1930 г. Т. X. ВЫП. 4.

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

Физ101

О ПРИЧИННОЙ И СТАТИСТИЧЕСКОЙ ЗАКОНОМЕРНОСТИ В ФИЗИКЕ [1]

Р. Мизес, Берлин

[Проблемы философии и методологии физики занимали довольно видное место на 5 съезде германских физиков и математиков в Праге.

Доклад Ф. Франка „Что дают современные физические теории для теории познания" был посвящен вопросам гносеологии. Доклад Мизеса, перевод которого мы помещаем в настоящем номере нашего журнала, посвящен вопросу о физической закономерности.

Развитие квантовой механики по новому поставило вопрос о взаимоотношении динамической и статистической закономерности. Во весь рост стала проблема статистического метода, как особого способа выражения физических закономерностей. Необычайное развитие статистической физики привлекло внимание и к проблемам теории вероятностей. Все ясней становилась неудовлетворительность классического обоснования теории вероятностей, базировавшегося на субъективной концепции случайности.

В печатаемой статье Мизес делает попытку подойти к вопросу о соотношении статистической и динамической закономерности с точки зрения развитой им концепции теории вероятностей, базирующейся не на субъективном понимании случайности, а на понятии коллектива.

---

[1] Доклад, на V Съезде физиков и математиков в Праге, 16 сентября 1929 года. Naturwissenschaften 1930. Пер. Е. Л. Старокодамская.

Что касается до гносеологических воззрений Мизеса, то в основном он примыкает к Ф. Франку, стоящему на махистских позициях.

Неудовлетворительность гносеологических воззрений Мизеса не могла не отразиться на трактовке вопроса о закономерности в физике.

По кардинальному вопросу о причинности в физике Мизес хотя и не становится на крайнюю точку зрения, защищаемую Гейзенбергом и Дираком, отрицающую элементарную обусловленность физических явлений, но все же не дает достаточно четкого ответа на этот вопрос, хотя и делает попытку показать, что понятие статистической закономерности не исключает понятия причинности.

Неприемлемо также рассуждение Мизеса о соотношении физических и философских понятий, в сущности повторяющее мысль Франка о „школьной и позитивной философии".

Здоровое зерно протеста против философской догматики и натурфилософских фантазий совершенно обесценивается грубым прагматизмом в разрешении этой проблемы. Если стать на точку зрения Мизеса и допустить, что вся задача философии состоит только в том, чтобы приспосабливаться к тем решениям вопроса, которые дает физика, то совершенно непонятно, зачем вообще нужно философское рассмотрение вопроса и зачем философские проблемы обсуждаются на съезде физиков. Все это происходит потому, что Мизес не делает различия между философской догматикой и истинной философией.

Неудовлетворительность и невыдержанность философской концепции Мизеса приводят его к метафизической трактовке понятия предела и предельного случая, которые играют большую роль в соотношении неопределенности.

Мизес не ставит вопроса о соотношении бесконечного приближения к данному пределу и о пределе, как данном сразу в каждом единичном акте наблюдения. Поэтому не находит правильного решения проблема делимости и неделимости, имеющая большое значение к соотношению неопределенности.

Несмотря на все эти недостатки, статья Мизеса представляет большой интерес как попытка поставить вопрос о соотношении статистической и динамической закономерности с новой точки зрения, в противоположность теориям, видящим единственное решение вопроса в изгнании понятия причинности из физики. *Б. Г.*

В самое недавнее время теоретическая физика обнаружила успех в двух очень различных, почти противоположных, направлениях.

С одной стороны, общая теория поля Эйнштейна стремится приблизить к завершению классическую физику в самой строгой ее форме, при чем она подвигает на шаг вперед применение дифференциальных уравнений в смысле их общности и экономии пользования. В теории же атома утвердилось представление, решительнее, чем когда-либо подчеркивающее шаткость классической точки зрения и неизбежность статистического взгляда, основанного на теории вероятностей, — впрочем этому предшествовал короткий промежуток, когда в волновом уравнении Шредингера видели возврат к детерминизму. В новейшей атомной физике играют фундаментальную роль образы совершенно нового рода, как „облако вероятностей“; они возбуждают недоверчивый интерес у философов, которые видят, что находится в опасности один из важнейших их принципов, закон причинности, казавшийся им основой всякого знания. Поэтому уместно было бы подойти к рассмотрению вопроса об отношении между причинным и статистическим объяснением природы с точки зрения той дисциплины, которая уже более столетия занимается статистическими, и, следовательно, не вполне детерминированными явлениями — теории вероятностей. Предпосылаю несколько замечаний, не определяемых непосредственно теорией вероятностей.

1. Закон причинности, детерминизм, атомистика

Несколько слов о так называемом законе причинности. Рассматривая те неясные и изменчивые определения, какие получал этот принцип в различные периоды у руководящих философов, следует притти к заключению, что стать в противоречие с ним нет ни опасности, ни пожалуй, и возможности. Если в первом издании „Критики чистого разума" значится: „Все, что происходит (начинает существовать) предполагает нечто, после чего оно наступает по некоторому правилу", или во втором издании эта формулировка заменяется следующей: „Все изменения происходят по закону связи причины и действия", — то оказывается неслишком трудным облечь в подходящую к этому „принципу" форму л ю б ы е, в том числе и статистические, закономерности.

Все зависит от того, что в данном случае обозначается, как изменение или как событие, и что понимают под причиной и действием.

Когда Г а л и л е й открыл путем наблюдения закон инерции, тогдашнему представлению о причинности, конечно, противоречило, что длительное перемещение может происходить само по себе, без продолжающей действовать причины. Но после того, как поколения физиков признали закон инерции со всеми его следствиями за пригодную основу для систематического описания явлений движения, к этому присоединился и философский образ мышления. Теперь закон инерции, по взглядам всех философов, не только находится в согласии с принципом причинности, но представляет по Ш о п е н г а у э р у и многим другим неуклонное, необходимое следствие последнего: действующая причина необходима лишь для изменения состояния скорости, а не места.

Если бы по наблюдениям физиков оказалось, что только третьи производственные координат по времени определяются независимыми обстоятельствами, которые тогда назывались бы силами, — то без сомнения считали

бы результатом или даже необходимым следствием принципа причинности то положение, что тело, предоставленное само себе, движется по параболе без воздействия внешних причин.

Для положений статистики также можно найти такие формы, которые соответствуют закону причины и действия. Если при продолжительной игре двумя костями дважды шесть выходит в среднем один раз из 36, то это явление имеет ту „причину", что в среднем каждая сторона обоих костей выпадает одинаково часто; а „причина" всякого заметного отклонения от частоты 1/36 заключалась бы в том, что та или другая кость неправильна. Или если шары, падающие по доске Гальтона, показывают кривую Гаусса, то „причина" этого заключается в том, что отдельный шар, бросаемый достаточно часто, с одинаковой частотой проходит вправо и влево от гвоздя. Конечно, на это можно возразить, что для единичного события при игре в кости или на доске Гальтона, причина отсутствует или не может быть здесь указана, или же что отклонения при малых сериях нельзя свести к причинам. Но ведь и в принципе инерции отказались в конце концов от причины изменения места, которую требовало наивное представление, и довольствуются лишь причиной для объяснения изменения скорости. Таким образом, мне кажется уместным следующий взгляд: как только физика (или вообще естествознание, основанное на продолжающихся наблюдениях) вполне усвоит статистический способ рассуждения и умозаключения и признает его необходимым для себя вспомогательным средством, то через некоторое время ни у кого уже не будет впечатления, что здесь не выполнено какое-нибудь требование логики или не удовлетворена какая-либо философская потребность. Одним словом: принцип причинности изменчив и подчиняется тому, чего требует физика.

Разумеется, это не значит, что не существует никакой разницы между обоими способами описания природы, т. е. между физикой дифференциальных уравнений с одной стороны и физической с другой. Но было бы просто мало

смысла полагать разницу в том, что при одном способе принцип причинности выполняется, а при другом — нарушается. Более правильно называть, как обычно, классические положения — детерминистическими, а статистическую теорию — индетерминизмом. Однако, значительные трудности встречаются сейчас же при попытке объяснить в общей, но достаточно точной форме, в чем собственно состоит сущность и притязания детерминизма. Что именно выполняет знаменитый Лапласовский демон, этот чиновник для поручений при детерминизме, властелин всех математических затруднений? Если мы ограничимся сначала вопросами механики точки, лучше сказать — механики малых твердых тел, то он здесь выполняет следующую задачу. Даны для всех точек массы и точные значения начального положения и начальной скорости, а также силы, действующие на эти точки в течение известного промежутка времени; отсюда должны быть вычислены с любой степенью точности конечные положения и конечные скорости всех тел. Я не хочу сейчас входить в обсуждение коварного значения дважды употребленного слова „точный" — к этому я вернусь позже, — а также говорить о трудности определения начального состояния, ибо по моему представлению истинные границы дееспособности Лапласовского демона даны надлежащим значением *сил*, которые находятся в правой части уравнений Ньютона.

Лаплас ведь думал прежде всего лишь о движении небесных тел, для которых и была в первую очередь создана механика *Ньютона*: здесь или в Галилеевской проблеме падения камня на поверхность земли не встречается никакого затруднения относительно сил, которые исчерпываются простой формулой тяготения. Но если брать камень все меньше и меньше и свести его до размеров хотя бы броуновской частицы, то, чтобы хоть несколько согласовать его падение с законами Галилея или вообще усмотреть в его движении какую-нибудь закономерность, — нам нужно достичь большого совершенства уже в получении вакуума, в котором совершается движение. Что произойдет, если совершенствование вакуума будет отставать от уменьшения

размеров падающего тела? Тогда получат значение побочные обстоятельства: действия сил, непредвиденно изменяющихся по направлению и величине и происходящих от окружающих частиц воздуха; благодаря им, движение исследуемого тела окажется совершенно неправильным. Никто не скажет, что это движение противоречит принципу Ньютона. Но для того, чтобы применить Ньютоновское дифференциальное уравнение, чтобы иметь его как пригодное средство для описания движения, — следовало бы знать все чрезвычайно запутанные силы, воздействующие на тело; следовало бы ввести их в уравнение как функции места времени и т. д. Между тем, очевидно, что они познаются лишь, как совокупность (в статистическом смысле). Можно также сказать, что здесь легче установить самый ход действия, чем отдельные мгновенные силы, его определяющие и вызванные током воздуха; что в некотором смысле многообразие силовых законов больше или во всяком случае не меньше, чем многообразие форм движения. Это решительный момент: Ньютоновская механика годится для причинного объяснения природы лишь до тех пор, пока сравнительно простые силовые законы имеют своим следствием более сложные процессы движения, — так же, как из простого принципа тяготения вытекают все движения светил. „Объяснить“ именно значит: свести к более простому. Не утрачивая своей справедливости, механика точки перестает быть действительным орудием детерминистической физики, как только становится труднее установить данные задачи, нежели определить то, что должно представлять ее решение, т. е. ее результат. И то же, что при падении малых частиц, происходит во многих других случаях, когда дело вовсе не всегда касается очень небольших исследуемых тел. Вспомним об уже упомянутой доске Гальтона. Никто не захочет допустить, что движение отдельных шариков не следует Ньютоновскому закону движения. Но что же говорит этот закон для того мгновения, когда шарик находится непосредственно над одним из гвоздей и надо решить, побежит ли он дальше направо или налево? — что движение последует по

той стороне, куда даст перевес ничтожное дуновение воздуха или минимальное упругое последствие. Этим, однако, не сказано решительно ничего о действительном дальнейшем движении, так как у нас нет никакого средства предвидеть направление ближайшего дуновения воздуха и т. д.

Можно возразить, что в данном случае неправильно ограничиваться механикой точки и что Лапласовский демон господствует также в механике непрерывной среды, равно и гидромеханике, и в механике упругой среды. Здесь он также может расширить область применения механики путем присоединения соответствующих частных дифференциальных уравнений; поэтому ему не понадобится применять сложные силовые законы. Однако, это не спасение. Ибо тому, что в механике точки является силами, в механике непрерывных тел соответствуют пограничные условия. Эта механика дает много, пока можно бывает выводить сложные формы движения из грубо известных пограничных условий. Но истолковать в этом смысле подлинно детерминистически можно лишь известные ограниченные случаи течения и только определенные вопросы механики твердых тел. Для столь тонких подробностей, какие подлежат разрешению хотя бы в случае гальтоновской доски или при падении очень малых частиц, решающими являются опять-таки пограничные условия, как например, мельчайшие, незаметные глазу, шероховатости поверхностей, ограничивающих течение. Поэтому и здесь не может быть речи о сведении более сложного к более простому. Я уже однажды имел случай изложить (в докладе на собрании в Иене восемь лет тому назад) [1] и не хочу здесь повторяться, что как гидромеханика, так и механика твердых тел, приводят к отношениям, познаваемым лишь статистически, как только мы выходим за пределы элементарной постановки вопросов. Я давно уже пришел к убеждению, что решающие проблемы микроскопической гидродинамики (как проблема турбулентности) разрешимы только в статистическом смысле — может быть даже в связи с новыми представле-

[1] Naturwiss., 1922,25; ZS angew. Math. u. Mech., 1.425, 1921.

ниями о параллелизме между процессами континуума и точки. Совершенно то же относится к явлениям электрическим и магнитным, где подобные затруднения создаются с одной стороны пограничными условиями, с другой — так называемыми материальными константами в уравнении поля.

Результат этих соображений можно выразить так; детерминистические положения классической физики могут быть сохранены чисто формально или, вернее, в идее во всей области непосредственно наблюдаемых явлений; но во многих случаях, которые можно подразделить с различных точек зрения, они как бы идут на холостом ходу; они теряют характер причинного объяснения и ничего больше не приносят к познанию, описанию и предсказыванию явления. Философская оценка этого обстоятельства окажется различной, смотря по тому, какое положение будет занято по отношению к основным понятиям теоретической физики. Кто в пондермоторных силах, в плотностях, в диэлектрических постоянных видит вещи, существующие независимо от задачи описания природы, — тот будет полагать детерминизм принципиально незыблемым и лишь практически исключенным. Для того же, кто представляет себя эти образы лишь как вспомогательное средство, введенное через дифференциальные уравнения и вместе с ними служащие лишь для лучшей ориентировки в мире явлений, — для того совпадают границы применимости детерминизма и границы его самого.

До сих пор я говорил исключительно о движениях, доступных „непосредственному наблюдению", о движении видимых масс, являющихся обычными объектами классической механики. Конечно, уже давно было замечено, что в области явлений, происходящих с „земными" телами, недостаточно ограничиваться только простыми закономерностями, как в случае небесной механики. И Лаплас думал уже при создании своего „демона" о том, что последнему при разрешении его задачи на земле встретились бы совершенно другие трудности, чем в случае небесных тел, и у него есть намеки, в каком направлении следует искать выход. Проблемы, непосредственно нас окружающие, вовсе не

являются в смысле физики „чистыми“ проблемами; их следует сначала свести к этим последним. Средством для этого является атомистика, допущение, что существуют мельчайшие частицы, поведение которых следует простым закономерностям; причем менее наглядные макроскопические явления происходят только вследствие наложения и перекрытия таких простейших процессов. Важно помнить, что исходным пунктом всей рациональной атомистики, по крайней мере со времен Даниила Бернулли (1738 г.), была невозможность объяснить классическими детерминистическими положениями всего многообразия земных явлений. Нельзя было не видеть, что Ньютоновская механика в состоянии описать земные явления лишь если она соединена с чрезвычайным многообразием силовых законов; спасения от этого искали в попытке построить маленький мир, окружающий нас, из кирпичей, каждый из которых был похож на великий небесный мир.

Нет сомнения, что такое представление в совершенно необычайной мере увеличило наши физические знания и способствовало их развитию вплоть до новейшего времени. Лишь одного оно не сделало: не спасло детерминизма, и даже вообще не стало для него никакой опорой. Все действительные успехи физической атомистики, начиная с Больцмана, достигнуты исключительно благодаря тому, что к положениям классической физики прибавили статистические соображения.

Конечно, можно вывести из дифференциальных уравнений классической физики определенные утверждения относительно множества систем, относительно совокупности, без того, чтобы были известны или включены в вычисления все свойства отдельных систем. Подобными утверждениями являются, например, теоремы о движении центра тяжести и площадей, уравнение энергии и т. п. Они вытекают непосредственно из дифференциальных уравнений, справедливых для отдельных систем, и конечно, полностью принадлежат детерминистической физике. Первоначальной идеей атомистики была и та, что к желательным выводам можно притти путем подобного рода соображений без доба-

вления дальнейших гипотез. Это показывает, например, попытка Больцманна вывести закон распределения скоростей Максвелла из законов удара упругих шаров. Однако, давно известно, что такой способ заключения невозможен: без добавления типично статистических понятий, как молекулярный беспорядок, равномерное распределение известных признаков, а также чисто теоретико-вероятностных рассуждений — нельзя притти ни к каким иным заключениям, кроме ранее упомянутых положений механики. Переход от физики отдельного элементарного тела — атома, протона, электрона и т. д. к макроскопическому явлению совершается только при посредстве статистики.

2. Основные понятия статистики.

Здесь я должен немного отклониться, чтобы развить некоторые основные статистические понятия, необходимые для понимания обсуждаемых вопросов. Всякий знает, что там, где речь идет о статистике, должны быть осуществлены два предположения. Одно заключается в том, что дело должно итти о множестве, о большом числе отдельных явлений или отдельных процессов — применение слова „вероятно" к однократному, неповторяющемуся событию лежит вне рациональной теории вероятностей; второе предположение это то, что физик обычно характеризует выражением „молекулярный беспорядок" и о чем можно говорить скорее, как об отсутствии порядка. Оба основных обстоятельства нуждаются в большем уточнении, а это будет достигнуто лучше всего на конкретном примере. Вспомним, таким образом, прежде всего о статистике результатов игры в кости. Отдельное событие состоит здесь в однократном метании кости, которое заканчивается сосчитыванием оказавшихся наверху очков; совокупность игры будет характеризоваться последовательностью целых чисел, лежащих между 1 и 6. Теперь первая идеализация, которую мы должны принять, чтобы получить понятие, пригодное для теоретического обоснования, это то, что мы представляем себе эту последовательность бесконечной, никогда не

обрывающейся. Если среди первых n метаний единица вышла n_1 раз, двойка — n_2 раз и т. д., то мы строим частные $n_1 : n$, $n_2 : n$ и принимаем затем, что эти частные, так называемые относительные частоты, стремятся к определенным пределам, если число наблюдений n будет становиться все больше и больше. В таком случае пределы обозначают кратко вероятностями появления единицы, двойки и т. д. в рассматриваемой серии игр.

Допущение неограниченно продолжительной серии опытов является необходимым для построения теории вероятностей. Нельзя смущаться мыслью, что в очень многих, даже в большинстве практических задач, мы имеем дело с сериями совершенно определенной протяженности, например, с заданным числом молекул и т. п. Если, оставаясь при игре в кости, мы спросим, какова вероятность того, что в последовательности из 100 метаний один раз появится последовательность чисел от 1 до 6 в натуральном порядке,— то это будет лишь несколько более сложный случай, чем рассмотренный ранее. Здесь отдельным событием является не однократное, но стократное метание кости, а предметом наблюдения — появление или непоявление означенной последовательности чисел при одном таком стократном метании. Но о вероятности мы можем говорить только в том случае, если мы представляем себе весь процесс стократного метания и наблюдения могущим повторяться неограниченно долго. Утверждение, которое мы делаем на основе теории вероятностей, может относиться только к тому, что случится при бесконечном повторении процесса. То, что тем не менее удается получать выводы большой практической годности, зависит от особой формы утверждения.

Второе положение относится к отсутствию порядка или молекулярному беспорядку. Само собой понятно, что последний фундаментально врезается в строение статистической теории; точно выразить это также не трудно, если мы сначала опять обратимся к примеру простой последовательности игры в кости. Представим игрока, который поставил на число 6 и, как говорится, имеет шанс или

вид на выигрыш, равный вероятности числа 6 и равный, следовательно, пределу отношения $n_6 : n$, что, как известно, составляет при правильной кости $\frac{1}{6}$. Если бы ряд бросаний обнаружил какую-нибудь закономерность, например, такую, что каждое десятое бросание регулярно не давало бы 6, или что шестерка никогда не выходила бы больше трех раз кряду, и т. п., то играющий был бы в состоянии улучшить свои шансы посредством выбора тех игр, при которых он делает ставку. Он мог бы, например, взять за правило пропускать каждое десятое метание кости, или пропускать то, которое следует за троекратным выходом шестерки и т. д. Признак отсутствия правила состоит в том, что подобного улучшения шансов посредством выбора не бывает. Мы даем следующую формулировку этому принципу, который называют *принципом отсутствия системы игры* и который в некотором отношении может стоять рядом с принципом невозможности perpetuum mobile: каким бы способом мы ни устанавливали выбор между играми, или в более общем смысле — между элементами совокупности, — если только играют достаточно долго, то *шанс*, а следовательно, и предел относительной частоты выхода шестерки в избранном ряду, остается *строго равным* пределу для всего ряда в целом.

Конечно, невозможно проверить осуществимость этого предположения на каком-либо конкретном случае. Принципиально невозможно продолжить ряд опытов до бесконечности и также невозможно исследовать „все“ правила выбора, не изменяют ли они шансы. Совокупность, удовлетворяющую обоим требованиям — существованию пределов и в отношении правил выбора — мы обозначим кратко „коллектив“. Как видно, это не эмпирический предмет, но такое же идеализированное отвлеченное понятие, как, например, понятие шара в геометрии или твердого тела в механике. Точно также невозможно установить конечным числом измерений, является ли данное тело шаром или нет. Хорошо известно, что мы можем построить разумную теорию только на основании подобных идеализированных

понятий и что по отношению к представителям точного естествознания здесь не требуется более строгого обоснования.

Теперь уже не трудно более точно формулировать, в чем состоят задачи, разрешение которых доступно теории вероятностей, иначе говоря, статистическая теория ряда явлений. Мы называем *распределением* в коллективе совокупность существующих внутри него вероятностей, например, те шесть дробей, которые, как пределы относительных частот, соответствуют сторонам произвольной кости, правильной или неправильной.

Затем можно установить, что бывают коллективы, связанные между собою коллективы, распределения которых определяют друг друга. Например, если известны распределения, относящиеся к двум отдельным костям, то можно вычислить вероятности, которые вообще существуют для совместной игры обеими костями. Итак, можно сказать: исключительная задача теории вероятностей состоит в том, чтобы вычислить из данных распределений внутри известного исходного коллектива распределения в выведенных отсюда коллективах. Это положение, вполне очерчивающее свойство теории вероятности, существенно ограничивает ее в двух направлениях: во-первых, можно делать заключения о неизвестной вероятности *только по данной* вероятности и во-вторых, результат вычисления всегда может быть лишь опять *вероятностью*, можно утверждать что-нибудь только о пределе при неограниченном повторении опыта. В других отраслях точного естествознания подобные определения давно известны; известно, что Ньютоновская механика позволяет найти искомые конечные скорости только по данным начальным скоростям, — в теории вероятностей к сожалению еще часто встречается такая постановка вопросов, которая обнаруживает полную неясность в отношении необходимых данных задачи и такую же неясность в отношении возможных для получения выводов.

Другая неясность, всегда возникающая, когда речь идет о статистике или вероятности, относится к смешению *неточности* утверждения со *статистическим* утверждением. Исходный пункт всякой статистики мы можем

видеть только в наличии коллектива, состоящего, но только что данному определению, из бесконечной последовательности наблюдений, точных самих по себе. После каждой игры костями вполне точно и однозначно наблюдают, которое из 6 чисел от 1 до 6 появилось, и лишь совокупность наблюдений дает до некоторой степени „размытую" картину со средним значением или математическим ожиданием 3,5 (при „правильной" кости) и „рассеянию", которое по обычному определению здесь равно 2,92 при равной вероятности шести сторон. Как мы увидим, не иначе обстоит дело и в тех случаях, которые ближе примыкают к физике. Во всяком случае, статистика может начаться лишь тогда, когда имеются налицо однозначные и четкие отдельные наблюдения. Конечно, это не значит, что, например, положение стрелки должно быть отсчитано с произвольным количеством десятичных знаков, — к этому вопросу мы еще вернемся подробно.

Теперь нужно сказать еще об одной определенной трудности — это последний пункт чисто математической подготовки — о трудности, в течение долгого времени вносившей большую неясность в физическую статистику; — трудности, преодоление которой — необходимое условие для вполне безупречной теории. Речь идет о вопросе, возможно ли и каким образом подвергнуть статистическому способу рассмотрения временной ход явлений в системе, предоставленной самой себе. Легко понять, что под этим подразумевается, по следующему примеру из теории броуновского движения. Это известная экспериментальная задача, состоящая в установлении числа броуновских частиц в оптически изолированном участке пространства, за определенные промежутки времени. Для этого расчитывают по известной формуле Пуассона вероятность w_x числа частиц x, при среднем значении a, равную $a^x e^{-a} : x!$ и сравнивают ее с относительной частотой наступления x. Однако, с другой стороны ясно, что последовательность этих наблюдений безусловно не образует коллектива, и что, строго говоря, здесь не может итти речь о вероятности, потому что не выполнено предположение об отсутствии закономерности. Если, например,

наблюденное число частиц колеблется около среднего значения 1,5 между 0 и 7, то никогда не следует непосредственно за 1 или 2 число 6 или 7; по природе вещей изменения происходят не так внезапно. Следовательно, если бы игрок хотел бы ставить ставку на появление числа 7, то с его стороны было бы благоразумно делать это не раньше, чем появится 5 или 6 и ни в коем случае не после 0 или 1; при таком выборе шансы на выигрыш заметно повысились бы. Подобный случай, хотя и не столь очевидный, имеет место всегда когда пытаются приложить теорию вероятностей к естественно протекающему процессу в замкнутой системе, не искажаемой вследствие наблюдения. Например, распределение скоростей в газе хотя будет изменяться вследствие столкновений прерывно в математическом смысле, однако, вряд ли следует ожидать произвольно больших скачков без промежуточных ступеней. В случае броуновского движения обычно говорят о „последействии вероятности" (Смолуховский), не ставя при этом задачу во всю ширину. Потому что здесь мы сталкиваемся ни с чем иным, как с эрготической проблемой, т. е. с вопросом, насколько мы вправе распространять на временные процессы, на так называемые временные совокупности, значения вероятностей, полученные из комбинаторных соображений. Здесь я лишь вкратце укажу, что эта задача чисто математическая и разрешимая до конца.

Именно и из простой игры в кости можно вывести последовательность чисел, соответствующую типу ряда чисел частиц броуновского движения. Здесь я выпишу несколько чисел, которые можно встретить при последовательном бросании одной кости: 2, 1, 6, 3, 3, 1, 5, 2, 4, 5, 4, 1, 6, 6 и т. д. Они обладают свойством отсутствия правила, т. е. по какому бы правилу мы ни производили отбор чисел из всего ряда, — если ряд продолжен достаточно, то для любых чисел из выбранной последовательности окажется та же самая частота, которая существует в целой последовательности. Теперь я образую из написанного ряда другой ряд, складывая между собой каждые два соседние числа первого ряда: $2+1=3$, $1+6=7$, $6+3=9$ и т. д. 6, 4, 6, 7, 6, 9, 9,

5, 7, 12. Числа этого ряда лежат между 2 и 12, совершенно так же, как число очков при игре с двумя костями. Но отсутствие закономерности нарушено вполне определенным образом: например, никогда 12 не следует за 4, 10 за тремя и т. п. и этим новая последовательность чисел существенно отличается от коллектива, образованного наблюдениями суммы чисел двух костей.

Само собой понятно, что закономерности, интересующие нас во вновь образованном ряду чисел, можно вывести математически из свойств исходного коллектива. Идея та, что в новом числовом ряду берут группу элементов, скажем n элементов и рассматривают их, как элемент некоторого нового коллектива. В этом коллективе в качестве признаков, вероятности которых требуется найти, мы полагаем частоту появления в группе какого-нибудь числа, например, семерки. Применяя обычное правило счета, мы тогда найдем вероятность того, что, например, в группе из 1000 суммовых чисел находится ровно 150 семерок, т. е. что семерки обладают относительно частотою 0,15. Замечательным результатом счета является следующее. При большом n оказывается „почти достоверным“ (т. е. имеет вероятность, близкую к 1), что относительная частота семерки внутри группы очень близка тому значению, какое расчитывается при игре с двумя костями, как вероятность числа очков семь. Здесь открыто представлено полное математическое решение эрготической задачи, именно законности переноса комбинаторно исчисленных вероятностей на временные процессы, которые сами по себе уже не являются коллективами. С некоторой неточностью можно сказать, что на временной процесс можно перенести до известной степени закон больших чисел, — хотя и не исходное понятие вероятности. Связь с физической задачей станет яснее, если учесть, что непосредственно даются вероятности изменения разностей двух последовательных чисел. (Разности лежат между 0 и 5, образуют коллектив и имеют последовательно вероятности $\frac{6}{36}, \frac{10}{36}, \frac{8}{36}$ и т. д.). По существу так же дело обстоит у двух физических задач, упо-

мянутых выше: вероятности изменения или перехода даны или предполагаются данными и из них нужно определить статистику хода процесса. Одно очень общее положение гласит следующим образом, в формулировке, принятой в статистической механике: если мгновенное состояние механической системы изображается точкой в фазовом пространстве и координаты выбраны так, что поверхность энергии изображается сферой, и если допустить, что система испытывает скачками случайные изменения, так что каждой величине скачка, независимо от направления, свойственна определенная вероятность, — то с вероятностью, близкою к 1, следует ждать, что через некоторое время вся поверхность энергии с равномерной плотностью покроется фазовыми точками, пройденными системой. Это положение, математически доказуемое, полностью заменяет так называемую эрготическую гипотезу, которая утверждает, как известно, что кривая траектории системы — мыслимая непрерывно — покрывает всю поверхность энергии. Вместо этого определенного, но весьма гипотетического утверждения, выступает в рамках рациональной теории вероятностей доказуемое утверждение, которое, правда, формулирует лишь статистическое данное.

3. Приложение к вопросам теоретической физики

Теперь я перехожу к тому, чтобы применить к трактовке физических вопросов некоторые следствия, вытекающие из уточнения основных статистических понятий. Во главе я ставлю положение, что каждое утверждение физики должно выражать фактическое событие, доступное наблюдению и действительной экспериментальной проверке. При этом решающим свойством наблюдений является их повторимость. Эксперимент должен быть описан так, чтобы его можно было повторять как угодно часто, в разное время, в разных местах и различными лицами. В этом понятии повторимости уже заключены трудности. Ибо безусловно, полная совокупность всех физических

процессов так же единственна, как история человечества. Температурная кривая какой-либо местности не представляет чистой периодичности, ни одна гроза не протекает совершенно так, как предыдущая, — и в строгом смысле ни один эксперимент не может быть независим от совершающегося в более отдаленном окружении. Но в том то и смысл научного способа рассмотрения, что в единственном совокупном процессе отыскиваются небольшие события, ограниченные во времени и в пространстве, которые с известным приближением повторяются. Только и такие приблизительно повторимые события являются предметом рассмотрения физики.

Здесь следует несколько развить понятие приближенности. Вообще результат некоторого физического наблюдения получается путем отсчета показания стрелки и т. п. Разумеется, отсчет может быть произведен лишь с ограниченной степенью точности, и например, никогда нельзя решить экспериментально, выражается ли некоторая величина иррациональным числом или нет. Можно утверждать без ограничения общности, что результат наблюдения всегда есть только целое число, именно число наименьших еще доступных измерению единиц. Числа могут быть большими, если возможно отсчитать или оценить много точек, но так как это конечные целые числа, то по форме результаты показания стрелки не отличаются от показаний числа очков при бросании костей или числа частиц у броуновского движения. Что же значит, что процесс приблизительно повторяется? Очевидно только то, что если многократно осуществлять некоторую предписанную систему наблюдения, то результатами окажутся целые числа, более или менее близкие между собой; только при очень грубом выборе единиц измерения может случиться, что числа не будут разниться.

Обстоятельство, что все более точные наблюдения связаны с подобными колебаниями, разумеется, не ускользнуло от внимания физиков даже в эпоху расцвета детерминизма; однако, его рассматривали как нечто второстепенное, как привходящее обстоятельство, не имеющее ничего общего с основами познания природы. Тем не менее была произведена математи-

ческая обработка „неточностей", так называемая теория погрешностей Гаусса, которую мы непосредственно можем принять. Первая и наиболее существенная предпосылка теории погрешностей, — идущая гораздо дальше количественно специализованных допущений, приводящих к гауссовой функции — может быть высказана так, пользуясь введенными нами понятиями: результаты повторных измерений определенной физической величины, при неизменной экспериментальной установке, образуют коллектив. После того, что было сказано раньше, в этих словах содержатся два точных утверждения. Во-первых утверждается, что при продолжении ряда опытов результат каждого отдельного измерения обладает определенной предельной частотой; во-вторых, что результаты следуют друг за другом без какой-либо закономерности; иными словами, что произвольный выбор их (в смысле, разъясненном выше), не изменит эти предельные частоты. Совокупность предельных значений, соответствующих отдельным возможным событиям, или вероятностей, образует распределение внутри коллектива. (Как известно, в теории погрешностей принято вводить тем или иным способом гипотезы, дающие распределению вполне определенную, однозначную форму, — форму гауссовой функции, — однако, в наших рассуждениях мы этого не рассматриваем). Важно только одно: каждому распределению соответствует некоторое среднее значение, вычисляемое известным способом обозначаемое нами также как величину математического ожидания. Если же вспомнить, что посредством объекта измерения и измерительной установки определяется не одно единственное число, а коллектив, бесконечная последовательность чисел определенного вида, то станет ясным дальнейшее утверждение: истинной величиной измерения называется математическое ожидание соответствующего коллектива. Это число, зависящее от объекта измерения, связанного с измерительным прибором.

Теперь мы уже в состоянии обсудить притязания теории детерминизма и ее отличительные признаки. Из дифференциального уравнения движения точки можно, например, за-

ключить, что рассматриваемая точка должна достигнуть определенного места через то или иное время t. Это число t можно вычислить из уравнения с произвольной точностью, всегда до сколько-то десятичных знаков, — если допустить, что оно сделано независимым от численных значений физических констант, благодаря соответствующему исключению и выбору единиц измерения. Наивное восприятие детерминизма состоит в том, что числу, высчитанному таким образом, приписывается реальность, непосредственно доказуемая определенным экспериментом. Мы уже знаем, что такой однозначности не существует, что предписыванием некоторого повторимого эксперимента определяется не одно число, а бесконечная последовательность чисел вообще различных. Чтобы вообще дать разумный смысл понятию детерминистического события, мы должны применить понятия: коллектив, распределение, математическое ожидание распределения, и тогда сможем сказать: теория подтверждается опытом, если совпадут вычисленное значение и „истинное значение измерения“, т. е. математическое ожидание, определяемое объектом измерения и измерительной установкой и получаемое, строго говоря, лишь после бесконечно большого числа измерений. Разумеется, при этом уже должно быть учтено то, что в теории погрешностей называется „систематической“ ошибкой, — посредством физической теории процесса, включающей и измерительный процесс.

С таким толкованием роли детерминистических событий убежденные сторонники идеи причинности, пожалуй, не согласятся. В действительности они, в большей или меньшей степени сознательно, прибавляют к только что изложенному положению дела еще следующее произвольное допущение, гласящее приблизительно так: каждому теоретическому событию соответствует бесконечная последовательность различных опытных установок с возрастающей точностью, так что при измерении в постоянных единицах, рассеяния соответствующих распределений становятся меньше и меньше и в конце концов стремятся к нулю. Ясно, что это допущение представляет собой далекую экстраполяцию за пределы

фактически доступного наблюдению; однако, допущение это должно быть отклонено, не только потому, что всюду, где бы мы ни говорили о предельных значениях, мы подобным же образом выходим из области наблюдаемого. Но допущение неограниченного повышения точности непосредственно противоречит каждой атомной гипотезе. Если не существует неограниченной делимости всех физических величин, то и тонкость измерения нельзя произвольно повысить. В макроскопической области можно было бы самое большее сказать, что рассеяние наблюдений можно принципиально понизить до атомных размеров. Но какой смысл говорить о точном выполнении уравнений, о точном совпадении теории и наблюдения, когда система дифференциальных уравнений применяется к атомам, электронам и т. п. Пришлось бы вообразить, что существуют измерительные приборы, чувствительность которых превосходит даже атомные размеры, и, очевидно, этим было бы отвергнуто всякое физическое содержание. На необходимость конкретно описать атомный эксперимент в последнее время особенно указывал Гейзенберг, чем вновь возродил дискуссию о причинности и статистике.

Я еще на мгновение задержусь в области макроскопической, чтобы установить связь между только что сказанным и более ранними замечаниями о детерминизме. Мы установили, что детерминистическая механика точки приложима полностью, например, к движению небесных тел, но что в других случаях, например, в случае гальтоновой доски или движения малых частиц в воздухе, она оказывается бессильной, если не формально, то по существу. Это утверждение, именно первую его часть, теперь необходимо ограничить, учитывая, что о теории можно судить только в связи с наблюдениями, служащими для ее проверки. Только пока измерительный прибор настолько груб, что может служить подходящим объектом для детерминистической физики, он мог бы привести к однозначному событию и можно говорить о приложимости детерминизма. Однако, как только измерительный прибор усовершенствуется, перед ним встанут те же трудности, какие мы раньше установили для

движения малых частиц, и результатом наблюдения явится коллектив; утверждение первоначальной детерминистической теории будет иметь лишь статистическое значение, как высказывание о математическом ожидании определенных коллективов. Итак получается двойное ограничение дееспособности классической физики дифференциальных уравнений: во-первых, она действительно приложима только к известной области макроскопических событий, и во-вторых, в этой области она имеет подлинно детерминистический характер только при ограничении достаточно грубыми измерениями. Возвращаясь к образу демона Лапласа, мы должны были бы сказать: он может разрешить лишь малую часть своей задачи и результат следует тогда рассматривать лишь как приближение; если задача выйдет за пределы некоторой отмеренной области, она становится бессмысленной; если стремиться повысить точность, то результат вычислений даст лишь математическое ожидание в пределах коллектива.

Таким образом статистический метод рассмотрения оказывается неизбежным в двояком отношении. Однако, необходимо подчеркнуть: мы никогда не говорим о противоречии между рядом наблюдений и классической теорией; мы никогда не бываем вынуждены сказать, что при каком-нибудь частном процессе нарушается положение детерминистической физики. Подобное допущение было сделано только однажды, в последние годы в известной работе Бора, Крамерса и Слэтера и вскоре опять отброшено вследствие его необоснованности. Систематическая теория, за которой я слежу уже больше десяти лет, при всей свободе, которую она предоставила индетерминизму, никогда не знала иной формы несостоятельности детерминистической физики, как той, что в известных случаях она действует впустую, т. е. становится недостаточной для разрешения задач.

Недавнее развитие микрофизики вызвало новый поворот в общей оценке статистического метода рассмотрения. Выше я говорил, что вся атомистика возникла из стремления спасти хотя бы в малом детерминизм, ускользающий из

области крупного. Это стремление основывалось на ложном допущении, что из отдельных детерминированно описанных событий можно вывести в существенных чертах закономерности совокупности их, не строя каких-либо гипотез. Однако, если не слишком легкомысленно обращаться со словом „вероятность", необходимо признать, что это невозможно, уже потому, что вероятности вычисляются исключительно только из данных (или допущенных) вероятностей же: нет ни одного самого малого положения кинетической теории газов, которое вытекало бы только из классической физики без допущений статистического характера. По соображениям другого рода, а не этим, теперь прекращены попытки дать детерминизму опору в атомной физике: было признано, что элементарные процессы сами совершенно не поддаются причинному описанию. Это прямое следствие требования, чтобы теория рассматривалась только в связи с экспериментом, служащим для ее проверки.

Современная физика излучения исходит из того, что каждому процессу излучения приписывается определенная консервативная механическая система; например, монохроматическому излучению — точка, упруго связанная с центром (осциллятор Планка), водородному излучению — точка в кулоновом силовом поле (атомная модель Бора) и т. п. Из гамильтоновой функции данной механической системы выводятся с одной стороны частоты колебаний, с другой стороны амплитуды колебаний, т. е. распределения интенсивностей, — по известным формально-математическим предписаниям. До сих пор все протекает в смысле физики дифференциальных уравнений. Теперь же надлежит учесть, что эта механическая система имеется при процессе излучения не одна, а их биллионы. Борн первый установил здесь разумную связь своим объяснением: интенсивность вычисляемая из волнового уравнения Шредингера, как функция параметра состояния, дает вероятность того, что один из экземпляров системы окажется в соответствующей точке фазового пространства. Это положение сохраняет определенное содержание и в том случае, если отказаться от представления о множестве отдельных частиц. Ибо ве-

роятность состояния, умноженная на полное число частиц, дает ничто иное, как математическое ожидание или среднее значение частиц, находящихся в данном месте. Итак, по толкованию Борна, Шредингеровское дифференциальное уравнение дает лишь математическое ожидание физического события, лишь среднее значение ожидаемого в данном месте. Это — то же толкование, какое мы должны были давать каждому событию физики дифференциальных уравнений в области макроскопического, когда мы ограничивались высказываниями только о действительно наблюдаемом — как было выполнено выше. И обоснование, данное Гейзенбергом этому вмешательству индетерминизма в атомную физику, в точности совпадает с тем, что было сказано выше о недетерминированности в макроскопической области.

Как известно, Гейзенберг показывает, что немыслим эксперимент, в котором могли бы быть точно измерены одновременно и положение, и скорость очень малого тела. Говоря точнее, так как произведение обоих „неточностей" есть конечное число порядка величины планковского кванта действия, то ни одна из обеих величин не может быть определена вполне точно. С точностью одного измерения возрастает неточность другого. Но неточность не следует смешивать с статистикой, как я уже указывал. Равным образом в новой точке зрения существенно не то, что процесс наблюдения влияет на наблюдаемый предмет. Такое влияние встречается часто, например, когда скорость течения измеряют трубкой Пито или силу поля исследуют пробным телом. Подобные влияния образуют „систематические ошибки" наблюдения и их можно исключить путем поправок, т. е. нужно составить дифференциальные уравнения, принципиально пригодные для совокупной системы, состоящей из объекта наблюдения и измерительных приборов. Принципиально иначе обстоит дело, когда мы вместе с Гейзенбергом рассматриваем атомную частицу в микроскоп для γ лучей, чтобы возможно точно установить ее положение, т. е. подвергаем ее действию очень короткого излучения. Световые кванты высокой энергии, падающие теперь на частицу и влияющие на величину ее импульса в смысле

эффекта Комптона, подчинены процессу недетерминированному, познаваемому только статистически; столкновения хотя непосредственно и не образуют коллектива, однако (подобно числу частиц броуновского движения) представляют временное событие рассмотренного выше эрготического типа с ограниченным отсутствием закономерности. Во всяком случае, значения импульса, получающиеся под влиянием столкновения со световыми квантами, косвенно приводят к коллективу и так-называемая нерезкость есть мера рассеяния соответствующего распределения. Это можно описать и так: конкретный процесс измерения и в микрофизике не есть элементарный процесс, но статистическое событие. Таким образом статистика входит неизбежно в атомные измерения совершенно так, как и в макроскопические.

В заключение можно сделать следующий вывод из этих бегло набросанных мыслей: строгий детерминизм, обычно приписываемый классической физике дифференциальных уравнений — только кажущийся; он не выдерживает, если теорию принимают принципиально только в связи с экспериментом, служащим для ее проверки, т. е. ограничиваются только чувственно воспринимаемым, или „принципиально“ наблюдаемым. В макроскопическом индетерминируемое частью кроется в объектах наблюдения, частью проникает посредством измерительных процессов; всякая микрофизика же несет статистический элемент с собой, так как только он обеспечивает переход к массовым явлениям, а каждое измерение есть именно такое явление.

Я полагаю, что такое восприятие, основанное на уточнении основных понятий статистики, поможет изгладить тот разлад между причинностью и статистикой, какой пронизывает современную физику.