1933 г. *Т. XIII, вып. 2*

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

ВОПРОСЫ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ И РАДИОТЕХНИКИ *

Л. И. Мандельштамм, Москва

Я бы хотел привлечь сегодня ваше внимание к некоторым вопросам, относящимся к электромагнитным колебаниям, и специально к вопросам, связанным с проблемами, выдвигаемыми современной радиотехникой. При этом я чувствую некоторую неловкость, которая обусловливается тем, что в рамках того обширнейшего и разнообразнейшего материала, о котором трактует теория колебаний вообще, выбранная тема охватывает довольно узкую область Некоторое оправдание выбора этой сравнительно узкой, на первый взгляд, темы я вижу в том своеобразии, которым указанные проблемы обладают.

Проблемы, выдвигаемые радиотехникой, специфичны. Методы, применяемые здесь, как экспериментальные, так и теоретические несут на себе печать этой специфичности и, мне кажется, что то, что уже создано, и то, что создается и будет создаваться здесь дальше, по своему значению далеко перерастет те задачи, для которых эти методы были задуманы первоначально.

На одну характерную черту, отличающую нашу область от ряда других областей техники, в которых колебания также играют важную роль, позвольте мне обратить внимание сейчас же.

Проблемы колебаний в машиностроении в инженерном деле в последнее время, особенно с увеличением размеров машин и скоростей, приобретают все большее и большее значение. Но здесь задача состоит, главным образом, в том, чтобы избежать тех вредных, а иногда и губительных для сооружений действий колебаний, которые наступают при некоторых критических скоростях или периодах, главным образом, благодаря резонансу.

* Доклад, прочитанный при открытии Всесоюзной конференции по колебаниям при Институте физики МГУ 12 ноября 1931 г.

Нужно избежать расшатывания корпуса судна от работы машины, разрушения моста под действием периодической нагрузки и т. д. Какие катастрофические последствия резонанс может иметь, — общеизвестно. К его губительному влиянию нужно отнести наблюдавшиеся в прежнее время разрушения мостов, поломки валов мощных машин и мн. др. Задача состоит в том, чтобы предотвратить эти явления. Конечно, только углубленная теория колебаний может здесь дать в руки радикальные средства для обезвреживания влияния колебаний.

Основная задача радиотехники — как раз в противоположном. Здесь задача состоит в том, чтобы создать возможно мощные колебания определенного типа (они должны быть незатухающими, стабильными, должны иметь определенный спектр и т. д.). И вторая столь же важная задача — создать такое устройство, — в этом заключается задача приема, — которое бы возможно сильнее „раскачивалось" даже чрезвычайно слабыми, приходящими от удаленного передатчика, колебаниями.

При решении задачи о рациональном генераторе колебаний, с одной стороны, и чувствительном приемнике колебаний, с другой, — возникает ряд физических и математических проблем. Новая эра для радиотехники началась с появлением трехэлектродной катодной трубки. Создались устройства для генерации и приема, в основу которых легли новые физические явления, мало изученные раньше и изучение которых не закончено и сейчас. Для овладения новыми радиотехническими проблемами те математические методы, которыми теория колебаний, главным образом, пользовалась до сих пор, оказались недостаточными. Понадобилось обращение к такому математическому аппарату, который был бы адекватен новым задачам.

На некоторых относящихся сюда физических и математических вопросах я и хотел бы сегодня остановиться. Разрешите мне начать несколько издалека.

Когда мы приступаем к изучению какой-либо области науки, то совершенно естественно возникает желание дать определение этой области, т. е. резко очертить тот круг вопросов и явлений, которые в нее входят. И каждый раз мы здесь наталкиваемся на большие трудности. Определение в науке — одна из самых трудных вещей. Попытки же дать точное и полное определение какой-нибудь области науки обычно кончаются неудачей. Вообще возникает вопрос, целесообразно ли оцеплять колючей проволокой жестких определений отдельные области науки и тем самым затруднять их взаимное проникновение? Я не думаю, что следует особенно гнаться за такого рода определениями. Зато весьма желательно выделить те руководящие точки

зрения, которые позволяют нам объединить целый класс проблем. Вот нахождение таких руководящих точек зрения, по моему, вещь существенная. Они позволяют нам создать стройную, цельную теоретическую концепцию, они позволяют связать в одно целое кажущиеся разнородными проблемы и дают возможность придать планомерный характер дальнейшим исследованиям.

И вот, если мы обратимся к проблемам колебаний, о которых идет речь, то мы придем к следующему заключению. Нас интересует здесь в подавляющем большинстве случаев не колебания сами по себе, а главным образом, действие колебательных процессов на системы — на колебательные системы, или, может быть, более обще — нас интересует взаимодействие различных колебательных систем между собой. И перед нами встает задача — выявить ту точку зрения, которая позволила бы охарактеризовать данный колебательный процесс (это может быть электромагнитное поле, переменные механические силы) в отношении его влияния на резонатор. Или конкретнее. Представим себе, что у нас какой-нибудь резонатор — электрический или механический — все равно, и на него действует переменная сила $y = f(t)$.

Что нам известно? Мы знаем, что в некоторых случаях резонатор отзывается чрезвычайно сильно, в других случаях он почти на воздействие не реагирует — остается почти глухим. Когда наступает первый и второй случай? Часто говорят так: здесь дело в периодичности действующей силы y. Если период действующей силы совпадает с собственным периодом резонатора, то тогда и наступает сильное действие. Но это неверно. Возьмем простой пример. Пусть

$$y = \sin 2\pi mt + \sin 2\pi (m+1)t,$$

где m целое число. Эта функция имеет основным периодом единицу и не имеет периодом $\frac{1}{m}$ и $\frac{1}{m+1}$. Между тем резонатор, настроенный на ее период, т. е. на период единицы, почти не будет отзываться, а резонатор, настроенный на период $\frac{1}{m}$ или $\frac{1}{m+1}$, отзовется очень сильно. С другой стороны, вы можете взять вообще непериодическую силу, например, такую:

$$y = \sin 2\pi mt + \sin 2\pi nt,$$

где m и n несоизмеримы. А между тем наш резонатор, настроенный на период $\frac{1}{m}$ или $\frac{1}{n}$, отзовется очень сильно. Значит, периодичность силы и совпадение ее периода с

*

периодом резонатора и не необходимы и не всегда достаточны. Что же важно? Нужно оценивать функцию по следующему принципу. Нужно представить ее как сумму простых (гармонических) колебаний — сумму косинусов и синусов. Если в разложении есть член с периодом резонатора, то резонанс наступает, в противоположном случае — нет. Таким образом периоды отдельных слагаемых и их амплитуды, совокупность этих чисел — вот что характеризует мою силу в отношении ее действия на колебательную систему.

Ряд Фурье является частным случаем такого разложения. Более общий случай — разложение почти периодических функций, которыми математики в последнее время много занимаются.

Итак, для оценки эффективности данного колебательного действия соответственная функция должна быть разложена в ряд по гармоническим функциям, после чего и амплитуды и периоды слагаемых дают нам требуемое мерило. Это в сущности весьма тонкая оценка данной функции. Она учитывает, так сказать, всю форму процесса на протяжении всего времени в противоположность, например, таким характеристикам, как максимальное значение, среднее, среднее квадратичное и т. д. Те, которые много занимаются колебаниями, привыкли к этому приему, но по существу это глубокая и тонкая оценка. Вот такой подход, когда мы оцениваем функцию путем разложения ее в ряд, в данном случае по гармоническим колебаниям, мы будем называть спектральным. Для нас это руководящая точка зрения.

Ценность спектральной точки зрения в том, что зная спектр данной силы, мы знаем и действие на резонатор. Все наши резонаторы, поскольку они линейны, являются как бы реактивами на синус-функции. Линейный резонанс выделяет именно синус-функции, а не какие-нибудь другие. Он может придать каждому члену такого разложения как бы самостоятельное существование. Сюда присоединяется и то обстоятельство, что гармонические колебания — единственные колебания, которые будучи подведены к линейной, даже сложной системе, проходят через все ее звенья без искажения формы.

Теперь нам ясен и ответ на часто задаваемый вопрос. Мы можем разложить функцию в ряд по самым разнообразным функциям, а не непременно по синусам и косинусам. Почему разложение именно на эти функции играет такую роль в физике? Ответ ясен: это вопрос не математический, а вопрос физический. Целесообразность разложения по тем или иным функциям и соответствующая этому разложению оценка определяется физи-

ческой проблемой. В нашем случае целесообразность разложения на синусы обусловливается свойствами воспринимающей системы, реагирующей именно на синус-функции. Позвольте мне на минуту отвлечься от нашей непосредственной темы. Позвольте указать на то, что значение спектральной оценки как принципа, отличного от обычных подходов, только сформулированного, конечно, в гораздо более общей форме, чем это надо нам, приобретает все большее и большее значение. Один из основателей волновой механики, Шредингер, видит в этом принципе оценки действия вообще коренную характеристику и своеобразие современной волновой механики. С этой точки зрения очень правильный для нас, но не претендующий на высокое принципиальное значение, подход был бы в известном смысле только частным случаем или примером принципиального подхода к исследованию явлений; более того — подхода, являющегося неотъемлемой частью определенного мировоззрения, которое теперь владеет нашим физическим миропониманием. К сожалению, я не могу останавливаться подробнее на этих вещах.

Но вернемся к нашим скромным задачам.

Хотя то, что я выше говорил, и хорошо известно, но я считал желательным подчеркнуть руководящую роль спектрального подхода по многим соображениям. Во-первых, потому, что этот момент не всегда проникает в достаточной мере в сознание людей, работающих в этой области. Позвольте мне привести один пример. Мы знаем, что если мы модулируем телефонный передатчик самым простым образом

$$y = a(1 + b \sin 2\pi mt) \sin 2\pi nt,$$

то испускаемый им спектр состоит из трех линий — несущей волны и двух боковых частот. Нам ясно, что это значит. Резонатор, настроенный на боковую волну, выделит ее так же, как резонатор, настроенный на несущую, выделит несущую. Спектральный подход дает нам возможность проследить взаимодействие передатчика и приемника, дает указание, как их нужно целесообразно строить и т. д. Он вносит ясность во всю проблему радиотелефонии. Это все отлично известно. И несмотря на это, многие из вас знают, что приблизительно два года назад на страницах „Nature“ разразилась полемика, начатая Флемингом, причем Флеминг начисто отрицал „физическое“ существование боковых волн. Понадобилось, кажется, около 15 писем, чтобы привести дело снова в порядок. Вот пример, который показывает, что даже ведущие люди, хотя, конечно, они и знают теорию, не всегда достаточно проникаются „спектральным мышлением“.

Второе обстоятельство заключается в том, что привычка

подходить к разнообразным колебательным явлениям со спектральной оценкой помогает нам приводить в связь между собой на первый взгляд чрезвычайно различные явления. В качестве примера позвольте привести один случай. Физики в последнее время интересуются и исследуют следующее явление. Если через прозрачное тело, например кристалл или жидкость, пропустить сильный пучок света то молекулы тела часть, правда, малую, этого света рассеивают во все стороны, являясь как бы антеннами, возбуждаемыми падающей волной. Пусть наш падающий свет будет монохроматичный. Что же оказывается? Если вы снимете спектр рассеянного света, то в нем наблюдаются, помимо несущей волны, еще боковые частоты, и общий спектр рассеяния в своих существенных чертах воспроизводит спектр модулированного телефонного радиопередатчика. И тогда невольно возникает вопрос, не есть ли рассматриваемое оптическое явление более или менее полная аналогия радиотелефонной модуляции. И вот, если эту мысль проследить дальше, то оказывается, что мы здесь, говоря несколько схематично, действительно имеем не что иное как модуляцию падающей волны собственными колебаниями молекулы или молекулярных агрегатов. И тогда совершенно ясно, что так же как спектр обычного телефонного передатчика несет в себе весь ваш разговор, все, что вы хотите сказать, так и спектр рассеянного света несет то, что молекула говорит о себе. Изучая его, вы изучаете свойство молекулы, вы изучаете ее строение.

Наконец, последнее замечание по поводу спектральной точки зрения. Раз мы выяснили, что лежит в основе применения этого принципа, мы легко сможем отдать себе уже заранее отчет, когда и чем его применимость ограничена. Это обстоятельство, мне кажется, весьма существенно. Во всем спектральном подходе нужно различать два момента. Один вам может показаться тривиальным. Он состоит в том, что мы для оценки функции разлагаем ее на сумму отдельных слагаемых. Второй момент заключается в том, что в качестве слагаемых мы берем определенные функции, в данном случае синусы. Когда целесообразно оценивать действие, разлагая на сумму? Это целесообразно постольку, поскольку в нашей проблеме справедлив принцип суперпозиции: зная, как действует каждое слагаемое, мы тем самым знаем, как действует вся сумма, или иначе: разложение целого на слагаемые имеет смысл, когда действие суммы равно сумме действий отдельных слагаемых. В тот момент, когда мы имеем перед собой случай, где принцип суперпозиции несправедлив, нужно подвергнуть пересмотру целесообразность всякого спектрального метода.

Что касается второго момента — выбора в качестве сла-

гаемых специальных функций, то здесь возникает вопрос: нет ли таких колебательных задач, при которых целесообразнее выбрать в качестве основных другие функции от времени, чем синусы. Мне кажется, что такие случаи вполне реальны, и мы как раз заняты в настоящее время вопросами, когда спектральный подход остается целесообразным, но в качестве основных функций надо взять не синусы, а другие периодические функции от времени.

Разрешите на этом закончить общую часть и перейти к рассмотрению некоторых основных проблем радиотехники.

Все проблемы радиотехники, я думаю, могут быть разделены на три категории: создание (генерация) колебаний, излучение колебаний и их распространение и, наконец, прием колебаний. Позвольте мне сегодня не касаться вопросов, относящихся к излучению и распространению колебаний, не потому, что они менее важны и интересны, чем остальные два. Но, во-первых, на все у меня не хватило бы времени, а во-вторых, потому, что наши работы относятся к вопросам генерации и приема. Я думаю, что будет в духе задач конференции, если я более подробно коснусь некоторых работ, которые проводятся у нас („у нас" — это значит, как здесь, в физическом институте, так и в ЦРЛ и отчасти в ГФТИ в Ленинграде, в лабораториях, руководимых проф. Н. Д. Папалекси, потому что работы, которые ведутся здесь и те, которые ведутся там, настолько тесно переплетены друг с другом, что просто не представляется возможным их друг от друга отделить).

В чем основная проблема, которая стоит перед нами, когда мы говорим о генерации — о создании колебаний? Совершенно ясно: мы должны создать устройство, которое делает возможным возникновение устойчивых незатухающих колебаний. Эти колебания должны быть мощными, должны генерироваться с хорошим коэфициентом полезного действия и т. д. Здесь есть очень много побочных, привходящих моментов. Кроме того, преимущества тех или иных устройств оцениваются в высокой мере (теперь мы знаем это) и тем спектром, который они дают. В настоящее время мы считаем большей частью желательным, чтобы этот спектр был наиболее простым, т. е. чтобы он состоял из одной спектральной линии. Это значит, что мы хотим, поскольку это возможно, приблизиться к генерации синусоидальных колебаний. С математической точки зрения дело сводится к установлению и интегрированию соответствующих диференциальных уравнений, которые позволили бы нам теоретически исследовать зависимость, с одной стороны, между параметрами системы как она нам дана, и с другой стороны, свойствами тех колебательных процессов, которые в этих системах происходят.

Классификацию, как систем, так и процессов, удобно делать, во-первых, с точки зрения физической, во-вторых, конечно, с точки зрения диференциальных уравнений. Классификации здесь могут быть самые разнообразные. Можно, например, производить деление на системы, которые имеют конечное число степеней свободы, — в предельном случае с одной степенью свободы, и системы сплошные или имеющие бесконечное число степеней свободы. И те и другие чрезвычайно важны, и те и другие играют очень большую роль как в электротехнике, так и в других областях. Первые управляются системой простых диференциальных уравнений, вторые — уравнениями в частных производных.

Но можно и нужно итти дальше и характеризовать системы по типу тех диференциальных уравнений, которым они подчиняются. Например, мы говорим о линейных системах или нелинейных, в зависимости от того, линейны или нелинейны уравнения, которыми они управляются.

Я должен сказать, что линейные системы до сих пор играли в теории колебаний самую большую, превалирующую роль. И действительно, громадная область как в применениях, так и в физических вопросах связана с такими системами, и математически эта область чрезвычайно интересна. Вся область классических краевых задач по существу относится именно к линейным системам диференциальных уравнений, т. е. характеризуется тем, что их уравнения в частных производных суть уравнения линейные.

Но в тех проблемах, о которых я буду говорить, мы будем иметь нелинейные уравнения. Чтобы не усложнять вопроса и выделить принципиальные моменты, мы будем рассматривать уравнения с конечным числом степеней свободы, даже, главным образом, с одной степенью. Под эту схему подходит схематизированный обычный катодный передатчик. Мы постараемся изучить его уравнение и уточнить задачу, которая здесь нас интересует.

Если я возьму обычный контур и введу в него переменную электровозбудительную силу, то в нем возникнут колебания; и по существу это есть генератор колебаний. Но, если я буду его исследовать, я не охвачу вопроса о генерировании электромагнитных колебаний, потому что сейчас же явится вопрос, откуда я взял переменную электровозбудительную силу. Я только отодвинул этот вопрос. Значит, чтобы решить вопрос полностью, нужно обратиться к таким системам, которые не нуждаются в чужих колебаниях. Вот такие системы, которые производят колебания, грубо говоря, из себя, т. е. пользуются постоянным источником энергии, которые не нуждаются в других источниках колебаний, мы будем называть автономными колебательными системами. Более уточненная их математическая характе-

ристика состоит в следующем: диференциальные уравнения, которыми они управляются, явно времени не должны содержать. В математическом смысле это очень важное ограничение. Оно диктуется в данном случае именно нашими физическими соображениями.

Посмотрим, какая самая простая, с точки зрения математической, физическая система, которая была бы автономной системой. Какой тип диференциальных уравнений самый простой? Несомненно, линейных уравнений. Если это автономная система, то коэфиценты уравнения не должны зависеть от времени, значит, они должны быть постоянными. Значит, самый простой тип автономной колебательной системы есть система, удовлетворяющая линейному диференциальному уравнению с постоянными коэфициентами. Действительно, такие системы существуют, и таких систем очень много. Все системы, которые основаны на (достаточно малых) упругих колебаниях, системы, основанные на применении электрической цепи, состоящей из конденсатора и самоиндукции, например кабель и т. д. — все они с достаточным приближением описываются линейными уравнениями с постоянными коэфициентами.

Если мы обратимся к такой системе (остановимся на дискретных системах), то мы знаем всю математику, которая сюда относится. Мы знаем и мы умеем интегрировать уравнения. Предельный случай незатухающих колебаний — это синусообразные колебания или сумма синусообразных колебаний — вот все, что данная система может дать. Затем могут быть колебания с затухающей амплитудой и с возрастающей, причем возрастание (поскольку система остается линейной) и затухание происходит экспонентиально. Вот три типа, которые возможны в системах с постоянными коэфициентами. Таким образом мы знаем здесь не только общий характер решений, но и все решение до конца.

Вот отсюда то мы и можем заключить, что для того чтобы создать устройства, которые дадут нам нужные колебания, линейные системы непригодны, потому что основное их свойство, непосредственно связанное с линейностью, заключается в том, что их амплитуда или, в конце концов, энергия, которую они дают, не есть свойство системы как таковой, а зависит вполне от начальных условий. Если вы зарядите в начальный момент такую систему определенной энергией, то и весь процесс на всем протяжении времени в смысле энергии существенным образом зависит от этих начальных условий.

Между тем, если вы посмотрите на все современные устройства, от которых требуется устойчивость, фактические устройства, с которыми мы работаем, они, конечно, этим свойством или, вернее, этим недостатком не обладают. Они

обладают тем свойством, что колебания их устойчивы в том смысле, что если вы запустите их из какого-нибудь, в широких пределах произвольного, состояния, то они колеблются с определенным периодом и с определенной амплитудой. Они имеют стремление, независимо от начальных условий, устанавливаться в определенном режиме. Фактические устройства имеют это свойство. Я думаю, рационально требовать это свойство от хороших генераторов. Поэтому данное свойство мы можем положить в основу наших требований. И другие соображения, на которых не буду останавливаться, приводят к заключению, от которого, по-моему, нельзя уйти: требования, предъявляемые нами к генераторным устройствам, несовместимы с линейностью, а значит, те системы, которые нам нужны, должны удовлетворять нелинейным диференциальным уравнениям.

Я думаю, что когда Майснер открыл свой принцип обратной связи, который лежит в основе современной радиотехники как приемной, так и передаточной, он меньше всего думал о диференциальных уравнениях. Но теперь, когда дело идет о том, чтобы углубить и использовать эту основную идею, чтобы разнообразно ее применить, когда дело идет о все более и более увеличивающемся развитии устройств, на это ссылаться нельзя, а нужно обратиться к тому математическому аппарату, который адекватен данной проблеме. И другого такого математического аппарата как аппарата, относящегося к нелинейным диференциальным уравнениям, нет. Физика колебаний поставлена сейчас перед задачей ознакомиться серьезно с теорией нелинейных диференциальных уравнений.

Но традиция и навыки — большая вещь. И естественно, что это так. И поэтому, особенно в первое время, но даже и теперь в применении к заведомо нелинейным системам стараются все-таки подойти линейным способом. Я не могу отрицать, что некоторые результаты были при этом достигнуты. Но мы видели, что целый ряд принципиальных ответов не мог быть таким образом получен. Тогда вводили дополнительные предложения, которые не были включены в основную постановку и были сделаны ad hoc, но приводили к частичным успехам, потому, что знали, что должно получиться. Иногда такой способ помогает, иногда не помогает, но всегда это паллиатив. Это во-первых. Во-вторых, мы знаем из опыта, что линеаризирование таких проблем приводило и прямо к ошибкам. Известная ошибка, которая тянется через литературу, заключается в следующем: дело идет о нахождении условий возникновения колебаний в генераторе. Тогда делают так: заведомо нелинейные колебания рассматривают при очень малых величинах отклонений, разлагают в ряд, ограничиваются первым членом и

получают действительно линейные уравнения. Их мы можем решать. И вот, если получается амплитуда возрастающая, мы говорим, что у нас неустойчивое состояние, у нас нарастающий процесс. То, что можно и нужно при помощи линейных уравнений находить условия, которые необходимы для возникновения колебаний, это верно. Но потом поступают иногда так. Известно из теории линейных уравнений, что если вы будете дальше увеличивать „отрицательное" затухание, практически дальше увеличивать обратную связь, то тогда решения линейного уравнения перестают быть осциллаторными. Тогда рассуждают так: значит, наступает такой момент, после которого не может быть колебаний. Это вообще ошибочно. Заключить, какой процесс установится в нелинейных системах из поведения линейных систем нельзя. А между тем это рассуждение, которое опытом и теорией опровергается, вы можете встретить и до сих пор.

Таким образом нужно перестроиться и перейти к аппарату, который адекватен данной проблеме. Это было осознано очень давно, — вскоре после введения таких нелинейных систем в практику, после того как такие системы получили громадное распространение, громадное значение для действительного осуществления практических целей. И сама практика наталкивала на то, что нужно это делать так, как нужно. Появились работы, вполне сознательно стоящие на нелинейной точке зрения. Сюда особенно следует отнести работы ван-дер-Поля, который это делал и правильно делал, и результаты которого до сих пор имеют для нас основное значение. Он правильно поступал в том отношении, что знал, что это нелинейная задача, и сразу к ней так и подходил. Но первоначальные работы, что весьма естественно, не имели той общности, которая, несомненно, желательна. Очень многие вещи просто постулировались. Например, очень часто постулировалось существование периодических решений, ряды, которые получались, часто не исследовались на сходимость. Кроме того, из-за отсутствия общего подхода, каждый случай трактовался отдельно. Несмотря на это результаты были часто хорошие. Но тот математический современный аппарат, который существует, не был использован, а между прочим, такой аппарат существовал и существовал уже давно. Он находит свое основание, он заложен, так сказать, в знаменитых работах Пуанкаре восьмидесятых годов*. На ту связь, которая существует между этими работами Пуанкаре, работами, которые потом, особенно Биркгофом, были сильно углублены, на связь

* Poincaré, „Sur les courbes définies par les équations différentielles", Oeuvres, t. I.

этих математических работ с нашими физическими проблемами указал А. А. Андронов. Он вместе с А. А. Виттом приспособил потом этот аппарат к нашим проблемам, применил его к целому ряду конкретных задач, проверил им решения задач, полученных другими авторами раньше, и сделал его более или менее рабочим аппаратом в нашей области. Оказалось, что основные результаты ван-дер-Поля сохраняют свою силу. И теперь они являются частным случаем хорошо обоснованных общих теорем. Сам ван-дер-Поль в одной из последних своих работ так на это дело и смотрит. А это, по-моему, очень существенная вещь.

Но кроме того, оказалось возможным найти новые вещи. И затем некоторые вопросы, которые при прежнем подходе оставались или открытыми или недостаточно освещенными, удалось таким образом, имея в руках общую теорию, осветить гораздо полнее. К этим вопросам я потом еще вернусь. А теперь позвольте мне обратить внимание на следующее.

Уравнения и математические вопросы, которые возникают при постановке проблем генерации электрических колебаний, оказывается, имеют гораздо более широкое значение, чем это может показаться на первый взгляд. Есть целый ряд вопросов, которые по существу приводят к той же самой постановке теоретической задачи. Я назову только некоторые из них: целый ряд проблем акустических, например звучание струны под действием смычка, звучание органных труб, звучание большинства музыкальных инструментов, за исключением ударных и щипковых, относятся сюда. Эти задачи и физически, конечно, чрезвычайно близки тем, которыми занимается радиотехника. Затем вопросы, относящиеся к теории регулирования машин (одна из чрезвычайно важных задач техники), находятся в близкой связи с этими же вопросами. Вопросы общей динамики полета имеют очень много общих черт и решаются этими же средствами. Но и некоторые другие еще более далекие области сюда относятся. Например, вопрос о переменных звездах типа цефеид, вопрос колебательный, повидимому, сводится к задаче о нелинейных системах: там, повидимому, схематически говоря, устанавливаются такие же колебания, как и в генераторе. Далее, вы знаете, что в химии существуют так называемые периодические реакции. Нам кажется, что этот вопрос относится к этой же категории математических задач. Наконец, совсем уже из другой области: появилась несколько лет назад математическая работа Вольтерра, относящаяся к вопросу о сосуществовании двух биологических видов, в зависимости от борьбы за существование. Повидимому, и этот вопрос приводит к совершенно аналогичной математической постановке. Таким образом вы видите, что

эти методы Пуанкаре теперь получают все большее и большее значение. Не говоря о том, что они дают непосредственное направление для решения наших проблем, они и в других областях приобретают руководящее значение. Поэтому, я думаю, вы позволите мне в нескольких словах остановиться на сущности этих методов, в самом простейшем случае, хотя должен сказать, что более или менее вникать в это на нашем общем собрании едва ли имеет смысл. Все эти вопросы гораздо более углубленно будут разбираться на секциях. Здесь я ограничусь самыми поверхностными указаниями, причем я попросил бы математиков извинить меня за то, что я не буду стремиться к особой строгости изложения, не буду делать оговорок, которые с математической точки зрения следовало бы сделать, но я не буду их делать потому, что это утяжелит изложение, а моя цель — дать только самое общее представление.

Если написать уравнение, которому подчиняется самый простой генератор, который схематизирован, но сохраняет типичные свойства действительного генератора, то вы получите следующие выражения для тока или для напряжения на его конденсаторе:

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\omega^2 y=f(\dot{y}, y).$$

Вид функции f задается характеристикой катодных ламп, и дело здесь идет об интегрировании уравнения такого типа. При этом автономность нашей системы выражается в том, что явно время в эту функцию здесь не входит.

Положим $\dot{y}=x$. Тогда

$$\frac{dx}{dy}=\frac{-\omega^2 y+f(y, x)}{x}. \qquad (1)$$

Если несколько обобщим задачу, то решение нашей проблемы сведется к решению системы таких уравнений:

$$\frac{dx}{dt}=P(x, y),\ \frac{dy}{dt}=Q(x, y).$$

Система двух таких уравнений, очевидно, равносильна первому, если положить

$$P(x, y)=-\omega^2 y+f(y, x),\ \ Q(x, y)=x.$$

Если я поделю одно на другое, я получу одно диференциальное уравнение между x и y, и именно вышенаписанное уравнение 1. Вопросом интегрирования такого уравнения занимаются работы Пуанкаре.

Что значит проинтегрировать такое уравнение? Если мы назовем интегрированием нахождение функций, известных нам (это немного расплывчатое понятие), которые удовлетворяют этому уравнению, то эта задача вообще нераз-

решима — таких „известных" функций, вообще говоря, нет. Если бы мы ставили вопрос так, что нужно выразить x в известных функциях в явном виде или в квадратурах от таких функций, то большинство задач физики и техники выпало бы потому, что функции, определяемые этим уравнением, именно этим уравнением и определяются; другого определения, известного нам, они не имеют. Значит, является задача, как говорит Пуанкаре, из самого уравнения вывести основные интересующие нас свойства функции, им определяемой. Эту задачу он себе и ставит и в первую очередь — выявить качественные свойства решений этого уравнения. Мы называем теперь такой способ подхода качественным интегрированием диференциальных уравнений. Физически это означает следующее. Если мы сумеем качественно проинтегрировать, то мы получим картину качественного протекания процесса, т. е. мы сможем знать такие, например, вещи: может ли система быть в равновесии, может ли система создавать колебания, быть в колебательном состоянии, как зависят колебания от тех или иных свойств? Мы не сможем, вообще говоря, дать численного значения амплитуд, численного значения периодов. Но и такое, довольно ориентировочное знание дало бы чрезвычайно много. К сожалению, проблемы нелинейных колебаний по существу своему гораздо сложнее проблем линейных колебаний. И поэтому требовать того, чтобы здесь мы получили те полные знания, которые там мы имеем, в настоящее время мы, наверное, не можем. Поэтому мы часто должны удовлетворяться этим качественным решением задач. Но и эти качественные результаты играют для нас, как сказано, громадную роль.

Обратимся к математической стороне вопроса. Мы хотим исследовать y как функцию от x, причем зависимость y от x дана уравнением

$$\frac{dx}{dy} = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}.$$

Геометрически это значит: найти поведение интегральных кривых в плоскости XY. Я напомню физическое значение величин x и y в наших простых случаях: если y напряжения на конденсаторе, то x—ток. Плоскость XY мы будем называть фазовой плоскостью. Геометрическая интерпретация решения диференциального уравнения на фазовой плоскости весьма удобна и существенно помогает выражать и интерпретировать аналитические соотношения.

Известно следующее: пусть P и Q будут регулярными функциями; в наших физических задачах это так. Тогда, вообще говоря, через каждую точку проходит одна и только одна интегральная кривая. Но что значит точка на фазовой плоскости? Это значит одновременное значение тока и на-

пряжения. Вы задали ток и напряжение и на фазовой диаграмме этому соответствует одна из точек. Значит, при заданном начальном токе и напряжении у нас поведение системы задано однозначно. Но есть и исключения в поведении интегральных кривых. Исключение составляют именно те точки, в которых как P, так и Q обращаются в нуль. Эти точки называются особыми точками. И вот оказывается, что эти особые точки соответствуют положению равновесия нашей физической системы. Другими словами, это значит следующее: наш передатчик, вообще говоря, будучи включен, колеблется, т. е. не находится в равновесии. Но мы хотим знать, есть ли такие состояния передатчика, т. е. такие значения напряжения и тока, при которых колебаний нет, которые могут оставаться неизменными. И теперь мы знаем, как это узнать. Если в фазовой плоскости есть особые точки, положения равновесия существуют, и координаты этих точек дают значение тока и напряжения, при которых это равновесие имеет место. Аналитически это сводится к решению двух совместных алгебраических или трансцендентных уравнений:

$$P(x,y)=0,\ \ Q(x,y)=0.$$

Вид функций P и Q известен, коль скоро дано устройство передатчика.

Теперь вот что интересно. Пуанкаре обратил внимание на то, что есть (если отвлечься от совсем исключительных случаев) четыре рода равновесия нашей системы.

Это очень интересное исследование, которое вообще делит все возможные положения равновесия на четыре класса (рис. 1 и 2). Если теперь обратимся к уравнению (1), то мы можем сказать: один класс всегда неустойчивый, т. е. соответствует неустойчивому равновесию, другой соответствует устойчивому равновесию, а два остальных могут соответствовать и устойчивому и неустойчивому равновесию. Но в исследованиях Пуанкаре самое интересное заключается в следующем. Количество и свойства особых точек, их расположение в известном смысле предопределяют поведение интегральных кривых. Значит, уже одно существование условий равновесия ограничивает и возможности движения. Оно, с одной стороны, говорит, что в такой-то системе, обладающей такими-то условиями равновесия, колебания вообще невозможны, в такой-то вообще могут быть, не всегда будут, но возможны.

Какие же интегральные кривые особенно для нас важны? Совершенно особый интерес представляют для нас замкнутые интегральные кривые. Почему же нас интересуют замкнутые интегральные кривые? Легко видеть, что замкнутая

кривая в плоскости XY отображает физический процесс колебательного движения и именно установившийся периодический процесс. Действительно, предположите, что у нас есть такая замкнутая кривая. Что это значит? x и y — отображение тока и напряжения или координаты и скорости. Если мы проследим процесс во времени, то изображающая точка движется по интегральной кривой. Если интегральная кривая замкнута, то она, двигаясь по ней, возвратится в первоначальное положение через некоторое конечное время (мы предполагаем, что на кривой нет особой точки). Из общей теории диференциальных уравнений следует, что если точка возвратилась в первоначальное положение, т. е. если координаты обе одновременно вернулись к первоначальному значению, то точка продолжает дальше двигаться совершенно так

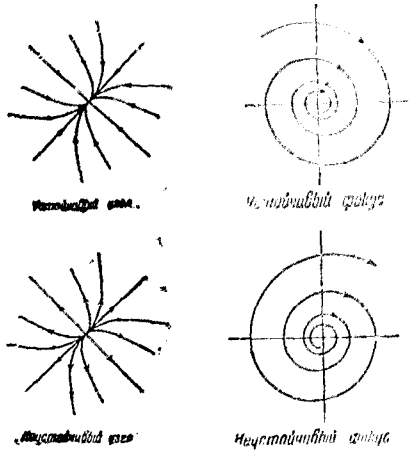

Рис. 1. Характерные типы особых точек и схема поведения интегральных кривых вблизи этих точек. Устойчивый узел, например, соответствует апериодическому разряду конденсатора. Устойчивый фокус — соответственно колебательному разряду конденсатора.

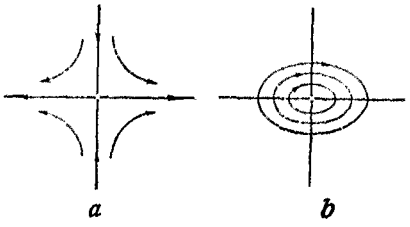

Рис. 2. Характерные типы особых точек: a — седло — всегда неустойчиво. Пример, обычный маятник в верхнем положении равновесия. b — центр — устойчив. Соответствует идеальному (*без трения*) маятнику около нижнего положения равновесия.

же как в промежутке времени, за который она пробежала замкнутую кривую в первый раз, т. е. процесс повторяется второй, а также третий раз и т. д. Интегральная замкнутая кривая изображает периодическое решение уравнений. Она отображает незатухающий колебательный процесс. Поэтому разыскание замкнутых кривых — это основная задача в вопросе о решении наших колебательных задач в линейных и нелинейных системах.

Итак, вторым существенным элементом теории Пуанкаре, играющим наряду с особыми точками особо важную для нас роль, являются замкнутые интегральные кривые, потому что они изображают периодически колебательные процессы, которые мы хотим изучать. И оказывается, как я

уже указал (отчасти, конечно, я говорю несколько суммарно), в зависимости от свойств особых точек и расположение этих замкнутых интегральных кривых различно.

Позвольте мне остановиться несколько подробнее на одном относящемся сюда, для нас чрезвычайно существенном вопросе.

Мы различаем, как известно, системы консервативные и неконсервативные. Первые характеризуются тем, что они управляются уравнениями гамильтонова типа (или, если хотите, соответствующие уравнения допускают интеграл энергии). Оказывается, что для консервативных систем возможны, если мы исключим особые точки высших порядков, только два рода особых точек, так называемые центр и седло. Рассмотрим наипростейшую картину: существует одна особая точка. Тогда справедливо следующее: если мы имеем седло, то замкнутых интегральных кривых нет, установившиеся колебания невозможны. Если особая точка — центр, то через каждую точку плоскости проходит одна замкнутая кривая, т. е. возможно бесконечное множество незатухающих колебательных процессов. Действительно, если все интегральные кривые замкнутые, то где бы вы ни поместили вашу точку, т. е. с какими бы начальными значениями точки и напряжения вы бы ни пустили передатчик, он будет совершать сразу незатухающие колебания. И при различных начальных условиях все эти процессы будут различны, т. е. мы для нелинейной, но консервативной системы имеем опять то, что установившийся колебательный процесс совершенно зависит от начальных условий. Как его период, так и энергия не присуща, так сказать, самой системе, а задается начальным положением. А ведь мы требуем, чтобы с каких бы начальных положений мы ни начали, наша система установилась бы в определенных устойчивых колебаниях. Консервативные системы нам не годятся. Как обстоит дело с неконсервативными системами? Здесь, оказывается, существуют замкнутые интегральные кривые, но совсем другого типа (рис. 2,*b*). Они встречаются изолированно. Другие же интегральные кривые, не замкнутые, спирально приближаются к ним и навиваются на них с внутренней и внешней стороны. Вот системы, которые обладают такими изолированными, замкнутыми интегральными кривыми, это то, что нам нужно. Это значит, что если вы начинаете с некоторой точки, система бежит по этой спиральной кривой и приходит к некоторой замкнутой кривой и там остается. Это действительно изображает тот факт, что наши генераторы обладают стремлением к одному определенному, точно выраженному колебательному процессу. Такие кривые Пуан-

каре называет **предельными циклами** (рис. 3) и важность этих кривых наряду с особыми точками теперь очевидна.

Значит, наша задача при постановке той или иной физической проблемы заключается в следующем: нужно установить диференциальные уравнения и постараться выяснить, как расположены и какого типа особые точки, как расположены предельные циклы, каков их тип и какого рода связь между особыми точками и предельными циклами. Эта задача по существу не особенно легка. Я говорю о типах предельных циклов. Я бы хотел указать на то, что есть

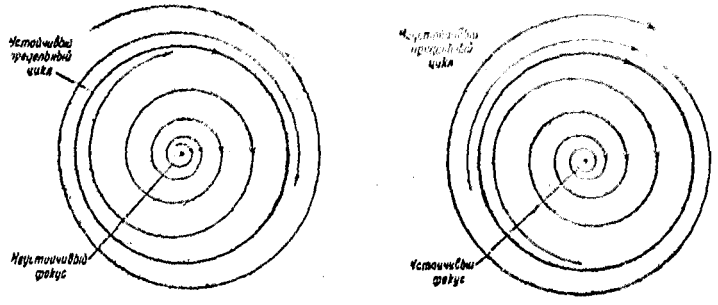

Рис. 3. Предельные циклы и схема хода интегральных кривых вблизи циклов: *a* — устойчивый цикл, *b* — неустойчивый цикл.

предельные циклы, на которые интегральные кривые навиваются, — это те, которые нам нужны, это устойчивые системы. И есть предельные циклы, от которых разворачиваются интегральные кривые. Это нам не годится, это неустойчивые системы. Нам, главным образом, важны предельные циклы устойчивые. И вот теория Пуанкаре дает в качественном отношении указания, как сожительствуют особые точки и циклы, т. е. положения равновесия и периодические решения между собой. По расположению одних, по их форме, их роду вы многое можете предсказать относительно других. И это для нас чрезвычайно ценно. Для иллюстрации я укажу на один, правда, чрезвычайно простой пример: внутри замкнутой кривой должна находиться всегда, по крайней мере, одна особая точка. В переводе на наш язык это значит, что колебание может совершаться только по обе стороны от положения равновесия. И далее, оказывается, что не все положения равновесия могут дать начало таким циклам. В механических примерах эти простые положения, которыми, конечно, не ограничивается теория (это само собой понятно), тривиальны. Мы видим часто эти со-

отношения без всякой специальной теории, но уже в электричестве эта очевидность нас оставляет, и во многих случаях мы можем сделать важное, далеко не очевидное, заключение. Укажу на некоторые вопросы: вопрос о срыве, о жестком и мягком возбуждении, чрезвычайно важные для нас вопросы, которые находят ясное выражение на языке предельных циклов и особых точек. Я не могу на этом больше останавливаться, скажу только, что я убежден, что это наглядное геометрическое представление, дающее, правда, качественную, но очень хорошую картину возможных процессов, через короткое время войдет в обиход физика и, пожалуй, инженера.

Может быть, все рассуждения станут нагляднее, если я покажу вам экспериментальный предельный цикл (рис. 4).

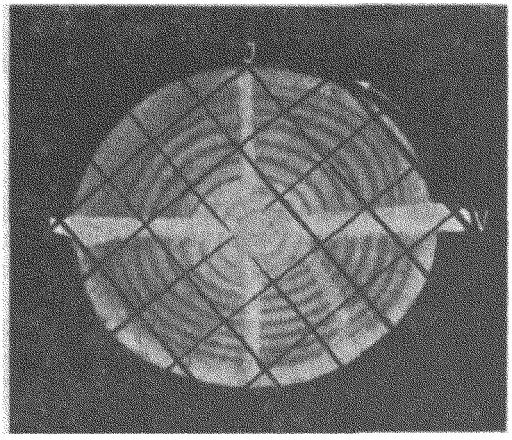

Рис. 4. Фотография экспериментального предельного цикла, по работе Г. Остроумова.

Можно заставить генератор зачертить такой предельный цикл. Если вы будете действовать соответствующим образом на брауновскую трубку, на катодный осциллограф, то можно сделать так, что одно отклонение будет пропорционально току, другое — пропорционально напряжению и тогда такая точка просто начертит предельный цикл.

Одна из первых задач, которая ставится, когда вы исследуете новые устройства, это вопрос, существует ли цикл вообще. Часто можно сравнительно простым рассуждением доказать существование цикла. Я не знаю, где он лежит, не знаю ни амплитуды, ни формы колебания, но я знаю, что он есть. Это уже очень много, но, к сожалению, мы во многих случаях и этого сделать не можем. И я должен характеризовать этот качественный метод интегрирования

диференциальных уравнений так: он дает аппарат, который позволяет мыслить образами, чрезвычайно адекватными, и часто позволяет сделать ценные заключения о поведении системы. Но здесь еще очень много нужно и, повидимому, можно сделать. Эта теория несовершенна, и в том виде, как она существует сейчас, как с математической, так и с физической стороны подлежит еще углублению. Укажу, например, на такую математическую задачу, которая, насколько я знаю, до сих пор не решена, хотя, казалось бы, она довольно проста. Еще в 1900 г. знаменитый немецкий математик Гильберт на математическом конгрессе в Париже поставил ряд основных, по его мнению, задач из различных математических дисциплин. Одна из них непосредственно к нам относится. Пусть P и Q — полиномы некоторой степени. Это довольно хорошо, при не особенно высокой их степени, апроксимирует наш практический случай генератора. Нужно указать наибольшее возможное число предельных циклов при заданных P и Q. Физически это значит — найти наибольшее возможное число колебательных состояний данной системы. Насколько я знаю (я, правда, не математик), до сих пор эта задача не нашла решения.

Что нам нужно было бы — это следующее. Нам дана характеристика, например, графически. Является вопрос такого рода: можно ли из некоторых свойств ее, не входя в большие детали этой функции, например, из существования асимптотических значений (физически это значит существование тока насыщения), заключить что-либо относительно тех колебательных возможностей, которыми данная система обладает. Во многих случаях мы не можем этого сделать, в частных случаях мы это сделать можем. Решение этой задачи было бы очень полезно.

Но я принужден оставить этот вопрос и обратиться к следующему. Изложенный выше подход к нашим вопросам качественный. Но, конечно, физик и в особенности техник качественными ответами, вообще говоря, удовлетвориться не может. Ему нужно получить численные данные, ему нужно предоставить, конечно с приближением, процессы при помощи известных ему функций или, говоря конкретно, при помощи функций, для которых существуют таблицы. Вот что ему нужно, чтобы вычислять и предвидеть то, что будет, чтобы построить соответствующим образом свои устройства.

Что же мы можем сказать относительно количественных вычислений даже в простейшем случае одной степени свободы? К сожалению, немного. Нам нужно было бы найти возможно простой алгорифм, который позволил бы приближенно вычислять эти предельные циклы для общих слу-

чаев в виде ряда Фурье или чего-нибудь вроде этого. Но пока мы этого сделать не можем. В одном случае, а именно, если нелинейные члены достаточно малы (а этот случай достаточно часто на практике встречается), пользуясь работами Пуанкаре (которые развиты им совершенно для других целей, именно для целей небесной механики), оказалось возможным довести решение до конца. Здесь можно не только решить вопрос о том, существует или не существует предельный цикл, но довести и количественно решение задачи до такой степени, что оно позволяет систематизировать добытый экспериментальный материал и служит руководством для постановки новых опытов, их оценки, оценки того, что нужно сделать для того, чтобы получить тот или иной эффект. Одним словом, мы можем для этих, повторяю, практически важных случаев получить то, что нам нужно. Есть и другой предельный случай, к которому также можно подойти количественно. Я имею в виду релаксационные колебания, но, к сожалению, я на них останавливаться не могу.

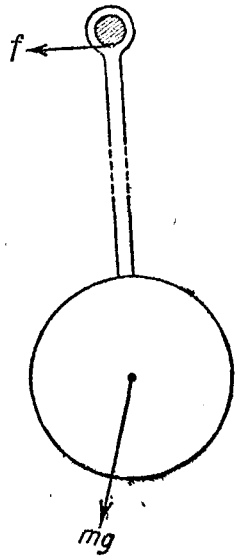

Рис. 5. Схематический чертеж маятника Фроуда.

Я уже указал, что эти вопросы относятся не только к нашим задачам электромагнитных колебаний. Я перечислил целый ряд вопросов, где предельные циклы имеют точно так же большое значение. Чтобы привести еще один интересный пример, я укажу на следующее: если дело идет о динамике полета, специально об аэроплане, летящем в вертикальной плоскости, с постоянным углом атаки и некомпенсированной тягой пропеллера, то вопрос о мертвых петлях сводится при соответственных исходных уравнениях на разыскание предельных циклов. Это показал Дюляк, это же воспроизвели Андронов и Витт.

Кроме тех случаев, о которых я говорил, есть одна очень простая механическая модель, которая подчиняется в первом приближении тому уравнению, которому подчиняется и наш генератор. Это прибор, который мы называем маятником Фроуда. Устройство его состоит в следующем (рис. 5). Представим себе жесткий маятник не на острие, а снабженный муфтой. В муфту входит ось, которой можно придать постоянное вращение посторонней силой, например привести во вращение мотором. Если вы напишете уравнение для малых отклонений этого маятника, то по-

лучите с достаточным приближением следующее уравнение:

$$\ddot{\varphi} + n^2\varphi = f(\omega - \dot{\varphi}).$$

Справа будет момент вращения, который действует на маятник со стороны вращающейся оси благодаря трению. Этот момент будет функцией от постоянной скорости вращения вала ω и от угловой скорости маятника $\dot{\varphi}$. Вы видите не что иное, как наше исходное уравнение. При соответствующих условиях маятник должен начать раскачиваться в собственном периоде (вал вращается мотором с постоянной скоростью), а затем должно наступить, и во всяком случае возможно, установление незатухающих колебаний.

Нас занимала мысль исследовать такой маятник по следующим соображениям: на такой механической модели явления, которые нас интересуют, например в генераторе, неустойчивость положения равновесия, нарастание колебаний, установление стационарных колебаний могут быть прослежены и изучены чрезвычайно просто. Здесь мы просто видим, как все происходит.

Такой маятник построен и исследован С. П. Стрелковым. Стрелков, действительно, во всяком случае качественно, наблюдал те явления, которые предсказывает теория и с которыми мы знакомы из области электромагнитных колебаний. Неустойчивость положения равновесия, нарастание, т. е. спиральные интегральные кривые, установившийся режим — предельный цикл. Правда, здесь не было того постоянства, которое желательно было бы для количественных исследований, но этого можно, вероятно, достигнуть. Замечу, что такого рода маятник в свое время был построен Н. Е. Жуковским. Но Жуковский, насколько я знаю, интересовался созданием подвеса без трения. На нашем языке разница между интересом Жуковского и нашим выражается так: Жуковский интересовался случаем центра и интегральными кривыми, соответствующими этому случаю. Мы же интересуемся предельными циклами, чем, повидимому, Жуковский тогда не интересовался. Это две различные проблемы, а поэтому и условия должны быть подобраны иначе.

Но помимо того эта модель, если ее соответственно развить, может быть, окажется полезной в другом смысле. Дело в том, что весь процесс связан с видом этой функции f, а вид этой функции зависит от характеристики трения, т. е. от того, как зависят коэфициенты трения от скорости. Таким образом изучая эту модель, мы, может быть, получим способ изучения зависимости трения от скорости. Этот вопрос ведь играет большую роль в технике вообще, и этот способ может оказаться более полезным, чем имеющиеся до сих

пор, потому что он прямой, потому что он может давать не только само трение, но и непосредственно производную трения по скорости, между тем как сейчас эта производная строится из кривой трения. Такой прямой метод может, конечно, иметь преимущества.

То, о чем мы говорили до сих пор, относится к разысканию периодических решений, к выяснению вопроса об их числе, о том, какой они формы и т. д. Но физик требует еще дополнительного исследования. Физик требует (техник, конечно, также) ответа на следующее. Пусть найдено периодическое решение. Возникает вопрос: устойчиво ли оно или не устойчиво. То-есть здесь возникает такой же вопрос, как и при исследовании положения равновесия. Если окажется, что ваше решение неустойчиво, например, пусть это будет предельный цикл, но такой, с которого разворачиваются кривые, то, конечно, оно для генератора служить не может. Малейшее удаление сейчас же повлечет к нарушению стационарных колебаний, например срыву. И вот возникает вопрос об устойчивости периодических решений, возникающих в нелинейных неконсервативных системах.

Как же здесь обстоит дело? Оказывается, полный математический аппарат для этого существует и именно в работах Ляпунова. Ляпунов с большой полнотой решил вопрос как об устойчивости равновесия, так и об устойчивости периодических решений в неконсервативных системах.

Здесь интересно отметить следующее: когда Ляпунов делал свою работу, эти технические задачи еще не возникали, да и радио не знали еще. Он создал эту теорию, главным образом, из абстрактного математического интереса. А потом положение известным образом обратилось: когда создавали технические и физические устройства, о которых я говорил, о Ляпунове не знали. И физическая практика потребовала методов, которые позволили бы решать задачу об устойчивости по отношению к конкретным физическим вопросам. И оказалось, что благодаря тому, что Ляпунов заинтересовался математическим вопросом, у нас аппарат есть, и мы ничего другого не должны делать, как просто этот аппарат привлечь. Это и делается, и получаются ответы, которые нужны.

Вот что получается. Вопрос об устойчивости и неустойчивости положения равновесия нелинейных систем приводит к разбору специального линейного уравнения (мы знаем, как его составлять): это линейное уравнение с постоянными коэфициентами.

Вопрос же об устойчивости или неустойчивости периодических решений может быть сведен тоже к линейным уравнениям, но с периодическими коэфициентами.

И таким образом в поле нашего зрения необходимо вступает теперь новый класс диференциальных уравнений — линейные уравнения с периодическими коэфициентами. Теория такого линейного уравнения известна. Я бы хотел только показать ее отличительные черты. Самое простое такое диференциальное уравнение выглядит следующим образом:

$$\ddot{y}+\alpha^2\,(1+q\cos 2t)\,y=0.$$

(Я пишу в канонической форме, выбрав определенные единицы для периода изменения коэфициента.) Это так называемое уравнение Матье. И на подобный тип уравнений сводится вопрос об устойчивости и неустойчивости периодических решений. И вот что оказывается. Эти уравнения имеют вообще решения различного типа. Смотря по тому, в каком соотношении находится величина q, которая дает амплитуду колебания коэфициента, и величина α, которая дает среднюю частоту, положение может быть таково, что колебания из начальных границ не выходят, т. е. если они (решения или колебания) были вначале малы, то и остаются малыми. Если положение таково, то мы говорим, что решение устойчиво. Если, наоборот, соотношения другие, то бывает, что решение этого уравнения обладает таким свойством, что каким бы малым вы его ни задавали вначале, оно экспоненциально растет в гору, все увеличивается и увеличивается. В этом случае наше уравнение, которое мы вывели в качестве критерия для устойчивости и неустойчивости, показывает, что наше первоначальное решение неустойчиво. Таким образом мы можем решить, исследуя соответственные линейные уравнения с периодическими коэфициентами, вопрос об устойчивости колебательного процесса, даваемого нашим исходным нелинейным уравнением.

Для нас решение этих задач уравнения с периодическими коэфициентами играет служебную роль. Они призваны решать вопрос о стабильности или нестабильности решений уравнений, которые сами по себе нелинейны Но физик начинает подходить к этому и с другой точки зрения. Есть целый ряд больших физических проблем, которые приводят к такому же типу уравнений, например, вопрос о колебаниях эллиптической мембраны, а также колебания спарников в электровозах.

Я укажу еще на проблемы из совершенно другой области. Одна из существеннейших задач современной волновой механики — это вопрос о металлах. И вот, вопросы о металлической проводимости и многие другие вопросы, относящиеся к металлу, непосредственно сводятся к таким линейным уравнениям с периодическими коэфициентами

Там они играют громадную роль, там вопрос об устойчивых и неустойчивых решениях этих уравнений как таковых имеет первенствующее значение, но, правда, там усложняется дело тем, что имеется не одна степень свободы, а три, потому что там есть пространственная решетка и уравнение более сложное, но принципиально оно одно и то же. К этому же типу уравнений приводит целый ряд задач и из других областей. На одной из них позвольте остановиться несколько подробнее.

В самом деле, представьте, что у вас есть контур, в котором вы берете емкость или самоиндукцию и периодически изменяете ее величину. Тогда уравнение для колебания в этом контуре есть уравнение с периодическими коэфициентами и период коэфициента задан, поскольку задано изменение емкости или самоиндукции во времени.

Что же мы должны ожидать, если мы только что сказанное применим к данному физическому случаю? При известных соотношениях (а именно при тех, при которых решение уравнений устойчиво) ничего не произойдет. Вы немного зарядите конденсатор, но ничего интересного не будет, будет маленькое изменение, и оно скоро потухнет. Но мы знаем, что есть такое соотношение между α и q, при котором, как бы мало начальное состояние не было, как бы не были малы начальные токи, они нарастают все больше и больше. Значит, что нужно ожидать? Если вы возьмете контур с емкостью и самоиндукцией и будете, скажем, емкость в определенном темпе, с определенным размахом, изменять периодически (а темп можно всегда подобрать такой, чтобы условию, которому нужно удовлетворить, вы удовлетворили), то что случится? Так как во всяком контуре малые токи всегда существуют, хотя бы в силу статистических флуктуаций, то значит, если вы не дадите никакой электровозбудительной силы, а просто будете изменять емкость, то в таком контуре должны спонтанно возникнуть колебания. Совершенно аналогичное заключение справедливо и для того случая, когда периодически меняется самоиндукция контура. Мы, таким образом, можем сказать, что создаем электрические колебания из ничего, поскольку первоначально нам нет надобности создавать ни электрических, ни магнитных полей. Здесь мы, конечно, имеем превращение механических колебаний непосредственно в электрические. Мы имеем особый тип генератора переменного тока. Теперь мы знаем это. Нам нужно сказать, что на эту возможность обратил еще внимание лет пятьдесят назад Рэлей. У него об этом сказано немного, но указание на возможность такого явления у него есть.

Теперь такой генератор специальной, весьма простой конст-

рукции осуществлен нами в лаборатории ГФТИ, руководимой проф. Папалекси.

Очень просто уяснить себе физически, как происходит в таком генераторе процесс нарастания колебаний.

Разрешите мне коротко остановиться на этом и взять для простоты схематический случай. Я буду предполагать, что мы периодически изменяем емкость. В осуществленной модели меняется, как мы увидим дальше, самоиндукция. Но случай с меняющейся емкостью, мне кажется, несколько более нагляден. А по существу можно, конечно, перенести почти без изменений все рассуждения на изменение самоиндукции. Я скажу очень кратко, чтобы не задерживать, но идею все-таки скажу.

Представьте, что мы поступаем следующим образом. Возьмите цепь, состоящую из емкости и самоиндукции, причем конденсатор состоит, скажем, из двух параллельных пластин. Представьте себе, что на конденсаторе находится как угодно малый заряд, а тока в этот момент нет. И в этот момент раздвиньте пластины. Так как заряд есть, то вы затратите некоторую работу. Теперь идет разряд, вся потенциальная энергия обратится в кинетическую, в данном случае — магнитную. Та работа, которую мы затратили на раздвижение, также обратится в магнитную энергию. Ток будет, значит, несколько более сильным, чем был бы, если бы вы этого раздвижения не сделали. Через четверть периода заряд равен 0, вся энергия находится в магнитном поле и в этот момент вы можете сдвинуть опять пластины, но не производя при этом никакой работы, и прождать еще четверть периода. Теперь вся энергия перешла опять в электростатическую, но теперь ее больше, чем было вначале, именно на ту энергию, которую вы создали, раздвигая пластины конденсатора. Вся же цепь в смысле емкости и самоиндукции пришла в прежнее положение. Значит, при одном таком цикле вы получили увеличение заряда. Повторяя тот же прием дальше и дальше, вы будете получать непрерывное нарастание зарядов.

Из всего того, что мы здесь сказали, ясно, как нужно действовать: нужно менять емкость вдвое быстрее, чем собственный период моей цепи. За полный период собственных колебаний нужно два раза сдвинуть и раздвинуть пластины. Вот тот физический механизм, который лежит в основе математической трактовки вопроса. Более подробный анализ показывает: 1) что нет надобности делать изменение параметров скачками; тот же качественный результат получится и при плавном периодическом изменении емкости или самоиндукции; 2) нет надобности, чтобы период изменения был ровно вдвое меньше собственного периода; здесь допустимы известные отклонения; наконец, 3) каче-

ственно те же явления получаются при наличии в контуре не слишком большого сопротивления. Как уже отмечено выше, в осуществленной модели изменялась самоиндукция. Практически это ведет к более выгодной конструкции. При соответственном числе оборотов наступает то явление, о котором шла речь выше. Напряжение и ток нарастают. Это напряжение, если специально не демпфировать, доходило в наших опытах до 15 тыс. вольт в очень короткое время. Дальше нельзя было итти, потому что изоляция не выдерживала. Если включить сопротивление, величина которого зависит от тока, то можно получить стационарное состояние. Замечу, между прочим, что станционарное состояние из линейного уравнения получить, конечно, никак нельзя. Такое состояние может установиться и действительно устанавливается только при наличии в цепи нелинейных проводников. Получилось несколько сот ватт. Ротор приводился в движение мотором с редуктором, причем число оборотов оси достигало при этом 15 тыс. в минуту, число периодов было приблизительно 1700 в секунду. Это соответствовало возбуждению колебаний половинной частоты, значит, генератор давал частоту в 850 периодов в секунду. Ток устанавливался, горели лампы и т. д. Будет ли этот генератор иметь практическое значение и какое, об этом пока преждевременно что-нибудь сказать.

Позвольте мне на этом закончить общие вопросы, относящиеся к одной степени свободы. Вы видите, что этот простейший случай требовал большого нового математического аппарата. Но на этом остановиться мы не могли. Практика физика требует настоятельно и теоретической обработки более сложных систем, именно систем со многими степенями свободы. И тут я могу ограничиться очень коротким замечанием, потому что должен откровенно сказать, что в этом отношении с теоретической точки зрения мы знаем не много. Вместо фазовой плоскости для одной степени свободы мы здесь должны иметь дело с фазовым пространством многих измерений. В качестве стационарного предельного установившегося состояния при одной степени свободы возможны или положения равновесия или периодический процесс. Квазипериодические явления, т. е. колебания с двумя несоизмеримыми периодами там возникнуть не могут. В более сложной системе, уже в системе с двумя степенями свободы, возможны, во-первых, состояния равновесия, затем периодические процессы, затем квазипериодические и другие еще более сложные.

Явления в системах с двумя и более степенями свободы представляют большой интерес. Ведь сюда относятся явления биений, имеющие чрезвычайно существенное зна-

чение. Однако, как я уже сказал, здесь у нас нет полной теоретической ясности. Замечу, что если мы будем говорить даже только о состояних равновесия и периодических решениях, то в случае $n > 2$ законы сожительства будут совершенно иными. Благодаря увеличенному числу измерений интегральные кривые приобрели, так сказать, большую свободу.

Я думаю, математики действительно могут нам здесь помочь. Вряд ли мы справимся с этими математически, повидимому, трудными вопросами без помощи математиков.

Позвольте мне закончить этот отдел еще одним общим замечанием. Я говорил, я часто напоминал, что мы требуем доказательства существования периодических решений, что это очень важная часть наших теоретических исследований. Часто приходится слышать следующие соображения: действительно, очень важно иметь теорию, которая позволяет нам рассчитывать амплитуду, рассчитывать периоды, но зачем вам заниматься вопросом о существовании периодических решений? Не есть ли это просто математическая забава, потому что мы ведь на опыте убеждаемся, что такие процессы в данной системе существуют. Когда вы пишите диференциальные уравнения какой-нибудь физической задачи, вы всегда и неизбежно данную проблему чрезвычайно упрощаете. Вы всегда пишете уравнение не для данной проблемы, а для идеализированной, упрощенной. Откуда вы знаете, что вы учли все существенные черты данной проблемы? И вот, если доказательство существования приводит к тому, что существуют периодические решения и это на опыте оправдывается, то это уже известный аргумент, что вы не упустили существенных черт, потому что существенными чертами мы считаем те, которые обусловливают возможность колебания. Но это только косвенные указания. Но что будет, когда в процессе доказательства существования вы натолкнулись на то, что наши диференциальные уравнения не имеют периодического решения, а объект, для которого вы его создали, имеет? Тогда вы, наверное, можете, быть убеждены, что не учли самых существенных черт. Тогда вы начинаете искать, какие черты вы упустили. И практика знает примеры, когда искание доказательств существования наводило вас на соображение о том, где искать эти упущения, помогло вам найти нужное и поставить, таким образом, всю проблему на правильные рельсы. Я приведу совершенно элементарный пример. Конечно, вы все знаете, как во многих учебниках, особенно более старых, излагается теория простого электрического звонка или, скажем, электромагнитного прерывателя. У вас ударник или якорь в положении равновесия замыкает контакт электрической цепи, в которую

включен электромагнит, действующий на якорь. Когда вы включаете батарею, электромагнит притягивает ударник, ток разрывается, сила магнитов пропадает, пружина гонит ударник обратно, контакт опять замыкается и, так сказано, — я нарочно посмотрел в одном хорошем учебнике, — „das Spiel geht weiter“ или „игра продолжается дальше“. И вот, если вы эти соображения перенесете на язык диференциального уравнения, то легко доказать, что существующее диференциальное уравнение не позволяет, чтобы игра начиналась сначала, оно не имеет периодического решения. Значит, здесь что-то существенное упущено. И действительно, теория прерывателей не так проста, как кажется. Мы знаем, например, какую существенную роль в вопросе о возможности колебаний играет самоиндукция. Успех в задаче прерывателя сделан работой М. А. Леонтовича. Из нее с ясностью видно, как влияет самоиндукция, которая не только определяет возможность самого процесса, но определяет и период колебания, который отличен от периода камертона или самого ударника. Таким образом исследование существования или несуществования периодических решений указывает на существенные черты, указывает, как их надо учесть. Я мог бы привести и другие примеры, где ясно было бы, что польза от таких исследований вполне реальна.

Позвольте мне теперь еще вкратце сказать несколько слов о второй основной проблеме, о проблеме приема. Поскольку дело идет о приеме линейными системами, я думаю, принципиальных вопросов не возникает. Здесь дело обстоит примерно следующим образом. Изучением спектра приходящего сигнала, и спектра помех задача с принципиальной стороны исчерпывается. В конкретных случаях иногда быстрее приводят к цели отличные, во всяком случае — по форме, от спектрального подхода приемы, но это, конечно, принципиально не нарушает правильности высказанного положения. Практически важные и интересные вопросы обусловливаются здесь, как известно, антагонизмом между двумя требованиями — селективностью приема и быстротой приемной работы. Вы знаете, в чем состоит этот антагонизм. Если вы хотите, вы можете построить приемник так, чтобы он практически реагировал на одну определенную длину волны, одно определенное колебание, одну определенную синусоиду. Если взять достаточно маленькое затухание, то мы этого достигнем с достаточным приближением. А сегодня мы имеем средство делать затухание очень малым. Тогда этот приемник почти не будет реагировать даже на колебание, близкое к его собственному. Он себя очень оберегает от посторонних колебаний, в том числе и от атмосферных помех. Эта нечувствительность к чужому воздействию на первый взгляд очень хороша. Но, к сожалению,

такое приемное устройство не решает основной проблемы связи. Такой приемник не может сообщать ни о чем другом, как только о том, что передатчик включен.

Предпосылкой для связи является возможность принимать сигналы. Сигнал же заключается в том, что на передающей станции определенным образом в определенном темпе мы изменяем форму колебания передатчика или, как мы говорим, модулируем его, давая точки и тире ключом, или изменяя амплитуду в темпе акустических колебаний моего разговора.

Но такое модулированное колебание уже имеет сложный спектр. Этот спектр несет в себе характеристику или форму сигнала. Чтобы принять сигнал неискаженным, нужно принять весь его спектр. Приемное устройство, которое оберегает себя от посторонних влияний тем, что принимает только очень узкую область спектра, неспособно также принять и спектр собственного сигнала.

И здесь существует замечательная зависимость: чем короче точка или тире, выше акустический тон модулирующий передатчик, тем шире область частот в спектре сигнала, тем менее селективен должен быть приемник, для того чтобы иметь возможность принять спектр предназначенного ему сигнала. Быстрая работа несовместима с большой селективностью. Я замечу, что соотношение, о котором только что была речь (его можно схематично сформулировать так: чем короче длится синусообразное колебание во времени, тем шире занимаемая им спектральная область, или более обще: точная локализация процесса во времени несовместима с узким спектром) играет большую роль и в других областях физики; например, в вопросе об изображениях объектов при помощи оптических аппаратов — вопросе, несомненно, очень важном, связанном с такими проблемами, как разрешающая сила оптических приборов и т. д. мы наталкиваемся в этих случаях на аналогичную ситуацию, но только относящуюся к пространственным, а не временным соотношениям.

Но совершенно принципиальное значение приобрел этот антагонизм межу точной локализацией процесса и шириной его спектра в современной волновой механике, которая, как я уже указал вначале, пропитана спектральной точкой зрения. Им обусловливается знаменитый принцип неопределенности Гейзенберга, считающийся сейчас краеугольным камнем нашего физического мировоззрения. К сожалению, я не могу остановиться на этом подробно и должен ограничиться этими немногими замечаниями. Скажу только следующее. Тому, кто проникся этим антагонизмом в радиотехнике, будет гораздо легче, чем другому, освоиться с этим основным положением волновой механики.

Но все это относится к линейным системам. Сейчас же, благодаря введению в приемные устройства нелинейных систем, мы располагаем другими возможностями.

Я полагаю, что принципиально антагонизм между селективностью и быстротой работы существует и здесь. Но здесь у нас есть целый ряд новых явлений, дающий надежду на возможность добиться более выгодных условий работы.

Я не буду перечислять те очень интересные явления, которые отличают существенным образом нелинейные системы от линейных. Вообще часть из них общеизвестна. Я укажу, например, на явление „захватывания", специфичное для нелинейных систем, которое распространяется и на акустические явления (этими вопросами заняты в последнее время К. Ф. Теодорчик и С. Э. Хайкин).

Но об одном применении нелинейных систем к приему я бы хотел сказать несколько слов. До сих пор даже при применении нелинейных систем пользовались, главным образом, обычным резонансом, правда, протекающим здесь иначе, чем в линейном случае, но все же не так уже сильно отличающимся, все же имеющим аналогичный характер, обусловливающий и характерные недостатки. Теоретическое исследование поведения нелинейных систем при воздействии внешней силы, исследование, в основе которого опять же лежат методы Пуанкаре, разработанные им для небесной механики, показало, что здесь можно ожидать, между прочим, и совсем других „резонансных" явлений, а именно следующего. Если взять нелинейную систему в определенном предсказываемом теорией режиме, то наблюдается такое явление. Пока частота сигнала существенно отлична от двойной частоты системы, ничего особенного не происходит. Система ведет себя приблизительно, как линейная. Но есть при соответствующем режиме приемника довольно узкая полоса частот в окрестности двойной частоты самой системы, обладающая тем свойством, что если частота сигнала в эту полосу попадает, то система становится неустойчивой и сразу вскакивает на половинную частоту сигнала. Это явление существенно отлично от обычного резонанса, наступающего, как известно, при равенстве частот. И здесь можно говорить о резонансных кривых — резонансных кривых второго рода, существенно отличных по всему характеру от обычных резонансных кривых. Вот это явление и может быть положено в основу приемного устройства.

В разработке этого явления Н. Д. Папалекси и мною, в экспериментальной части нашими сотрудниками были: Э. М. Рубчинский, М. М. Вайсбейн и И. М. Борушко, а в теоретической — нам помогали сотрудники

нашего института А. А. Андронов и А. А. Витт. Опыты вышли из стадии лабораторной разработки. Под непосредственным руководством Н. Д. Папалекси соответственные устройства были испробованы и испытаны в эксплоатации.

Оправдают ли себя эти приемные устройства, например, в смысле более эффективного освобождения от помех, что является одной из основных задач радиотехники, покажет будущее. Пока результаты довольно хорошие. В смысле освобождения от помех и селективности новое устройство, повидимому, имеет преимущество перед другими.

Я упомянул об этих опытах для того, чтобы закончить следующим. Я совершенно убежден в том, что введение нелинейной системы в приемные устройства, давшее уже очень много, таит в себе еще очень большие технические возможности. Разнообразие физических явлений здесь гораздо больше, чем в системах линейных. Очень возможно, что часть этих явлений, еще неиспользованных, можно использовать и получить ценные практические результаты. Физический интерес их для меня, конечно, давно уже несомненен.

Теперь, если вы, что очень естественно, пожелаете сделать количественный расчет некоторых вопросов, скажем, расчет того, каких здесь нужно ожидать преимуществ в смысле помех, то хотя качественно вы известный ответ получите, но при количественном расчете вы натыкаетесь на принципиальные затруднения. И одно из таких затруднений, которое встречается не только здесь, но и раньше, как только вы обращаетесь к нелинейному приему, заключается в следующем. Предположим, вы знаете, как влияет на прием сигнал станции, которую вы принимаете отдельно, знаете, как действует помеха отдельно. Но вас интересует не это, а интересует, что будет, когда и станция и помеха действуют одновременно. Так вот, при линейных системах, зная, как действует одна станция или одна помеха, вы знали, как действуют они совместно. Теперь же зная, как действует каждая часть, вы еще не можете сказать, что будет, когда будут действовать обе. Принцип суперпозиции здесь неприменим.

И тогда вы видите, что уже это одно достаточно, для того чтобы убедиться, что громадное количество, я думаю, ценнейших практических и физических экспериментальных возможностей покупается не очень дешевой ценой, оно покупается тем, что нарушается та стройная и цельная теоретическая концепция, которая у нас была до сих пор.

Здесь ведь дело обстоит так. В начальные времена радиотелеграфии, ее физическое и техническое содержание было сравнительно бедно. Она строилась в своей главной части на линейных системах. Но математическая сторона явлений и специально спектральный поход, который имел решающую роль, были прозрачны, ясны, цельны. Введение нелинейных

передатчиков усложнило картину. Но в оценке передаваемого сигнала и в приеме мы и по сие время мыслим главным образом спектральным методом, т. е. стоим на точке зрения, которая по существу адекватна линейным системам. Теперь с нарушением линейности и в приеме этот подход теряет почву, и нам приходится и в приеме отказаться, во всяком случае частично, от этой точки зрения. Спектральная точка зрения мало-помалу начинает себя изживать. А наряду с этим возникает и такой вопрос: является ли гармоническое колебание, вообще говоря, „элементарным" колебанием? Насколько целесообразно требовать от передатчика отсутствия обертонов и вообще периодичности и т. д. И конечно, это неприятно. Цельность теоретической картины всегда желательна. Мы находимся уже довольно долго в положении, когда с введением нелинейных систем, сильно отличающихся от линейных в передатчиках и приемниках, мы должны отказаться от большинства руководившими нами теоретических концепций. Как отнестись к этому — жалко это или не жалко? С одной стороны, да, но, с другой стороны, — вторжению нового препятствовать никогда нельзя. И моя точка зрения заключается в следующем. Можно, и я сам инстинктивно иногда склонен рассуждать приблизительно так: пока вещь мне теоретически неясна, я постараюсь ее избежать и постараюсь строить так свои системы, свои устройства, чтобы эти вещи, которые мне неясны, туда не путались. Тогда ясна вся картина, но я лишаю себя очень ценных возможностей. Нет, мне кажется правильный путь такой: искать новых теорий, новых точек зрения, не печалясь о том, что мы теряем вначале стройность. И мы принуждены теперь на этот путь стать.

Я считаю, что в колебательных вопросах, в теории колебаний современное положение вещей в смысле теоретическом довольно остро. Мы фактически теряем мало-помалу часть тех руководящих принципов, которыми мы руководились до сих пор. Но исход не в том, чтобы стремиться сузить эксперимент, а в том, чтобы расширить теорию. Я помню, как в прежние времена лица, занимавшиеся радиотелеграфией, знали: надо избегать железа. Это был лозунг, потому что о поведении железа в высоких частотах очень мало знали, считали железо загрязнением и поступали правильно, так как не знали действия его. Оно один раз мешало, другой раз помогало, лучше было бы от него избавиться. Теперь мы лучше знаем, как ведет себя железо, и уже теперь много схем работают с применением железа. Не то ли самое повторилось в газовых лампах, в газовых кенотронах: мы плохо знали разряды в газах и потому пришли к безгазовым лампам. Помните, был лозунг: газ всегда вредит. Я думаю, что теперь вряд ли кто-нибудь

станет это утверждать. По мере того как мы больше и больше изучаем явления, мы ими овладеваем и уже не боимся их, а напротив, считаем все более и более полезными.

Поэтому я считаю, что наша задача теперь, наряду с полным развертыванием экспериментальной работы, стараться найти и разрабатывать адекватный теоретический метод. Я думаю, что без помощи математиков нам не обойтись, и я думаю, что наша конференция даст толчок и позволит нам и в этом отношении продвигаться вперед. Позвольте мне на этом закончить.
