1929 г. Т. IX. ВЫП. 2

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

УЧЕНИЕ МИЗЕСА О ВЕРОЯТНОСТЯХ И ПРИНЦИПЫ ФИЗИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ.

А. Я. Хинчин, Москва.

За последние годы немецким математиком и физиком, профессором Берлинского университета Р. Мизесом был опубликован ряд работ по теории вероятностей и физической статистике. Эти работы имели своей целью, с одной стороны, перестроить на новом научно-философском основании все здание теории вероятностей и математической статистики, с другой — подвергнуть существенной ревизии основные принципы той схемы, согласно которой до настоящего времени статистические методы применялись в физике. В обоих направлениях влияние идей Мизеса на ход научной мысли к настоящему времени уже настолько определилось, что знакомство с его учениями должно было бы стать общим достоянием всех тех, кто так или иначе в своей научной работе соприкасается со статистическими методами, и в особенности для физиков, потому что реформаторская деятельность Мизеса главным своим острием направлена на физическую статистику.

Необходимо иметь в виду, что взгляды Мизеса на роль статистических методов в физике не имеют прямой связи с его новой весьма своеобразной концепцией общего понятия вероятности. Это важно помнить потому, что общее учение Мизеса вызывает ряд методологических и математических сомнений, о которых ниже будет сказано подробно; специальное же учение о принципах статистических методов в физике в значительной мере свободно от этих

возражений и может быть принято без колебаний и тем, для кого общая вероятностная концепция Мизеса по тем или иным причинам является неприемлемой.

По этой же причине мы в дальнейшем попытаемся изложить общее учение Мизеса и его теорию физической статистики совершенно независимо друг от друга.

I. Учение Мизеса об основаниях теории вероятностей.

Если мы имеем обыкновенную игральную кость и фиксируем наше внимание на какой-нибудь одной из ее шести граней, то соображения симметрии заставляют нас полагать, что вероятность выпадения этой фиксированной грани равна одной шестой. Основанием для этого расчета служит, как известно, разложение всех возможных исходов события (бросания кости) на „равновозможные“ или „равновероятные“ случаи, и традиционное определение вероятности как отношения числа случаев „благоприятствующих“ событию к числу всех возможных случаев существенным образом предполагает все эти случаи „равновероятными“. Что такое определение содержит в себе ложный круг — это было известно уже давно; но мало того: как только положение вещей хотя бы немного усложняется, — это определение становится весьма затруднительным или даже вовсе теряет содержание. Мизес приводит пример „неправильной“ игральной кости, сделанной, например, из неоднородного материала. Мы и здесь говорим о вероятности выпадения определенной грани; но о каких „равновероятных“ случаях здесь может итти речь? Как может быть вычислена постулируемая вероятность, в чем ее смысл, ее определение? И далее — когда мы говорим о вероятности того, что 40-летний мужчина доживет до 50 лет, как можно представить эту вероятность отношением чисел равновозможных случаев? Эти затруднения, наряду со многими другими, по мнению Мизеса, с достаточной определенностью показывают несостоятельность классического определения вероятности.

Вернемся к случаю игральной кости. Если мы будем бросать ее много раз подряд, и если при n бросаниях отмеченная нами грань выпадает m раз, то дробь $\frac{m}{n}$, при больших значениях n, почти наверно будет весьма близка к вероятности выпадения отмеченной грани (на основании известной теоремы Бернулли). Эта дробь есть число, которое мы без труда можем найти экспериментальным путем. Вероятность же выпадения отмеченной грани есть число, которое, вообще говоря (случай неправильной кости), не только нам неизвестно, но даже теоретическое определение которого у нас отсутствует; говоря об этой вероятности, мы руководствуемся смутными и плохо оправданными аналогиями.

Отсюда возникает основной принцип учения Мизеса — эмпирическое определение вероятности. Вероятность выпадения отмеченной грани, раз она по мере увеличения числа бросаний все точнее измеряется дробью $\frac{m}{n}$, в пределе совпадает с нею; т. е., обозначая эту вероятность через p, мы должны иметь

$$p = \lim_{n \to \infty} \frac{m}{n}.$$

В этом соотношении, которое в традиционном понимании символизирует собою одно из свойств вероятности, Мизес предлагает видеть ее определение. Всякое априорное определение, по его мнению, обречено на неудачу; предлагаемое же им эмпирическое определение — единственное, из которого логически вытекает возможность предсказывать ход событий.

Сделаем относительно этого определения пока только несколько простых замечаний: 1) в противоположность традиционному, оно свободно от ложного круга; 2) оно применяется столь же хорошо к „неправильной“ кости, как к правильной; 3) оно требует, чтобы предел, о котором идет речь, существовал, и тем налагает некоторое требование на производимую серию экспериментов — требование, как мы увидим дальше, чреватое серьезными затруднениями.

А теперь перейдем от этого частного случая к общему определению вероятности. Мы видим, что в основе такого определения всегда лежит некоторая безграничная последовательность экспериментов — то, что Мизес называет коллективом. В этом коллективе каждый его элемент (эксперимент) либо наделен, либо не наделен некоторым определенным признаком (в нашем примере таким признаком было выпадение определенной фиксированной грани). Если среди первых n членов коллектива имеется m наделенных данным признаком, то вероятностью этого признака в рассматриваемом коллективе называется предел, к которому стремится дробь $\frac{m}{n}$ при безграничном увеличении числа n.

Таким образом вероятность каждого события (признака) определяется исключительно в пределах некоторого данного коллектива, и это обстоятельство Мизес постоянно и настойчиво подчеркивает, считая, что невнимание к нему обусловливает множество ошибок и нелепостей в исчислении вероятностей.

Из сказанного мы уже видим, что коллектив отнюдь не есть любая последовательность элементов, некоторые из которых отмечены (наделены) тем или иным определенным признаком. Мы видим, что каждый из занимающих нас признаков должен иметь в коллективе определенную долю (предел отношения $\frac{m}{n}$), которая и есть его вероятность. Это существование всех подобных пределов никак не может быть обосновано a priori и есть потому определенное условие, которому последовательность должна подчиняться, чтобы быть коллективом.

Но это условие не единственное. Чтобы структура коллектива имела необходимый для исчисления вероятностей характер, мы должны потребовать от него еще одного весьма специфического свойства, которое Мизес называет свойством иррегулярности (Regellosigkeit) и к которому мы ради большей наглядности подойдем со стороны частного случая.

Вернемся к примеру с игральной костью. Представим себе снова безграничную серию бросаний, но будем теперь реги-

стрировать не каждое бросание, а, напр., только 1-е, 3-е, 5-е, 7-е и т. д., т. е. только бросания с нечетными нумерами. Пусть мы рассмотрели n таких бросаний, и пусть среди них m раз появилась наша отмеченная грань. Мы снова вправе ожидать, что отношение $\frac{m}{n}$ для больших значений n будет близко к исследуемой вероятности. Таким образом наш коллектив должен быть построен так, чтобы, выделив из него по определенному закону любую бесконечную часть (напр. элементы с нечетными нумерами), мы в этой выделенной части получали для предела дроби $\frac{m}{n}$ то же число, как и во всем коллективе. Это свойство коллектива Мизес и называет его иррегулярностью.

Вообще последовательность элементов называется иррегулярной, если в каждой выделенной из нее по определенному закону частичной последовательности каждый из интересующих нас признаков имеет ту же самую долю, что и в целой, первоначальной последовательности.

Теперь мы можем установить точное определение коллектива: последовательность элементов по отношению к данной группе признаков является коллективом, если, во-первых, каждый из признаков данной группы имеет в ней определенную долю, и если, во-вторых, эта последовательность иррегулярна в отношении каждого из признаков данной группы.

Как уже сказано, доля признака в данном коллективе называется его вероятностью. Зная вероятности всех признаков данной группы, мы знаем распределение данного коллектива. Задачу вычисления вероятностей Мизес видит исключительно в том, чтобы, зная распределение некоторых исходных коллективов, находить распределения новых коллективов, получаемых из первоначальных путем некоторых определенных операций. Отсюда задача — выявить те операции над коллективами, с которыми имеет дело теория вероятностей. По учению Мизеса, таких основных операций — четыре; все же другие, как угодно сложные, получаются путем комбинирования этих четырех в любом

числе и в любой последовательности. Рассмотрим теперь эти четыре основных операции.

1. Выбор (Auswahl). Эта простая операция состоит в том, что из данного коллектива выделяется некоторая его часть, например элементы с нечетными нумерами. При этом важно, что принципом такого выбора не может служить какое-либо свойство элемента, связанное с его отношением к рассматриваемым признакам; определяющую роль должен играть исключительно нумер элемента. Из определения коллектива (именно, из свойства иррегулярности) вытекает, что распределение нового коллектива совпадает с распределением первоначального.

2. Смешение (Mischung). Тоже весьма элементарная операция, которая в сущности не создает никакого нового коллектива, а только внутри данного коллектива соединяет два или несколько признаков в один. Пусть, например, мы имеем дело с коллективом, состоящим из последовательных бросаний игральной кости. Признаками в этом коллективе могут быть, например, выпадения двойки, четверки и шестерки; это три различных между собою признака. Но мы можем также говорить о признаке, состоящем в выпадении четного числа очков. Этот переход от группы признаков к одному, объединяющему их признаку и есть операция смешения, которая таким образом не выводит нас из пределов данного коллектива. Очевидно, что эта операция в классической теории соответствует схеме, обычно называемой теоремою сложения вероятностей. Легко понять, что самая „теорема сложения“ и в новой концепции является непосредственным следствием определения вероятности.

3. Разделение (Teilung). Эта операция в классической трактовке соответствует так называемой схеме Байеса (схема вероятностей „a posteriori“ — терминология, против которой, кстати сказать, Мизес ожесточенно и справедливо полемизирует). Операция разделения имеет внешнее сходство с операцией выбора в том отношении, что здесь также новый коллектив определяется как часть первоначального; однако принцип выделения этой части здесь совершенно иной: если там при выборе частичной последовательности

нам запрещалось ставить этот выбор в зависимость от реализации рассматриваемых признаков и предписывалось производить его чисто „арифметически", руководствуясь лишь нумерами элементов, то здесь, напротив, операция состоит в том, что из коллектива выделяются элементы, обладающие каким-либо из рассматриваемых признаков, и в новом, выделенном коллективе исследуется затем распределение остальных признаков.

Пример: в ряде бросаний игральной кости мы можем выделить те из этих бросаний, при которых выпадет четное число очков; это дает нам новый коллектив, внутри которого мы можем, например, поставить вопрос о вероятности выпадения шестерки. На обычном языке эта проблема формулируется так: предполагая уже известным, что выпало четное число очков, рассчитать вероятность того, что это число есть шесть. В схеме Мизеса эта задача получает следующее значение: пусть среди n первых бросаний m раз выпадает четное число очков, среди них — r шестерок; требуется найти предел дроби $\frac{r}{m}$ при безграничном возрастании n; при этом предполагаются, очевидно, известными пределы дробей $\frac{m}{n}$ и $\frac{r}{n}$, вследствие чего задача получает весьма простое решение, очевидно совпадающее с обычным.

4. Связывание (Verbindung). Эта операция соответствует схеме так называемой теоремы умножения и состоит в образовании из двух исходных коллективов одного нового по следующему принципу: за элемент нового коллектива принимается пара, состоящая из одного элемента первого и одного элемента второго коллектива; в этом новом коллективе исследуется распределение признаков, определяемых так: если A есть какой-либо признак первого коллектива, а B — какой-либо признак второго коллектива, то мы получим определенный признак C внутри нового коллектива, если потребуем, чтобы тот элемент, который взят из первого коллектива, обладал признаком A, а его партнер, взятый из второго коллектива, — признаком B.

Пример: исходные коллективы — ряды бросаний двух игральных костей; n-й элемент коллектива — пара, состоящая из n-го бросания первой и n-го бросания второй кости; мы можем поставить вопрос, например, о вероятности признака, состоящего в выпадении шестерки на первой кости и одновременном (т. е. при бросании того же нумера) выпадении двойки на второй кости.

Как мы уже отметили, по утверждению Мизеса, задача теории вероятностей состоит в изучении распределений внутри коллективов, получаемых исходя из некоторых данных коллективов путем применения вышеописанных четырех операций в любом числе и любой последовательности. Тот факт, что этими четырьмя операциями действительно исчерпывается круг основных задач теории вероятностей, не представляет собою ничего неожиданного и даже, в сущности, ничего нового: мы видели, в самом деле, что эти операции содержат в своей совокупности все основные принципы, на которых в классической трактовке строится здание теории вероятностей (принцип сложения, принцип умножения и принцип Байеса); отсюда ясно, что применением этих четырех операций мы действительно можем построить любую задачу, к которой приводит классическая теория. Поэтому не в этой конструктивной своей части, где все благополучно, теория Мизеса может вызвать сомнения; критика может и должна быть направлена на принципиальную часть теории, действительно вызывающую ряд методологических, математических и натурфилософских возражений.

II. Оценка общего учения Мизеса.

В порядке предстоящей оценки надо прежде всего отметить блестящие заслуги реформаторской деятельности Мизеса. Уже один тот факт, что всем своим авторитетом этот выдающийся ученый обрушился на закоснелые предрассудки, на традиционные нелепости современного учения о вероятностях, имеет неоспоримое научное значение. Не было и нет оправдания тому факту, что то математическое учение, которое в наше время, быть может, преимущественно перед

всеми другими призвано служить естествознанию и практическим наукам, само в своей логической законченности на столетие, если не больше, отстало от большинства других математических дисциплин. Даже самые лучшие современные руководства теории вероятностей, умеющие заинтересовать и удовлетворить математика глубиною и серьезностью тех задач, какие в них ставятся и решаются, оставляют критически настроенного читателя в тяжелом недоумении относительно формальных основ изложенного в них учения; и это недоумение — далеко не из тех, которые естествоиспытатель склонен отнести на счет не интересующей его формальной „придирчивости" чистого математика; нет, здесь остаются под знаком сомнения вопросы, насущно занимающие и волнующие физика, биолога, экономиста — всякого, кто стремится довести до полной ясности ту схему, на основе которой в его науке происходит применение статистических методов исследования. В беспощадной критике этих неясностей, в неуклонной тенденции заменить их безукоризненно ясными построениями, бесспорная историческая заслуга учения Мизеса. И не последнее место занимает здесь систематическая борьба с устаревшей, явно нелепой терминологией; всем ведь известно, сколь большое значение имеет терминология в математических учениях, в особенности, когда речь идет о выяснении принципиальных основ той или другой математической дисциплины.

Допустим, говорит Мизес, что хороший игрок в теннис имеет вероятность 0,8 получить первый приз на турнире, происходящем сегодня в Берлине. Пусть далее тот же игрок имеет вероятность 0,7 получить первый приз на турнире, происходящем в этот же самый день в Нью-Йорке. Так как два события, о которых здесь идет речь, очевидно, несовместимы, то, руководствуясь буквальной традиционной формулировкой теоремы сложения, мы должны были бы сказать, что вероятность получения нашим игроком какого-либо одного из двух первых призов равна сумме вышеуказанных вероятностей, т. е. 1,5. Разумеется, каждый, кто сколько-нибудь разбирается в деле, избежит той грубой ошибки, которая приводит к этой нелепости. Но достаточно

того факта, что традиционная формулировка теоремы сложения не содержит в себе ни одного слова, которое могло бы гарантировать от подобного рода заключений.

Другой решительный пример представляет собою теорема умножения, которая в классической своей формулировке, пользуясь недостаточно отчетливой терминологией, обычно смешивает две проблемы, не имеющие друг с другом никакой прямой связи и в схеме Мизеса соответствующие операциям разделения и связывания. Теорема, доказанная для одной из этих двух схем, затем без всяких оговорок применяется к другой, причем необоснованность этого перехода скрывается за расплывчатой терминологией.

Такого рода примеров можно было бы привести множество.

Но, заслуживая в своей разрушительной части всемерного сочувствия, теория Мизеса в части созидательной вызывает ряд серьезных критических замечаний, к которым мы теперь и переходим.

А. Критика принципиально-методологическая.

Вероятность определяется в учении Мизеса как предел известного отношения, получаемого, вообще говоря, в результате некоторой серии экспериментов. Если мы имеем игральную кость и спрашиваем о вероятности выпадения шестерки при бросании этой кости, то мы естественно ожидаем, что искомая вероятность объективно выражает собою некоторое свойство, фактически присущее изучаемому нами предмету — игральной кости. Это свойство, реально принадлежащее предмету, может быть изучаемо помощью эксперимента или ряда экспериментов; но определяться оно должно, базируясь исключительно на структуре самого предмета, без отношения к тому, производится или не производится эксперимент.

Мы можем измерять температуру воздуха с помощью термометра; но что бы мы сказали, если бы нам предложили в качестве последнего, окончательного определения сущности температуры воздуха принять высоту ртутного

столба в термометре, помещаемом в этом воздухе? Не значило ли бы это обречь себя на полный отказ от понимания сущности явления, на принципиальную замену знания о предмете — знанием о том, как этот предмет реагирует на наши чувства и приборы; и это знание признать окончательным, последним, принципиально не допуская возможности никакого иного знания? Не значило ли бы это обречь себя на грубейшую форму научного релятивизма — форму, сравнительно с которой даже махизм представляет известные преимущества? Ведь мы должны были бы признать, что температура создается внесением термометра, что там, где нет термометра, нет и температуры.

Определение вероятности, предлагаемое Мизесом, страдает совершенно аналогичным недостатком. Если мы хотим строить нашу теорию на объективной базе, если мы хотим, чтобы вероятность выпадения шестерки выражала собою некоторое свойство, объективно присущее нашей игральной кости, то мы должны эту вероятность определить так, чтобы определение наше сохраняло смысл и в случае, когда никаких экспериментов с этой костью не производится. Если же вероятность определена так, что ее определение получает смысл только в присутствии экспериментирующего интеллекта, и если, как это утверждает Мизес, она и не может иметь никакого иного определения, то такая вероятность не может выражать собою никакого свойства самого изучаемого предмета.

Таково первое, основное возражение против вероятностной концепции Мизеса.

Второе возражение возникает в связи с той идеализацией эмпирического материала, на которой Мизес строит свою математическую теорию. Такого рода идеализация, вообще говоря, не только допустима, но и совершенно неизбежна, когда мы хотим охватить математическим аппаратом какую-либо эмпирическую область. Однако плодотворной такая идеализация может оказаться только при одном непременном условии: мы должны быть уверены, что закономерности, имеющие место в предмете идеализированном, приближенно будут выполняться и в предмете реальном. Так, мы часто

имеем возможность в порядке математического анализа заменить весьма тонкую пластинку — плоской фигурой; в гидродинамике мы реальную жидкость с ее молекулярной структурой заменяем в порядке идеализации сплошной средою. Во всех этих случаях успех такой идеализации гарантируется тем, что степень близости реального предмета к идеализированному может почитаться известной и что вследствие этого мы можем оценить предел той погрешности, какую мы рискуем получить, заменяя реальный предмет идеализированным. Если для вычисления площади правильного тысячеугольника мы заменяем его окружностью, то такая идеализация продуктивна, потому что предел получающейся при этом погрешности легко может быть указан.

Пусть мы теперь n раз бросаем монету, причем m раз выпадает герб. Вероятность выпадения герба равна, по Мизесу, пределу дроби $\frac{m}{n}$ при неограниченном возрастании числа n. Эта идеализация эмпирии (замена реальной дроби $\frac{m}{n}$ ее идеальным, эмпирически недостижимым пределом) составляет одну из самых основных черт теории Мизеса. Может ли она быть названа продуктивной? Легко видеть, что ни в какой степени; и это обстоятельство имеет основное значение для всей теории: Мизес весьма энергично упрекает классическую теорию в том, что она, без дополнительных постулатов натурфилософского характера, ни в какой мере неспособна предсказать действительный ход явлений. Поэтому особенно важно показать, что в этом отношении теория Мизеса не имеет перед нею решительно никаких преимуществ; если она что и способна предсказать, то только известные закономерности в ходе *идеализированного* явления; но характер принятой Мизесом идеализации таков, что для реального явления отсюда нельзя сделать *никаких* выводов.

В самом деле: пусть вероятность выпадения герба равна половине и пусть мы имеем в виду бросить монету 1 000 раз; можем ли мы, из нашего знания вероятности выпадения герба, извлечь хотя бы самое скромное предсказание отно-

сительно того, сколько раз в течение этой тысячи бросаний фактически выпадает герб? Очевидно, ни малейшего; потому что любое число предполагаемых выпадений герба, от 0 до 1 000 включительно, совместимо с тем фактом, что вероятность выпадения герба (определяемая как $\lim \frac{m}{n}$ при $n \to \infty$) равна половине, и без дополнительного постулата мы не можем сделать никакого выбора из этих возможных чисел. Правда, мы можем быть уверены, что если эксперименты продолжать безгранично, то дробь $\frac{m}{n}$ будет приближаться к половине; но, к сожалению, эта уверенность относится лишь к идеализированной (безграничной) серии испытаний и уступает место полному незнанию, абсолютной невозможности предсказать что бы то ни было, если мы имеем дело с реальной серией испытаний. Правда, теория Мизеса (как и классическая теория) дает возможность вычислить вероятность различных чисел выпадений герба при 1 000 бросаний монеты; но вероятности эти, по значению своему в теории Мизеса, сами по себе ничего не могут нам предсказать относительно интересующей нас 1 000 бросаний. Они дают нам лишь указание на то, что будет происходить, если мы предпримем не одну тысячу бросаний, а безграничный ряд таких тысяч; иначе говоря, они обрисовывают нам картину идеализированного процесса и не дают ни малейшего указания на то, как будет протекать процесс реальный.

Таким образом утверждение Мизеса о том, что его концепция вероятности, в противоположность классической, имеет прямое отношение к фактическому течению событий и позволяет делать непосредственные высказывания об этом течении, следует признать необоснованным и даже просто неправильным. Вероятности Мизеса действительно характеризуют собою некоторый процесс; но процесс этот — идеализированный, и без дополнительных постулатов, как и в классической теории, нет никакого логически необходимого перехода от этого идеализированного (бесконечного) процесса к процессам реальным (конечным).

В. Критика математическая.

Со стороны математической, возникающие в связи с концепцией Мизеса возражения относятся к самому понятию коллектива. Современный математик, рядом горьких испытаний приученный к сугубой осторожности в обращении с бесконечными последовательностями, не может удовлетвориться указаниями Мизеса по этому поводу, не может даже примирить их между собою. Мы сейчас постараемся показать, что освобождение понятия коллектива от внутренних противоречий может быть достигнуто только приданием его определению такого толкования, которое лишает его какого бы то ни было содержания. Мы здесь имеем в значительной степени дело с ложной идеей, где за подкупающими нашу интуицию фразами при внимательном анализе обнаруживается отсутствие реальной значимости.

Остановим наше внимание на возможно простой схеме коллектива: пусть мы имеем безграничную последовательность чисел, каждое из которых есть нуль или единица, например:

$$00111010110001\ldots \tag{1}$$

Если мы хотим, чтобы эта последовательность была коллективом, то мы прежде всего должны потребовать, чтобы дробь $\frac{m}{n}$, где m есть число нулей, встречающихся среди первых n членов нашей последовательности, стремилась к определенному пределу, когда n безгранично возрастает. Но этого мало; мы должны еще, по Мизесу, потребовать „иррегулярности“ нашей последовательности; это значит, что, выбирая любую бесконечную часть из нашей последовательности, мы должны в этой части для относительного числа нулей обязательно иметь тот же самый предел, что и в последовательности первоначальной.

Первое грубое возражение могло бы состоять в том, что, если, например

$$\lim_{n\to\infty}\frac{m}{n}=\frac{1}{2},$$

то мы можем выбрать в качестве части нашей последовательности просто совокупность тех ее членов, которые равны нулю; в этой части предел относительного числа нулей, очевидно, равнялся бы не половине, а единице. Однако это возражение должно отпасть, так как Мизес запрещает при выборе частичной последовательности пользоваться нашим знанием о том, на каких местах стоят нули и на каких единицы; выбор должен быть произведен „арифметически", руководствуясь исключительно нумерами членов последовательности; мы можем, например, взять совокупность членов нашей последовательности, нумера которых суть четные числа, или полные квадраты, или абсолютно простые числа и т. п.

В общем виде принцип этого выбора можно формулировать так: пусть $\varphi(n)$ есть произвольная функция целочисленного аргумента n, принимающая для целых положительных значений n также целые положительные значения, и пусть при $n_1 < n_2$ мы имеем всегда $\varphi(n_1) < \varphi(n_2)$ [т. е. функция $\varphi(n)$ возрастающая]. Тогда последовательность

$$\varphi(1),\ \varphi(2), \ldots\ \varphi(n) \ldots \tag{2}$$

есть возрастающая последовательность целых положительных чисел; мы можем выбрать из нашей основной последовательности (1) совокупность тех членов, нумера которых встречаются в последовательности (2). Это и будет выбор частичной последовательности, законный в порядке идей Мизеса. И очевидно, что и обратно, каждый такой выбор непременно реализуется только что описанным образом с помощью подходяще выбранной функции $\varphi(n)$. При этом на природу этой функции Мизес, кроме вышеперечисленных ее свойств, не налагает никаких ограничений.

Возвратимся теперь к исходному коллективу (1). Обозначим через $f(n)$ нумер n-го по счету нуля в этой последовательности. Очевидно, что $f(n)$ есть функция, обладающая всеми теми свойствами, каких мы требовали от функций $\varphi(n)$, реализующих законные выборы. Почему мы не смеем, что нам запрещает положить

$$\varphi(n) = f(n)\,?$$

Мы не можем этого сделать потому, что при определении функции $\varphi(n)$ нам запрещено пользоваться нашим знанием распределения нулей и единиц в коллективе (1). Мы можем полагать $\varphi(n)=2n$, $\varphi(n)=n^2$, $\varphi(n)=n!$ и т. д., но не можем положить $\varphi(n)=f(n)$. Пусть это так. Но что может нас гарантировать от того, что, строя нашу функцию $\varphi(n)$, мы случайно не набредем на функцию, тождественно совпадающую с $f(n)$? Очевидно, что от этого могла бы нас гарантировать только какая-то определенная черта в природе функции $f(n)$; это вполне понято Мизесом, ясна ему и необходимость такой гарантии, без которой падает все его определение. Поэтому Мизес с достаточной определенностью требует: функция $f(n)$ должна быть такова, чтобы ее нельзя было „угадать", чтобы никакими средствами нельзя было построить, не зная распределения коллектива (1), такой функции $\varphi(n)$, которая тождественно совпала бы с $f(n)$. Именно это значение имеет та формулировка требования иррегулярности, которую Мизес называет „Prinzip vom ausgeschlossenen Spielsystem".

Читатель видит уже, конечно, встающие здесь тяжкие недоумения. Какой математический смысл имеет свойство функции, состоящее в том, что ее „нельзя угадать", что, какую бы функцию мы ни выбирали, это все будет „не та"? Математики хорошо знают, как безнадежна задача точного объективного разграничения между функциями „закономерно определяемыми", которые „можно угадать", с одной стороны,— и функциями „беззаконными", которых „нельзя угадать" — с другой. Во всяком случае, это смутное, в своем сыром виде апеллирующее к свойствам человеческого интеллекта разграничение никак не может служить базой для аксиоматики математической дисциплины; а ведь именно эту роль дает ему концепция Мизеса, и мы не видим никакой возможности обойти эту трудность на том пути, которым идет его теория. Второе свойство коллектива, его „иррегулярность", представляется таким образом внутренне несостоятельным: чтобы освободить его от противоречий, мы вынуждены придать ему смутный смысл, не имеющий никакого объективно научного содержания.

Правда, на первый взгляд здесь есть как будто одна возможность выхода. Современная математика различает два типа последовательностей вида (1): во-первых, последовательности законченные, завершенные, задание которых уже содержит в себе закон, позволяющий судить, на каких местах будут нули и на каких единицы; и во-вторых, последовательности „творящиеся", „становящиеся" (freie Wahlfolgen), где мы по произволу или по случаю ставим нуль или единицу на первом месте, затем нуль или единицу на втором и т. д.

Отличительной методологической чертой этих последовательностей второго типа является то, что мыслить такую последовательность законченной, завершенной, мы по самому определению ее никак не можем. Для такой последовательности вообще имеют реальное содержание только такие ее свойства, наличность которых может быть установлена уже после знакомства с некоторым числом первых ее членов. Если, например, мы имеем такую находящуюся в процессе вечного становления последовательность целых положительных чисел, то имеет точный смысл вопрос о том, содержатся ли четные числа среди первых десяти ее членов; но вопрос о том, содержит ли эта последовательность бесконечное множество четных чисел, не имеет никакого смысла, потому что не проводит дисъюнкции между двумя фактическими обстояниями. Тот факт, что эти „становящиеся" последовательности могут быть предметом математического анализа, в последние годы подчеркнут в ряде работ Броуэра (Brouwer) и Вейля (Weyl).

До сих пор мы рассматривали коллектив как последовательность первого типа, т. е. законченную и потому необходимо закономерную, и убедились, что при таком понимании это понятие является несостоятельным. Но не следует ли рассматривать коллектив как последовательность второго типа, т. е. незавершенную, находящуюся в процессе „вечного становления", и потому „беззаконную"?

На первый взгляд эта идея кажется очень естественной, так как коллектив — последовательность, порождаемая случаем (и только затем идеализируемая требованием

законченности). Мы могли бы, быть может, попытаться на этом пути даже избегнуть идеализации и говорить не о законченных, а только о „становящихся“ коллективах? Однако эта возможность — иллюзия, разбивающаяся уже на первом шагу. Ведь мы же хотим, чтобы в нашей последовательности существовали пределы, это есть первое, основное свойство коллектива. Для последовательности „вечно становящейся“, которую мы, по самому ее определению, не можем мыслить законченной, завершенной,— требование существования предела есть пустая фраза, за которой нет никакого реального содержания. Дисъюнкция существования и несуществования предела очевидно получает смысл только для последовательности, мыслимой как завершенный, определенный до конца ряд. Самое слово „предел“ и стоящее за ним точное понятие не позволяют ставить этого вопроса для незавершенных, вечно становящихся последовательностей.

Таким образом, если наше первое понимание коллектива привело нас к невозможности реализации „иррегулярности“, то второе понимание делает иллюзорным, лишенным всякой реальности основное свойство коллектива — существование пределов. Математика не знает последовательностей, обладающих теми свойствами, которыми Мизес наделяет свои коллективы. И потому мы должны признать, что теория Мизеса до настоящего времени лишена прочного математического фундамента.

С. Критическое замечание физического характера.

С физической точки зрения учение Мизеса вызывает одно существенное возражение, касающееся так называемых априорных вероятностей или статистических весов молекулярных состояний. Когда мы например говорим, что индивидуальная молекула имеет одинаковую вероятность оказаться в любой из ячеек своего фазового пространства (этот пункт обычно служит отправной точкою статистической термодинамики), то уже в классическом понимании вероятностей трудно понять, что это значит; определение таких „априорных вероятностей“, на наш взгляд, до сих пор не

имеет надлежащей ясности. Ведь физически невозможно придумать эксперимента, который позволил бы проверить подобного рода утверждение. Однако в классическом толковании мы все же можем считаться с возможностью (а значит и питать надежду) придать этому определению реальный смысл; там, где изучаемая вероятность во всяком случае должна пониматься как свойство, объективно присущее данной молекуле, у нас есть надежда рано или поздно, в достаточной мере изучивши природу молекулы, дать удовлетворительное теоретическое обоснование для свойственных этой молекуле „априорных вероятностей".

В концепции Мизеса дело обстоит принципиально иначе. Здесь искомая „априорная вероятность" понимается исключительно как доля признака в коллективе. Что же в таком случае может означать, какой физический смысл может иметь утверждение, подобное тому, что „все ячейки a priori равновероятны?" Очевидно значение этого утверждения может быть только следующее: в некотором исходном коллективе молекулы имеются в таком распределении, что относительное число молекул, помещающихся в данной ячейке, одно и то же для всех ячеек. Впрочем, Мизес сам явно формулирует интересующее нас утверждение именно в этих терминах[1]. Теперь позволительно спросить, что же это за коллектив, о котором здесь идет речь? Где он реализуется или может быть реализован в природе? Ведь ясно, что в любом реально осуществимом собрании молекул далеко не все ячейки будут одинаково часто представлены, хотя бы уже потому, что реальный физический мир ставит определенные границы для энергии индивидуальной молекулы. Это значит, что тот коллектив, к которому здесь апеллирует Мизес никакого отношения к реальному миру не имеет и иметь не может; это продукт чисто теоретического построения; а если так, то остается принципиально непонятным, какой реальный смысл может иметь в учении Мизеса априорная равновероятность всех ячеек для молекулы данного типа. На этом же основании можно утверждать, что и вообще

[1] Phys. ZS., *21*, 231, 1920.

понятие статистического (априорного) веса в теории Мизеса принципиально не может иметь физического значения, так как оно базируется на рассмотрении коллективов, являющихся чисто теоретическими построениями, которым в реальном мире не соответствует и не может соответствовать ничего фактически существующего.

Из этого тяжелого положения есть один выход, который, впрочем, может быть рекомендован и классической концепции: не приписывать вообще „статистическим весам" никакого вероятностного значения, признавая таковое лишь за известными их комбинациями. Статистические веса приобрели бы при этом просто роль некоторых, не имеющих прямого физического значения, коэффициентов; оперируя с ними по известным формальным правилам, мы получали бы настоящие вероятности в реальных физических условиях.

Однако физическая статистика в настоящее время еще далека от принципиального и последовательного проведения этой тенденции; и тем более далека от этого теория Мизеса, оперирующая с фиктивными „исходными коллективами". А покуда это так, все наши возражения остаются в силе.

III. Учение Мизеса о принципах физической статистики[1].

Как нами было указано во введении, учение Мизеса о принципах физической статистики может быть развито независимо от его взглядов на общую концепцию вероятности, и эта возможность является особенно ценной потому, что, как мы видели, общее учение Мизеса вызывает разнообразные возражения.

Одно из основных принципиальных затруднений всякой статической молекулярной теории состоит, как известно, в том, что такая теория всегда ставит перед нами задачу,

[1] В сущности, излагаемое в этой главе учение у Мизеса имеется только в виде ряда намеков, разбросанных в разных его работах. Систематизация этих намеков, которую нам пришлось произвести, поэтому естественно в известной мере остается на нашей ответственности.

на первый взгляд неразрешимую и даже не имеющую смысла: учесть влияние случая в процессе, в котором по существу нет ничего случайного, а напротив, все детерминировано[1]. Статистическая механика всегда представляет себе собрание молекул как механическую систему, движущуюся по точным законам, управляемым дифференциальными уравнениями; и вот суммарную картину этого сложного, но точно закономерного движения мы должны определять методами статистики, т. е. руководствуясь законами случая.

Известно, что математическое обоснование статистической механики до сих пор находится в весьма неудовлетворительном состоянии. Причиною тому служат отчасти значительные трудности чисто математического характера, отчасти же, и главным образом, недостаточная четкость постановки основных задач и недостаточная ясность самого метода; в особенности место и характер соприкосновения теоретических рассмотрений с реальным миром очерчены смутно и неудовлетворительно.

Это неблагополучное положение вещей, по мнению Мизеса, имеет свои корни в той основной неправильности научного подхода, о которой мы только что говорили. Нельзя в одно и то же время подчинять движение данной массы молекул дифференциальным уравнениям и вместе с тем требовать, чтобы суммарные характеристики этого движения слагались по законам случая. Из точных данных по точным законам можно вывести только точные следствия, никаким вероятностям и статистическим средним здесь нет места. Если мы хотим применять статистические методы, мы должны отказаться от мысли характеризовать изучаемое движение точными законами.

Но не значило ли бы это отказаться вместе с тем от принципа детерминированности процессов природы, а значит и от обязательности причинной связи между ними, и тем самым расстаться вообще с твердой натурфилософской почвой? Мизес показывает (или, по крайней мере, можно показать,

[1] Мы здесь сознательно оставляем в стороне некоторые крайние воззрения последних лет, имеющие тенденцию отрицать каузальную детерминированность атомных процессов.

исходя из его концепции), что это не так: можно рационально отвести в физических процессах весьма значительную долю случаю, можно даже в иных явлениях отдать ему полное господство, в то же время не поступаясь ничем из каузально-детерминистского понимания этих процессов и явлений. Схема этого в высшей степени плодотворного натурфилософского подхода складывается следующим образом.

Каждый физический процесс происходит по абсолютно точным, целиком предопределяющим его течение законам. Но законы эти, во всей совокупности своей, чрезвычайно сложны, и поэтому мы вынуждены в порядке научного исследования подвергать реальные процессы известной идеализации. Эта идеализация в первую очередь обычно состоит в том, что изучаемую нами физическую систему мы мыслим изолированной, т. е. пренебрегаем теми воздействиями, которые на нее оказывают внешние тела. Астроном, изучающий движение солнечной системы, отвлекается при этом от притяжений, испытываемых телами этой системы со стороны отдаленных звезд, хотя ему известно, что малейшее движение атома на Сириусе отклоняет Землю от ее закономерного пути. Точно так же и физик, строящий молекулярную теорию, прежде всего представляет себе изучаемую им массу газа изолированной от внешних влияний, хотя знает, что в реальном мире такая изоляция недостижима.

Изолируя и идеализируя данное явление, т. е. пренебрегая известными деталями в его течении, мы обычно достигаем того, что получаем возможность немногими и простыми законами охарактеризовать эту его идеализированную схему; по этому пути и строится научная теория. При этом мы только не должны забывать, что реальные процессы отличаются от идеализированных и прежде всего протекают бесконечно сложнее их. В наше закономерное описание каждого данного процесса входят таким образом не все его элементы; истинный ход явлений в известной мере отличается от предначертанного теорией; и эти отклонения мы называем случайными, потому что они обусловлены причинами, не вошедшими в нашу теорию, и следовательно эта теория не в состоянии ни объяснить, ни предсказать их. Мы знаем,

что отклонения эти, как и все в природе, строго закономерны; однако управляющие ими законы по своей многосложности совершенно ускользают от нашего изучения, вследствие чего эти отклонения и носят существенно случайный характер.

И вот мы должны здесь различать два возможных случая. Пусть мы, например, изучаем движение Земли вокруг Солнца. Кроме взаимного притяжения Солнца и Земли, мы можем, желая иметь точную теорию, учесть влияние Луны, планет и прочих тел солнечной системы. Но понятно, что это еще не все; каждое движение каждой мельчайшей частицы на Земле, на Солнце, на любом теле солнечной системы и вообще где угодно в мире, отклоняет землю от орбиты, предначертанной нашей теорией. Эти отклонения невелики; управляющие ими закономерности столь сложны, что мы не имеем никакой возможности включить их в нашу теорию и предпочитаем не объяснять и не предсказывать их, тем самым приписывая их случаю.

В этом примере важною для нас является уверенность, что эти „случайные" отклонения (которые здесь, как во всяком физическом процессе, обязательно присутствуют), неспособны сколько-нибудь значительно изменить орбиту Земли; что, стало быть, в существенных своих чертах картина явления, построенная нами в порядке идеализации, будет соответствовать реальному течению явления. Это явление, следовательно, адэкватно (с достаточной степенью точности) описывается нашей теорией; случай ни на минуту не ослабляет своего влияния, но влияние это ничтожно — и практически мы можем пренебречь им. Именно в этом смысле мы и говорим, что „движение Земли вокруг Солнца подчиняется точным законам, в которых нет места случаю".

Рассмотрим теперь другой пример. Пусть мы имеем дело с данной массой газа, заключенной в определенный сосуд и состоящей из огромного множества „хаотически" движущихся молекул. В порядке идеализации мы эту физическую систему считаем изолированной от внешнего мира. Допустим, что молекулы соударяются между собою и со стенками сосуда по законам абсолютно упругих тел и имеют шаровидную

форму определенного радиуса, а стенки сосуда — абсолютно гладки. В этой идеализации законы, управляющие движением молекул, могут быть достаточно просто формулированы. Ход идеализированного явления точно определяется этими законами и не оставляет никакого места случаю. Перейдем теперь от идеализированного процесса к реальному. Так как в реальном мире наш газ прежде всего не может быть изолирован, то один этот факт уже создает для реального процесса бесчисленное многообразие „случайных" отклонений от идеализированного. Переходя к реальному миру, мы, как всегда, широко открываем двери случаю.

И случай врывается в раскрытые двери. Но, в противоположность предыдущему примеру, он на этот раз не ограничивается внесением мелких, практически исчезающих поправок в ход явления; он совершенно разрушает построенную теорией картину процесса и заменяет ее новой, подчиненной его собственным законам. В самом деле, если в данный момент ничтожная по величине внешняя сила чуть-чуть отклонила молекулу от ее предначертанного теорией пути, то, принимая во внимание, что средний свободный пробег молекулы в очень много раз превышает ее диаметр, мы легко поймем, что судьба этой молекулы упомянутым ничтожным изменением в ее движении будет изменена самым радикальным образом: наша молекула встретится на своем пути с целым рядом других молекул, вовсе не предполагавших с ней столкнуться, и наоборот, избегнет столкновения с рядом молекул, с которыми она теоретически должна была бы встретиться. А если мы теперь примем во внимание, что каждая молекула в секунду испытывает огромное множество столкновений и что каждая молекула постоянно подвергается вышеописанным случайным воздействиям внешних сил, то мы непосредственно увидим, что результатом этих случайных воздействий уже в самое ближайшее время должно явиться радикальное изменение всей картины движения, предначертанной теорией.

Таким образом в рассматриваемом примере мы, в противоположность предыдущему, констатируем, что теория, сколь

бы детально она ни была развита, практически ни в какой мере не определяет собою основных черт хода реального явления. Напротив, всю определяющую роль принимают на себя „случайные“ внешние воздействия, по сущности своей закономерные и детерминизованные, но в нашу теорию не вошедшие и потому, в отношении к ней, сохраняющие всемерно характер случайности.

С таким положением вещей, по мнению Мизеса, имеет дело всякая молекулярная статистическая теория. Мы видим, что, отнюдь не отказываясь от предпосылки закономерной детерминированности физических процессов, мы имеем вполне рациональную возможность приписывать в этих процессах весьма значительную, а иногда и определяющую роль случаю.

Теория вероятностей изучает законы случайности, и потому ее роль в молекулярно-статистических теориях становится понятной и обоснованной. Самая схема применения методов теории вероятностей к молекулярным учениям с большой ясностью раскрыта Мизесом на нескольких частных примерах, из которых наиболее законченною является построенная им теория броуновского движения.

Если только и в других важнейших случаях удастся удовлетворительно осуществить эту схему, то мы будем иметь дело в статистической механике с весьма значительным сдвигом вперед. Этот сдвиг будет знаменовать собою принципиальный переход от механико-вероятностного изучения молекулярных систем к изучению чисто вероятностному — переход, рационально обоснованный тем соображением, что в реальном молекулярном процессе власть случая сказывается в гораздо большей мере, нежели влияние механических законов, управляющих движением идеализированной системы.

Литература.

1) R. v. Mises. Marbes „Gleichförmigkeit in der Welt“ und die Wahrscheinlichkeitsrechnung. Naturwiss., 7, S. 168, 186, 205, 1919.

2) Id. Fundamentalsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Math. ZS. 4, 1, 1919.

3) I d. Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Math. ZS., *5*, 52, 1919.

4) I d. Ausschaltung der Ergodenhypothese in der physikalischen Statistik. Phys. ZS., *21* S. 225, 256, 1920.

5) I d. Das Gesetz der grossen Zahlen und die Häutigkeitstheorie der Wahrscheinlichkeit. Naturwiss. *15*, 497, 1927.

6) I d. Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit. Wien (Springer.) 1928.