Механические доказательства движения земли [1]).

Р. Граммель.

Введение.—1. Основные понятия.—2. Механические основы.—I. Опыты, основанные на законе движения центра тяжести.—A. Исследование азимутального вращения.—3. Движение тела, брошенного горизонтально.—4. Плоский математический маятник.—5. Конический математический маятник.—B. Исследование вертикального вращения.—6. Весы.—7. Крутильные весы.—8. Вращающиеся весы.—II. Опыты, основанные на законе площадей.—A. Исследование азимутального вращения.—9. Изотомеограф.—10. Гидравлический опыт.—B. Исследование вертикального вращения.—11. Движение брошенного тела.—12. Свободное падение.—13. Машина Атвуда.—III. Опыты, основанные на законе импульса.—A. Исследование азимутального вращения.—14. Физический маятник.—15. Гироскопический маятник.—B. Исследование общего вращения.—16. Гироскоп.—17. Гироскопический инклинатор.—18. Баригироскоп.—19. Определение гироскопического момента при помощи весов.—C. Исследование вертикального вращения.—20. Гироскопический деклинатор.—Заключение.—21. Годичное обращение земли.—22. Прецессия и нутации.

Введение.

1. Основные понятия. Гелиоцентрическое представление астрономической картины мира, случайно появлявшееся уже у древних греков, но окончательно установленное только Николаем Коперником и вполне разъясненное кинематически и динамически Иоганном Кеплером и Исааком Ньютоном, объясняет явления движения на небесном своде, как это без сомнения известно теперь всякому сколько-нибудь астрономически образованному человеку, посредством трех собственных движений земли относительно солнца — суточного вращения земли около своей оси, годичного обращения ее вокруг солнца и конического движения земной оси (прецессия). Последнее происходит весьма медленно и, как показывают точные наблюдения, сопровождается крайне сложным рядом очень малых колебаний (нутаций). Теперь мы едва-ли можем себе представить, сколь громадные затруднения составляло понимание системы мира Коперника для

---

[1]) Статья первоначально была напечатана в журнале «Die Naturwissenschaften» (авг. 1921 г.), а в дополненном виде выпущена отдельной книжкой издательством J. Springer'a. С этого издания и сделан настоящий перевод. Ред.

его современников, но мы понимаем тот живой интерес, доходивший почти что до духовного подъема во время опытов с маятником Фуко, который даже и в настоящее время появляется по отношению ко всем непосредственным доказательствам движения земли.

Лорд Кельвин, впрочем, проводит строгое различие между наблюдением и опытом как основанием доказательства. Важнейшими основаниями для системы Коперника являются, конечно, астрономические наблюдения (видимое суточное вращение небесного свода и параллаксы неподвижных звезд, аберрация света, прецессия полюса мира); сюда присоединяются как дальнейшие основания многочисленные геофизические наблюдения [1]) (сплющенность земли, закон Бейс-Балло об отклонении воздушных и морских течений, закон Бэра о более сильном размывании правого берега рек в северном полушарии и левого в южном и, наконец, существование земного магнетизма, поле которого, по предположению А. Эйнштейна [2]), может быть вполне объяснено как динамическое следствие потока электронов, возникающего при вращении земли).

При большом числе этих наблюдений опыт играет только скромную роль, но все же значительную постольку, поскольку он без помощи астрономии дает нам сведения относительно движения земли путем чрезвычайно остроумного применения законов природы. Число таких опытов гораздо больше, чем обыкновенно думают, и тем более стоит привести их в стройную систему [3]), ибо наиболее известные из них отнюдь не являются самыми лучшими, а наиболее гениальные менее всего известны. Кроме механических опытов, которыми мы ограничимся, существуют еще некоторые элекромагнитные. Из них самый важный — оптический интерференционный опыт А. Майкельсона для доказательства движения земли — получил свое исключительное значение благодаря тому, что привел к отрицательному результату. Отрицательный результат всех немеханических опытов ал повод к установлению принципа относительности. Ввиду важных следствий этого принципа необходимо также выяснить его отношение к механическим опытам.

Здесь следует отметить, что принцип относительности Эйнштейна (в его обобщенном представлении 1915 г.) лишил все доказательства движения земли абсолютной силы, ибо эти доказательства должны опираться на представление абсолютного пространства Ньютона. Мы знаем уже давно, что система Коперника вообще недоказуема, что она находит себе оправдание только в своей исключи-

---

[1]) Об этом общедоступно излагается в книжке W. Brunner. Dreht sich die Erde? Math. physikal. Bibliothek, Leipzig und Berlin. 1915, Bd. 17, S. 46 и след.

[2]) A. Einstein und J. W. de Haas, Verhandl. d. dtsch. phys. Ges., 17, 156, 1915.

[3]) Превосходное краткое изложение принадлежит J. G. Hagen'y. La rotation de la terre, ses preuves mécaniques anciennes et nouvelles. Publicazioni della Specola Astronomica Vaticana, 2 серия, I. Roma 1912.

тельной простоте, ясности, отсутствии противоречий, и ни в чем другом. Но тогда как раньше нужно было только допустить общепринятые основные законы механики и тяготения, чтобы иметь возможность на основании опытов сделать необходимое заключение о движении земли, по установлении теории относительности становится принципиально допустимым объяснить каждый из этих опытов иначе, чем движением земли, не входя в противоречия и не вводя какого-либо изменения в релятивистические законы природы.

Так, например, вместо вращения земли можно предположить влияние громадных вращающихся далеких масс, как это делал уже Э. Мах[1]) и недавно строго обосновал Тиринг (H. Thirring)[2]). Следовательно принудительная сила всех доказательств вращения земли вокруг своей оси простирается именно настолько, насколько вероятно субъективное убеждение в отсутствии этих вращающихся далеких масс.

Конечно, ничего нельзя возразить против их существования; их можно просто себе представить как совокупность неподвижных звезд; затруднение заключается единственно в том, что им приписывается необычайно большое вращение. Так как в этом вращении принимали бы участие все звезды, до самых отдаленных глубин пространства, то мы пришли бы к таким скоростям, которые должны превосходить всякие границы. Эту невероятность можно было бы избежать только при допущении, что совокупность неподвижных звезд наполняет только одну конечную замкнутую область бесконечно простирающегося мирового пространства. Но такое допущение, как доказал Эйнштейн[3]), физически неосновательно.

С точки зрения точной науки решение складывается, как на основании данных опыта, так и в пределах принципа относительности 1915 г., несомненно в пользу вращения земли. Но Эйнштейн в 1917 году признал, что как в ньютоновской, так и в его собственной (неразрывно связанной с принципом относительности) теории тяготения 1915 г. есть принципиальное, трудно устранимое несоответствие, возникающее на почве пространственной бесконечности мира. Этого несоответствия, кажется, нельзя избежать никаким другим способом, как если вместо пространственно бесконечного мира предположить хотя неограниченный, но конечный мир. Такое смелое, однако совершенно неопровержимое с гносеологической точки зрения и едва ли оспоримое с точки зрения астрономической, допущение приводит [здесь это не может быть подробно развито[4])], к расширению Эйнштейновской теории тяготения 1915 г. и вместе с

---

[1]) E. Mach. Die Mechanik in ihrer Entwicklung. 2. Kap. 6,5 (4 Aufl. S. 242 f).

[2]) H. Thirring. Phys. Zeits hr. 19, 33. 1918 и 22, 29. 1921, а также A. Koppf, ebenda 22, 24. 1921 и A. Koppf, Naturwissenschaften, 9,9. 1921.

[3]) A. Einstein. Sitzungsber. d. preuss. Akad. d. Wiss. Berlin, 1917, S. 142.

[4]) См. хотя бы A. Koppf. Grundzüge der Einsteinschen Relativitätstheorie. Leipzig. 1921, S. 165 и 186.

тем вообще к самому строгому и самому последовательному проведению принципа относительности в том смысле, что все без исключения движения теперь должно считать относительными не только кинематически, как до сих пор, но и динамически.

В применении к случаю вращения земли это должно означать следующее: кинематически твердо установленное относительное движение земли и мира неподвижных звезд может быть по прежней теории 1915 г. динамически объяснено только вращением земли, но отнюдь не вращением неподвижных звезд, ввиду неограниченного возрастания их скоростей. Новая теория 1917 г., напротив, может больше не бояться скоростей, так как ее мир конечен. И динамически не представляется больше затруднений доказать, что все земные явления, причиной которых мы считали вращение земли, должны точно так же протекать и в том случае, если бы земля стояла неподвижно, а мир неподвижных звезд вращался; или, другими словами, что силы тяготения, с которыми вращающийся конечный мир неподвижных звезд действует на неподвижную землю, вполне объясняют явления инерции, которые мы со времен Коперника привыкли считать следствием вращения земли. Это обстоятельство неизбежно приводит к выводу, что все опыты, которые должны доказывать вращение земли, теперь с одинаковым правом могут считаться за доказательства вращения неподвижных звезд. Обе кинематически равноправные возможности — вращение земли относительно неподвижных звезд или вращение неподвижных звезд относительно земли — стали теперь равноправными и в динамическом смысле. Вместе с этим они вообще более не отличаются друг от друга и являются гносеологически тождественными; теперь они играют только второстепенную роль двух различных наименований для одного и того же явления — относительного вращения земли и мира неподвижных звезд.

Их можно пожалуй сравнить с терминами „внизу“ и „вверху“. Подобно тому как при чисто физиологическом восприятии мирового пространства мы всегда невольно представляем низ и верх по свободному выбору, никогда не споря о том, что при этом называется „внизу“ и что „вверху“, — так и при описании этого относительного вращения можно пользоваться тем или другим термином, тем или иным определенно выбранным представлением. Это должно ясно вытекать из психологических данных, ибо мы привыкли непосредственно воспринимать только абсолютные движения, но отнюдь не относительное вращение, так что представляемые нами, исключающие друг друга возможности видимо совершенно совпадают.

С точки зрения теории тяготения 1917 г. оба утверждения — „земля вращается относительно покоящихся неподвижных звезд“ или „неподвижные звезды вращаются относительно покоящейся земли“ — одинаково ложны, а правильно только положение: „земля и мир

неподвижных звезд вращаются относительно друг друга". Стремиться доказать больше, чем взаимно-относительное вращение, совершенно излишне, потому что это гносеологически и фактически ничего больше не даст, кроме относительного вращения. Напротив, с этой крайней точки зрения ни на одну минуту не будет сомнения в том, которому из этих двух выражений—вращение земли или вращение неподвижных звезд—надо отдать предпочтение при описании самого явления, раз уж нельзя обойтись без какого-нибудь определенного термина. Во всяком случае представить себе, правда, конечный, но все же довольно обширный мир неподвижных звезд покоящимся, а маленькую землю вращающейся,—это не больше, чем дело вкуса; но, подобно тому как в мировом пространстве верх и низ можно не только переменить местами, но и перевернуть любым образом, так и для обозначения относительного вращения существуют не только две, но бесконечное множество равноправных возможностей,—и, может быть, было бы более приемлемым, допустить, что две неравные части, на которые разделяют мир при изложении относительного вращения, а именно маленькая земля и остальной громадный мир, вращаются обратно пропорционально своим величинам, так что мир неподвижных звезд вращается крайне медленно с востока на запад, а земля со скоростью, равной приблизительно скорости суточного вращения,—с запада на восток. Это допущение было бы золотой серединой между довольно горделивым представлением древних, по которому все вращается вокруг земли, и бесконечно скромным воззрением Коперника, по которому земля по отношению к остальной вселенной есть полное ничто, и вместе с тем выражало бы очень хорошо тот факт, что по эйнштейновской теории тяготения весь остальной мир бесспорно должен также испытывать гравитационное действие относительного вращения между ним и землей, хотя и в чрезвычайно слабой степени.

Итак, если разум и приходит теперь практически к решению с той же уверенностью, как и до принципа относительности, то мы должны все же в настоящее время выражаться по крайней мере осторожно. А именно, если мы учтем тот факт, что механические опыты, произведенные до сих пор, относились только к вращению земли, и если мы вместе с тем и в дальнейшем будем обращать наше внимание исключительно на вращение, то при современном состоянии познания природы мы можем сказать только одно: можно вполне доказать, что явления движения земных инертных масс, рассматриваемые относительно неизменно связанной с землей системы отсчета, происходят несколько иначе, чем они должны были бы происходить под влиянием всех известных нам земных сил на основании закона инерции; иначе говоря, эта земная система отсчета не обладает свойствами инерциальной системы (т.-е. системы, в которой имеет место закон инерции),

а отличается от последней совершенно определенным образом. Эти отклонения могут быть объяснены с точки зрения релятивистической механики относительным вращением между землей и остальным миром, а с точки зрения классической механики только вращением земли.

Несмотря на принципиальное различие между релятивистической и классической механикой, последняя все же дает для всех земных проблем результаты, численно весьма точно приближающиеся к результатам первой, так что мы, рассмотрев вопрос гносеологически, в дальнейшем можем, не смущаясь, стать на точку зрения классической механики. В этом смысле мы и будем тогда иметь право говорить прямо о „вращении земли".

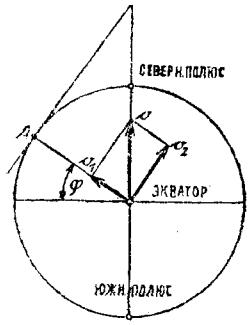


Рис. 1. Азимутальное и вертикальное вращение.

2. Механические основы. Для того, чтобы привести в систематический порядок чрезвычайно большое количество разнообразных опытов, могущих доказать вращение земли, полезно воспользоваться, образно выражаясь, „динамической постройкой с кинематическим подразделением". Чтобы ближе подойти к этому подразделению, представим скорость вращения земли—причину исследуемого отклонения земной системы отсчета от инерциальной системы—вектором $\mathfrak{o}$, проведенным от центра земли по направлению земной оси к северу (рис. 1) длиною

$$\omega = \frac{2\pi}{86164} \text{sec}^{-1}$$

(в числителе стоит угол, на который земля поворачивается в течение звездных суток, а в знаменателе — число секунд в звездных сутках).

По известному правилу разложения векторов, можно вращение $\mathfrak{o}$ разложить на два составляющих вращения $\mathfrak{o}_1$ и $\mathfrak{o}_2$. Первое представляет собою вращение горизонтальной плоскости места наблюдения A с широтой φ около вертикали с угловой скоростью

$$\omega_1 = \omega \sin \varphi; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

его мы будем называть азимутальным вращением. Оно исчезает только для мест наблюдения, находящихся на экваторе, и представляет на северном и южном полюсе полное вращение. Второе составляющее вращение вращает горизонталь около оси, проходящей через центр земли параллельно меридиану места наблюдения, с угловой скоростью

$$\omega_2 = \omega \cos \varphi, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

и называется **вертикальным вращением**. Оно исчезает только на обоих полюсах и совпадает на экваторе с полным вращением. В большинстве опытов дело идет об исследовании или азимутального или вертикального вращения в отдельности, а уже после этого приходят к кинематическому разделению этих опытов.

Затем вспомним о том, что основной закон динамики — закон импульса (заключающий в себе закон инерции в узком смысле), будучи применен к движению твердого или нетвердого тела, распадается на два закона, из которых первый управляет **поступательным движением** тела, а второй — его **вращением**. Первый, так называемый **закон движения центра тяжести** говорит, что в инерциальной системе центр масс тела (практически то же самое, что и центр тяжести) движется так, как в том случае, если бы в нем была сосредоточена вся масса и на него действовали бы все приложенные к телу силы, которые сообщают ускорение, направленное по их равнодействующей, т.-е. **равнодействующая сил векториально равна ускорению центра тяжести, умноженному на массу всего тела.**

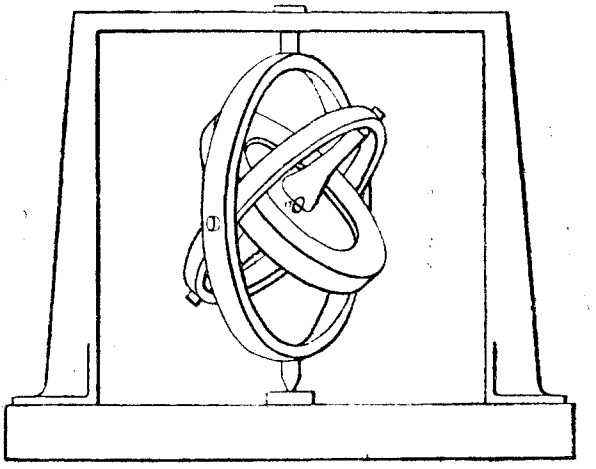


Рис. 2. Тело на кардановом подвесе.

Если равнодействующая равна нулю, то центр тяжести движется равномерно по прямой линии (сюда включается и случай покоя). Эта частная форма закона движения центра тяжести есть **закон инерции** для поступательного движения тела.

Для вращения тела закон импульса имеет столь же простое выражение, как и для поступательного движения, только в том случае, если вращение происходит около главной оси инерции, и все силы в совокупности обладают также стремлением вращать тело около этой оси. Это, например, бывает в том случае, когда, кроме сил, которые поддерживают ось, действует еще только одна, перпендикулярная к оси вращения и не пересекающая последнюю (действие рукоятки). Тогда вращение ускоряется (положительно или отрицательно) таким образом, что **момент этой силы**, т.-е. произведение из величины силы на ее расстояние от оси вращения (плечо), **равен произведению соответствующего момента инерции на угловое ускорение.**

В общем случае, когда вращение, как, например, при кардановом подвесе (рис. 2), может совершаться около любой оси, проходящей

через центр подвеса $\mathfrak{O}$ (так назыв. точку опоры), разлагают вектор угловой скорости тела $\mathfrak{u}$ на три составляющих $\mathfrak{u}_1$, $\mathfrak{u}_2$, $\mathfrak{u}_3$ по трем взаимно перпендикулярным осям, пересекающимся в точке $\mathfrak{O}$ и неизменно связанным с телом, а именно по трем главным осям инерции тела относительно точки $\mathfrak{O}$.

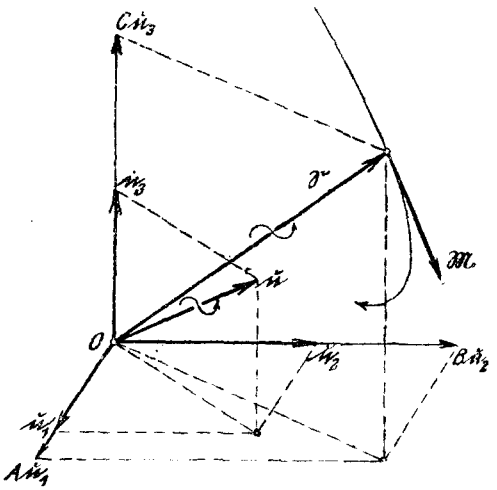


Рис. 3. Связь между векторами $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{M}$ при вращении тела около точки O.

Пусть A, B, C будут моменты инерции тела относительно этих трех осей; увеличим составляющие $\mathfrak{u}_1$, $\mathfrak{u}_2$, $\mathfrak{u}_3$ соответственно в отношении $A:1$, $B:1$, $C:1$, затем сложим полученные таким образом векторы $A\mathfrak{u}_1$, $B\mathfrak{u}_2$, $C\mathfrak{u}_3$ и получим вектор $\mathfrak{S}$, который мы назовем вектором импульса; он вообще имеет совсем не одинаковое направление с вектором $\mathfrak{u}$, так как числа A B и C обыкновенно не равны. При этом подразумевается, что как для вектора $\mathfrak{o}$, так и для $\mathfrak{u}$, и вообще для всех векторов осевого характера мы определяем направление представляемого вектором вращения по правилу винта с правой резьбой. В частности применим это определение также к моменту данной силы относительно точки $\mathfrak{O}$. Проведем (рис. 4) через точку $\mathfrak{O}$ и направление силы плоскость E, тогда момент также, как и сила, изобразится вектором, перпендикулярным к плоскости E в точке O и направленным так, что он по отношению к направлению вращения силы образует правый винт. Его длина будет, конечно, равна произведению силы на плечо. Сумма этих векторов-моментов $\mathfrak{M}$ (полученная посредством обыкновенного сложения векторов), определяет теперь вращение $\mathfrak{u}$ очень наглядным способом, а именно: вектор $\mathfrak{M}$ представляет скорость, с которой двигается в пространстве конец вектора $\mathfrak{S}$ (рис. 3). Это положение (вывод которого из закона импульса здесь не может быть приведен), носит название теоремы о моменте количества движения (Schwung-Satz) или закона о вращательном импульсе (Drehimpulssatz).

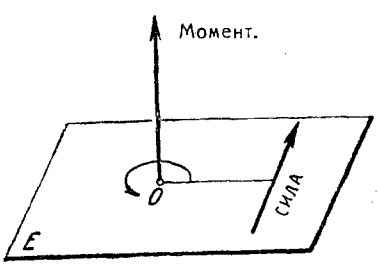


Рис. 4. Вектор момента силы.

Важный частный случай мы имеет также тогда, когда силы дают момент $\mathfrak{M}=0$; тогда импульс-вектор $\mathfrak{S}$ постоянен по направлению и

величине. Можно было бы этот более частный случай назвать законом инерции для вращательного движения тела; вследствие одного наглядного представления, которое он допускает, его называют законом площадей. Движение само по себе может однако при этом быть очень сложным[1]). Но оно делается опять особенно простым, когда тело с самого начала вращается около главной оси инерции. Тогда при $\mathfrak{M} = 0$ произведение из момента инерции на угловую скорость остается постоянным во время всего движения. Если тело твердое, то это значит что оно в течение долгого времени сохраняет свою скорость вращения; если тело не твердое и если его части могут быть перемещаемы между собой так, что ось вращения не перестает быть главной осью инерции, а главный момент инерции может становиться то менее, то более, то угловая скорость изменяется в обратной мере.

Термин „закон площадей" происходит от самого простого случая, когда точка массы m—планета—движется под действием силы, направленной к одному неподвижному центру O, солнцу. Если не обращать внимания на вращение, то движение планеты состоит в обращении вокруг солнца, и вектор $\mathfrak{u}$ этого вращения с абсолютной величиной u, проведенный из солнца, перпендикулярен к прямой, соединяющей планету с солнцем. Если r—расстояние планеты от солнца, а mr^2—ее момент инерции относительно оси вектора $\mathfrak{u}$, то импульс-вектор $\mathfrak{S}$ имеет величину

$$S = mr^2 u, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

и направлен одинаково с $\mathfrak{u}$.

Так как движущая сила притяжения по отношению к оси вращения не имеет момента, то вектор $\mathfrak{S}$ неподвижен в пространстве, а это прямо говорит, что также и $\mathfrak{u}$ остается неподвижным, т.-е. что планета движется все время в одной плоскости. Напишем далее вместо (3)

$$\frac{1}{2} r^2 u = \frac{1}{2} \frac{S}{m};$$

тогда в левой части будет площадь, описываемая радиусом-вектором r в единицу времени (взятую достаточно малой). Так как при $\mathfrak{M} = O$ значение S также не изменяется, то движение планеты происходит с постоянной секториальной скоростью $\frac{1}{2} r^2 u$ (второй закон Кеплера).

В более общем случае вращения вокруг любой оси, при $\mathfrak{M} = O$, закон о постоянстве секториальных скоростей имеет место для проекции движения на любую неподвижную плоскость; он имеет также место для проекции движения на неподвижную плоскость и тогда, когда вектор $\mathfrak{M}$ хотя и не равен нулю, но все время остается параллельным этой неподвижной плоскости.

Переходя от частного к общему, мы получаем теперь следующую динамическую схему:

Закон инерции	Закон площадей
Закон движения центра тяжести	Закон импульса.

Если мы оставим в стороне закон инерции (в более тесном смысле), так как практически невозможно совершенно изолировать тело от влия-

[1]) См. R. Grammel. Der Kreisel. Braunschweig 1920, § 1 и след.

ния всех сил, то нам остаются для приведения в систему наших опытов три других закона. И теперь речь идет о том, чтобы показать различия, которые происходят, если применять эти законы один раз к непринимающей участия во вращении инерциальной системе (тогда они объясняют обыкновенные движения тел), другой раз к земной системе отсчета, тогда они нам говорят, какие движения можно было бы наблюдать, если бы земля не вращалась. Для проверки этих различий принципиально годятся все механические явления; их выбор зависит только от требуемой точности наблюдения, которая благодаря малым эффектам должна быть достаточно велика.

Для практического вычисления гораздо удобнее законы движения центра тяжести и закон площадей применять также в их интегральной форме, в которой они гласят, что приращение кинетической энергии равно работе произведенной силами (закон энергии). При этом кинетическая энергия твердого тела слагается из кинетической энергии поступательного движения $\frac{1}{2} mv^2$ (v—скорость центра тяжести) и кинетической энергии вращательного движения $\frac{1}{2} (Au_1^2 + Bu_2^2 + Cu_3^2)$. Если речь идет только о тяжести как о двигательной силе, то произведенную ею работу называют также потерей потенциальной энергии, и тогда закон энергии кратко выражается так: сумма кинетической и потенциальной энергии постоянна.

I. Опыты на основании закона движения центра тяжести.

A. Исследование азимутального вращения.

3. Движение тела, брошенного горизонтально. Закон движения центра тяжести определяет сам по себе движение тела вполне только тогда, когда тело не имеет заметного объема и поэтому не обладает вращением от импульса, получаемого вследствие вращения земли. В действительности достаточно взять по возможности малое тело с возможно большим удельным весом и устранить всякое вращение тела. Если такая „материальная точка“ будет брошена с места наблюдения A так, что она должна остаться почти в горизонтальной плоскости, не будучи однако связаной с земной системой отсчета горизонтальными силами (трением и т. д.), то ее горизонтальная проекция должна была бы описать прямую линию в том случае, если бы земная система была инерциальной. Азимутальное вращение ω_1 земной системы отсчета выражается сообразно с этим кажущимся вращением $-\omega_1$ луча, идущего от A к мгновенной горизонтальной проекции брошенной точки по отношению к инерциальной системе. Это должно проявиться в отклонении выстрела от земной траектории в северном полушарии вправо а в южном влево, именно на величину $\omega_1 = \omega \sin \varphi$ в секунду, независимо от угла вылета и направления. Отклонение в наших широтах

должно дать ошибку свыше 2 mt. при средней скорости полета снаряда в 600 mt/sec., если цель находится на расстоянии 5 kmt.

Вообще отклонение от цели z при горизонтальной слагающей средней скорости полета снаряда v и при удалении цели a определяется формулой.

$$z = \frac{a^2}{v} \omega \sin \varphi$$

Многочисленные попытки исследовать эту ошибку не привели к положительному результату, потому что отклонение в сильной степени зависит от других влияний [1]). Эти влияния происходят от сопротивления воздуха, которое быстро возрастает с увеличением скорости. Чтобы их ослабить, нужно брать по возможности медленные движения.

4. Плоский математический маятник. Есть простое средство поддерживать совершенно закономерно такие медленные, почти горизонтальные движения, а именно математический маятник большой длины l и, в сравнении с ней, малой амплитудой a. Движение такого маятника, выведенного из положения покоя строго центральным горизонтальным толчком, отличалось бы от движения снаряда, кроме значительно меньшей скорости, только тем, что он всегда притягивался бы к своей точке равновесия силой, которая, при малых амплитудах, пропорциональна углу отклонения. Эта сила лежит всегда в плоскости качания, поэтому она влияет только так, что заставляет маятник все время двигаться в обратную сторону не изменяя пространственного положения плоскости качания. Так как, по предположению, высота маятника над горизонтальной плоскостью должна быть совсем незначительна, то это явление, как показывает строгое исследование, почти совершенно не зависит от вертикального вращения ω_2, а вместе с тем здесь должно также обнаружиться азимутальное вращение ω_1 через кажущееся вращение — ω_1 плоскости качания маятника. Кажущееся вращение происходит в северном полушарии в направлении $NOSW$, а в южном — обратном направлении; на экваторе оно совсем не происходит.

Величина кажущегося вращения, измеренная по окружности горизонтального круга K, радиуса a в точке A, будет равна $2\pi a \sin \varphi$ в 24 часа. Это есть, как легко можно вычислить, разность в длине двух земных, параллельных кругов при чем один проходит через центр, другой—через северную или южную точку круга K.

Но практически совершенно невозможно сообщить маятнику толчек достаточно точно-центральный. Поэтому, когда на самом деле производят этот опыт, пускают маятник всегда из его крайнего положения B так, что он не обладает никакой начальной скоростью относительно земли. Итак, маятнику сообщают сразу всю вращатель-

[1]) Ср. C. Cranz. Encykl., d. Math. Wiss, Bd. 4, Teilband 3, S. 224.

ную скорость земли, и ясно, что его движение будет протекать на самом деле иначе, чем идеальное движение при центральном толчке, и что и без оценки измененного таким образом отклонения от идеального движения эти опыты совершенно не имели бы значения.

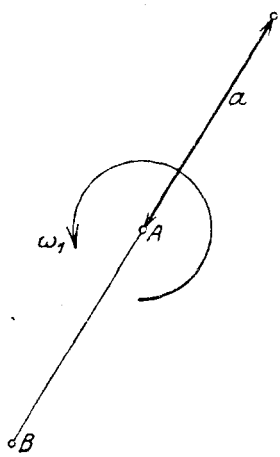


Рис. 5. Горизонтальная проекция траектории маятника отклоненного центральным ударом в точке А в инерциальной системе.

Поскольку при малых амплитудах, которыми мы хотим ограничиться, вопрос совершенно не касается вертикального вращения ω_2, мы можем пока считать за инерциальную систему горизонтальную плоскость, соединенную с землею в точке A, которая не участвует в азимутальном вращении ω_1 (на рис. 5 мы уже основывались на этом предположении). В этой инерциальной системе маятник при его пускании обладает скоростью

$$v_0 = a\omega_1, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

касательной к окружности K в направлении ω_1. Итак, с точки зрения инерциальной системы, мы вообще не имеем дела с плоским маятником, а с так назыв. сферическим, т.-е. с таким, масса которого не колеблется уже в одной плоскости, а может перемещаться по сфере радиуса l с центром в точке привеса.

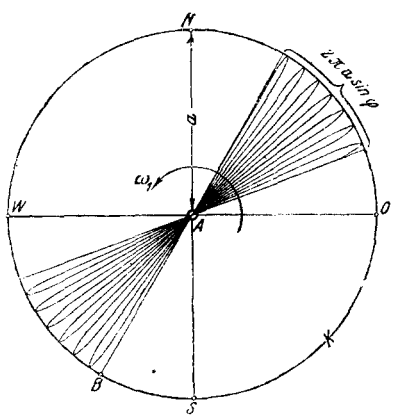


Рис. 6. Та же горизонтальная проекция в земной системе.

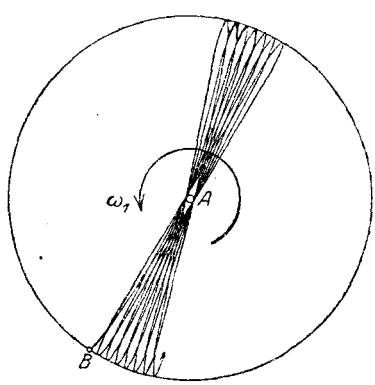


Рис. 7. Горизонтальная проекция маятника, пущенного из точки B относительно покоящейся земли, в инерциальной системе.

Имея достаточно легко осуществимый маятник на нити, можно убедиться в том, что горизонтальная проекция качающегося маятника представится теперь не в виде прямой линии (как на рис. 5), а как эллипс, при чем самый эллипс, при более точном наблюдении, обнару-

жит медленное вращение в направлении толчка (рис. 7); теория показывает, что вращение со скоростью ω происходит в направлении ω_1 с угловой скоростью

$$\omega' = \frac{1}{3}\omega_1 \left(\frac{a}{l}\right)^2 \quad . \; . \; . \; . \; (5)$$

так что кажущееся вращение траектории качания маятника, наблюдаемое с земли (рис. 8) теперь неравно $-\omega_1$, а будет: $-\omega_1 + \omega'$, или, вследствие (1) и (5)

$$-\omega \sin\varphi \left[1 - \frac{1}{3}\left(\frac{a}{l}\right)^2\right] \quad (6)$$

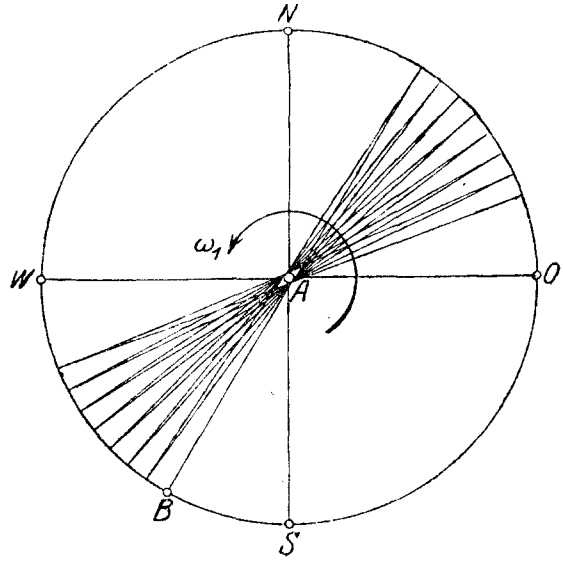


Рис. 8. Та же горизонтальная проекция с земной системы.

Поправочный член $\frac{1}{3}\left(\frac{a}{l}\right)^2$ должен приниматься во внимание при всех количественных опытах. Чтобы его по возможности уменьшить, делают или длину маятника l (большинство экспериментаторов) очень большой, или как Камерлинг-Оннес (Kammerlingh-Onnes), амплитуду a очень малой (срав. § 14).

При вычислении поправочного члена мы можем сразу пользоваться приближениями. Для этой цели мы определим положение маятника в инерциальной системе сферическими координатами ϑ и φ, при чем (рис. 9) ϑ будет отклонение стержня маятника и ψ—азимут его горизонтальной проекции относительно начального положения AB, считая положительное направление по вращению земли. Тогда скорость маятника сложится из радиальной, составляющей $l\dot{\vartheta}$ (точки на верху означают производные по времени), и азимутальной $l \sin\vartheta\, \dot{\psi}$; первая относится к качанию маятника, вторая — к движению его по эллипсу и вращению эллипса. В положении ϑ маятник обладает относительно своего положения покоя потенциальной энергией

$$mgl\,(1 - \cos\vartheta).$$

Уравнение энергии, по разделении на $\frac{1}{2}ml^2$ будет:

$$\dot{\vartheta}^2 + \sin^2\vartheta.\,\dot{\psi}^2 + 2c^2(1 - \cos\vartheta) = h, \quad . \; . \; . \; . \; (8)$$

при чем

$$c^2 = \frac{g}{l},$$

а h — постоянная, которую мы определим после.

Далее горизонтальная проекция l имеет секториальную скорость $\frac{1}{2}l^2 \sin^2\vartheta.\dot{\psi}$ откуда, по зак. площ., имеем

$$\sin^2\vartheta.\,\dot{\psi} = k, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (9)$$

где k также постоянная.

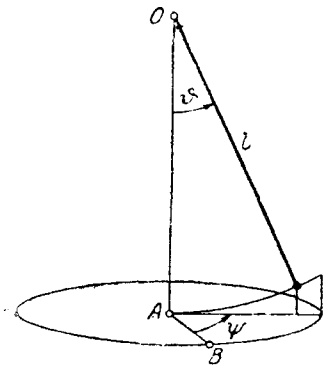


Рис. 9. Сферич. маятник.

Исключая $\dot{\varphi}$ из (8) при помощи (9) и заменив, в первом приближении, $\sin\vartheta$ через ϑ и $1-\cos^2\vartheta$ через $\frac{1}{2}\vartheta^2$, получим уравнение энергии в виде

$$\dot{\vartheta}^2 + \frac{k^2}{\vartheta^2} + c^2\vartheta^2 = h \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

Теперь мы считаем известным тот факт, что маятник качается взад и вперед между малой внешней угловой амплитудой $\vartheta_1 = \frac{a}{l}$ и еще значительно меньшей внутренней $\vartheta_2 = \frac{b}{l}$, где b —радиус малой окружности, которой горизонтальная проекция касается вблизи точки покоя A. Так как во внешнем и во внутреннем положениях маятника скорость $\dot{\vartheta}$ равна нулю, то на основании (10) получим

$$\frac{k^2}{\vartheta_1^2} + c^2\vartheta_1^2 = h$$

$$\frac{k^2}{\vartheta_2^2} + c^2\vartheta_2^2 = h,$$

откуда h и k^2 выразятся посредством ϑ_1 и ϑ_2 в виде

$$h = c^2(\vartheta_1^2 + \vartheta_2^2)$$

$$k = \pm c\,\vartheta_1\vartheta_2.$$

При помощи этих значений уравнение энергии (10) по извлечении квадратного корня получит вид

$$\dot{\vartheta} = \pm\frac{c}{\vartheta}\sqrt{(\vartheta_1^2-\vartheta^2)(\vartheta^2-\vartheta_2^2)}; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

при этом надо взять положительный или отрицательный знак, смотря по тому, возрастает ли ϑ от ϑ_2 до ϑ_1 или убывает от ϑ_1 до ϑ_2.

Возвратимся еще раз к закону площадей. Если мы там подставим значение k и выберем знак так, чтобы $\dot{\varphi}$ было положительным, и вместо $\sin^2\vartheta$ возьмем приближенное значение $\vartheta^2 - \frac{\vartheta^4}{3}$, то получим вместо (9),

$$\vartheta^2\left(1-\frac{\vartheta^2}{3}\right)\dot{\varphi} = c\,\vartheta_1\vartheta_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

от деления уравнений (11) и (12) и полагая

$$\frac{1}{\vartheta\left(1-\frac{\vartheta^2}{3}\right)} \cong \frac{1}{\vartheta}\left(1+\frac{\vartheta^2}{3}\right) = \frac{1}{\vartheta} + \frac{\vartheta}{3},$$

получим

$$d\varphi = \pm\vartheta_1\vartheta_2\left(\frac{1}{\vartheta}+\frac{\vartheta}{3}\right)\frac{d\vartheta}{\sqrt{(\vartheta_1^2-\vartheta^2)(\vartheta^2-\vartheta_2^2)}}.$$

Интегрируя по ϑ в пределах от ϑ_2 до ϑ_1, получим в левой стороне четвертую часть полного азимута для целого колебания, в то время как правая часть будет

$$\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{\vartheta_1\vartheta_2}{3}\right).$$

Таким образом получается

$$\Psi = 2\pi\left(1+\frac{\vartheta_1\vartheta_2}{3}\right).$$

Избыток величины Ψ сверх 2π, очевидно, дает вращение $\Delta\Psi$ эллипса в продолжение целого колебания. Если t_0 период, то угловая скорость, с которой эллипс медленно вращается, будет

$$\omega' = \frac{\Delta\Psi}{t_0} = \frac{2\pi}{3}\frac{\vartheta_1\vartheta_2}{t_0} = \frac{2\pi}{3}\frac{ab}{t_0 l^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

Чтобы проверить вполне совпадение этого значения с (5), стр. 347, мы должны вспомнить о том, что малая амплитуда колебания эллипса b происходит от скорости v_0 (4), которая сообщается маятнику от вращения земли ω_1; но если наблюдать качание в направлении большой полуоси эллипса a, то кажется, что маятник качается просто, как плоский, с амплитудой b и максимальной скоростью v_0, перпендикулярно к большой оси эллипса. При этом величины b и v_0 связаны с периодом колебания t_0,—как при каждом гармоническом колебании,—соотношением

$$v_0 t_0 = 2\pi b,$$

которое вследствие (4) переходит в

$$\frac{2\pi b}{t_0} = \omega_1 a,$$

откуда, на основании (13), прямо получается наше искомое уравнение (5) [1].

Что касается истории опыта, то общеизвестно, что после долгих приготовлений Фуко [2]) произвел его в январе 1851 г. с полным успехом в Париже на маятнике длиной в 67 mt. с продолжительностью качания в 16 sec. Известно также, что этот опыт почти в годичный срок совершил свое триумфальное шествие по всей земле, при чем вращение земли получилось в некоторых случаях с ошибкой до $^1/_2\%$, (следовательно, величина суток—с точностью почти до 7 min), а при одном опыте, поставленном в Кельне [3]),—даже до $^1/_6\%$. Менее известен тот факт, что опыт с некоторыми количественно удовлетворительными результатами [4]) был произведен уже в 1661 г. Вивиани во Флоренции и в 1833 г. Бартолини в Римини, о чем Фуко во всяком случае не знал. Как о курьезе, можно еще упомянуть, что Калиш установил в Бармене обыкновенные часы с маятником, которые могли вращаться на вертикальных стальных остриях, и мог отчетливо наблюдать видимое вращение часов, при чем количественный результат получился с ошибкой в 10%.

5. Математический конический маятник. Доказательная сила опыта Фуко уменьшается, несмотря на его известность, тем, что ему недостает свойства обратимости, которое только одно делает возможным надежное устранение всех систематических ошибок, т.-е. этот опыт невозможно обратить таким образом, чтобы все системати-

---

[1]) В зависимости от степени точности приближенного вычисления в литературе встречается вместо фактора $\frac{1}{3} = \frac{8}{24}$ также факторы $\frac{7}{24}$ и $\frac{9}{24}$; см. также Tisserand. Bull. Sciences Math. 1881.

[2]) L. Foucault. Recueil des travaux scientifiques, изд. C. M. Garriel и J. Bertrand. Paris 1878, стр. 378. (Comptes rendus 32, 135. 1851.)

[3]) C. Garthe. Foucaults Versuch usw. Köln. 1852.

[4]) См. J. G. Hagen, loc. cit, стр. 8.

ческие ошибки вошли с обратным знаком. Этот недостаток, кажется, первым заметил Бравэ [A. Bravais [1])]. Вскоре после Фуко, уже в мае 1851 г., Бравэ предпринял новый хорошо удавшийся опыт, сообщая маятнику не плоские, а конусообразные качания таким образом, что масса маятника должна была описывать горизонтальный круг, один раз в одном направлении, а в другом опыте—в противоположном направлении. В зависимости от направления вращения получились при этом различные периоды оборота. А именно, если ε_0 есть истинная угловая скорость конического маятника относительно инерциальной системы, ε_1—его кажущаяся угловая скорость относительно земной системы в направлении $NOSW$, а ε_2—та же скорость, но для направления $NWSO$,—то:

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \varepsilon_0 + \omega_1\\ \varepsilon_2 &= \varepsilon_0 - \omega_1\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

и, следовательно, на основании (1), стр. 340

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = 2\omega_1 = 2\omega \sin\varphi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

Разность $\varepsilon_1 - \varepsilon_2$ Браве нашел, сообщая маятнику в 10 mt. длины возможно точное движение по круглому конусу посредством горизонтально вращающегося рычага, и определяя относительные периоды оборота посредством визирования через нить маятника на неподвижную относительно земли прямую, совпадающую с положением равновесия.

Для еще более точных измерений Бравэ применил два маятника, подвешенные один за другим в направлении визирования, которые различались по длине на $^1/_{100}$ и, следовательно, по периоду оборота на $^1/_{200}$. Для сокращения введем легко понятное обозначение.

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon'_1 &= \varepsilon'_0 + \omega_1\\ \varepsilon'_2 &= \varepsilon'_0 - \omega_1\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

Тогда из (14) и (16) следует

$$(\varepsilon'_1 - \varepsilon_2) - (\varepsilon'_2 - \varepsilon_1) = 4\omega_1 = 4\omega \sin\varphi \quad \ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

Первый опыт, при котором более короткий маятник вращался по направлению $NOSW$, а более длинный—по направлению $NWSO$, дал, посредством наблюдения совпадения обоих маятников и вычисления колебаний между двумя совпадениями, первую из разностей левой части (17), а второй опыт, с противоположным направлением оборотов,—вторую.

Принимая еще в расчет поправки, которые обусловливаются отклонениями траекторий маятника от точной формы окружности (эта форма устанавливается постепенно), Бравэ нашел значение ω с одним маятником с точностью до 3,8%, а с двумя — почти до 1%.

[1]) A. Bravais. Comptes rendus 32, 166. 1851 и 33, 195. 1851.

сли, несмотря на это, его опыт, в противоположность опытам Фуко, известен гораздо меньше, и никогда больше не повторялся, то это можно объяснить тем, что наблюдения расхождений времени у маятника Бравэ дают меньшее впечатление, чем наблюдения пространственных отклонений при опыте Фуко, — и вообще, опыт Фуко действует на людей гораздо более непосредственно и убедительно, чем столь же ценный в научном отношении опыт Бравэ. Впрочем следует отметить, что опыты Фуко и Бравэ являются только последними в целом ряду возможных опытов над качаниями сферического математического маятника (см. § 14).

Б. Исследование вертикального вращения.

6. Весы. Полное исследование вращения земли ω без астрономических наблюдений, которые были бы необходимы для определения географической широты φ, требует, строго говоря, также и определения вертикального вращения места наблюдения $\omega_2 = \omega \cos \varphi$. Для этого неоднократно пытались применить явление инерции вращающегося тела, которое обычно называют центробежной силой.

Все земные тела подвержены центробежной силе, происходящей от вращения земли ω. Вертикальное вращение ω_2 в частности имеет следствием то обстоятельство, что вес тела, находящегося в покое на поверхности земли, несколько меньше, чем тот, который получается вследствие одного притяжения земли. Можно было бы сейчас же сделать заключение относительно величины ω_2, если бы мы были в состоянии разделить притяжение земли и центробежную силу; но этого нельзя выполнить непосредственно при помощи весов, ибо они указывают всегда только разность обеих сил. Тем не менее, если подняться с телом на высоту h над поверхностью земли, то изменятся как центробежная сила, так и притяжение земли. Так как это изменение происходит по различным законам, то требуемое разделение обеих составных частей можно осуществить посредством нового взвешивания, после чего легко можно вычислить значение ω_2. Само собой разумеется, что при обоих взвешиваниях гири должны находиться на одной и той же высоте; поэтому весы нужно установить на высоте h, а тело взвешивать один раз на самой чашке весов, а другой раз, привязав его к чашке весов посредством тарированной нити длиною h.

Если m — масса тела, g — ускорение силы тяжести у поверхности земли и R — радиус земли, то центробежная сила (точнее, ее вертикальная составляющая) у поверхности земли будет иметь значение $mR\omega_2^2$. Определяемый вес будет при этом

$$G = mg - mR\omega_2^2 .$$

На высоте h над поверхностью земли определяемый вес выразится,—если принять во внимание, что уменьшение тяжести пропорционально квадрату расстояния

от центра земли, а увеличение центробежной силы пропорционально первой степени этого расстояния,—то:

$$G = mg\frac{R^2}{(R+h)^2} - m(R+h)\omega_2^2.$$

Полагая с достаточной точностью

$$\frac{R^2}{(R+h)^2} \cong 1 - \frac{2h}{R},$$

посредством вычитания получим

$$G - G' = \frac{2mgh}{R} + mh\omega_2^2,$$

тогда

$$\frac{G-G'}{G} = \frac{h}{R}\cdot\frac{2g + R\omega_2^2}{g - R\omega_2^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

Если путем взвешивания найдена величина

$$\frac{R}{h}\cdot\frac{G-G'}{G} = A,$$

то из (18) получим

$$\omega_2^2 = \frac{g}{R}\,\frac{A-2}{A+1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

Правда, несмотря на некоторые попытки, до сих пор не удалось провести взвешивания с такой точностью, чтобы можно было считать исследование вертикального вращения посредством этого способа выполненным.

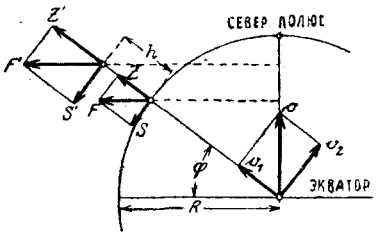


Рис. 10. Вертикальные и горизонтальные компоненты центробежной силы земли на различных высотах.

7. Крутильные весы. Несколько большего успеха можно ожидать если измененить этот опыт таким образом, что вместо простых весов воспользоваться крутильными весами. Применение крутильных весов, принимая во внимание их необыкновенную чувствительность, основано на том, что вследствие присоединения азимутального вращения ω_1, направление центробежной силы на самом деле не вертикально, а параллельно плоскости земного экватора (рис. 10). Мы уже говорили относительно вертикальных компонентов Z и Z' центробежной силы; но при этом имеются еще южные компоненты S и S', разность ΔS которых, как сила горизонтальная, должна хорошо определяться посредством крутильных весов.

Центробежная сила имеет на поверхности земли величину

$$F = mR\cos\varphi.\,\omega^2,$$

а на высоте h над землей

$$F' = m(R+h)\cos\varphi.\,\omega^2.$$

Ее южные компоненты

$$S = mR\omega^2\cos\varphi\sin\varphi = mR\omega_1\omega_2,$$
$$S' = m(R+h)\omega^2\cos\varphi\sin\varphi = m(R+h)\omega_1\omega_2$$

имеют разность

$$\Delta S = mh\omega^2\cos\varphi\sin\varphi = mh\omega_1\omega_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (20$$

Соответствующий опыт, кажется, был уже произведен в 1832 году Хенглером[1]); он был повторен в 1910 году Хагеном[2]) с лучшим результатом, но все же без удовлетворительной точности. Но он имел, по крайней мере, значение в том отношении, что несомненно показал ожидаемое отклонение крутильных весов. Если весы, которые у Хагена состояли из бифилярно привешенного блока с горизонтальной осью, установлены с востока на запад (ось блока с юга на север), и если в начале восточная масса висит ниже западной, то коль скоро западная масса будет опущена вниз, а восточная поднята кверху, весы должны отклониться в направлении $NOSW$.

8. Вращающиеся весы. Как с простыми, так и с вращающимися весами опыты необыкновенно затруднены тем обстоятельством, что в том и другом случае должы быть измерены эффекты величиной порядка ω^2. Это происходит от того, что в произведении $R\omega^2$, которое входит в величину центробежной силы, до сих пор изменялся только первый фактор. Но вместо этого можно первый фактор сделать постоянным, а изменять второй, и, именно, таким образом, что просто придавать испытываемому телу горизонтальную скорость v по направлению на восток или на запад. В первом случае, так сказать, увеличивают вертикальную скорость ω_2, во втором ее на столько же уменьшают, так что масса m испытуемого тела подвергается в первом случае увеличенной, во втором—уменьшенной центробежной силе, и, таким образом, вес ее соответственно уменьшается или увеличивается.

А именно, вертикальный компонент центробежной силы во время движения будет

$$mR\left(\omega_2 \pm \frac{v}{R}\right)^2.$$

Раскрывая скобки и отбрасывая при этом v^2, как очень малое по сравнению с $R^2\omega_2^2$ (квадрат окружной скорости вращения земли) для не очень высоких географических широт, получим величину потери или приращения в весе

$$\Delta G = \mp 2mv\omega_2 = \mp 2mv\omega \cos\varphi, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (21$$

что дает для тела весом в 1 kg. при скорости в 1 mt/sec в наших широтах уже около $\mp$ 10 mgr.

На эти различия в весе указывал Этвеш (R. Eötvös) по поводу произведенных Геккером (Hecker) на море измерений тяжести (1901—1908 г.г.). По предложению Этвеша[3]) производить этот опыт в лаборатории лучше всего при помощи коромысла весов, несущего на концах массы равной величины, которое может качаться около горизонтальной оси. Если посадить на штатив коромысла шкив (рис. 11) и равномерно вращать его около вертикальной оси, то

---

[1]) Hengler. Dinglers polyt. Journ. 43, 81. 1832.

[2]) J. G. Hagen, loc. cit., стр. 151.

[3]) R. Eötvös. Ann. d. Physik (4) 59, 743. 1919. Ср. также. D. Pekar. Naturwissenschaften, 7, 389. 1919.

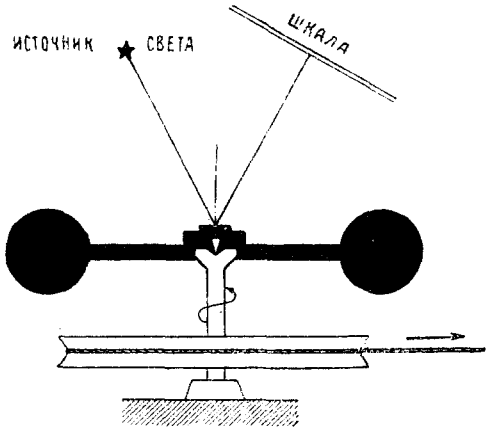


Рис. 11. Расположение опыта Этвеша.

массы двигаются попеременно на восток и на запад; их веса пульсируют в ритм вращения и производят колебания коромысла около горизонтальной оси. Эти колебания будут самыми большими и лучше всего доступными для наблюдения тогда, когда они придут в резонанс с собственными колебаниями коромысла. Этвеш, который произвел такой демонстрационный опыт в 1917 г., также показал, каким образом при этом можно сравнительно простыми средствами произвести измерения высокой точности.

Кроме того, заметим, что все опыты этой группы (§§ 6, 7 и 8) обладают свойством обратимости.

II. Опыты, основанные на законе площадей.

А. Доказательство азимутального вращения.

9. Изотомеограф. 1851 г. известен не только опытами над маятником Фуко и Бравэ. В этом же году Пуансо[1]) предложил применить закон площадей для доказательства азимутального вращения. Пуансо исходит из того, что находящееся в покое относительно системы, связанной с землей, тело, главная ось инерции которого вертикальна, а момент инерции относительно этой оси равен A, получает вследствие азимутального вращения ω, импульс $A\omega$, (ср. Введ., стр. 342), вертикальный вектор которого не изменяет ни своей величины, ни своего направления относительно земной системы при условии, если вращающий момент $\mathfrak{M}$ относительно вертикальной оси равен нулю Для достижения этого достаточно подвесить тело так, чтобы не было ни трения, ни кручения. Если от действия одних внутренних сил в теле происходят перемещения масс, вследствие чего момент инерции получает новое значение A', то и скорость вращения должна измениться так, чтобы импульс не изменил своего значения, т.-е.

$$A'\omega_1 = A\omega_1,$$

ибо внутренние силы, по закону действия и противодействия, попарно уничтожаются и поэтому не дают никакого момента. После переме-

[1]) L. Poinsot. Comptes rendus 32, 206. 1851 г.; см. также Tessan, там же, стр. 504.

щения масс наступает уменьшение или увеличение фактической угловой скорости в таком размере, в каком при этом соответственно увеличился или уменьшился момент инерции, и таким образом происходит кажущееся азимутальное вращение тела относительно системы земли с угловой скоростью

$$\varepsilon = \omega_1' - \omega_1 = \omega_1\left(\frac{A}{A'} - 1\right), \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (22),$$

которую будем считать положительной в направлении *NWSO*.

Опыт был произведен с большим успехом в 1910 и 1911 г.г. и с удесятеренной точностью в 1919 г. Хагеном[1]) таким образом: горизонтальная балка (рис. 12) была подвешена посредством бифиляра и снабжена подвижными придаточными массами, которые могли передвигаться совершенно симметрично относительно середины балки в обе стороны.

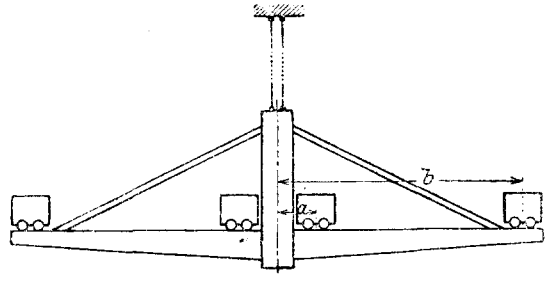


Рис. 12. Изотомеограф Хагена.

Пусть m означает сумму этих придаточных масс, a — наименьшее и b — наибольшее расстояние их от вертикальной средней оси балки; пусть вначале балка находится в покое относительно земли, при чем придаточные массы занимают ближайшее положение относительно оси балки; тогда

$$A = A_0 + a^2 m, \quad A' = A_0 + b^2 m,$$

где A_0 — момент инерции самой балки. После перемещения масс на концы балки должно появиться в первое мгновение вращение в направлении *NOSW*, угловая скорость которого, на основании (22), будет

$$\varepsilon_1 = \frac{(b^2 - a^2)m}{A_0 + b^2 m}\,\omega_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (23)$$

На это вращение, конечно, сейчас же начнет оказывать влияние тормозящий момент подвеса, который дает повод к возникновению горизонтальных крутильных колебаний балки; начальная угловая скорость E_1 получится тогда известным способом из амплитуды, периода колебаний и логарифмического декремента. Точно так же если придаточные массы в то время, как балка была в состоянии покоя, находились на концах балки, то передвижение масс к ее оси вызовет вращение с угловой скоростью

$$\varepsilon_2 = \frac{(b^2 - a^2)m}{A_0 + a^2 m}\,\omega_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (24)$$

в направлении *NWSO*. Эта скорость будет больше, чем ε_1, так как $a < b$.

Хаген, по предложению Стефанос (C. Stephanos), назвал свой апарат изотомеограф (от греч. ἴσος = равный, τομεύς = площадь сектора (ср. 2-й закон Кеплера, стр. 343) и изменил его еще в том отно-

[1]) J. G. Hagen, loc. cit., стр. 135 также 2 прибавление, стр. 9 и Zeitschrift f Instr.-Kunde 40, 65. 1920.

шении (рис. 13), что вместо балки взял вертикально подвешенную раму (b), в которой находятся три четыреугольника, сделанные из аллюминиевых трубок и могущие вращаться около горизонтальной оси (a); (на чертеже I три четыреугольника покрывают друг друга, а на черт. II находятся рядом). Придаточные массы (m) помещены на противолежащих углах каждого четыреугольника так, что на переднем и заднем четыреугольниках находится $\frac{1}{4}m$, а на среднем $\frac{1}{2}m$. Передний и задний четыреугольники поворачивались на 90° в одну сторону, а средний—на 90° в другую, так что перед вращением все массы находились или на вертикальной оси аппарата, или на горизонтальной оси, перпендикулярной к оси вращения четыреугольников.

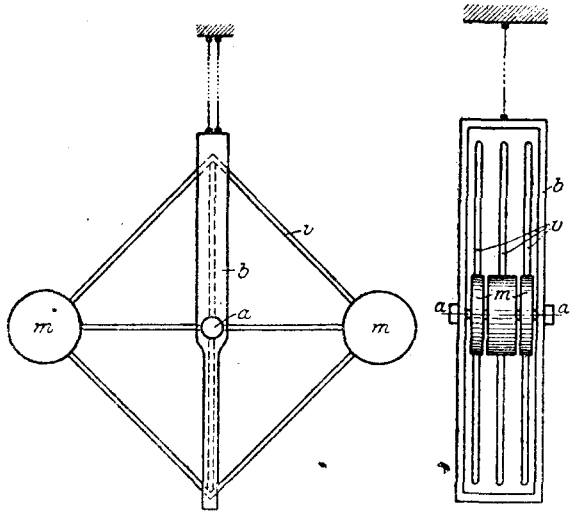


Рис. 13. Вторая форма изотомеографа Хагена. Вид спереди и сбоку.

Большая точность, которой в конце концов достиг Хаген (ω_1 получилась с точностью до третьего десятичного знака), весьма существенно зависела от того обстоятельства, что эти опыты обладают ценным свойством обратимости, как это видно из формул (23) и (24).

10. Гидравлический опыт. Если применить закон площадей к потокам жидкости, как это впервые сделали Перо (Perrot)[1]) и Комб (Combes)[2]) в 1859 г., то получится интересное видоизменение только что изложенного опыта. Опыт был выполнен с некоторыми количественными результатами О. Тумлирцем (O. Tumlirz)[3]) в 1908 г. таким образом, что вода втекала в пространство, заключенное между двумя горизонтальными круглыми стеклянными пластинками в строго радиальном направлении, и стекала в центре.

Когда окрашенные соответствующим способом струйки сделались видимыми, то они обнаружили заметную спиральную структуру

---

[1]) Perrot. Comptes rendus 49, 637. 1859.

[2]) Combes. Ebenda, стр. 775.

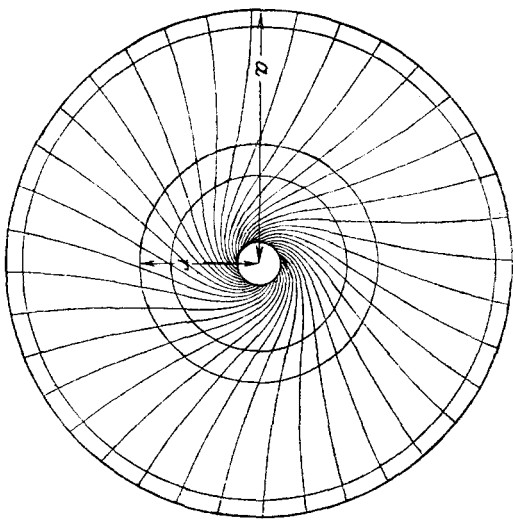
[3]) O. Tumlirz. Sitzungsber. Wien, 117. 1908; Math. Naturw. kl., 2 Abt., стр. 819.

(фиг. 14) вместо чисто радиальной, которую они должны были бы обнаружить в инерциальной системе.

Действительно, каждое жидкое кольцо, в тот момент, когда все его частицы одновременно снаружи попадают в область между пластинками, имеет, вследствие азимутального вращения ω_1, известный импульс, который оно стремится неизменно сохранить. В той же мере, в какой кольцо стягивается и этим уменьшает свой момент инерции, должна увеличиться его угловая скорость вращения в направлении ω_1, откуда непосредственно следует спиральное течение окрашенных струек.

Легко также получить вид спиральных кривых. Пусть a—радиус пластинки; рассмотрим только одно жидкое кольцо с массой dm с того момента, когда оно с моментом инерции a^2dm вступает в область между пластинками с угловой скоростью ω_1, до того момента, пока оно не сократится до радиуса r и будет иметь момент инерции r^2dm и угловую скорость ω'_1. Обозначим его угловую скорость вращения относительно земной системы через $\frac{d\lambda}{dt}$: тогда, на основан (22), стр. 355 будем иметь

$$\frac{d\lambda}{dt} = \omega_1\left(\frac{a^2}{r^2} - 1\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (25).$$



Фиг. 14. Горизонтальный радиальный поток под действием вращения земл

Если принять в соображение, что количество жидкости, протекающее в единицу времени через поверхность соосного (коаксиального) с пластинками цилиндра радиуса r при радиальной скорости $\frac{dr}{dt}$ и расстоянии между пластинками b равно

$$2\pi r b \frac{dr}{dt},$$

и что оно должно быть, вследствие непрерывности, одним и тем же для всех значений r, то можно положить

$$\frac{dr}{dt} = \frac{c}{r}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (26$$

где c — постоянная, которую легко определить. Разделив друг на друга уравнения (25) и (26), получим дифференциальное уравнение линий тока в виде:

$$\frac{d\lambda}{dr} = \frac{\omega_1}{c}\left(\frac{a^2}{r} - r\right),$$

интеграл которого

$$\lambda - \lambda_0 = \frac{\omega_1}{c}\left(a^2 \ln r - \frac{r^2}{2}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (27)$$

дает в полярных координатах (r, γ) уравнение семейства спиральных кривых, которые наблюдал Тумлирц (γ_0 есть параметр, соответствующий данной кривой семейства).

До сих пор не удавалось произвести опыта, вполне удовлетворительно в количественном отношеним, так же, как и не удавалось обращение опыта, т.-е- радиальный поток из середины наружу с противоположным, но меньшим эффектом.

В. Доказательство вертикального вращения.

11. Движение брошенного тела. Чтобы доказать при помощи теоремы площадей вертикальное вращение ω_2, нужно, в первую очередь, воспользоваться движениями в вертикальной плоскости E, перпендикулярной к плоскости меридиана места наблюдения A, а следовательно и к вектору $\mathfrak{v}_2$ (ср. рис. 1, стр. 340). Представим себе, например, два тела, брошенные в пустоте с равными начальными скоростями v при одинаковых углах возвышения α, одно на восток, а другое на запад (рис. 15); тогда к вектору $\mathfrak{v}$ нужно приложить, по правилу сложения векторов, вектор скорости места наблюдения $\mathfrak{v}$, направленный на восток. Абсолютное значение $\mathfrak{v}$ есть

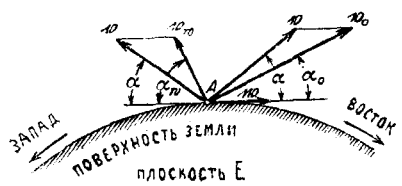


Рис. 15. Кажущиеся и истинные направления вылета при восточном и западном выстрелах.

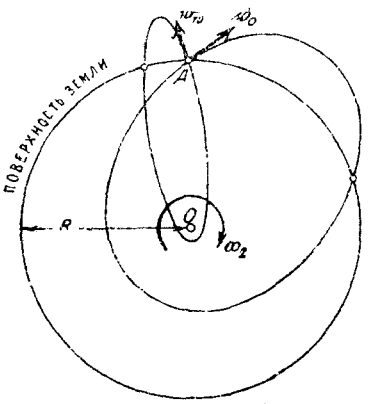


Рис. 16. Траектории полетов при восточном и западном выстрелах.

$$w = R\omega_2 = R\omega \cos\varphi,$$

где R—радиус земли. Если α не равно нулю, то истинный угол возвышения α_0 для тела, брошенного на восток, будет, очевидно, меньше, чем тот же угол α_w для тела, брошенного на запад; при этом истинная начальная скорость $\mathfrak{v}_0$ восточного будет больше, чем та же скорость $\mathfrak{v}_w$ для западного. Тела описывают дуги эллипсов Кеплера, один фокус которых есть центр земли O (рис. 16 — продолжение рис. 15 в той же плоскости чертежа). Ясно, что эти эллипсы должны быть совершенно различны и что наименьшие расстояния их от центра земли весьма различны. Тем не менее, оба движения происходят различно также и для земного наблюдателя. Точное вычисление [1]) показало бы

[1]) См. S. D. Poisson. Journ. de l'Ecole Polyt. 16, 1838, тетрадь 26.

что для большего угла возвышения дальность полета для тела, брошенного на восток, была бы несколько меньше, чем для тела, брошенного на запад, а при малом угле возвышения — действие совершенно обратное. Разница настолько незначительна, что в действительности она совершенно пропадает, вследствие неравномерности сопротивления воздуха и неточности бросания. По крайней мере, неоднократно повторенные опыты над выстрелами, даже при углах возвышения в 90°, не обнаружили ни малейшего эффекта. Можно, однако, с достаточной вероятностью предположить, что эффект получился бы, если бы (сравни §§ 3 и 4) опыты были произведены с весьма незначительными скоростями, но до сих пор это не было сделано.

Хотя сопротивление воздуха, как уже было упомянуто, сильно влияет на траекторию, тем не менее, дальность полета, по крайней мере, для обоих крайних случаев (для горизонтального направления на восток и на запад и для вертикального направления вверх) может быть вычислена, не принимая во внимание сопротивления воздуха. Результат, конечно, имеет значение не более, как в качественном отношении.

Предположим сначала, что тело брошено горизонтально на высоте h над поверхностью земли со скоростью v на восток или на запад. Тогда его истинная скорость относительно покоящейся в центре земли инерциальной системы будет

$$\left.\begin{aligned} v_0 &= v + w = v + (R+h)\omega_2 \\ v_{w1} &= v - w = v - (R+h)\omega_2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (28),$$

при чем положительное направление считается соответственно на восток и на запад.

Двойная секториальная скорость радиуса-вектора, проведенного от центра земли к брошенному на восток телу, имеет значение $(R+h)v_0$, но затем, когда тело упадет до высоты z, будет $(R+z)^2\dot{\varphi}$, если φ есть угол между начальным радиусом-вектором и радиусом-вектором для высоты z. По закону площадей, т.-е. по 2 закону Кеплера, имеем

$$(R+h)v_0 = (R+z)^2\dot{\varphi}.$$

Принимая во внимание, что h и z должны быть очень малы по сравнению с R, так что их квадратами и произведениями можно пренебречь, получим

$$\dot{\varphi} = v_0\frac{R+h}{(R+z)^2} \backsimeq \frac{v_0}{R}\left(1+\frac{h}{R}\right)\left(1-\frac{2z}{R}\right) \backsimeq \frac{v_0}{R}\left(1+\frac{h}{R}-\frac{2z}{R}\right);$$

после интеграции по всему времени полета t_0, угол, описанный радиусом-вектором, выразится

$$\varphi_0 = \frac{v_0 t_0}{R}\left(1+\frac{h}{r}\right) - \frac{2v_0}{R^2}\int_0^{t_0} z\,dt.$$

В пределах точности, с которой мы здесь вычисляем, можно воспользоваться для вертикальной проекции движения, обыкновенными формулами падения, т.-е. без сопротивления воздуха

$$z = h - \frac{1}{2}gt^2$$

$$h = \frac{1}{2}gt_0^2,$$

так что интеграл

$$\int_0^{t_0} z dt = ht_0 - \frac{1}{6} g t_0^3 = \frac{2}{3} ht_0.$$

Таким образом получается

$$\varphi_0 = \frac{v_0 t_0}{R}\left(1 - \frac{1}{3}\frac{h}{R}\right),$$

или вследствие (28)

$$\varphi_0 = \frac{vt_0}{R}\left(1 - \frac{1}{3}\frac{h}{R}\right) + \omega_2 t_0\left(1 + \frac{h}{R}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\frac{h}{R}\right) \backsimeq \frac{vt_0}{R}\left(1 - \frac{1}{3}\frac{h}{R}\right) + \omega_2 t_0\left(1 + \frac{2}{3}\frac{h}{R}\right).$$

и то же самое получим для тела, брошенного на запад, полагая в первом приближении, что $t_w = t_0$, а именно,

$$\varphi_w \backsimeq \frac{vt_0}{R}\left(1 - \frac{1}{3}\frac{h}{R}\right) - \omega_2 t_0\left(1 + \frac{2}{3}\frac{h}{R}\right).$$

В конце концов, приняв во внимание, что точка вылета, вследствие вращения земли, переместится на восток на расстояние $R\omega_2 t_0$, получим окончательно для дальности восточного или западного полета выражения:

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= R\varphi_0 - R\omega_2 t_0 = vt_0\left(1 - \frac{1}{3}\frac{h}{R}\right) + \frac{2}{3}\omega_2 ht_0 \\ x_w &= R\varphi_0 + R\omega_2 t_0 = vt_0\left(1 - \frac{1}{3}\frac{h}{R}\right) - \frac{2}{3}\omega_2 ht_0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (29)$$

Итак, дальность восточного полета, при угле возвышения равном нулю и одинаковых начальных скоростях, будет фактически несколько больше, чем западного.

Пусть затем тело будет брошено вертикально вверх. В этом случае закон площадей дает

$$R^2 \omega_2 = (R + z)^2 \dot{\varphi}_1,$$

откуда

$$\dot{\varphi} = \omega_2 \frac{R}{(R+z)^2} \backsimeq \omega_2\left(1 - \frac{2z}{R}\right);$$

угол, описанный радиусом-вектором в течение всего времени падения до возвращения на землю t_1, будет

$$\varphi_1 = \omega_2 t_1 - \frac{2\omega_2}{R}\int_0^{t_1} z dt.$$

Здесь также применимы с достаточной точностью формулы падения с начальной скоростью v,—

$$z = v_1 t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$t_1 = \frac{2v_1}{g^2}$$

$$h = \frac{1}{8} g t_1^2,$$

так что, после короткого вычисления, получим

$$\varphi_1 = \omega_2 t_1 - \frac{4}{3}\frac{\omega_2 h t_1}{R}.$$

Отсюда следует, что точка падения будет отставать от точки вылета на запад на величину

$$x_1 = R\omega_2 t_1 - R\vartheta_1 = \frac{4}{3}\omega_2 h t_1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (30)$$

12. Свободное падение. В противоположность отвесному бросанию вверх, свободное падение вниз дает восточное уклонение, на которое уже указывал Ньютон, и которое при одинаковой высоте, если не учитывать сопротивления воздуха, вчетверо меньше требуемого теорией (и только что вычисленного) западного отклонения при отвесном бросании вверх.

Восточное отклонение точки отвесной линии получается из первой формулы (29), если положить начальную скорость $v = o$, а именно

$$x_0 = \frac{2}{3}\omega_2 h t_0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (31),$$

как уже было найдено Лапласом [1]). Это отклонение действительно равно четвертой части x_1 (30), ибо $t_0 = \frac{1}{2}t_1$.

Восточное отклонение растет при одной и той же высоте падения вместе с временем падения, так что оно, благодаря сопротивлению воздуха, которое должно увеличивать время падения, возрастает. Для теории не представляет никакого существенного затруднения учесть влияние сопротивления воздуха. Однако выполненные уже многочисленные опыты таковы, что не стоит делать более точного вычисления. Во время всех этих опытов получались отклонения во всех направлениях гораздо более ожидаемых; только среднее значение обыкновенно соответствовало по направлению и приблизительно по величине теоретическому значению. Мы укажем опыты [2]) Гульельмини (Guglielmini) в Болонье (1790/92), Бенценберга (Benzenberg) в Гамбурге (1802), Шлебуша (Schlebusch) (1804), Рейха (Reich) в Фрейберге (1831), Холля (Hall) в Кембридже (Массачусетс) (1902) и Фламмариона в Париже (1903). Если при каждом ряде опытов мы будем наносить точки падения на картон, то увидим картину, похожую, как удачно заметил Хаген на мишень (ср. рис. 17, стр. 362), в которую стреляли стрелки различного качества. Вероятность того, что одна из пуль попадет восточнее вертикальной линии, при самых лучших опытах, получается только 2:3. При таких обстоятельствах едва ли можно было бы говорить о том, что опыты над свободным падением могут служить неоспоримым доказательством вращения земли.

---

[1]) P. S. de Laplace, Mécanique céleste, 1805, стр. 300.

[2]) Относительно литературы по этому вопросу см. Encykl. d. Math. Wiss., 4, Nr. 1 II, Heft 1: Ph. Furtwängler, Die Mechanik der einfachsten physikalischen Apparate, стр. 6 и 50.

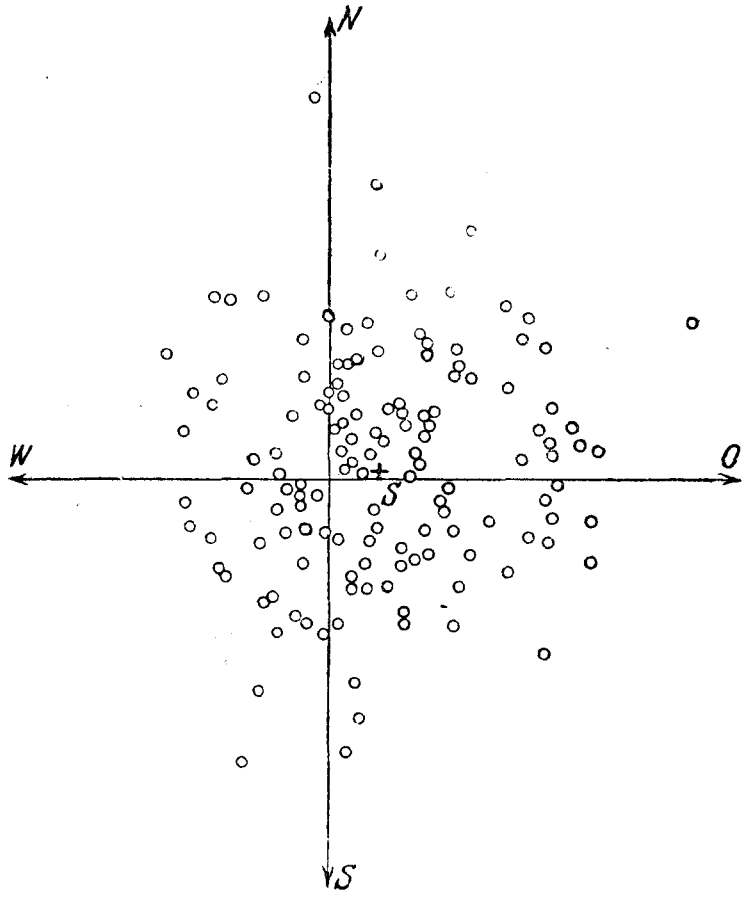


Рис. 17. Точки падения при опыте Фламмариона с их центром тяжести *S* в натуральную величину.

Экспериментальные затруднения [1]) (точное определение точки отвеса, изолирование падающего тела от побочных влияний) слишком велики, чтобы можно было думать о точном количественном определении отклонения; при высоте падения 80 mt. оно имеет величину около 1 cm. Впрочем, сравнение опытов Холля высота падения (23 mt., средняя ошибка 3,3%) и Фламмариона высота падения (68 mt., средние ошибки 22%) указывает на то, что можно добиться лучших результатов только при небольших высотах падения.

13. Машина Атвуда. Для того, чтобы достигнуть хорошо измеряемого эффекта при небольших высотах падения, нужно увеличить время падения, так как согласно теории восточное отклонение пропорционально произведению высоты падения и времени падения (ср. форм. (31), стр. 361). Это дало Хагену [2]), весьма счастливую мысль

[1]) Об этом см. уже указанную книгу В. Бруннера, стр. 18 и след.

[2]) I. G. Hagen. loc. cit. 2 прибавл., стр. 29; кратко Verhandl. d. Ges. dtsch. Naturforsch. u. Aertze, 83. Vers. zu Münster 1912. 2 Teil, 1 Hälfte, стр. 37.

применить машину Атвуда, которая, как известно, дает возможность ускорение падения $g = 9{,}81 \frac{\text{mt.}}{\text{sec.}^2}$ уменьшить до сколь угодного малого значения g'. Масса, повешенная на нити, падает вниз; нить проходит через блок и на другом конце нагружена тяжестью, которая и производит замедление падения. Хаген произвел свои опыты в Ватикане в 1912 г.; они дали при высоте падения 23 m. и ускорении, приблизительно равном $\frac{1}{25} g$, восточное отклонение около 0,9 mm. в полном согласии с теорией при точности до 1%. Благодаря этому, затруднения в опытах над свободным падением могли бы считаться преодоленными.

Для вычисления восточного отклонения сначала представим себе, что тело падает свободно вниз. Будем придерживаться прежних обозначений (стр. 359) с той только разницей, что теперь z должно обозначать не расстояние от земли, но пройденную высоту; тогда закон площадей дает

$$(R+h)^2\omega_2 = (R+h+z)^2\dot{\psi}_2;$$

откуда

$$\dot{\psi} = \omega_2 \frac{(R+h)^2}{(R+h-z)^2} \backsimeq \omega_2\left(1+\frac{2z}{R+h}\right) \backsimeq \omega_2\left(1+\frac{2z}{R}\right),$$

и таким образом получается достаточно точно восточное ускорение

$$R\ddot{\psi} = 2\omega_2 \dot{z} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (32)$$

Чтобы применить эту формулу к несвободному падению на машине Атвуда, мы, конечно, должны прежде всего ввести для скорости падения $\dot{z}$ не скорость свободного падения gt, но $g't$, и, во-вторых, еще добавить величину, которую получим, принимая во внимание, что натяжение нити, вследствие восточного отклонения, имеет компонент, направленный на запад. Этому компоненту, по основному закону динамики, соответствует такой же компонент ускорения, который мы должны вычислить и затем вычесть из правой части (32).

Пусть x будет обозначать восточное отклонение массы m, после того, как она совершила падение с высоты z, ϑ — угол восточного отклонения нити в этот момент, S—натяжение нити; тогда этот добавочный компонент ускорения будет равен

$$\frac{S}{m} \sin\vartheta.$$

Принимая во внимание малость угла ϑ, мы можем положить

$$\sin\vartheta \backsimeq \frac{x}{z}.$$

Далее натяжение нити будет

$$S = m(g-g'),$$

так как вес mg падающей массы, уменьшенный на натяжение нити S, должен быть равен эффективной силе падения mg'.

Таким образом искомый западный компонент ускорения будет

$$(g-g')\frac{x}{z}.$$

Вычтем его из правой части (32) и введем еще

$$z = \frac{1}{2} g' t^2;$$

обозначив найденное истинное восточное ускорение вместо $R\ddot{\varphi}$ через $\ddot{x}$, получим вместо (32)

$$\ddot{x} = 2\omega_2 g' t - 2\frac{g - g'}{g'} \cdot \frac{x}{t^2}$$

Это дифференциальное уравнение несвободного падения легко проинтегрировать. Интеграл, взятый при начальных условиях, — при $t = 0$, $\dot{x} = 0$ и $x = 0$, — после соответствующих вычислений, получится в виде

$$x = \frac{g'^2}{2g' + g} \omega_2 t^3.$$

Полное уклонение на восток поэтому будет

$$x_0 = \frac{g'^2 t_0^3}{2g' + g} \omega_2.$$

Так как

$$h = \frac{1}{2} g' t_0^2,$$

то можно также написать

$$x_0 = \frac{2g'}{2g' + g} \omega_2 h t_0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (33)$$

и сравнить результат с соответствующим отклонением (31) при свободном падении, при котором g' должно снова перейти в g.

Нужно было бы к этому еще прибавить, что точная теория дает при падении тела также и южное отклонение, но оно является величиной порядка ω^2 и, таким образом, слишком незначительна для того, чтобы можно было надеяться ее обнаружить.

Опыт с машиной Атвуда допускает то же самое изменение, которое приводит от изотомеографа к опыту Тумлирца (ср. § 10). Вертикальную трубу наполняют жидкостью, помещают поплавок точно в середине поверхности жидкости и тотчас же открывают маленький кран на дне трубы; тогда поплавок медленно опускается вместе с поверхностью жидкости, и надо ожидать, что поплавок будет отклонен на восток. Опыт был произведен Мэллардом (Maillard)[1]) в 1908 г. с весьма сомнительным результатом.

III. Опыты, основанные на законе импульса (момента количества движения).

А. Исследование азимутального вращения:

14. Физический маятник. В одном из писем к А. Гумбольдту в 1853 г. К. Ф. Гаусс[2]) указывает на то, что опыт с маятником, произведенный Фуко, можно применить к физическому

[1]) L. Maillard, Comptes rendus 147, 524. 1908.

[2]) Briefe zwischen A. v. Humboldt und C. F. Gauss., Leipzig 1877, стр. 66.

маятнику с соответственно малыми размерами. Гаусс представлял себе маятник, повешенный на кардановом подвесе таким образом, что он мог качаться во все стороны. Моменты инерции его относительно горизонтальных осей, проходящих через точку привеса (центр карданова подвеса), должны иметь равную величину B; момент инерции относительно вертикальной оси равен A. При рассмотрении маятника Фуко, можно вполне пренебрегать величиной A по сравнению с B; при физическом же маятнике этого, как указал Гаусс, делать уже нельзя. Вследствие азимутального вращения ω_1, маятник получает небольшой добавочный импульс $A\omega_1$, вектор которого направлен по вертикальной оси маятника вверх. Действие такого добавочного импульса можно ясно наблюдать на гироскопическом маятнике, т.-е. на физическом маятнике, шар которого заменен тором, которому может быть сообщено собственное вращение вокруг оси маятника (рис. 18). На таком гироскопическом маятнике прекрасно видно, что плоскость качания не неподвижна в пространстве, как это бывает у обыкновенного физического маятника, но тотчас же начинает быстро вращаться вокруг вертикальной линии, если только тор имеет заметное собственное вращение. Этому собственному вращению соответствует упомянутый добавочный импульс. Не совсем элементарная теория, основанная на законе импульса, показывает, что (впрочем это и непосредственно довольно ясно) угловая скорость, с которой вращается плоскость качаний, пропорциональна добавочному импульсу $A\omega_1$ и обратно пропорциональна B, и имеет точное значение $A\omega_1/2B$, так что кажущееся вращательное движение, данное формулой (6) стр. 347 должно быть снабжено теоретической поправкой, которая измеряется очень малой в действительности дробью $A/2B$. Другими словами, кажущееся вращение плоскости маятника имеет не просто угловую скорость ω_1, но (если мы частное $\frac{a}{l}$, так называемую угловую амплитуду, обозначим ϑ_1)

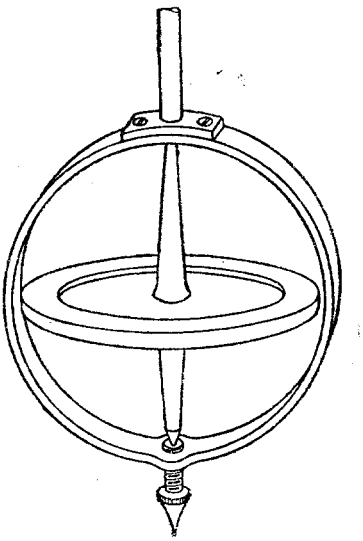


Рис. 18. Гироскопический маятник.

$$-\omega_1\left[1-\frac{1}{3}\vartheta_1^2-\frac{A}{2B}\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (34).$$

Два последних члена в скобках дают окончательную поправку, именно, во-первых, влияние, которое сообщает маятнику вращение земли при начале движения (ср. стр. 346), а во-вторых, влияние инерции его собственной массы.

Чтобы вычислить последний поправочный член, представим себе (рис. 19) плоскость E, неизменно связанную с маятником таким образом, что она будет перпендикулярна к так называемой оси маятника, т.-е. к прямой, проходящей через точку привеса O и через центр тяжести маятника S.

Прямую наибольшего ската на плоскости E назовем поперечной осью, а горизонтальную прямую на плоскости E — узловой линией (название заимствовано из астрономии). Отклонение маятника от его положения покоя измеряется углом ϑ; тогда скорость $\dot{\vartheta}$ будет изображаться вектором, направленным по узловой линии. Если, как уже нам известно, маятник не испытывает плоских колебаний, а плоскость качаний его медленно вращается около вертикальной оси, то вместе с ней вращается также и плоскость E; получающееся при этом горизонтальное вращение угловой линии будем измерять углом ψ, тогда скорость этого вращения $\dot{\psi}$ изобразится вектором, который направлен по вертикали с положительным направлением вниз, так что положительное направление вращения будет $NOSW$. Как мы уже знаем при производстве опыта, маятник начиная движение из своего крайнего положения ϑ_1, имеет азимутальную скорость ω_1, которая, при наших обозначениях, должна считаться отрицательной.

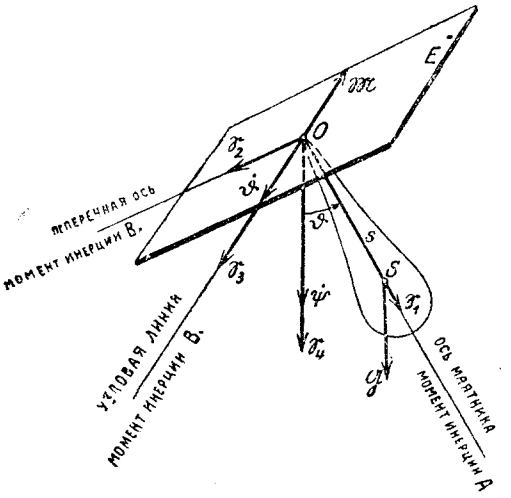


Рис. 19. К теории маятника Гаусса.

Эта начальная скорость ω_1 дает на оси маятника компонент $\omega_1 \cos\vartheta_1$, а на поперечной оси — $\omega_1 \sin\vartheta_1$; на узловой линии компонент равен нулю. Все три оси, по нашему предположению, суть главные оси инерции; компоненты импульса по этим осям мы получим из выше указанных компонентов вращения, посредством умножения их на соответствующие главные моменты инерции (ср. стр. 342). Начальные компоненты сообщенного маятнику импульса при этом будут (см. рис. 19).

$$\mathfrak{S}_1^0 = A\omega_1 \cos\vartheta_1,$$
$$\mathfrak{S}_2^0 = B\omega_1 \sin\vartheta_1$$
$$\mathfrak{S}_3^0 = 0,$$

а начальный компонент импульса по вертикали будет

$$\mathfrak{S}_4^0 = \mathfrak{S}_1^0 \cos\vartheta_1 + \mathfrak{S}_2^0 \sin\vartheta_1 = \omega_1 (A\cos^2\vartheta_1 + B\sin^2\vartheta_1).$$

Момент $\mathfrak{M}$ силы тяжести $\mathfrak{G}$ есть вектор, который лежит в узловой линии и остается всегда горизонтальным, и вместе с тем перпендикулярным к оси маятника. Так как, по закону импульса (см. стр. 342) вектор $\mathfrak{M}$ дает направление, в котором двигается конец импульс-вектора, то в нашем случае этот конец движется все время горизонтально и вместе с тем перпендикулярно к оси маятника. Это значит, что компоненты $\mathfrak{S}_1$ и $\mathfrak{S}_4$ импульса по оси маятника и вертикальной оси не изменяются в продолжении всего движения, так что все время

$$\mathfrak{S}_1 = A\omega_1 \cos\vartheta_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (35)$$
$$\mathfrak{S}_4 = \omega_1 (A\cos^2\vartheta_1 + B\sin^2\vartheta_1) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (36)$$

также и тогда, когда отклонение ϑ_1 уменьшится до любого другого значения ϑ. Компонент импульса по поперечной оси $\mathfrak{S}_2$, конечно, будет изменяться. Вообще (рис. 19)

$$\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{S}_1 \cos\vartheta + \mathfrak{S}_2 \sin\vartheta,$$

откуда, если принять во нимание (35) и (36), следует

$$\mathfrak{S}_2 = \omega_1 \frac{A\cos\vartheta_1(\cos\vartheta_1 - \cos\vartheta) + B\sin^2\vartheta_1}{\sin\vartheta} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (37)$$

Движение маятника слагается, во-первых, из колебательного движения со скоростью $\dot{\vartheta}$, которая не дает компонента на поперечную ось, и, во-вторых, из вращения со скоростью $\dot{\psi}$, которая имеет на поперечной оси слагающую $\dot{\psi}\sin\vartheta$ и, в третьих, из возможного собственного вращения тела маятника вокруг своей оси, не дающего компонентов поперечной оси. Мы можем выразить компонент импульса на поперечную ось еще в следующей форме.

$$\mathfrak{S}_2 = B\dot{\psi}\sin\vartheta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (38)$$

формулы (37) и (38) дают

$$B\dot{\psi} = \omega_1 \frac{A\cos\vartheta_1(\cos\vartheta_1 - \cos\vartheta) + B\sin^2\vartheta_1}{\sin^2\vartheta} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (39)$$

С этого момента мы будем вести вычисления с приближением, которое возможно только при малых углах отклонения; заменим ряд величин

$\cos\vartheta_1$	$\cos\vartheta_1 - \cos\vartheta$	$\sin^2\vartheta_1$	$\sin^2\vartheta$
1	$\frac{1}{2}(\vartheta^2 - \vartheta_1^2)$	ϑ_1^2	ϑ^2.

следующими:

Для сокращения введем еще число

$$k = \frac{2B - A}{A}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (40)$$

которое на самом деле всегда положительно и достаточно велико; тогда из (35) получим наше первое основное уравнение в виде

$$B\dot{\psi} = \frac{A\omega_1\vartheta^2 + k\vartheta_1^2}{2\vartheta^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (41)$$

Применим теперь закон сохранения энергии. Пусть s — расстояние центра тяжести маятника от точки привеса, тогда потенциальная энергия, считая от положения покоя $\vartheta = 0$ до любого положения ϑ равно $sG(1 - \cos\vartheta_1)$. С другой стороны, кинетическая энергия состоит из трех частей, которые мы легко можем вычислить. С этой целью мы поместим на одной таблице компоненты угловых скоростей на все три оси, при чем мы должны иметь в виду, что, так как компонент импульса $\mathfrak{S}_1$ не изменяется, то соответствующий компонент вращения (на самом деле сумма вышеназванного собственного вращения и компонента $\dot{\psi}\cos\vartheta_1$, который получается от проектирования вертикального вектора $\dot{\psi}$ на ось маятника) всегда имеет начальное значение $\omega_1\cos\vartheta_1$

Компоненты вращения.	Для любого ϑ	Для $\vartheta = \vartheta_1$
Ось маятника	$\omega_1\cos\vartheta_1$	$\omega_1\cos\vartheta_1$
Поперечная ось	$\dot{\psi}\sin\vartheta$	$\omega_1\sin\vartheta_1$
Узловая линия	$\dot{\vartheta}$.	0.

Из них образуются соответствующие части кинетической энергии посредством возведения в квадрат и умножения на половины соответствующих моментов инерции (ср. введ. стр. 344). Закон сохранения энергии выражает тот факт, что (двойная) сумма кинетической и потенциальной энергии для любого положения должна быть равна той же сумме для крайнего положения:

$$B\dot{\psi}^2\sin^2\vartheta + B\dot{\vartheta}^2 + 2sG(1-\cos\vartheta) = B\omega_1^2\sin^2\vartheta_1 + 2sG(1-\cos\vartheta_1).$$

Преобразуем это уравнение. Во-первых, введем снова приближенные значения для тригонометрических функций, во-вторых, заменим $B\dot{\psi}$ правой частью ур—ния (41):

$$B^2\dot{\vartheta}^2 = \frac{\omega_1^2}{4\vartheta^2}\left[(4B^2 - 2A^2k)\vartheta_1^2\vartheta^2 - A^2(\vartheta^4 + k^2\vartheta_1^4)\right] + sGB(\vartheta_1^2 - \vartheta^2)$$

или после краткого вычисления, при котором мы примем во внимание сокращенное обозначение k (40)

$$B^2\dot{\vartheta}^2 = \frac{\omega_1^2A^2}{4\vartheta^2}(\vartheta_1^2 - \vartheta^2)(\vartheta^2 - k^2\vartheta_1^2) + sGB(\vartheta_1^2 - \vartheta),$$

или, наконец, полагая для сокращения

$$\frac{\omega_1 A}{2\sqrt{sGB}} = \varepsilon, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (42)$$

при чем ε, благодаря фактору ω_1, будет очень мало, получим

$$B\dot{\vartheta} = \pm\frac{\sqrt{sGB}}{\vartheta}\sqrt{(\vartheta_1^2 - \vartheta^2)(\vartheta^2 - \varepsilon^2k^2\vartheta_1^2)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (43)$$

(Относительно знака имеют место те же соображения, что и в § 4 стр. 349). Условия, при которых первая часть имеет действительные значения, показывают, что величина угла отклонения ϑ может колебаться только в пределах от наибольшего значения ϑ_1 до наименьшего $Ek\vartheta_1$, которое мы раньше обозначали через ϑ_2 (§ 4).

Разделив теперь оба основных уравнения (41) и (43) друг на друга, получим

$$\frac{d\psi}{d\vartheta} = \pm\frac{\varepsilon}{\vartheta}\frac{\vartheta^2 + k\vartheta_1^2}{\sqrt{(\vartheta_1^2 - \vartheta^2)(\vartheta^2 - \varepsilon^2k^2\vartheta_1^2)}}.$$

Если мы проинтегрируем правую часть (с положительным знаком), по ϑ в пределах от минимального значения $Ek\vartheta_1$ до максимального ϑ_1, то получим $\frac{\pi}{2}(1+\varepsilon)$; при этом в левой части будет четвертая часть всего азимутального поворота Ψ, который совершает угловая линия при полном колебании; итак

$$\Psi = 2\pi(1+\varepsilon).$$

Если бы траектория колебания не вращалась, то эта величина должна была бы равняться точно 2π. Следовательно, излишек

$$\Delta\Psi = 2\pi\varepsilon$$

дает вращение плоскости качания; оно получается отрицательным, потому что ε имеет тот же знак, что и ω_1 и происходит в направлении азимутального вращения земли, т.-е. в направлении $NWSO$. Угловая скорость,

$$\omega'' = \frac{\Delta\Psi}{t_0},$$

где t_0 есть период колебания, должна быть вычтена из скорости азимутального вращения, если вопрос идет о кажущемся вращении маятника относительно земной системы отсчета. Из известного выражения периода физического маятника

$$t_0 = 2\pi\sqrt{\frac{B}{sG}},$$

и получим, принимая во внимание уравнение (42) последний поправочный член формулы (34)

$$\omega'' = \frac{A\omega_1}{2B} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (44)$$

Оригинальные опыты с маятником Гаусса 1,2 mt. длиной, произвел в 1879 г. Каммерлинг-Оннес (Kamerlingh-Onnes [1]) в безвоздушном пространстве с точнейшей оценкой неизбежных ошибок, при чем ему удалось очень точно исследовать не только колебания Фуко, но также колебания Бравэ и целый ряд промежуточных сферических движений маятника, как в отношении их кажущихся вращений относительно земли, так и по отношению к их кинематическому виду в отдельности. В частности были наблюдаемы также колебания Лиссажу (Lissajou), которые маятник дает в том случае, когда моменты инерции B относительно горизонтальной оси будут между собой различны.—Среднее значение ω_1, которое найдено Каммерлинг-Оннесом, совпадает с астрономическим до третьего десятичного знака.

15. Гироскопический маятник. Гироскопический маятник, о котором мы упоминали раньше, для наглядности, можно применить с успехом для доказательства азимутального вращения. Вместо незначительного добавочного импульса $A\omega_1$ ему можно сообщить, посредством быстрого вращения тора, очень большой собственный импульс относительно его оси, достаточный для того, чтобы сделать совершенно незаметным все другие сопровождающие движение маятника импульсы. Такого рода тор называется быстрым гироскопом; ось его собственного вращения (в настоящем случае это есть свободно висящая ось маятника, находящегося в состоянии покоя) может быть рассматриваема, без заметной ошибки, как линия действия импульс-вектора $\mathfrak{S}$, значение которого, с достаточной точностью, равно произведению осевого момента A и угловой скорости собственного вращения ν, т-е.

$$S = A\nu.$$

(Таким образом принципиально мы заменяем общий импульс собственным импульсом). Теперь легко показать, что, в пределах нашей точности, ось маятника, выведенная из положения покоя и предоставленная

---

[1]) H. Kamerlingh-Onnes, Nieuwe bewijzen usw. Diss. Groningen 1879, также Over de bertrekkelije, Nieuw Arch. voor Wiskunde 5,58 и 135. 1879; также ebenda 6,173. 1880 ср. также J. G. Hagen, loc cit., 1 прибавление. J. Stein (Les preuves de M. Kamerlingh-Onnes).

самой себе, начнет колебаться не так, как при обыкновенном маятнике, а будет описывать около вертикали круглый конус с угловой скоростью.

$$\mu = \frac{sG}{S} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (45)$$

где G—вес маятника; а s—расстояние между точкой привеса и центром тяжести, который лежит на оси маятника. Если собственное вращение ν при наблюдении сверху происходит по стрелке часов, то вращение μ, так называемая прецессия, происходит в обратном направлении.

Действительно, пусть ϑ_0 есть угол отклонения маятника от вертикали (рис. 20), тогда момент веса маятника относительно точки привеса будет $sG \sin \vartheta_0$, а вектор его $\mathfrak{M}$ направлен горизонтально по перпендикуляру к вертикальной плоскости, проходящей через мгновенный импульс-вектор, следовательно, содержащей в себе ось маятника. По закону импульса (Введение, стр. 342) конец вектора $\mathfrak{S}$ будет двигаться все время горизонтально и перпендикулярно к только что упомянутой плоскости. которая, в свою очередь вращается вместе с $\mathfrak{S}$ и притом с постоянной скоростью $\mathfrak{M}$. Следовательно, конец вектора $\mathfrak{S}$ необходимо описывает круг, радиус которого будет $r = S \sin \vartheta_0$, и следовательно скорость вращения $\mathfrak{M}$ и угловая скорость будут связаны между собою соотношением $|\mathfrak{M}| = r\mu$, которое одинаково с (45).

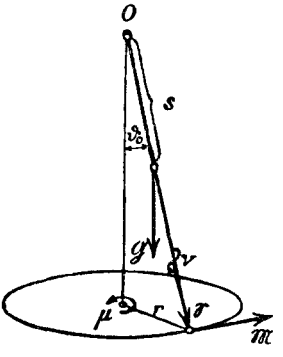


Рис. 20. Прецессия быстрого гироскопа.

При новейших технических средствах посредством электромотора можно сообщить гироскопу весом 5 kgr. с моментом инерции в 0,076 kgr. cm./sec.^{2} собственное вращение с угловой скоростью $V = 1000\pi$ sec.$^{-1}$ (500 оборотов в секунду) [1]). При тщательном устройстве можно уменьшить s до 2,5 mm. и, таким образом, уменьшить μ почти до 0,0052 sec^{-1}. Это дает прецессию с периодом в 20 минут. Если гироскоп вращается один раз в одном направлении, другой раз, с точно таким же числом оборотов, в другом направлении, то периоды наблюдаемых на земле прецессий должны отличаться между собой в наших широтах почти на 26 секунд.

Вообще разность периодов прецессий будет

$$\Delta T = 2 \cdot \frac{2\pi}{\mu} \cdot \frac{\omega_1}{\mu} = \frac{4\pi \cdot S_1^2}{s^2 G^2} \, \omega \sin \varphi;$$

Следовательно, она прямо пропорциональна квадрату импульса.

Не произведенные еще до сих пор опыты обещают в будущем внести существенные улучшения в результат Бравэ.

---

[1]) См. R. Grammel, Der Kreisel. Braunschweig, 1920, стр. 257, 271 и 282.

B. Исследование общего вращения.

16. Гироскоп. Мысль применить гироскоп к доказательству вращательного движения земли (но, конечно, совершенно другим способом, чем тот, который мы только что разбирали), принадлежит Персону (Person)[1]; ее осуществил Фуко[2]) через год после своего знаменитого опыта с маятником. Если мы имеем тело, которое подвешено на кардановом подвесе так, что может совершенно без трения астатически вращаться около любой оси (именно так, что его центр тяжести геометрически точно совпадает с центром подвеса), то оно, будучи приведено первоначально в состояние покоя относительно земли, может совершать в инерциальной системе довольно сложное движение, весьма точно изученное А. Пуансо[3]), которое, однако, всегда будет по величине порядка ω. Если тело имеет ось симметрии, которая вместе с тем есть ось инерции, при чем момент инерции относительно этой оси есть A, то ему надо сообщить около этой оси собственное вращение ν, очень большое по сравнению с ω. Таким образом получается быстрый гироскоп, собственный импульс которого $A\nu$, заглушает первоначальный импульс от вращения земли ω, так что с этого момента можно считать, что вектор-импульс $\mathfrak{S}$ совпадает с осью гироскопа. Так как, согласно предположению, ни трение, ни сила тяжести не сообщают гироскопу никакого момента $\mathfrak{M}$, то вектор $\mathfrak{S}$, а вместе с ним и ось гироскопа, все время сохраняют свое направление в инерциальной системе. Если эта ось не будет случайно параллельна земной оси, то вращательное движение земли ω должно обнаружиться в виде кажущегося вращения $-\omega$ оси гироскопа относительно земли.

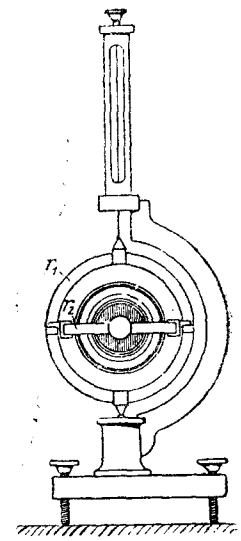


Рис. 21. Гироскоп Фуко.

Фуко произвел этот опыт при помощи волчка, который назвал гироскопом (от греческ. γῦρος = круг), при чем его карданов подвес висел на возможно жесткой по отношению к скручиванию нити (рис. 21.) Но это не дало удовлетворительных результатов, ибо не удалось окончательно устранить трения и невозможно было поместить центр тяжести в центре подвеса настолько точно, чтобы не была заметна прецессия, необходимо связанная с эксцентрицитетом центра тяжести и мешающая опыту (подобно тому, как в гироскопическом маятнике).

---

[1]) C.-C. Person, Comptes rendus 35, 417 и 549. 1852.

[2]) L. Foucault, loc. cit, стр. 401—420 и 576.

[3]) См. выноску на стр. 343.

17. Гироскопический инклинатор. Когда Фуко понял причины несовершенства своего гироскопа, он стал искать новых путей. Вместо того, чтобы показывать вращение земли непосредственно кинематически, он, еще в том же году, начал изыскивать способ обнаружить это явление динамически, пользуясь влиянием вращения земли на гироскоп, ось которого была вынуждена принимать участие в вращательном движении земли. Когда Фуко скрепил внешнее карданово кольцо r_1 своего гироскопа с подставкой, а внутреннему кольцу r_2 дал свободу вращения около его горизонтальной оси, направленной с востока на запад, то ось гироскопа $\mathfrak{S}$ (рис. 22) могла перемещаться только в плоскости меридиана. Плоскость меридиана, с своей стороны, должна принимать участие во вращении земли ω; вращение этой плоскости можно изобразить вектором $\mathfrak{o}$, проведенным из центра карданова подвеса к полюсу мира с длиной, равной ω.

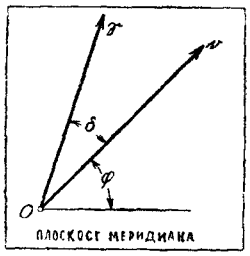


Рис. 22. К теории гироскопического инклинатора.

Фуко нашел, что, согласно закону импульса, в таком гироскопе, который вынужден принимать участие во вращении $\mathfrak{o}$, возникает благодаря инерции сила (которую называют силой девиации или, лучше, гироскопическим моментом), которая стремится привести к совпадению направления вектор-импульса $\mathfrak{S}$ (а вместе с ним и оси гироскопа) и вектора вынужденного вращения $\mathfrak{o}$. Он назвал это стремление правилом одностороннего параллелизма осей вращения (именно собственной оси вращения $\mathfrak{S}$ и вынужденной оси вращения $\mathfrak{o}$).

Положим, что вектор-импульс $\mathfrak{S}$ (оси гироскопа) образует с вектором $\mathfrak{o}$ угол δ, тогда, вследствие вращательного движения плоскости меридиана, концу вектора $\mathfrak{S}$ будет сообщена скорость $\mathfrak{v}$ около оси $\mathfrak{o}$, значение которой будет равно $S \sin \delta . \omega$, если $S \sin \delta$ есть расстояние конца вектора $\mathfrak{S}$ от оси $\mathfrak{o}$, которая будет направлена перпендикулярно плоскости меридиана (на рис. 22 к наблюдателю) так, что ее направление вместе с направлением вращения $\mathfrak{o}$, образует правый винт. По закону импульса, вращение $\mathfrak{o}$, которое сообщено оси гироскопа, может быть поддержано только моментом $\mathfrak{M} = \mathfrak{v}$. Величина этого момента, вследствие $S = A\nu$, будет

$$M = A\nu\omega \sin \delta; \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (46)$$

направление его вращения стремится изменить угол δ. Этот момент сообщается гироскопу извне, хотя бы посредством закрепления, если его ось вращается вместе с меридиональной плоскостью, при чем угол δ не должен меняться. По закону противодействия сам волчок дает точно такой же по величине, но противоположный момент, так называемый гироскопический момент $\mathfrak{K} = -\mathfrak{M}$.

Было бы полезно заметить, что момент $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{K}$ находятся друг к другу в том же отношении, как центростремительная сила $\mathfrak{Z}$ и центробежная $\mathfrak{F}$ в случае, например, камня, вращаемого по кругу на нити. Если немного ослабить натяжение нити $\mathfrak{Z}$, то камень удалится от центра настолько, как если бы он вовсе не двигался по кругу, а двигался бы только под действием силы $\mathfrak{F}$. Равным образом, когда исчезнет момент $\mathfrak{M}$, ось гироскопа будет вращаться к вектору $\mathfrak{o}$ так, как если бы на нее действовал момент $\mathfrak{K}$, и остановится только придя в совпадение с вектором $\mathfrak{o}$ (после некоторых колебаний).

Фуко сравнил свой прибор с магнитным инклинатором, потому что ось его должна становиться параллельно земной оси и таким образом указывать географическое «наклонение» φ (см. рис. 22), если бы не возникали противодействующие моменты от трения и от неизбежных недостатков астазирования, которыми нельзя пренебречь по сравнению с силой, дающей параллелизм осей (а именно по сравнению с малым гироскопическим моментом (46). Поэтому показания прибора очень неточны.

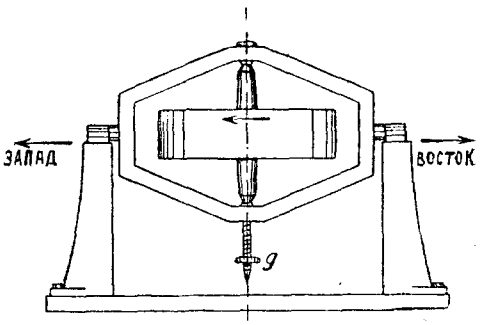


Рис. 23. Баригироскоп Жильберта.

18. Баригироскоп. Жильберту (Ph. Gilbert) [1]) первому удалось в 1882 г. посредством простого приспособления преодолеть главные затруднения, заключающиеся в недостатке астазирования. Он нагрузил (фиг. 23) ось гироскопа маленьким противовесом (g), момент которого достаточно велик по сравнению с возможной неточностью положения центра тяжести, но который может совершенно не влиять на гироскопический момент. Если сообщить тору импульс, вектор которого направлен вверх, то первоначально вертикальная ось гироскопа (см. рис. 24, стр. 374) после нескольких колебаний, займет новое наклонное положение равновесия, и тогда ось гироскопа своим верхним концом будет немного наклонена к северу. Если сообщить импульс в обратном направлении, а следовательно, дать гироскопу быстрое вращение в другом направлении, то получится значительно большее наклонение на юг (как на рис. 23).

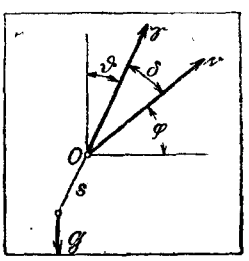


Рис. 24. К теории баригироскопа.

Жильберт, который также построил подобный этому прибор с двумя гироскопами, мог неоспоримо установить существование этих наклонений. Аппарат получил название «баригироскоп».

В положении равновесия момент силы тяжести $-sG\cos(\delta+\varphi)$ (ср. рис. 24), должен равняться гироскопическому моменту (46)

$$sG\cos(\delta+\varphi)=Av\omega\sin\delta.$$

Введем угол наклонения оси гироскопа к вертикали

$$\vartheta=90^\circ-(\delta+\varphi);$$

тогда получим

$$sG\sin\vartheta=Av\omega\cos(\vartheta+\varphi),$$

[1]) Ph. Gilbert, Journ. de Phys. Paris 2, 106. 1883.

откуда следует

$$\operatorname{tang}\vartheta = \frac{A\nu\omega\cos\varphi}{A\nu\omega\sin\varphi + sG} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (47)$$

Также для угла ϑ', на который нижний конец оси поднимается к северу, когда гироскоп пущен в обратном направлении,—

$$\operatorname{tang}\vartheta' = \frac{A\nu\omega\cos\varphi}{A\nu\omega\sin\varphi - sG} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (48)$$

Отклонение ϑ' очевидно, при одинаковых обстоятельствах, значительно больше, чем отклонение ϑ; поэтому прибор во втором случае более чувствителен, чем в первом.

19. Определение гироскопического момента при помощи весов. Из предыдущего легко видеть, что гироскопический момент очень легко может быть измерен посредством весов. Если ось гироскопа или, вернее, вектор $\mathfrak{S}$ направлен горизонтально с юга на север, то гироскопический момент (согласно (46) он имеет величину $S\omega\sin\varphi$) старается приподнять северный конец оси и опустить южный. Если взять волчок, упомянутого в § 15 типа, положить оба конца его горизонтальной оси на две призмы, прикрепленные к чашкам весов, и уравновесить давление неподвижного гироскопа, то, коль скоро гироскоп получит полное число оборотов, давления концов оси на обе чашки дадут разницу, которая при расстоянии между призмами в 10 cm. будет равна около 2,7 gr. и может быть хорошо обнаружена на весах с чувствительностью в 1 : 10000.

C. Исследование вертикального вращения.

20. Гироскопический деклинатор. Когда Фуко снова освободил внешнее кольцо карданова подвеса своего гироскопа (рис. 21, стр. 372), а внутренние r_2 скрепил с внешним, то ось гироскопа могла двигаться только в горизонтальной плоскости, подобно стрелке магнитного компаса. Она теперь перестала быть связанной с азимутальным вращением ω_1, но была принуждена принимать участие в вертикальном вращении горизонтальной плоскости ω_2. Это вращение можно представить вектором $\mathfrak{o}_2$, направленным на север [1]) и правило о стремлении осей к одностороннему параллелизму (стр. 372) прямо показывает, что положительный конец импульс-вектора, а с ним и ось гироскопа, стремятся установиться на север и при том географически точнее, чем стрелка магнитного деклинатора. Фуко вполне сознавал, что он таким образом нашел принцип гироскопического компаса, несмотря на то, что успешности опыта сильно мешала жесткость подвешивающей нити.

Количественное исследование удалось в первый раз 52 года спустя А. Фёпплю (A. Föppl), который подвесил гироскоп на трифиляре (тройном подвесе) и, доведя посредством электричества ско-

---

[1]) A. Föppl, Münchener Berichte, 34,5. 1904; Phys. Zeitschr. 5, 416. 1904.

рость вращения до 2400 оборотов в минуту, удачно погасил азимутальные колебания. Величина ω_2, найденная Фёпплем совпадает с астрономической до 2%.

Наконец, как о существенном шаге вперед, можно еще упомянуть о предложении лорда Кельвина [1]) пустить плавать гироскоп по ртути. Отсюда идея Кельвина развивается вплоть до современного гироскопического компаса [2]), который получил свою наилучшую форму в исполнении Anschütz и C⁰ и может быть назван, вследствие своего высокого технического выполнения, наиболее совершенным в настоящее время гироскопическим инструментом, который может быть употреблен для точных количественных исследований вращения земли. В опытах, исполняемых в настоящее время М. Шулером (M. Schuler) в лаборатории Anschütz и C⁰, гироскопический компас, изолированный от сотрясений, дает северное направление, т.-е. горизонтальную проекцию земной оси с точностью до 20″ [3]); точность, с которой можно определить величину ω_2 посредством гироскопического компаса, еще не оценена, но она должна далеко превзойти точности всех других неастрономических определений.

Заключительные замечания.

21. Годичное обращение земли. Теоретико-познавательное значение неастрономических доказательств вращения земли с течением времени сильно изменилось. С исторической точки зрения оно первоначально состояло, без сомнения, в том, что ими в значительной степени подтверждалось гелиоцентрическое толкование астрономических наблюдений. Но оно давно не нуждается больше в такой опоре. Несмотря на это, механические опыты нисколько не потеряли своего значения, по крайней мере, поскольку они могут иметь притязания на точные количественные измерения. С одной стороны, их можно, вообще, причислить к наилучшим подтверждениям основных кинетических законов механики; с другой стороны, они показывают (а это в отношении познания ни в коем случае не подтверждает движения земли),— что система отсчета, относительно которой в среднем покоится известный нам мир неподвижных звезд, обладает практически вполне свойствами инерциальной системы.

Этот вывод, однако, еще недостаточно точен. На это указывают годичные параллаксы неподвижных звезд. На самом деле при до сих пор упомянутых опытах речь всегда шла только о вращении земли, но не об обращении ее вокруг солнца, не говоря уже о прецессии и нутации земной оси. Итак, дополнительно выдвигается вопрос,

---

[1]) W. Thomson. Nature 30, 542. 1884.

[2]) См. R. Grammel. Der Kreisel. Braunschweig 1920, § 19.

[3]) На основ. письменного сообщения Dr. Schuler'a.

возможно ли или, по крайней мере, мыслимо ли доказать опытом, что земная система отсчета отличается от инерциальной системы, как вследствие годичного обращения вокруг солнца, так и вследствие прецессии и нутаций. Нет сомнения в том, что этот вопрос решается утвердительно, но, по отношению к годичному обращению земли, ответ приводит к выводу, который, с точки зрения классической механики, является совершенно неожиданным.

Было бы совершенно безнадежно обнаружить годичное обращение посредством исследования появляющихся при нем центробежных сил, так как эти силы можно было бы измерить только относительно какого-нибудь земного места наблюдения. Это место само подвергается действию точно такой же центробежной силы. По принципу относительности, все земные явления должны происходить одинаково, независимо от того, обращается ли ли земля вокруг солнца или солнце вокруг земли [1]). Абсолютное решение между обеими возможностями не имеет места. Однако каждая земная система отсчета показывает, если принять во внимание все земные силы и вращение земли, ясное различие от инерциальной системы, которое проще всего объясняется годичным обращением земли. Это различие есть поле тяготения солнца в области земли.

Всякий опыт, обнаруживающий это поле тяготения, можно с достаточным основанием считать доказательством годичного обращения земли. С релятивистической точки зрения вообще нельзя доказать ничего бо́льшего, чем существование этого поля тяготения. Отрицательные оптические опыты, напрасно пытавшиеся найти движение земли относительно «покоящегося эфира», сменились, по нашим воззрениям, единственным, имеющим громадное положительное значение наблюдением, что световые лучи отклоняются полем тяготения солнца. Земной механический опыт для исследования поля тяготения еще не придуман. Но он принципиально возможен, как это вытекает из явления отлива и прилива. Участие солнца в этих явлениях основывается просто на неоднородности поля тяготения солнца в области земли; следовательно, достаточно создать искусственно условия для явлений, подобных отливу и приливу. Здесь есть много возможностей (кроме гидравлических, можно также мыслить и эластические: стержень конечной длины имеет в зависимости от своего положения по отношению к вектору гравитационного поля различные напряжения), но возможность достижения неоспоримых результатов весьма мала, вследствие ограниченности измерительных средств, которыми мы располагаем в лабораториях.

22. Прецессия и нутации. Еще хуже дело обстоит с возможностью обнаружить механическим путем прецессию земной оси,

---

[1]) Это очень ясно изложено в недавно появившемся сочинении G. Mie, Die Einsteinische Gravitationstheorie. Leipzig. 1921. стр. 47 и след.

точнее говоря, обусловленное ею нарушение инерциальности, совершенно не говоря уже о нутациях, как о малых отклонениях второго порядка. Прецессия заключается в том, что земная ось, рассматриваемая в системе, прикрепленной к центру земли и непринимающей участия во вращении, описывает в 26000 лет круглый конус с углом отверстия в 47°. Вектор угловой скорости этого движения, проведенный из центра земли (рис. 25) перпендикулярен к плоскости эклиптики, направлен в южную сторону и имеет длину ε, равную 1/26000.366 части вектора вращения σ. Если оба вектора сложить по правилу параллелограмма, то получается результирующий вектор вращения $\mathfrak{u}$, который приблизительно точно обладает длиною σ, но отклонен от σ на маленький угол δ в сторону от перпендикуляра к плоскости эклиптики.

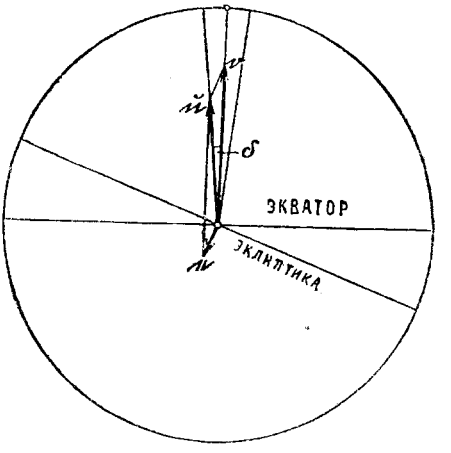


Рис. 25. Суточные колебания прецессии земной оси.

Вектор $\mathfrak{u}$, если не принимать во внимание обращение земли, будет неподвижен в пространстве и, следовательно, описывает в течение суток около ее географической оси узкий круглый конус с углом отверстия 2 δ. Кроме того, он заменяет место вектора σ при всех опытах, исследующих вращение земли, и дело идет только об увеличении количественной точности этих опытов настолько, чтобы они обнаруживали ежедневное относительное колебание «истинного» вектора вращения $\mathfrak{u}$. Следствием этого колебания является тот факт, что «истинное» северное направление (т.-е. горизонтальная проекция вектора $\mathfrak{u}$) в течение суток совершает колебания с востока на запад в пределах угла ψ, который для наших широт имеет величину около $^1/_{75}$ дуговой секунды, а для более высоких широт — больше. (Впрочем, нельзя смешивать эти колебания с почти в 12 раз большими колебаниями полюса Эйлера-Чандлера, которые совершаются в 12 или 14-месячный период.)

Угол δ (рис. 25) будет

$$\delta \cong \sin\delta = \frac{\varepsilon}{\omega}\sin 23^\circ,5.$$

Далее, из прямоугольного сферического треугольника, один катет которого есть расстояние от места наблюдения до ближайшего полюса, а другой, примыкающий к полюсу, имеет длину дуги δ, имеем

$$\operatorname{tang}\psi = \frac{\operatorname{tang}\delta}{\cos\varphi},$$

или, так как для не слишком высоких географических широт угол φ достаточно мал

$$\psi \cong \frac{\delta}{\cos\varphi} \cong \frac{\varepsilon}{\omega}\,\frac{\sin 23^\circ,5}{\cos\varphi},$$

или в числах

$$\psi = \frac{0{,}0086''}{\cos\varphi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (49)$$

Гироскопический компас с более чем в тысячу раз увеличенной чувствительностью, был бы наверное в состоянии прямо показать суточные колебания «истинного» северного направления вследствие прецессии. Но вряд ли есть возможность увеличить в тысячу раз доведенную теперь уже до крайней степени чувствительность прибора. И если бы даже это и случилось, то неизвестно, не заглушили ли бы снова суточные колебания земной поверхности подлежащий измерению эффект.

Можно было бы также произвести наблюдения в более высоких географических широтах, ибо амплитуда ψ колебаний сильно возрастает при приближении к одному из полюсов. Но, к сожалению, направляющая сила гироскопического компаса, а вместе с тем и его чувствительность на высоких географических широтах убывают в той же самой мере, в которой увеличивается угол ψ, и таким образом пропадает всякая надежда обнаружить механическим путем прецессию земной оси.

Перевел *Ник. Бухгольц.*