (F - \frac{B}{r} E) d\xi \right]^2} - 2e^{-(p_1 + p_2)t} \overline{\int_0^t e^{p_1 \xi} (F - \frac{B}{r} E) d\xi \times}$$

$$\left. \times \overline{\int_0^t e^{p_2 \xi} (F - \frac{B}{r} E d\xi} \right\} =$$

$$= \frac{1}{(p_1 - p_2)^2} \frac{1}{K^2} \left\{ e^{-2p_1 t} \cdot \frac{1}{2p_1} (e^{2p_1 t} - 1) (\overline{FF} + \frac{B^2}{r^2} \overline{EE}) + \right.$$

$$+ e^{-2p_2 t} \frac{1}{2p_2} (e^{2p_2 t} - 1) (\overline{FF} + \frac{B^2}{r^2} \overline{EE}) -$$

$$\left. - 2e^{-(p_1 + p_2)t} \frac{1}{p_1 + p_2} \left( e^{(p_1 + p_2)t} - 1 \right) (\overline{FF} + \frac{B^2}{r^2} \overline{EE}) \right\}.$$

Произведя упрощения, вставив вместо $p_1$ и $p_2$ их значения, вместо $\overline{FF} = 2\beta kT$ и $\overline{EE} = 2rkT$ и положив $t = \infty$, найдем:

$$\overline{\vartheta^2} = \frac{1}{(p_1 - p_2)^2} \frac{1}{K^2} \left\{ \frac{1}{2p_1} + \frac{1}{2p_2} - \frac{2}{p_1 + p_2} \right\} \left( 2\beta kT + \frac{B^2}{r^2} 2rkT \right) =$$

$$= \frac{kT}{K^2 p_1 p_2 (p_1 + p_2)} \cdot \left( \beta + \frac{B^2}{r} \right) = \frac{kT}{2\omega \left( \omega^2 - \frac{B^2 L^2}{r^2} \right) K^2} \left( \beta + \frac{B^2}{r} \right).$$

Учитывая, что, по нашим предположениям, $\frac{B^2 L^2}{r^2} \ll \omega^2$ и $\beta + \frac{B^2}{r} = 2\sqrt{AK} = 2K\omega$, получим:

$$\overline{\vartheta^2} = \frac{kT}{K\omega^2} = \frac{kT}{A},$$

откуда, наконец

$$\frac{A\vartheta^2}{2} = \frac{kT}{2}.$$

3. Переходим к случаю цепи, содержащей два участка с разными температурами. Сопротивления участков обозначим $r_1$ и $r_2$, коэфициенты самоиндукции $L_1$ и $L_2$, температуры $T_1$ и $T_2$, флюктуационные электродвижущие силы $E_1$ и $E_2$

$$(L_1 + L_2)\frac{di}{dt} + (r_1 + r_2)\, i = E_1 + E_2. \tag{H}$$

Далее, имеем:

$$\begin{aligned} \overline{E_1E_1} &= 2r_1kT, \\ \overline{E_2E_2} &= 2r_2kT, \\ \overline{E_1E_2} &= 0. \end{aligned} \tag{I}$$

Решая (H), находим:

$$i = i_0 e^{-\frac{r_1+r_2}{L_1+L_2}t} + \frac{1}{L_1+L_2} + e^{-\frac{r_1+r_2}{L_1+L_2}t}\int_0^t e^{\frac{r_1+r_2}{L_1+L_2}\xi}\,[E_1(\xi) + E_2(\xi)]\,d\xi.$$

Возьмем средний квадрат $i$, причем опять положим $t$ достаточно большим для того, чтобы член $i_0$ исчез:

$$\overline{i^2} = \frac{e^{-2\frac{r_1+r_2}{L_1+L_2}}}{(L_1+L_2)^2}\int_0^t\int_0^t e^{\frac{r_1+r_2}{L_1+L_2}(\xi+\eta)} \times$$

$$\times\, \overline{\Big[E_1(\xi) + E_2(\xi)\Big]\Big[E_1(\eta) + E_2(\eta)\Big]}\,d\xi\,d\eta =$$

$$= \frac{1}{2(L_1+L_1)(r_1+r_2)}\cdot(2kr_1T_1 + 2kr_2T_2).$$

Отсюда следует:

$$\frac{L_1+L_2}{2}\,\overline{i^2} = \frac{k}{2}\,\frac{r_1T_1 + r_2T_2}{r_1+r_2}.$$

Это — формула (18), приведенная в тексте на стр. 832.

4. Наконец, рассмотрим гальванометр с сопротивлением $r_1$ и температурой $T_1$ и приключенную к нему внешнюю цепь с сопротивлением $r_2$ и температурой $T_2$. Самоиндукцией цепи пренебрегаем. Уравнения движения системы:

$$\begin{aligned} K\vartheta + \beta\vartheta + A\vartheta + Bi &= F, \\ (r_1 + r_2)\, i - B\vartheta &= E_1 + E_2. \end{aligned} \tag{J}$$

Величины $F_1$, $E_1$ и $E_2$ характеризуются соотношениями:

$$\begin{aligned} \overline{FF} &= 2\beta k T_1 & \overline{FE_1} &= 0, \\ \overline{E_1E_1} &= 2r_1 k T_1 & \overline{E_1E_2} &= 0, \\ \overline{E_2E_2} &= 2r_2 k T_2 & \overline{FE_2} &= 0, \end{aligned} \qquad (\text{K})$$

Из уравнений (6) исключаем $i$; находим:

$$K\ddot{\vartheta} + \left(\beta + \frac{B^2}{r_1 + r_2}\right)\dot{\vartheta} + A\vartheta = F - \frac{B}{r_1 + r_2}(E_1 + E_2);$$

обозначая

$$\frac{\beta}{K} + \frac{B^2}{(r_1 + r_2)K} = 2\lambda, \quad \frac{A}{K} = \omega^2_0, \quad \frac{F}{K} - \frac{B}{K(r_1 + r_2)}(E_1 + E_2) = G,$$

перепишем предыдущее уравнение в виде:

$$\ddot{\vartheta} + 2\lambda\dot{\vartheta} + \omega^2_0\vartheta = G.$$

Решая это уравнение и подставляя значения $\lambda$, $\omega_0$ и $G$, находим, считая попрежнему $t$ очень большим:

$$\overline{\vartheta^2} = \frac{k}{A\left(\beta + \frac{B_2}{r_1 + r_2}\right)}\left[\beta T_1 + \frac{B^2}{(r_1 + r_2)^2}(r_1T_1 + r_2T_2)\right].$$

Если мы пренебрежем механическим трением $\beta$ по сравнению с электромагнитным торможением $\frac{B^2}{r_1 + r_2}$, то можно написать:

$$\overline{\vartheta^2} = \frac{k}{A\frac{B^2}{r_1 + r_2}} \frac{B^2}{(r_1 + r_2)^2}(r_1T_1 + r_2T_2) = \frac{k(r_1T_1 + r_2T_2)}{A(r_1 + r_2)},$$

откуда средняя потенциальная энергия

$$\frac{A\overline{\vartheta^2}}{2} = \frac{k}{2}\,\frac{r_1T_1 + r_2T_2}{r_1 + r_2}$$

— та же величина, которую мы нашли в предыдущем случае для средней энергии тока.

## Добавление II

Формула для электродвижущей силы флюктуаций в функции частоты, из которой как следствие получается формула, проверенная Джонсоном, была выведена Х. Найквистом путем рассмотрения некоторого мысленного опыта.

Найквист рассматривает два проводника с одинаковым сопротивлением $R$ и температурой $T$, соединенных длинными проводами, не имеющими сопротивления и не излучающими (рис. 11).

Распределенные емкость $C$ и самоиндукция $L$ (на единицу длины) выбраны так, чтобы

$$\sqrt{\frac{L}{C}} = R;$$

при этом условии, как известно, от концов линии отражения происходить не будет. Возникающие в каждом из проводников электродвижущие силы вызывают в линии два потока волн, идущих в одном и другом направлении; эти электромагнитные волны переносят энергию от одного проводника к другому. Легко видеть, что количество энергии, сообщаемой в единицу времени проводнику II от проводника I, в среднем равно обратному потоку энергии от проводника II к I; иначе мы наблюдали бы с течением времени изменение температуры двух проводников, находившихся вначале при одинаковой температуре. Далее, нетрудно установить, что не только вся мощность флюктуаций, развиваемая каждым из проводников, но и часть ее, приходящаяся на заданный интервал частот, также должна быть одинаковой у обоих проводников, т. е. $U(\nu)\,d\nu$ может зависеть только от температуры. В самом деле, предположим, что это не так и что для некоторой частоты $\nu$ имеет место неравенство $U_{\mathrm{I}}(\nu) \gtrless U_{\mathrm{II}}(\nu)$. При этом полное $U_{\mathrm{I}} = \int\limits_0^\infty U_{\mathrm{I}}(\nu)\,d\nu = U_{\mathrm{II}}$. Тогда, включив в линию какой-либо контур, не имеющий ваттного сопротивления и пропускающий по преимуществу частоту $\nu$, мы должны будем иметь преобладающий поток энергии в каком-нибудь одном направлении. Но, по доказанному выше, это невозможно. Следовательно, функция $U(\nu)\,d\nu$ должна быть одинаковой для обоих проводников.

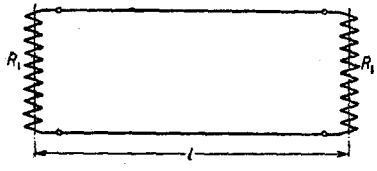

Рис. 11.

Представим себе, что в некоторый момент времени после установления теплового равновесия во всей системе линия внезапно отключена от проводников I и II путем разрыва или, наоборот, короткого замыкания. Тогда волны, двигавшиеся по линии, будут целиком отражаться от концов, и энергия, которая находилась на линии в момент отключения, будет в ней сохраняться. Через некоторое время в линии установятся стоячие волны всех возможных в ней частот, т. е. $\frac{v}{2l}$, $\frac{2v}{2l}$, $\frac{3v}{2l}$ и т. д. На каждую из этих частот должна, вследствие теплового равновесия, приходиться энергия $kT$. В интервале частот $d\nu$ находится $d\nu : \frac{v}{2l} = \frac{2l \cdot d\nu}{v}$ собственных частот цепи. Следовательно, полная энергия колебаний в этом интервале

$$\frac{2l\,d\nu}{v}\,kT.$$

При неразомкнутой линии такое количество энергии передается обоим проводникам за время, нужное для прохождения волны вдоль проводов в одну сторону, т. е. за время $t = \frac{l}{v}$.

Поэтому мощность, потребляемая, а следовательно, и отдаваемая каждым из проводников I и II,

$$U(\nu)\,d\nu = kT\,d\nu. \tag{L}$$

Таким образом мощность флюктуаций распределена по всем частотам равномерно. С другой стороны, можно написать:

$$U(\nu)\,d\nu = \frac{\overline{E^2(\nu)\,d\nu}}{4R^2(\nu)}\,R(\nu).$$

Следовательно,

$$\overline{E^2(\nu)\,d\nu} = 4R(\nu)\,U(\nu)\,d\nu = 4R(\nu)\,kT\,d\nu.$$

Такое же выражение для величины $\overline{E^2(\nu)\,d\nu}$ должно иметь место во всех проводниках.

Пусть проводник, в котором происходят такие флюктуации, присоединен ко входу усилителя; крутизна характеристики усилителя — $Y(\nu)$. Тогда средний квадрат тока на выходе усилителя в данном интервале частот:

$$\overline{I^2}(\nu)\,d\nu = \overline{E^2}(\nu)\,Y^2(\nu)\,d\nu = 4R(\nu)\,kT\,Y^2(\nu)\,d\nu$$

или, переходя к переменной $\omega = 2\pi\nu$, $d\omega = 2\pi\,d\nu$:

$$\overline{I^2}(\nu)\,d\nu = 4R(\omega)\cdot kT\cdot Y^2\frac{d\omega}{2\pi} = \frac{2}{\pi}\,R(\omega)\,kT\cdot Y^2(\omega)\,d\omega.$$

Интегрируя обе части равенства от 0 до $\infty$, найдем:

$$\overline{I^2} = \frac{2}{\pi}\,kT\int_0^\infty R(\omega)\,Y^2(\omega)\,d\omega$$

— формула (21) стр. 840.

## ЛИТЕРАТУРА


1. А) A. Einstein. Annal. der Phys., 33, 1910.
   M. Smoluchowski. Annal der Phys., 25, 205, 1908.
   Б) Изложение учения о флюктуациях — в большинстве учебников кинетической теории; на русском языке:
   А. К. Тимирязев „Кинетическая теория материи", лекция 20-я,
   Е. Блох „Кинетическая теория газов", гл. VIII. Специально посвящена флюктуациям книга
   R. Fürth. Schwankungserscheinungen in der Physik. Изд. Fr. Vieweg, в серии „Die Wissenschaft".
2. A. Einstein. Annal. der Phys., 22, 571, 1907.
3. D. L. de Haas-Lorentz. Die Brownsche Bewegung und einige werwandte Erscheinungen. 1913. Verl. Fr. Vieweg. („Die Wissenschaft", B. 52).
4. A. Einstein und Hopf. Annal der Phys., 33, 1105, 1910.
5. A. Einstein. Annal. der Phys., 14, 360, 1904.
6. W. Schottky. Annal. der Phys., 57, 541, 1918.
7. W. J. Moll and H. C. Burger. Phil. Mag. (7), V. 1, p. 630, 1925.
8. G. Ising. Undersökningar rörande elektrometrar (шведск.) I, p. 46, 1917; II, p. 363, 1919.
9. G. Ising. Kosmos, p. 69, 1923.
10. „ Phil. Mag. 1, p. 827, 1926.
11. „ Annal. der Phys., 8, S. 905 и 911, 1931.
12. F. Zernike. Ztschr für Phys. 40, S. 628, 1927. 14, 755, 1932.
13. L. S. Ornstein. Ztschr. für Phys., 41, S. 848, 1927.
14. L. S. Ornstein, H. C. Burger, J. Taylor and W. Clarkson. Proc. Roy. Soc., (A). V. 115, p. 391, 1927.
15. M. Czerny. Annal. der Phys., 12, 993, 1932.
16. W. J. H. Moll und H. C. Burger. Ztschr. für Phys., 32, S. 112, 1925.
17. W. Einsthoven, F. W. Einthoven, W. van der Holst H. Hirschfeld. Physica, 5, 358, 1925.
18. J. B. Johnson. Nature, 119, p. 50, 1927, 8/1.
19. „ Phys. Rev, 29, p. 367, 1927.
20. „ „ 32, p 97, 1928.
21. H. Nyquist. Phys. Rev 29, p. 614, 1927.
22. „ „ 32, p. 110, 1928.
23. Llewellyn. Proc. of the J. R. E., 16, 963, 1931.