Июль 2026 г. Том 196, № 7
УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

# Гравитационные волны в расширенных теориях гравитации

С.О. Алексеев, С.К. Кузьмин, Е.А. Плужников, Р.А. Стамов, И.И. Чех

*Теория для объяснения тёмной материи, тёмной энергии, эволюции ранней Вселенной и других нерешённых проблем обязана корректно воспроизводить существующие наблюдательные и экспериментальные данные, включая свойства гравитационных волн. Поэтому мы обсуждаем ключевые характеристики гравитационных волн: скорость распространения, характерные амплитуды, поляризации, другие особенности в расширенных теориях гравитации: скалярно-тензорной гравитации, включая модели Бранса – Дикке, теории Хорндески, $f(R)$-гравитации, теории с массивным гравитоном, в модифицированной ньютоновской динамике, в квантовых теориях гравитации, включая петлевую квантовую гравитацию, теорию струн IIB, теорию Хоржавы – Лифшица, в многомерных теориях, включая общий случай $D$-мерного пространства – времени и теорию Калуцы – Клейна, в неримановой геометрии, включая как общий случай метрической аффинной гравитации, так и различные варианты телепараллельной гравитации: $f(T)$ и $f(Q)$, а также расширенные случаи $f(T, B)$ и $f(T, T_G)$. При увеличении точности обсуждаемые характеристики гравитационных волн будут зарегистрированы, помогая селекции теорий гравитации.*

**Ключевые слова:** гравитационные волны, общая теория относительности, теория Бранса – Дикке, скалярно-тензорная гравитация, теория Хорндески, телепараллельная гравитация, метрическая аффинная гравитация, гравитационно-волновая астрономия

PACS numbers: **04.30.–w, 04.50.–h, 04.60.–m** DOI: https://doi.org/10.3367/UFNr.2026.05.040140

## Содержание



**С.О. Алексеев** [1, 2, a], **С.К. Кузьмин** [2, b], **Е.А. Плужников** [3, c], **Р.А. Стамов** [1, 2, d], **И.И. Чех** [2, e]
[1] Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Государственный астрономический институт им. П.К. Штернберга, Университетский просп. 13, 119234 Москва, Российская Федерация
[2] Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет, Ленинские горы 1, стр. 2, 119991 Москва, Российская Федерация
[3] Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, факультет космических исследований, Ленинские горы 1/52, 119991 Москва, Российская Федерация
E-mail: [a] alexeyev@sai.msu.ru, [b] sergey.kuzmin.jr@gmail.com, [c] pluzhnikov.egor@student.msu.ru, [d] stamov_roma@mail.ru, [e] ilya@spacecyborg.ru

*Статья поступила 14 октября 2025 г., после доработки 28 апреля 2026 г.*

## 1. Введение

Одним из следствий общей теории относительности (ОТО) являются гравитационные волны (ГВ): решения уравнений Эйнштейна в виде малых возмущений плоского пространства – времени [1]. Спектр ГВ охватывает широкий диапазон частот и может быть классифицирован в зависимости от источника излучения: от $10^{-17}$ Гц в случае пульсаций космологического фона до $10^3$ Гц при образовании нейтронных звёзд после взрыва сверхновых [2].

Отметим, что в 1974 г. были обнаружены две плотные и тяжёлые звёзды, вращающиеся друг относительно друга, причём одна из них оказалась пульсаром. После пятнадцати лет измерений орбитального периода обнаружилось, что звёзды сближаются со скоростью, предсказываемой ОТО [3, 4], что явилось косвенным доказательством излучения ГВ двойными системами в процессе взаимодействия. За это открытие в 1993 г. Рассел Халс и Джозеф Тейлор получили Нобелевскую премию[1]. В последующие десятилетия были построены и запущены лазерные интерферометры, способные непосредственно обнаруживать ГВ: проекты The Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory (LIGO), США [5], Virgo, Италия/Франция [6], GEO 600, Германия/Великобритания [7] и TAMA 300, Япония [8]). Первый гравитационно-волновой сигнал от слияния двойных чёрных дыр был зарегистрирован в 2015 г. LIGO [9], точно соответствуя предсказаниям ОТО. Далее последовали новые события регистрации ГВ, а в 2017 г. за их открытие была присуждена Нобелевская премия по физике[2].

Важной вехой гравитационно-волновой астрономии стало обнаружение коллаборацией LIGO/Virgo ГВ от слияния нейтронных звёзд в 2017 г. [10]. За счёт относительной близости источника события ($z < 0{,}01$, где $z$ — красное смещение) удалось локализовать его место и зарегистрировать электромагнитный сигнал с разницей времени прихода от 1,6 секунд до, примерно, 10 часов. Это события GRB 170817A от коллаборации DECam [11]; оптические наблюдения обсерватории Лас-Кумбрес, сети роботизированных телескопов МАСТЕР и космического телескопа Хаббл [12, 14, 16]; космических гамма-телескопов Ферми и INTEGRAL [13, 15]; ультрафиолетовые наблюдения обсерватории Нила Герельса Свифта [17]; наблюдения рентгеновской обсерватории Чандра [18]. Событие GW170817 подтвердило, что ГВ распространяются со скоростью света, наложив ограничения на множество альтернативных моделей и став одним из тестов теорий гравитации [19, 20]. Поэтому GW170817 стало крупным прорывом в многоканальной астрономии.

Наземные лазерные интерферометры обладают достаточной чувствительностью смещения пробных масс для обнаружения ГВ с частотами более 10 Гц (слияние ЧД или нейтронных звёзд). Благодаря успехам LIGO в настоящее время проектируются космические лазерные интерферометры LISA [21], TianQin [22] или Taiji [23].

С другой стороны, заметим, что ОТО в процессе развития сталкивается с новыми вызовами. Например, только 4 – 5 % материи во Вселенной описывается напрямую. "Остаток" в размере $\approx 95$ % приходится на тёмную материю [24] и энергию [25]. Для объяснения источников и физической природы этих феноменов за последние годы предложено множество различных подходов, расширяющих ОТО или предлагающих альтернативные способы описания гравитационного взаимодействия, где добавленные к действию ОТО члены напрямую или опосредованно служат источниками для тёмных энергии, материи, а также космологической инфляции, формируя "эффективный" тензор энергии – импульса.

Первым способом расширения ОТО является добавление членов высших порядков по кривизне (например, в простейшем случае, $R^2$), в результате появляются теории с высшими порядками, например, $f(R)$-гравитация. Следующим способом является построение квантовых теорий гравитации: теория Хоржавы – Лифшица (векторно-тензорная теория гравитации, в которой вместо векторного поля используется градиент скалярного и полагается, что при больших энергиях пространственные и временные измерения не эквивалентны), теория струн (в которой для объединения всех физических взаимодействий расширено количество размерностей пространства – времени), петлевая квантовая гравитация (в ней квантование гравитации рассматривается отдельно от остальных взаимодействий и происходит за счёт перехода к переменным Аштекара). Добавление новых полей (в сочетании с инвариантами кривизны) приводит к теории Хорндески (наиболее общий вид скалярно-тензорной гравитации с уравнениями поля второго порядка), расширенным теориям Хорндески, массивной гравитации (теории, в которых присутствуют массивные моды). Дальнейшее усложнение геометрической структуры приводит к метрическим аффинным теориям, телепараллельной гравитации (в которой гравитационное взаимодействие вместо кривизны пространства – времени представлено кручением либо неметричностью). Наконец, существуют модели с иными способами построения: голографические модели (в которых устанавливается связь между многообразием и его границами), энтропийная гравитация (гравитация проявляется как эффективное следствие квантовой запутанности пространственно-временной информации). Предложенное деление, конечно, весьма условно, и каждый из подходов может использоваться в сочетании с другими. При расширении ОТО усложняются уравнения на гравитационные волны. Значит, в каждой из них ГВ будут иметь особенности, которые, при их обнаружении, помогут понять, какой подход реализуется в природе. Поэтому цель данной работы — рассмотреть, как альтернативные теории гравитации описывают характеристики гравитационных волн (в тех случаях, когда вопрос уже изучен).

Структура статьи: в разделе 2 мы обсуждаем получение ГВ в ОТО, раздел 3 посвящён гравитационным волнам в скалярно-тензорной гравитации, включая модели Бранса – Дикке (раздел 3.1.1) и Бранса – Дикке с потенциалом (раздел 3.1.2), в теории Хорндески (раздел 3.2), $f(R)$-гравитации (раздел 3.3) и теории с массивным гравитоном (раздел 3.4), в разделе 4 обсуждается вид гравитационных волн при реализации модифицированной ньютоновской динамики, раздел 5 посвящён гравитационным волнам в квантовых теориях гравитации, включая петлевую квантовую гравитацию (раздел 5.1), теорию струн IIB (раздел 5.2), теорию Хоржавы – Лифшица (раздел 5.3), в разделе 6 обсуждаются гравитационные волны в многомерных теориях, включая общий случай $D$-мерного пространства – времени (раздел 6.1) и теорию Калуцы – Клейна (раздел 6.1.1), раздел 7 посвящён гравитационным волнам в неримановой геометрии, включая как общий случай метрической аффинной гравитации (раздел 7.1), так и различные варианты телепараллельной гравитации: $f(T)$ и $f(Q)$, включая расширенные случаи $f(T, B)$ и $f(T, T_{\mathrm{G}})$ (разделы 7.2 – 7.9), раздел 8 — заключение.

## 2. Общая теория относительности

В этой главе обсуждается описание слабых гравитационных волн в ОТО, распространяющихся на фоне плоского пространства – времени, вводятся основные определения и обозначения, используемые далее. Последующие результаты сравниваются с формулами ОТО для выявления отличий.

[1] https://www.nobelprize.org/prizes/physics/1993/summary/.
[2] https://www.nobelprize.org/prizes/physics/2017/summary/.

Действие для ОТО имеет вид:

$$S = -\frac{c^3}{16\pi G}\int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}R + \frac{1}{c}\int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\,L_m\,, \tag{1}$$

где $c$ — скорость света в вакууме; $G$ — ньютоновская гравитационная постоянная; $g$ — определитель метрического тензора $g_{\mu\nu}$ с сигнатурой $(-,+,+,+)$; скалярная кривизна $R$ построена с помощью свёртки тензора Риччи $R_{\mu\nu}$: $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$, который, в свою очередь, есть свёртка тензора Римана $R^{\alpha}{}_{\mu\beta\nu}$: $R_{\mu\nu} = R^{\alpha}{}_{\mu\alpha\nu}$; $\mathcal{L}_m = \sqrt{-g}\,L_m(\psi_m, g_{\mu\nu})$ — лагранжева плотность (лагранжиан) для материальных полей $\psi_m$, представляющих их произвольный набор. Везде в статье (если иное не оговорено особо) греческие индексы $(\mu, \nu, \ldots)$ пробегают значения $(0,1,2,3)$, а латинские $(i, j, \ldots)$ — $(1,2,3)$.

После варьирования действия (1) по $g^{\mu\nu}$ получаем уравнения Эйнштейна в форме:

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\,g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}\,T_{\mu\nu}\,, \tag{2}$$

где левая часть $(G_{\mu\nu})$ — это тензор Эйнштейна, а правая — тензор энергии – импульса материи $T_{\mu\nu}$, полученный путём варьирования материальной части действия:

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta\mathcal{L}_m}{\delta g^{\mu\nu}}\,. \tag{3}$$

Чтобы перейти к описанию гравитационных волн, используется разложение метрики в виде:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}\,, \tag{4}$$

где метрика представляется в виде суммы фонового плоского пространства – времени Минковского $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1,1,1,1)$ и $h_{\mu\nu}$ — его малого (вместе со своими производными до второго порядка) возмущения: $h_{\mu\nu} \ll 1$. Поднятие и опускание индексов осуществляется с помощью $\eta^{\mu\nu}$ и $\eta_{\mu\nu}$.

Предполагая, что возмущения распространяются либо в вакууме, либо на значительном удалении от тяготеющих масс, пренебрегаем правой частью уравнений Эйнштейна (2), т.е., полагаем $T_{\mu\nu} = 0$. В этом случае:

$$G_{\mu\nu} = 0\,. \tag{5}$$

Чтобы получить линейное приближение этого уравнения относительно разложения (4) необходимо рассмотреть следующие выражения:

$$R^{(1)}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(-\eta^{\alpha\beta}\partial_{\alpha\beta}h_{\mu\nu} - \partial_{\mu\nu}h + \partial_{\alpha\mu}h^{\alpha}_{\nu} + \partial_{\alpha\nu}h^{\alpha}_{\mu}\right), \tag{6}$$

$$R^{(1)} = -\eta^{\alpha\beta}\partial_{\alpha\beta}h + \partial_{\alpha\beta}h^{\alpha\beta}\,, \tag{7}$$

где $h \equiv h^{\alpha}_{\alpha}$; $\partial_{\alpha\beta} \equiv \partial_\alpha\partial_\beta$ с частной производной $\partial_\alpha \equiv \partial/\partial x^\alpha$ по координатам $x^\alpha = (ct, x^i) = (ct, x, y, z)$, соответствующим разложению (4) с выделением метрики Минковского как фона. Выражения (6) и (7) инвариантны относительно преобразований:

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + \mathcal{L}_\xi\eta_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + \partial_\mu\xi_\nu + \partial_\nu\xi_\mu\,, \tag{8}$$

которые называют калибровочными; $\mathcal{L}_\xi$ — это производные Ли вдоль векторов смещения $\xi^\alpha$, индексы $\xi^\alpha$ в (8) также опускаются с помощью $\eta_{\mu\nu}$. Компоненты $\xi^\alpha$ — произвольные, достаточно гладкие и малые, чтобы соответствовать $h_{\mu\nu}$.

Уравнение (2) в линейном приближении приобретает вид:

$$G^{(1)}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(-\eta^{\alpha\beta}\partial_{\alpha\beta}\theta_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}\partial_{\alpha\beta}\theta^{\alpha\beta} + \partial_{\alpha\mu}\theta^{\alpha}_{\nu} + \partial_{\alpha\nu}\theta^{\alpha}_{\mu}\right) = 0\,, \tag{9}$$

где:

$$\theta_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\,\eta_{\mu\nu}\,h\,. \tag{10}$$

Уравнения (9) калибровочно инвариантны относительно преобразований

$$\theta'_{\mu\nu} = \theta_{\mu\nu} + \partial_\mu\xi_\nu + \partial_\nu\xi_\mu - \eta_{\mu\nu}\partial_\alpha\xi^\alpha\,. \tag{11}$$

Поскольку компоненты $\xi_\alpha$ произвольны, есть возможность ограничить $\theta_{\mu\nu}$. Обычно это производится с помощью лоренцевых условий

$$\partial_\mu\theta^{\mu}_{\nu} = 0\,. \tag{12}$$

Тогда уравнения (9) представляются в форме волнового уравнения:

$$\Box_\eta\theta_{\mu\nu} = 0\,, \tag{13}$$

где оператор Даламбера определяется как

$$\Box_\eta \equiv \eta^{\alpha\beta}\partial_{\alpha\beta} \equiv \Delta - \frac{\partial^2}{c^2\partial t^2}$$

в координатах, соответствующих разложению (4); $\Delta$ — это трёхмерный лапласиан. Таким образом, поле $\theta_{\mu\nu}$ распространяется в пространстве Минковского со скоростью света.

Условия (12) снижают число компонент $\theta_{\mu\nu}$ от десяти до шести. Имеются и остаточные степени свободы в выборе $\xi^\alpha$, ограниченные условиями

$$\Box_\eta\xi^\alpha = 0 \tag{14}$$

снижая число независимых компонент $\theta_{\mu\nu}$ от шести до двух. В рамках этих преобразований обычно фиксируют условие $\theta = \theta^{\alpha}_{\alpha} = 0$, что эквивалентно бесследовости $h_{\mu\nu}$:

$$h = 0\,, \tag{15}$$

т.е., $\theta_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}$.

Рассмотрим решение волновых уравнений (13) в виде плоских волн

$$h_{\mu\nu} = a_{\mu\nu}\exp\left(\mathrm{i}k_\alpha x^\alpha\right) + b_{\mu\nu}\exp\left(-\mathrm{i}k_\alpha x^\alpha\right), \tag{16}$$

где $a_{\mu\nu}$ и $b_{\mu\nu}$ — тензоры поляризации, не обращающиеся в нуль одновременно. Подставляя (16) в уравнение (13), получаем дисперсионное уравнение для слабых плоских гравитационных волн в ОТО:

$$k_\alpha k^\alpha = 0\,. \tag{17}$$

В координатах $x^\alpha = (ct, x^i)$, соответствующих разложению (4), где в качестве фона выступает метрика Минковского, для 4-вектора $k^\alpha$ имеем $k^\alpha = (\omega/c, k^i)$, где $\omega$ — циклическая частота, а $k^i$ — волновой вектор. Поэтому

(17) приобретает форму

$$\omega = ck\,, \tag{18}$$

где $k = \sqrt{|k_i k^i|}$. Таким образом, гравитационные волны имеют линейный закон дисперсии, а скорость их распространения равна скорости света в вакууме.

На примере (16) рассмотрим поляризацию гравитационных волн. Выбирая направление распространения плоских гравитационных волн вдоль оси $z$, получаем вместо (16):

$$h_{\mu\nu} = a_{\mu\nu} \exp\big(-\mathrm{i}(\omega t - kz)\big) + b_{\mu\nu} \exp\big(\mathrm{i}(\omega t - kz)\big)\,, \tag{19}$$

Реальные физические объекты должны описываться вещественными функциями, поэтому $h_{\mu\nu} = h^*_{\mu\nu}$, и, значит, $a_{\mu\nu} = b^*_{\mu\nu}$ и наоборот. В результате две независимые поляризации представляются как

$$\theta^{\mathrm{TT}}_{\mu\nu} = h^{\mathrm{TT}}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_+ & h_\times & 0 \\ 0 & h_\times & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{20}$$

где $h_+ = h_+(\omega t - kz)$ и $h_\times = h_\times(\omega t - kz)$.

Таким образом, слабые гравитационные волны в ОТО распространяются со скоростью света, имеют две поляризации и являются поперечными. Выбор компонент поляризации в виде (20) называется поперечно-бесследовой калибровкой (TT-калибровкой).

## 3. Скалярно-тензорные теории

### 3.1. Теория Бранса – Дикке

Одна из первых и наиболее широко используемых скалярно-тензорных теорий на сегодняшний день — это модель Бранса – Дикке (БД) [29, 30], в которой гравитационный сектор включает скалярное поле наряду с тензорным, а поля материи $\psi_m$ взаимодействуют со скалярным гравитационным полем через тензорное.

В некоторых случаях классическую модель БД [29, 30] дополняют потенциалом скалярного поля $V(\phi)$ [31], поэтому будем сокращенно обозначать её как БДV. Действие в теории БДV имеет следующий вид:

$$S = -\frac{c^3}{16\pi G}\int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\left(\phi R - \frac{\omega_{\mathrm{BD}}}{\phi}\, g^{\mu\nu}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi + V(\phi)\right) + \\ + \frac{1}{c}\int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\, L_m(\psi_m, g_{\mu\nu})\,, \tag{21}$$

где $\omega_{\mathrm{BD}}$ — безразмерная константа связи (или безразмерный параметр Бранса – Дикке), а $\nabla_\mu$ — ковариантная производная, построенная по метрике искривлённого пространства – времени $g_{\mu\nu}$.

Варьирование действия (21) по $g^{\mu\nu}$ даёт уравнения движения:

$$G_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\, g_{\mu\nu} V(\phi) - \frac{\omega_{\mathrm{BD}}}{\phi^2}\, A_1 - \frac{1}{\phi} A_2 = \frac{8\pi G}{c^4}\,\frac{T_{\mu\nu}}{\phi}\,, \tag{22}$$

где

$$A_1 = \nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi - \frac{1}{2}\, g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\phi\nabla_\beta\phi\,,$$
$$A_2 = \nabla_\mu\nabla_\nu\phi - g_{\mu\nu}\Box\phi\,.$$

Варьирование действия (21) по $\phi$ и комбинирование со свёрткой уравнений (22) даст:

$$\Box\phi + \frac{\phi V'(\phi) - 2V(\phi)}{2\omega_{\mathrm{BD}} + 3} = \frac{8\pi G}{c^4}\,\frac{T}{2\omega_{\mathrm{BD}} + 3}\,. \tag{23}$$

Здесь $\Box \equiv g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu$ — оператор Даламбера искривлённого пространства – времени; $V'(\phi) \equiv \partial V/\partial\phi$; $T \equiv g^{\mu\nu} T_{\mu\nu}$.

Чтобы перейти к описанию гравитационных волн, используется разложение метрики (4) и скалярного поля:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}\,, \qquad \phi = \phi_0 + \varphi\,, \tag{24}$$

где $\phi_0$ — его фоновое значение. Чтобы фоновая метрика Минковского была решением приведённых выше уравнений, удобно выбрать $\phi_0 = \mathrm{const}$. Без потери общности также можно положить, что $\phi_0 \approx 1$, а его малое возмущение $\varphi \ll 1$ вместе со своими производными до второго порядка, как минимум. Снова предполагая, что возмущения распространяются либо в вакууме, либо вдали от тяготеющих масс, пренебрегаем правой частью уравнений (22) и (23), полагая $T_{\mu\nu} = T = 0$.

Так как гравитационные волны при отсутствии и наличии потенциала качественно отличаются друг от друга, рассмотрим эти случаи отдельно.

**3.1.1. Теория Бранса – Дикке без потенциала: $V(\phi) = 0$.** Полагая $V(\phi) = 0$, подставляем разложения (24) в уравнения (22) и, сохраняя линейный порядок, получаем

$$G^{(1)}_{\mu\nu} - \frac{1}{\phi_0}\left(\partial_{\mu\nu}\varphi - \eta_{\mu\nu}\Box_\eta\varphi\right) = 0\,, \tag{25}$$

где $\Box_\eta \equiv \eta^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu$ — оператор Даламбера плоского пространства – времени Минковского, а $G^{(1)}_{\mu\nu}$ определено в (9) в рамках обозначений (10). Тогда (25) переписывается в виде, формально совпадающим с (9):

$$\Box_\eta\theta_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu}\partial_{\alpha\beta}\theta^{\alpha\beta} - \partial_{\alpha\mu}\theta^\alpha_\nu - \partial_{\alpha\nu}\theta^\alpha_\mu = 0\,, \tag{26}$$

где, однако, в отличие от (10),

$$\theta_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\,\eta_{\mu\nu} h - \eta_{\mu\nu}\frac{\varphi}{\phi_0}\,. \tag{27}$$

Подставляя разложения (24) в уравнения (23) и сохраняя линейный порядок, получаем

$$\Box_\eta\varphi = 0\,. \tag{28}$$

Система уравнений (26) и (28) инвариантна относительно калибровочных преобразований (8), дополненных выражением

$$\varphi' = \varphi + \pounds_\xi\,\phi_0 = \varphi\,. \tag{29}$$

Таким образом, калибровочные преобразования (11) сохраняют форму, а левые части уравнений (26) и (28) инвариантны относительно них. Это даёт возможность ограничить компоненты $h_{\mu\nu}$ (и, соответственно, $\theta_{\mu\nu}$). Аналогично ОТО выбираются лоренцевы условия, но для (27):

$$\partial_\mu\theta^\mu_\nu = 0\,, \tag{30}$$

что приводит к уравнениям

$$\Box_\eta \theta_{\mu\nu} = 0 \tag{31}$$

вместо (26), а также к возможности использования остаточных свобод, ограниченных условием (14) (как в ОТО).

Заметим, что уравнения (28) и (31) однородны для оператора Даламбера $\Box_\eta$. Значит, обе моды — тензорная и скалярная — распространяются со скоростью света. Следовательно, для обеих мод справедливо решение типа (16), а дисперсионное уравнение приобретает форму (17) или (18). Таким образом, имеется существенная аналогия с ОТО, в рамках которой, чтобы прийти к ТТ-калибровке, было важно использовать равенство $\theta_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}$, что достигалось при условии (15). Здесь, чтобы получить $\theta_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}$ вместо (15), использовано условие

$$h = -2\,\frac{\varphi}{\phi_0}\,, \tag{32}$$

а остальные семь условий $h_{0\alpha} = h_{13} = h_{23} = h_{33} = 0$ сохранятся, если предположить распространение в $z$-направлении. Следовательно, вместо (20) имеем

$$\theta^{\mathrm{T}}_{\mu\nu} = h^{\mathrm{T}}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_+ - \dfrac{\varphi}{\phi_0} & h_\times & 0 \\ 0 & h_\times & -h_+ - \dfrac{\varphi}{\phi_0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{33}$$

где

$$h_+ = h_+(\omega t - kz)\,,$$
$$h_\times = h_\times(\omega t - kz)\,,$$
$$\varphi = \varphi(\omega t - kz)\,,$$

а индекс $T$ означает "поперечный".

Таким образом, как и в ОТО, ГВ поперечна и движется со скоростью света в вакууме. Отличие от ОТО заключается в появлении новой — скалярной — составляющей, которая так же поперечна, не имеет массы и движется со скоростью света. Третья мода получила название "скалярное дыхание", и, благодаря ей, решение перестало быть бесследовым.

**3.1.2. Теория Бранса – Дикке с потенциалом: $V(\phi) \neq 0$.** Если $V(\phi) \neq 0$, в линейном порядке уравнений необходимо определиться с выбором фонового значения $\phi_0$ в разложении (24). Обычно его выбирают как минимум потенциала, полагая, что $V(\phi_0) = 0$. Поскольку это — точка минимума, то для достаточно гладкого потенциала $V'(\phi_0) = 0$, и лишь для второй производной, в общем случае, $V''(\phi_0) \neq 0$. При таком выборе уравнения (22) и (23) в качестве нулевого решения (приближения) имеют пространство Минковского.

В линейном приближении уравнения (22) обращаются в:

$$\Box_\eta \theta_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu}\partial_{\alpha\beta}\theta^{\alpha\beta} - \partial_{\alpha\mu}\theta^\alpha_\nu - \partial_{\alpha\nu}\theta^\alpha_\mu = 0\,, \tag{34}$$

совпадающие формально с (26), где, как и в (27):

$$\theta_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h - \eta_{\mu\nu}\frac{\varphi}{\phi_0}\,. \tag{35}$$

Однако, в отличие от (28):

$$\left(\Box_\eta - m_{\mathrm{s}}^2\right)\varphi = 0\,, \tag{36}$$

где квадрат эффективной массы определяется как

$$m_{\mathrm{s}}^2 \equiv -\frac{\phi_0 V''(\phi_0)}{3 + 2\omega_{\mathrm{BD}}}\,. \tag{37}$$

Физически осмысленная ситуация имеет место при $m_{\mathrm{s}}^2 \geqslant 0$. Тогда, поскольку для минимума $V(\phi_0)$ в точке $\phi_0$ выполняется соотношение $V''(\phi_0) \geqslant 0$, нужно положить $\phi_0 \leqslant 0$.

Система уравнений (34) и (36) формально инвариантна относительно тех же калибровочных преобразований для тензорной составляющей (8) и неизменной $\varphi$: $\varphi' = \varphi$. Это даёт возможность наложить лоренцевы условия (30), что обращает уравнения (34) в

$$\Box_\eta \theta_{\mu\nu} = 0\,. \tag{38}$$

Существенное отличие от теории БД без потенциала состоит в наличии эффективной массы в уравнении для скалярного поля. Однако, поскольку поля $\theta_{\mu\nu}$ и $\phi$ в уравнениях (38) и (36) независимы, есть формальная возможность провести анализ уравнений (38) аналогично ОТО для (13). В результате для $\theta_{\mu\nu}$ могут быть построены дисперсионные соотношения (17) или (18), а для волны, распространяющейся в направлении $z$, представлена ТТ-калибровка:

$$\theta^{\mathrm{TT}}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \theta_+ & \theta_\times & 0 \\ 0 & \theta_\times & -\theta_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{39}$$

где

$$\theta_+ = \theta_+(\omega t - kz)\,,$$
$$\theta_\times = \theta_\times(\omega t - kz)\,.$$

Рассмотрим уравнение (36). Предполагаем, что скалярная составляющая — это плоская волна, распространяющаяся в направлении $z$. Пусть его решение имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi &= A\exp\left(\mathrm{i}q^\alpha x_\alpha\right) + B\exp\left(-\mathrm{i}q^\alpha x_\alpha\right) = \\ &= A\exp\Big(-\mathrm{i}(\omega_{\mathrm{s}}t - qz)\Big) + B\exp\Big(\mathrm{i}(\omega_{\mathrm{s}}t - qz)\Big), \end{aligned} \tag{40}$$

где $q^\alpha = (\omega_{\mathrm{s}}/c, q^i)$ с циклической частотой $\omega_{\mathrm{s}}$ и волновым вектором $q^i$. Чтобы решение было реальным, предполагается $A = B^*$. Дисперсионное уравнение приобретает вид

$$q^\alpha q_\alpha + m_{\mathrm{s}}^2 = 0\,, \tag{41}$$

откуда

$$\omega_{\mathrm{s}} = c\sqrt{q^2 + m_{\mathrm{s}}^2}\,. \tag{42}$$

Стандартное определение групповой скорости даёт

$$v_{\mathrm{s}} = \frac{\mathrm{d}\omega_{\mathrm{s}}}{\mathrm{d}q} = c\sqrt{1 - \frac{m_{\mathrm{s}}^2 c^2}{\omega_{\mathrm{s}}^2}}\,. \tag{43}$$

То есть, скорость распространения скалярной составляющей стала меньше скорости света.

В силу (35) и (39) имеем

$$h_{\mu\nu} = \theta^{\mathrm{TT}}_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}\frac{\varphi}{\phi_0}\,, \tag{44}$$

или в матричной форме

$$h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \dfrac{\varphi}{\phi_0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \theta_+ - \dfrac{\varphi}{\phi_0} & \theta_\times & 0 \\ 0 & \theta_\times & -\theta_+ - \dfrac{\varphi}{\phi_0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\dfrac{\varphi}{\phi_0} \end{pmatrix}, \tag{45}$$

где

$$\theta_+ = \theta_+(\omega t - kz)\,,$$
$$\theta_\times = \theta_\times(\omega t - kz)\,,$$
$$\varphi = \varphi(\omega_{\mathrm{s}} t - qz)\,.$$

Наличие скалярной составляющей в компонентах $h_{11}$ и $h_{22}$, также как и в теории БД без потенциала, обеспечивает режим "скалярного дыхания". Отличие от теории БД без потенциала состоит в том, что компоненты $h_{00}$ и $h_{33}$ представляют продольную поляризацию. Кроме того, в теории БДV скалярная составляющая гравитационных волн массивна и имеет групповую скорость меньшую, чем скорость света.

### 3.2. Теория Хорндески

При описании ГВ в теории Хорндески рассмотрим возмущения на вакуумном фоне, поэтому ограничимся действием без учёта материальной части [32, 33]:

$$S = -\frac{c^3}{16\pi G}\int \mathrm{d}^4 x\,\sqrt{-g}\,(L_2 + L_3 + L_4 + L_5)\,, \tag{46}$$

где

$$L_2 = K(\phi, X)\,, \qquad L_3 = -G_3(\phi, X)\Box\phi\,,$$
$$L_4 = G_4(\phi, X)R + G_{4,X}\left[(\Box\phi)^2 - (\nabla_\mu\nabla_\nu\phi)(\nabla^\mu\nabla^\nu\phi)\right],$$
$$\begin{aligned} L_5 = G_4(\phi, X)G_{\mu\nu}\nabla^\mu\nabla^\nu\phi - \frac{1}{6}\,G_{5,X}\big[(\Box\phi)^3 - \\ - 3(\Box\phi)(\nabla_\mu\nabla_\nu\phi)(\nabla^\mu\nabla^\nu\phi) + \\ + 2(\nabla^\mu\nabla_\alpha\phi)(\nabla^\alpha\nabla_\beta\phi)(\nabla^\beta\nabla_\mu\phi)\big]\,. \end{aligned} \tag{47}$$

Здесь

$$X = -\frac{1}{2}\,g^{\mu\nu}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi\,, \qquad \Box\phi = \nabla_\mu\nabla^\mu\phi\,,$$

где $K$, $G_3$, $G_4$, $G_5$ — произвольные функции $\phi$ и $X$. Теория Хорндески, как наиболее общий вариант скалярно-тензорной теории с уравнениями поля второго порядка, в частных случаях сводится к известным моделям за счёт выбора функций $G$. Например, ОТО соответствует выбор

$$K = G_3 = G_5 = 0\,, \qquad G_4 = 1\,,$$

теория БД без потенциала получится при:

$$G_3 = G_5 = 0\,, \qquad K = \frac{2\omega_{\mathrm{BD}}X}{\phi}\,, \qquad G_4 = \phi\,,$$

а теория БДV будет отличаться только функцией $K$:

$$K = \frac{2\omega_{\mathrm{BD}}X}{\phi} + V(\phi)\,.$$

Вариация действия (46) задаёт уравнения поля [33]. Чтобы получить решение для гравитационных волн, также рассматриваем возмущения метрики вокруг плоского пространства – времени и возмущения скалярного поля вокруг его фонового значения (24). Таким образом, в линейном приближении по $h_{\mu\nu}$ и $\varphi$ уравнения примут вид:

$$-\frac{1}{2}\,K(0) + G_4(0)G^{(1)}_{\mu\nu} - G_{4,\phi}(0)(\varphi_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}\Box_\eta\varphi) = 0\,, \tag{48}$$

$$\begin{aligned} K_{,\phi}(0) + \left[K_{,X}(0) - 2G_{3,\phi}(0)\right]\Box_\eta\varphi + \\ + K_{,\phi\phi}(0)\varphi + G_{4,\phi}(0)R^{(1)} = 0\,, \end{aligned} \tag{49}$$

где

$$G_4(0) = G_4(\phi_0, 0), \qquad K(0) = K_4(\phi_0, 0)\,, \tag{50}$$

$G^{(1)}_{\mu\nu}$ и $R^{(1)}$ — линеаризованные тензор Эйнштейна (9) и скаляр Риччи (7) соответственно. Кроме того, $K_{,X} = \partial K/\partial X$ при $\phi = \phi_0$ и $X = X_0 = 0$, остальные символы трактуются аналогичным образом.

Чтобы получить решения для гравитационных волн на плоском фоне, необходимо, чтобы $\eta_{\mu\nu}$ и $\phi_0$ были решениями (48) и (49). Тогда

$$K(0) = 0\,, \qquad K_{,\phi}(0) = 0\,. \tag{51}$$

После подстановки в (48) и (49) получаем, что:

$$G^{(1)}_{\mu\nu} - \sigma(\partial_\mu\partial_\nu\varphi - \eta_{\mu\nu}\Box_\eta\varphi) = 0\,, \tag{51}$$

$$(\Box_\eta - m_{\mathrm{s}}^2)\,\varphi = 0\,, \tag{52}$$

где $\sigma = G_{4,\phi}(0)/G_4(0)$ и $G_4(0) \neq 0$.

Отметим, что для теории БД без потенциала и для БДV $\sigma = 1/\phi_0$, тогда уравнение (52) сведётся к уравнению (25). Скалярное уравнение (51) также, как и (36), содержит квадрат эффективной массы скалярного поля:

$$m_{\mathrm{s}}^2 = -\frac{K_{,\phi\phi}(0)}{K_{,X}(0) - 2G_{3,\phi}(0) + 3G^2_{4,\phi}(0)/G_4(0)}\,. \tag{53}$$

В модели БД без потенциала $K_{,\phi\phi}(0) = 0$ поэтому и $m_{\mathrm{s}} = 0$. В случает БДV, подставляя соответствующие значения $K$, $G_3$, $G_4$ и $G_5$, выражение (53) полностью сведётся к выражению (37). Таким образом, в БДV квадрат эффективной массы определяется только локальной формой потенциала, а в теории Хорндески зависит от градиентов поля и геометрии через производные функций $G_i$ и $K$.

Перейдя к новым переменным:

$$\theta_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\,\eta_{\mu\nu}h - \eta_{\mu\nu}\sigma\varphi\,, \tag{54}$$

исходное возмущение метрики можно получить как обратное к приведённому выше

$$h_{\mu\nu} = \theta_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\,\eta_{\mu\nu}\theta - \eta_{\mu\nu}\sigma\varphi\,. \tag{55}$$

Следовательно, (51) примет вид

$$\partial_\rho \partial_{(\mu} \theta^\rho_{\nu)} - \frac{1}{2} \Box_\eta \theta_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \partial_\rho \partial_\sigma \theta^{\rho\sigma} = 0 \,. \tag{56}$$

После калибровочных преобразований уравнения (51) и (53) становятся волновыми [34]:

$$\Box_\eta \theta_{\mu\nu} = 0 \,, \tag{57}$$

$$(\Box_\eta - m_{\rm s}^2)\varphi = 0 \,. \tag{58}$$

Из (57) видно, что тензорная мода — это снова безмассовый гравитон с двумя поляризациями: "+" и "×". Скалярное поле $\phi$ — массивно и отделено от безмассового тензорного поля $\theta_{\mu\nu}$. Дальнейшие рассуждения аналогичны теории БДV, дисперсионное соотношение, циклическая частота и групповая скорость аналогичны выражениям (41), (42) и (43) соответственно, а матрица поляризаций имеет следующий вид:

$$h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \theta_+ - \sigma & \theta_\times & 0 \\ 0 & \theta_\times & -\theta_+ - \sigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sigma \end{pmatrix} , \tag{59}$$

где

$$\theta_+ = \theta_+(\omega t - kz) \,,$$
$$\theta_\times = \theta_\times(\omega t - kz) \,,$$
$$\sigma = \sigma(\omega_{\rm s} t - qz) \,.$$

Таким образом, в теории Хорндески характер распространения гравитационных волн полностью аналогичен теории Бранса – Дикке с потенциалом, т.е., скалярное поле имеет дополнительную поперечную моду, обеспечивающую режим "скалярного дыхания", и продольную моду поляризации. Скорость распространения скалярной моды — меньше скорости света. Если скалярная составляющая не имеет массы, теория сводится к БД без потенциала: останется лишь поперечная мода, распространяющаяся со скоростью света [34].

### 3.3. $f(R)$-гравитация

Действия $f(R)$-гравитации в вакууме имеет вид:

$$S = -\frac{c^3}{16\pi G} \int {\rm d}^4 x \sqrt{-g}\, f(R) \,, \tag{60}$$

где $f$ — достаточно гладкая функция. Варьирование этого действия по $g^{\mu\nu}$ приводит к уравнениям

$$f' R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} f g_{\mu\nu} + g_{\mu\nu} \Box f' - \nabla_\mu \nabla_\nu f' = 0 \,, \tag{61}$$

где $f' = \partial f(R)/\partial R$. То есть, уравнения в этой теории имеют 4-й порядок.

Мы поместили её в раздел скалярно-тензорных теорий, потому что она эквивалентна модели с действием:

$$S = -\frac{c^3}{16\pi G} \int {\rm d}^4 x \sqrt{-g} \left[\phi R - 2U(\phi)\right] . \tag{62}$$

Эквивалентность устанавливается с помощью преобразований Лежандра при

$$\phi \equiv f'(\chi) \,, \tag{63}$$

которое считается обратимым $\chi = \chi(\phi)$, и с последующим приравниванием $\chi = R$. Потенциал в уравнении (62) имеет форму:

$$U(\phi) = \frac{1}{2} \left[\phi \chi(\phi) - f(\chi(\phi))\right] . \tag{64}$$

Варьируя действие (62) по $g^{\mu\nu}$ и $\phi$ как независимым переменным, получаем уравнения

$$\phi G_{\mu\nu} + g_{\mu\nu} \Box \phi + U(\phi) g_{\mu\nu} - \nabla_\mu \nabla_\nu \phi = 0 \,, \tag{65}$$

$$\Phi \equiv R - 2U_\phi = 0 \,, \tag{66}$$

где $U_\phi = {\rm d}U/{\rm d}\phi$. Комбинируя след (65) с (66) получаем скалярное уравнение

$$\Box \phi + 4U(\phi) - 2\phi U_\phi = 0 \,. \tag{67}$$

Уравнения (65) – (67) используются для линеаризации, определённой в (24), как и в скалярно-тензорных теориях. $f(R)$ предполагает в качестве фонового решения пространство Минковского. С использованием калибровок, аналогичных БД и БДV, линейные уравнения приводятся к уже известному виду:

$$\Box_\eta \theta_{\mu\nu} = 0 \,, \tag{68}$$

$$(\Box_\eta - m_{\rm s}^2)\, \varphi = 0 \,. \tag{69}$$

Формально эти уравнения совпадают с (38) и (36). Только теперь

$$\theta_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h - \eta_{\mu\nu} \frac{\varphi}{f'(0)} \,, \tag{70}$$

а квадрат эффективной массы определяется как

$$m_{\rm s}^2 \equiv \frac{1}{3} \frac{f'(0)}{f''(0)} \,, \tag{71}$$

чтобы $m_{\rm s}^2 \geqslant 0$. Таким образом, далее можно повторить рассуждения и построения от (39) до (59) с той же самой последующей интерпретацией гравитационных волн. Такая близкая аналогия не удивительна, ведь скалярно-тензорная реализация $f(R)$-теории отличается от БДV-теории только отсутствием кинетического члена в лагранжиане.

В заключение заметим, что возвращение к чисто тензорному представлению осуществляется с помощью обратных линеаризованных преобразований Лежандра, в результате чего скалярная мода будет выражаться через линеаризованный скаляр кривизны $\varphi = f''(0) R^{(1)}$.

### 3.4. Теории с массивным гравитоном

В моделях со скалярными полями возможно спонтанное нарушение симметрии, т.е., появление мод с ненулевой массой. В настоящее время имеется только одно экспериментальное ограничение на массу гравитона: событие GW170817 [10]. Расстояние, на котором действует ограничение соответствует $z < 0{,}01$, где $z$ — красное смещение. Ввиду того, что массивные моды служат источником, например, для инфляции, модели с массивным гравитоном продолжают активно рассматриваться, а соответствие скорости распространение ГВ скорости света на $z < 0{,}01$ можно обеспечить, используя механизмы экранировки [33].

Мы рассмотрим модель де Рам – Габададзе – Толи (дРГТ), в которой нет "духов". Действие без материи имеет вид [36]:

$$S = -\frac{c^3}{16\pi G}\int \mathrm{d}^4 x\sqrt{-g}\,\big(R + V(g,f)\big)\,, \tag{72}$$

где $V(g,f)$ — потенциал гравитона. $V(g,f)$ зависит от физической и вспомогательной (фоновой) метрик $g$ и $f$, позволяя избежать нефизических степеней свободы, обеспечив источник для космологического расширения. Потенциал $V(g,f)$ определяется как:

$$V(g,f) = m^2 \sum_{i=0}^{4} a_i U_i(g,f)\,, \tag{73}$$

$$m^2 = \frac{m_\mathrm{g}^2 c^2}{\hbar^2}\,,$$

где $m$ — параметр массы, $m_\mathrm{g}$ — масса гравитона, $a_i$ — безразмерные константы связи. Ключевое отличие данной теории заключается в том, что масса гравитона $m_\mathrm{g}$ изначально вводится в действие, а не возникает как эффективная. Потенциал можно выразить через симметрические полиномы с помощью тензора $\mathcal{K}^\mu_\nu$:

$$\begin{gathered}U_0 = 1\,, \quad U_1 = [\mathcal{K}]\,, \quad U_2 = [\mathcal{K}]^2 - [\mathcal{K}^2]\,,\\ U_3 = [\mathcal{K}]^3 - 3[\mathcal{K}]\;[\mathcal{K}^2] + 2[\mathcal{K}^3]\,,\\ U_4 = [\mathcal{K}]^4 - 6[\mathcal{K}^2][\mathcal{K}]^2 + 8[\mathcal{K}^3][\mathcal{K}] + 3[\mathcal{K}^2]^2 - 6[\mathcal{K}^4]\,,\end{gathered} \tag{73a}$$

где $\mathcal{K}^\mu_\nu$ определяется как:

$$\mathcal{K}^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu - \sqrt{g^{\mu\alpha} f_{\alpha\nu}}\,,$$

$\delta^\mu_\nu$ — символ Кронекера. Квадратные скобки в (73а) означают следующее: $[\mathcal{K}] = \mathcal{K}^\mu_\nu$, $[\mathcal{K}^2] = \mathcal{K}^\mu_\nu \mathcal{K}^\nu_\mu$, $[\mathcal{K}^3] = \mathcal{K}^\mu_\alpha \mathcal{K}^\alpha_\beta \mathcal{K}^\beta_\mu$ и т.д. Количество полиномов определяется тем фактом, что в пространстве размерности $D$ существует ровно $D+1$ независимых элементарных симметрических полиномов. $U_0$ является тривиальным, а $U_4$ можно выразить через $U_3$, $U_2$ и $U_1$, используя уравнения поля.

Подробнее о вспомогательной метрике. Для сохранения общей ковариантности теории при её введении используется формализм полей Штюкельберга $\phi^a$, где индекс $a = 0,1,2,3$ нумерует скалярные поля. Эти поля отображают пространство–время в другое многообразие, в котором метрика Минковского определяется как $\eta_{ab} = \mathrm{diag}\,(-1,1,1,1)$. Тогда вспомогательная метрика имеет вид:

$$f_{\alpha\nu} = \partial_\alpha \phi^a \partial_\nu \phi^b \eta_{ab}\,, \tag{74}$$

где латинские индексы относятся к внутренним степеням свободы полей и сворачиваются с $\eta_{ab}$, обеспечивая лоренц-инвариантность в новом пространстве. В унитарной калибровке $\phi^a = x^a$ метрика $f_{\mu\nu}$ переходит в $\eta_{\mu\nu}$, и теория описывает массивный гравитон на фоне Минковского.

Уравнения движения обсуждаемой модели в общем виде [37]:

$$G_{\mu\nu} = -\frac{m^2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta}{\delta g_{\mu\nu}}\sum_{i=0}^{4}\left(a_i\sqrt{-g}\,U_i\right)\,, \tag{75}$$

где $i = 0,1,2,3,4$.

**3.4.1. Плоские гравитационные волны.** Для получения решения плоских ГВ рассмотрим поля Штюкельберга в унитарной калибровке, при этом вспомогательная метрика переходит в метрику Минковского $f_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$. Поскольку взаимодействие строится с помощью скаляров, образованных обеими метриками, вводим тензор смешанных компонент. Его можно определить поднятием индекса у $\eta_{\alpha\nu}$ с помощью обратной метрики $g^{\mu\alpha}$:

$$\eta^\mu_\nu = g^{\mu\alpha}\eta_{\alpha\nu}\,. \tag{76}$$

Тогда тензор $\mathcal{K}_{\mu\nu}$ можно записать в следующем виде:

$$\mathcal{K}^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu - \beta^\mu_\nu\,, \tag{77}$$

где $\beta^\mu_\nu$ удовлетворяет условию $\beta^\mu_\lambda \beta^\lambda_\nu = \eta^\mu_\nu$. Далее, в рамках данного подхода, удобно записать слагаемые, входящие в уравнение движения (75), отдельно:

$$\frac{\delta U_2}{\delta g_{\mu\nu}} = \mathcal{K}^{\mu\nu} - H^{\mu\nu} + [\mathcal{K}](g^{\mu\nu} - \mathcal{K}^{\mu\nu})\,, \tag{78}$$

$$\begin{aligned}\frac{\delta U_3}{\delta g_{\mu\nu}} = {} & \frac{3}{2}\,\mathcal{K}^\mu_\alpha H^{\alpha\nu} + \frac{3}{2}\,H^\mu_\alpha \mathcal{K}^{\alpha\nu} + 3H^{\mu\nu} - 6\mathcal{K}^{\mu\nu} + \\ & + \frac{3}{2}\,U_2\,(g^{\mu\nu} - \mathcal{K}^{\mu\nu}) - 3[\mathcal{K}](H^{\mu\nu} - \mathcal{K}^{\mu\nu})\,,\end{aligned} \tag{79}$$

$$\begin{aligned}\frac{\delta U_4}{\delta g_{\mu\nu}} = {} & 12H^\mu_\alpha H^{\alpha\nu} - 24H^{\mu\nu} + 48\mathcal{K}^{\mu\nu} - \\ & - 18\mathcal{K}^\mu_\alpha H^{\alpha\nu} - 18H^\mu_\alpha \mathcal{K}^{\alpha\nu} + 2U_3(g^{\mu\nu} - \mathcal{K}^{\mu\nu}) - \\ & - 6U_2(H^{\mu\nu} - \mathcal{K}^{\mu\nu}) + 2[\mathcal{K}](3\mathcal{K}^\mu_\alpha H^{\alpha\nu} + \\ & + 3H^\mu_\alpha \mathcal{K}^{\alpha\nu} + 6H^{\mu\nu} - 12\mathcal{K}^{\mu\nu})\,,\end{aligned} \tag{80}$$

где $H^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu - \eta^\mu_\nu$.

Допустим, плоская волна представлена метрикой

$$\mathrm{d}s^2 = -\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v - F(u,x,y)\,\mathrm{d}u^2 + \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 \tag{81}$$

и удовлетворяет уравнениям дРГТ (75) [37], где $u = ct - z$ и $v = ct + z$ — нулевые координаты, а $F(u,x,y)$ — решение уравнений движения. В данном подходе получают и гравитационно-волновое решение в ОТО при $F(u,x,y)$, равной произведению произвольных функций от $u$ и решений уравнения Лапласа (в терминах $x$ и $y$). Далее последовательно определяются $\eta_{\mu\nu}$, $\eta^\mu_\nu$, $\beta^\mu_\nu$ и $\mathcal{K}^\mu_\nu$ в матричном виде. При дальнейшей подстановке в (78)–(80) ненулевым окажется только выражение (78):

$$\frac{\delta U_2}{\delta g_{\mu\nu}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2F & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}. \tag{82}$$

Тогда уравнение движение (75) примет вид

$$G_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -2\nabla^2 F(u,x,y) & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}. \tag{83}$$

Следовательно, в (83) все компоненты тензора Эйнштейна, кроме

$$G_{11} = -2\nabla^2 F(u,x,y) \tag{84}$$

обращаются в нуль [37], а $\nabla^2$ — лапласиан в поперечной плоскости:

$$\nabla^2 F(u,x,y) = a_2 m^2 F(u,x,y)\,. \tag{85}$$

Таким образом, получено решение — плоская волна — если её форма удовлетворяет двумерному или модифицированному уравнениям Гельмгольца в зависимости от знака $a_2$. Поэтому

$$F(u,x,y) = f_1(u)F_1(x,y) + f_2(u)F_2(x,y)\,, \tag{86}$$

где $f_1(u)$ и $f_2(u)$ — произвольные функции $u$, а $F_1(x,y)$ и $F_2(x,y)$ — решения двумерного (модифицированного) уравнения Гельмгольца. Значит, $F(u,x,y)$ описывает плоскую волну, распространяющуюся в направлении $z$ со скоростью света.

Решение справедливо независимо от значений коэффициентов $a_i$ в Лагранжиане, в безмассовом пределе воспроизводя гравитационно-волновое решение ОТО.

**3.4.2. Сферические гравитационные волны.** Для получения решения в виде сферических ГВ удобно записать уравнение движения (75) в явном виде:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\,Rg_{\mu\nu} + m^2\chi_{\mu\nu} = 0\,, \tag{87}$$

где $\chi_{\mu\nu}$ — потенциальный член гравитационного поля:

$$\begin{aligned}\chi_{\mu\nu} = &-\frac{a_1}{2}(U_1 g_{\mu\nu} - \mathcal{K}_{\mu\nu}) - \\ &-\frac{a_2}{2}(U_2 g_{\mu\nu} - 2U_1\mathcal{K}_{\mu\nu} + 2\mathcal{K}^2_{\mu\nu}) - \\ &-\frac{a_3}{2}(U_3 g_{\mu\nu} - 3U_2\mathcal{K}_{\mu\nu} + 6U_1\mathcal{K}^2_{\mu\nu} - 6\mathcal{K}^3_{\mu\nu}) - \\ &-\frac{a_4}{2}(U_4 g_{\mu\nu} - 4U_3\mathcal{K}_{\mu\nu} + 12U_2\mathcal{K}^2_{\mu\nu} - \\ &- 24U_1\mathcal{K}^3_{\mu\nu} + 24\mathcal{K}^4_{\mu\nu})\,.\end{aligned} \tag{88}$$

Далее рассмотрим решение в координатах Эддингтона – Финкельштейна, где метрика Минковского:

$$\mathrm{d}s^2 = -\,\mathrm{d}u^2 - 2\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}r + r^2(\,\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\phi^2)\,, \tag{89}$$

$r$ — ареальная координата, $\theta, \phi$ — сферические угловые координаты, а $u$ — запаздывающая координата Эддингтона. Для гравитационной волны рассмотрим метрический тензор в виде:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + S_{\mu\nu}\,, \tag{90}$$

где $S_{\mu\nu}$ — pp-волна Бринкмана [38], имеющая в координатах Эддингтона – Финкельштейна только одну ненулевую компоненту $S_{uu}$:

$$S_{uu} = \frac{2\mathcal{U}(u)P(\theta,\phi)}{r}\;\mathrm{d}u^2\,. \tag{91}$$

Здесь $\mathcal{U}(u)$ — профиль гравитационной волны, $P(\theta,\phi)$ — сферическая гармоника порядка $l = 0$. При постоянных значениях $\mathcal{U}$ и $P$ метрика сводится к пространству – времени Шварцшильда.

Далее определим вспомогательную метрику. В общем случае её выбор зависит от поставленной задачи. В случае плоских волн удобнее рассматривать метрику Минковского, в случае сферических волн выгоднее использовать сингулярную вспомогательную метрику [39]:

$$f_{uu} = \frac{\mathcal{U}^2}{r^6}\left[\left(\frac{\partial P}{\partial\theta}\right)^2 + \frac{1}{\sin^2\theta}\left(\frac{\partial P}{\partial\phi}\right)^2\right]\mathrm{d}u^2\,. \tag{92}$$

Тогда с учётом (90), (91) и (92) выражения для $\mathcal{K}^\mu_\nu$ имеют вид:

$$\begin{aligned}\mathcal{K}^u_u &= \frac{2}{r^2}\,(P\,\mathrm{d}\mathcal{U} - \mathcal{U}\,\mathrm{d}P)\,\mathrm{d}u = \\ &= \frac{2\mathcal{U}}{r^2}\left(P\,\frac{\dot{\mathcal{U}}}{\mathcal{U}}\,\mathrm{d}u^2 - \frac{\partial P}{\partial\theta}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}\theta - \frac{\partial P}{\partial\phi}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}\phi\right).\end{aligned} \tag{93}$$

При получении сферического решения $U_4$ можно выразить через $U_3$, $U_2$ и $U_1$, используя уравнения поля, тогда $a_4 = 0$. Затем, примем $a_1 = 2/m^2$, $a_2 = 0$ [38], тогда уравнение (87) сведётся к:

$$\mathcal{U}(u)\left[\frac{\partial^2 P}{\partial\phi^2} + \sin\theta\left(\cos\theta\,\frac{\partial P}{\partial\theta} + \sin\theta\,\frac{\partial^2 P}{\partial\theta^2}\right)\right] = 0\,. \tag{94}$$

Равенство $\mathcal{U} = 0$ подразумевает пространство Минковского, а члены в квадратных скобках — гравитационную волну. Ввиду того, что $P$ — сферическая гармоническая функция, зависящая от $\theta$ и $\phi$ с $l = 0$, существует единственное решение: $P = \mathrm{const}$ с $\mathcal{U}$ — произвольной функцией от $u$. Если подставить это решение в выражение (87), то получим в точности метрику Вайдьи в координатах Эддингтона – Финкельштейна. В ОТО метрика Вайдьи является решением уравнений Эйнштейна с источником в виде нулевой пыли. Функция $\mathcal{U}(u)$ интерпретируется как масса Мизнера – Шарпа, и её изменение связано с потоком энергии излучения. Иными словами, например, масса чёрной дыры может меняться за счёт исходящего или поглощенного излучения. В дРГТ при безразмерной константе связи $a_2$ можно сказать, что $\mathcal{U}(u)$ имеет размерность массы, напрямую не имея зависимости от параметра $m$. В итоге $\mathcal{U}(u)$ интерпретируется как масса Мизнера – Шарпа. Сравнивая феноменологию для ОТО и дРГТ, единственное объяснение полученного решения заключается в том, что энергия переносится гравитационными волнами.

Для получения дисперсионного соотношения рассмотрим квазисферическое решение, при котором $P \neq \neq \mathrm{const}$ и уравнение поля (87) в линейном приближении. Для этого необходимо, чтобы (91) было малым возмущением на фоне метрики Минковского, тогда:

$$\left|\frac{2\mathcal{U}(u)P(\theta,\phi)}{r}\right| \ll 1 \Rightarrow \mathcal{U}(u) \ll r,\, P(\theta,\phi) \ll r\,. \tag{95}$$

С учётом сингулярной вспомогательной метрики (92) уравнение поля примет вид:

$$\Box h_{ab} + \frac{m^2 a_1}{2}\,\mathcal{K}_{ab} = 0\,. \tag{96}$$

Это уравнение можно интерпретировать как волновое уравнение для $h_{ab}$ с эффективной массой гравитона, зависящей от координат:

$$m_{\mathrm{s}}^2 = -\,\frac{a_1 m^2\dot{\mathcal{U}}P}{r^2}\,, \tag{97}$$

Важно, что эта эффективная масса не постоянна, а убывает как $1/r^2$, завися от координат $u, r, \theta, \phi$. На больших расстояниях $r \to \infty$ масса стремится к нулю, соответствуя безмассовому поведению вдали от источника.

Отметим, что $u$, входящая в (89), является запаздывающей координатой Эддингтона, зависящей от $r$. Для того, чтобы рассмотреть волну в пространстве–времени Минковского и получить дисперсионное соотношение для радиальных гравитонов, необходимо восстановить сферическую координату в $\mathcal{U}(u)$:

$$S_{uu} = \frac{2\mathcal{U}\left(t - r_*(r)\right) P}{r}\, \mathrm{d}u^2 \,, \tag{98}$$

где черепаховая координата:

$$r_* = r + 2\mathcal{U}P \ln \frac{r - 2\mathcal{U}P}{2\mathcal{U}P} \,. \tag{99}$$

Последнее равенство является рекурсивным уравнением относительно $r_*$, поскольку $\mathcal{U}$ — функция $r_*$. В линейном приближении при условии, что $\mathcal{U}$ меняется медленно

$$\mathcal{U}P \ll r \,. \tag{100}$$

Тогда

$$\frac{\mathrm{d}r_*}{\mathrm{d}r} = 1 + \frac{2\mathcal{U}P}{r} \,. \tag{101}$$

Таким образом, итоговое дисперсионное соотношение, включающее координату $r$:

$$\frac{c}{v_g} = \frac{kc}{\omega} = 1 + \frac{2\mathcal{U}P}{r} \ln\left(\frac{r}{2\mathcal{U}P} - 1\right) \Rightarrow$$
$$v_{\mathrm{g}} = c\left(\frac{1}{1 + (2\mathcal{U}P/r)\ln\left((r/2\mathcal{U}P) - 1\right)}\right) . \tag{102}$$

Из этого соотношения следует, что $v_{\mathrm{g}}$ всегда меньше скорости света за пределами горизонта $r > \mathcal{U}P$, что в линейном приближении выполняется всегда согласно условиям (95). Иными словами, скорость распространения ГВ меньше скорости света. Однако, согласно [38], это лишь кажущийся эффект, который возникает из-за того, что линеаризованное описание не учитывает обратную реакцию волны на геометрию. Более наглядно это можно проследить через связь координат $\mathrm{d}r_*/\mathrm{d}r > 0$. Значит, за одно и то же координатное время гравитон проходит меньшее изменение ареальной координаты, чем черепаховой. То есть, скорость, измеренная по физическому расстоянию $r$, оказывается меньше скорости, измеренной по $r_*$ (которая равна скорости света). Отметим также, что выражение для групповой скорости, в отличии от ранее рассмотренных теорий, зависит только от координат. Запишем выражение для эффективной массы:

$$m_{\mathrm{s}}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 = \omega^2\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{v_{\mathrm{g}}^2}\right) . \tag{103}$$

Во-первых, $m_{\mathrm{g}}$ зависит от параметра $m$ и от координат $u, r, \theta, \phi$ согласно (97). Во-вторых, за пределами горизонта $m_{\mathrm{s}}^2 < 0$, т.е., параметр $m$ — мнимый. В дРГТ такой результат не имеет физического смысла и возникает вследствие того, что предпринята попытка найти линейное приближение нелинейной теории [38].

**3.4.3. Поляризация гравитационных волн в дРГТ.** Для анализа поляризаций наиболее информативным является рассмотрение возмущений на фоне метрики Минковского и вспомогательной метрики $f$:

$$f_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} \,. \tag{104}$$

Разложение действия дРГТ в ряд до второго порядка и последующая вариация по $h_{\mu\nu}$ даёт уравнения Фирца–Паули [40]:

$$m^2(h_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}h) = \Box_\eta h_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}\Box_\eta h + \partial_\mu\partial_\nu h +$$
$$+ \eta_{\mu\nu}\partial_\alpha\partial_\beta h^{\alpha\beta} - \partial_\mu\partial_\alpha h^\alpha_\nu - \partial_\nu\partial_\alpha h^\alpha_\mu \,. \tag{105}$$

Таким образом, окончание раздела посвящено уже гравитационным волнам в модели Фирца–Паули. Для поиска поляризаций удобно перейти в импульсное пространство, рассматривая решение в виде плоской волны:

$$h_{\mu\nu} = a_{\mu\nu} \exp\left(\mathrm{i}p_\alpha x^\alpha\right) . \tag{106}$$

где $a_{\mu\nu}$ — тензор поляризации, а $p^\mu = (\omega, \mathbf{p})$.

Тензор $a_{\mu\nu}$ симметричен и имеет 10 независимых компонент. Наличие параметра массы $m$ в уравнении (105) в явном виде ограничивает количество условий, которые можно наложить на компоненты возмущения. Их меньше, в сравнении с линейным уравнением ОТО. Тем не менее есть возможность для следующих ограничений. Условия поперечности $p^\mu a_{\mu\nu} = 0$ накладывают 4 ограничения. Условие бесследовости $a^\mu_\mu = 0$ даст ещё 1 ограничение. Итого остаётся пять степеней свободы. Выберем систему покоя гравитона, в которой $p^\mu = (m, 0, 0, 0)$. В этой системе условие поперечности примет вид:

$$p^\mu a_{\mu\nu} = m a_{0\nu} = 0 \,,$$

значит, $a_{0\nu} = 0$ для всех $\nu$. То есть, в этой системе отсчёта не равны нулю только пространственные компоненты $a_{ij}$. Условие бесследовости даёт $a_{ii} = 0$. Таким образом, получаем две тензорные моды, идентичные ОТО:

$$a_+ = a_{xx} = -a_{yy} \,, \tag{107}$$

$$a_\times = a_{xy} = a_{yx} \,. \tag{108}$$

Две векторные моды $a^V_{ij}$ соответствуют вращениям в плоскости, перпендикулярной направлению распространения:

$$a_{xz} = a_{zx} \,, \tag{109}$$

$$a_{yz} = a_{zy} \,. \tag{110}$$

Одна скалярная мода $a^S_{ij}$ соответствует продольным колебаниям. Из условия бесследовости получаем:

$$a_{zz} = -(a_{xx} + a_{yy}) \,. \tag{111}$$

Возмущение метрического тензора $h_{\mu\nu}$ можно записать как:

$$h_{\mu\nu} = \sum_A a^A_{\mu\nu} F_A(t, z) \,, \tag{112}$$

где $A$ — мода колебаний, а функция $F_A(t, z)$ зависит от типа источника. С учётом нормировки запишем $h_{\mu\nu}$ в явном виде:

$$h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} F_+ + \frac{1}{\sqrt{6}} F_s & \frac{1}{\sqrt{2}} F_\times & \frac{1}{\sqrt{2}} F_x \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} F_\times & -\frac{1}{\sqrt{2}} F_+ + \frac{1}{\sqrt{6}} F_s & \frac{1}{\sqrt{2}} F_y \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} F_x & \frac{1}{\sqrt{2}} F_y & -\frac{2}{\sqrt{6}} F_s \end{pmatrix} . \tag{113}$$

Поляризации в теории Фирца – Паули совпадают с поляризациями в дРГТ. Линейное приближение в данной задаче не нарушает физическую картину. Дополнительно покажем, как отличаются дисперсионные соотношения для теории Фирца – Паули и для дРГТ. С учётом условий поперечности $p^\mu a_{\mu\nu} = 0$ и бесследовости $a^\mu_\mu = 0$, подставив решение (106) в уравнение (105), получим:

$$(-p^2 + m^2)a_{\mu\nu} = 0\,, \tag{114}$$

следовательно, в терминах циклической частоты $\omega$ и волнового вектора $\mathbf{k}$ выражение идентично обсуждавшемуся ранее в скалярно-тензорных теориях в системе координат $x^i = (t, \mathbf{r})$:

$$\omega^2 = \sqrt{k^2 + m^2} \Rightarrow v_g = c\sqrt{1 - \frac{m^2c^2}{\omega^2}}\,. \tag{115}$$

Сравнивая (115) и (102) видим, что в теории Фирца – Паули, в отличии от дРГТ, скорость распространения ГВ зависит от параметра $m$ и от частоты волны, а также меньше скорости света. Напомним, что основным недостатком теории Фирца – Паули является то, что она приводит к появлению "духов".

Подведём итог. Отличие теории дРГТ от обсуждавшихся ранее состоит в том, что, во-первых, масса вводится изначально в действие, а не возникает в уравнениях как эффективная. Во-вторых, наличие исходного параметра массы приводит к появлению сферической волны (94) независимо от этого параметра. Рассмотрение квазисферической волны, с учётом сингулярной вспомогательной метрики, приводит к появлению эффективной массы (97), зависящей от исходного параметра массы и от координат. В-третьих, дисперсионное соотношение (102) показывает, что скорость ГВ в искривлённой метрике равна скорости света, а в линеаризованном приближении на плоском фоне — меньше её, завися от координат и функции $\mathcal{U}(u)$, но не от частоты. Значит, дисперсия отсутствует. В-четвертых, возможны пять поляризаций: две поперечные тензорные, две продольные векторные, и одна скалярная, которая имеет как поперечную, так и продольную составляющие (107) – (111). В-пятых, отличие от ранее обсужденных скалярно-тензорных теорий состоит и в том, что все компоненты массивны, а не только скалярная.

## 4. Модифицированная ньютоновская динамика с двумя метриками

Модифицированная ньютоновская динамика с двумя метриками (BIMOND, далее БИМОНД) — это релятивистское обобщение модифицированной ньютоновской динамики (МОНД), предлагающей решение проблемы тёмной материи с помощью модификации закона Ньютона на больших расстояниях. В БИМОНД гравитация описывается двумя метриками: $g_{\mu\nu}$ и $\hat{g}_{\mu\nu}$. Действие модели имеет вид [27]:

$$S = -\frac{c^3}{16\pi G}\int\left[\beta\sqrt{-g}\,R + \alpha\sqrt{-\hat{g}}\,\hat{R} + 2\,\frac{v_{g\hat{g}}}{l_M^2}\,\mathcal{M}\right]\mathrm{d}^4x + S_m[g_{\mu\nu}, \psi_m] + \hat{S}_m[\hat{g}_{\mu\nu}, \hat{\psi}_m]\,,$$

где $R$ и $\hat{R}$ — скаляры Риччи для метрик $g_{\mu\nu}$ и $\hat{g}_{\mu\nu}$ соответственно, $g$ и $\hat{g}$ — определители метрик, а $v_{g\hat{g}} \equiv (g\hat{g})^{1/4}$ — комбинированный объём. Длина $l_M \equiv c^2/a_0$ задаёт силу связи, $a_0$ — константа МОНД с размерностью ускорения. Безразмерное взаимодействие $\mathcal{M}$ является функцией тензоров "относительного ускорения" $l_M C^\alpha_{\beta\gamma}$, где

$$C^\alpha_{\beta\gamma} \equiv \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} - \hat{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma}\,, \tag{117}$$

а $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ и $\hat{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma}$ — связности Леви – Чивиты для метрик $g_{\mu\nu}$ и $\hat{g}_{\mu\nu}$. Действия $S_m$ и $\hat{S}_m$ соответствуют материи и материи – близнецу: каждое из них — функционал соответствующей метрики и материального поля $\psi_m$ или $\hat{\psi}_m$. Константы $\alpha$ и $\beta$ — параметры модели.

Если в (116) вместо $R$ и $\hat{R}$ подставить величины

$$-\Gamma^{(2)} \equiv g^{\mu\nu}\left(\Gamma^\gamma_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda_{\nu\gamma} - \Gamma^\gamma_{\mu\nu}\Gamma^\lambda_{\lambda\gamma}\right), \tag{118}$$

$$-\hat{\Gamma}^{(2)} \equiv \hat{g}^{\mu\nu}\left(\hat{\Gamma}^\gamma_{\mu\lambda}\hat{\Gamma}^\lambda_{\nu\gamma} - \hat{\Gamma}^\gamma_{\mu\nu}\hat{\Gamma}^\lambda_{\lambda\gamma}\right), \tag{119}$$

то уравнения движения не изменятся, поскольку $R$ и $\hat{R}$ отличаются от (118) и (119) соответственно на полную дивергенцию. Значит, мы можем перейти к

$$S = -\frac{c^3}{16\pi G}\int\mathrm{d}^4x\left[-\beta\Gamma^{(2)}\sqrt{-g} - \alpha\hat{\Gamma}^{(2)}\sqrt{-\hat{g}} + 2\frac{v_{g\hat{g}}}{l_M^2}\mathcal{M}\right] + S_m[g_{\mu\nu}, \psi_m] + \hat{S}_m[\hat{g}_{\mu\nu}, \hat{\psi}_m]\,. \tag{120}$$

Рассмотрим Вселенную, в которой материя и материя – близнец распределены симметрично друг относительно друга, перейдя к пределу слабого поля. Тогда каждый из метрических тензоров можно представить как сумму метрики Минковского и малого возмущения над ней:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}\,, \quad h_{\mu\nu} \ll 1\,,$$
$$\hat{g}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \hat{h}_{\mu\nu}\,, \quad \hat{h}_{\mu\nu} \ll 1\,. \tag{121}$$

Для определителей метрик будет верно приближение:

$$g \approx \hat{g} \approx \det(\eta_{\mu\nu}) = -1 \tag{122}$$

Начнём переписывать действие (120) в пределе слабого поля. В дальнейшем, вместо $\Gamma^{(2)}$ и $\hat{\Gamma}^{(2)}$, будем использовать их приближения второго порядка малости — $\Gamma^{(2)}(h_{\mu\nu})$ и $\Gamma^{(2)}(\hat{h}_{\mu\nu})$ соответственно. Учитывая (121), для $C^\alpha_{\beta\gamma}$ получаем:

$$C^\alpha_{\beta\gamma} = \frac{1}{2}\,\eta^{\alpha\rho}\left(\partial_\beta h^-_{\rho\gamma} + \partial_\gamma h^-_{\rho\beta} - \partial_\rho h^-_{\beta\gamma}\right), \tag{123}$$

где $h^-_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \hat{h}_{\mu\nu}$. Вследствие (123) безразмерное взаимодействие $\mathcal{M}$ становится функционалом $\mathcal{M}_1(q^-)$, где $q^- \equiv ((1/a_0)\partial_\sigma h^-_{\mu\nu})^2$. Для удобства последующих выкладок введём также функционал

$$\mathcal{M}_2(q^-) \equiv \mathcal{M}_1(q^-) - \frac{\alpha\beta}{2a_0^2(\alpha+\beta)}\,\Gamma^{(2)}(h^-_{\mu\nu})\,. \tag{124}$$

Заметим, что пока обсуждается только случай $\alpha + \beta \neq 0$.

Рассмотрим первые два слагаемых подынтегрального выражения (120) в приближении слабого поля:

$$\beta\Gamma^{(2)}\sqrt{-g} + \alpha\hat{\Gamma}^{(2)}\sqrt{-\hat{g}} \approx \beta\Gamma^{(2)}(h_{\mu\nu}) + \alpha\Gamma^{(2)}(\hat{h}_{\mu\nu}) = \frac{\Gamma^{(2)}(h^+_{\mu\nu})}{\alpha+\beta}\,, \tag{125}$$

где введено обозначение $h^+_{\mu\nu} \equiv \beta h_{\mu\nu} + \alpha\hat{h}_{\mu\nu}$. Отметим, что выражение в правой части — порядка квадрата первой производной возмущения метрики $h^+_{\mu\nu}$.

Материальную часть действия (120) можно представить в виде:

$$S_m + \hat{S}_m = \frac{1}{2c}\int\left(h_{\mu\nu}\mathcal{T}^{\mu\nu} + \hat{h}_{\mu\nu}\hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu}\right)\mathrm{d}^4x\,, \qquad (126)$$

где для действий материи и материи – близнеца введены выражения:

$$S_m = \frac{1}{2c}\int h_{\mu\nu}\mathcal{T}^{\mu\nu}\,\mathrm{d}^4x\,, \qquad (127)$$

$$\hat{S}_m = \frac{1}{2c}\int \hat{h}_{\mu\nu}\hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu}\,\mathrm{d}^4x\,, \qquad (128)$$

в которых $\mathcal{T}^{\mu\nu}$ и $\hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu}$ — тензоры энергии – импульса в пространстве Минковского.

Домножив (126) на $\alpha+\beta$, можем преобразовать подынтегральное выражение следующим образом:

$$(\alpha+\beta)\left(h_{\mu\nu}\mathcal{T}^{\mu\nu} + \hat{h}_{\mu\nu}\hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu}\right) = (\beta h_{\mu\nu} + \alpha\hat{h}_{\mu\nu})\left(\mathcal{T}^{\mu\nu} + \hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu}\right) + \\ + (h_{\mu\nu} - \hat{h}_{\mu\nu})\left(\alpha\mathcal{T}^{\mu\nu} - \beta\hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu}\right) = h^+_{\mu\nu}\mathcal{T}^{\mu\nu}_+ + h^-_{\mu\nu}\mathcal{T}^{\mu\nu}_-\,, \qquad (129)$$

где $\mathcal{T}^{\mu\nu}_+ \equiv \mathcal{T}^{\mu\nu} + \hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu}$, $\mathcal{T}^{\mu\nu}_- \equiv \alpha\mathcal{T}^{\mu\nu} - \beta\hat{\mathcal{T}}^{\mu\nu}$. Тогда (126) можно переписать в виде:

$$S_m + \hat{S}_m = \frac{c^3}{16\pi G(\alpha+\beta)}\int\frac{8\pi G}{c^4}\left(h^+_{\mu\nu}\mathcal{T}^{\mu\nu}_+ + h^-_{\mu\nu}\mathcal{T}^{\mu\nu}_-\right)\mathrm{d}^4x\,. \qquad (130)$$

Подставив результаты промежуточных выкладок в (120), умноженное на $\alpha+\beta$, получим:

$$(\alpha+\beta)S = -\frac{c^3}{16\pi G}\int\Bigg[-\Gamma^{(2)}(h^+_{\mu\nu}) + \frac{8\pi G}{c^4}h^+_{\mu\nu}\mathcal{T}^{\mu\nu}_+ + \\ + \frac{8\pi G}{c^4}h^-_{\mu\nu}\mathcal{T}^{\mu\nu}_- + 2(\alpha+\beta)a_0^2\mathcal{M}_2(q^-)\Bigg]\mathrm{d}^4x\,. \qquad (131)$$

Таким образом, после аппроксимаций в пределе слабого поля [28] гравитационное действие сводится к двум несвязанным друг с другом частям для $h^+_{\mu\nu}$ (первое и второе слагаемые в (131)) и $h^-_{\mu\nu}$ (третье и четвёртое слагаемые в (131)). Уравнения поля для $h^+_{\mu\nu}$ идентичны случаю ОТО, но их источник — тензор энергии – импульса в пространстве Минковского $\mathcal{T}^+_{\mu\nu}$. Уравнения для $h^-_{\mu\nu}$ содержат в качестве источника $\mathcal{T}^-_{\mu\nu}$ и определяют модификацию МОНД.

Обсудим выбор скалярных аргументов $\mathcal{M}$. Определим величины

$$\Upsilon_{\mu\nu} \equiv C^\gamma_{\mu\lambda}C^\lambda_{\nu\gamma} - C^\gamma_\lambda C^{\mu\nu}_{\lambda\gamma}\,, \\ \Upsilon \equiv g^{\mu\nu}\Upsilon_{\mu\nu}\,, \quad \hat{\Upsilon} \equiv \hat{g}^{\mu\nu}\Upsilon_{\mu\nu}\,. \qquad (132)$$

Скаляры $\Upsilon$ и $\hat{\Upsilon}$ имеют ту же структуру, что и $\Gamma^{(2)}$, $\hat{\Gamma}^{(2)}$. В режиме слабого поля $\Upsilon \approx \hat{\Upsilon} \approx \Gamma^{(2)}(h^-_{\mu\nu})$. При таком выборе переменных $\mathcal{M}_2(q^-)$ в действительности зависит от переменной $\tilde{q}$:

$$\tilde{q} \equiv -\frac{1}{2a_0^2}\Upsilon = \frac{1}{8a_0^2}\left(\partial^\gamma h^{-\nu\rho}(\partial_\gamma h^-_{\nu\rho} - 2\partial_\rho h^-_{\nu\gamma}) - \\ - \partial^\gamma h^-(\partial_\gamma h^- - 2\partial_\rho h^{-\rho}_\gamma)\right). \qquad (133)$$

Тогда полевые уравнения для $h^-_{\mu\nu}$ представимы как

$$\Sigma_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4(\alpha+\beta)}\,\mathcal{T}^-_{\mu\nu}\,, \qquad (134)$$

где

$$\Sigma_{\mu\nu} \equiv \partial_\lambda\left(\mathcal{M}'_2(\tilde{q})S^\lambda_{\mu\nu}\right), \\ S^\lambda_{\mu\nu} \equiv C^\lambda_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\delta^\lambda_\mu C_\nu - \frac{1}{2}\delta^\lambda_\nu C_\mu + \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}(C^\lambda - \overline{C}^\lambda), \\ C_\nu \equiv C^\sigma_{\nu\sigma}\,, \quad \bar{C}^\lambda \equiv \eta^{\mu\nu}C^\lambda_{\mu\nu}\,. \qquad (135)$$

При этом $-\partial_\lambda S^\lambda_{\mu\nu} = G_{\mu\nu}(h^-_{\alpha\beta})$ — тензор Эйнштейна для метрики $\eta_{\mu\nu} + h^-_{\mu\nu}$ в пределе слабого поля.

Рассмотрим случай $\alpha+\beta=0$, положив (для определённости) $\beta=1$. Тогда уравнения поля примут вид:

$$G_{\mu\nu}(h^-_{\lambda\rho}) = -\frac{8\pi G}{c^4}(\mathcal{T}_{\mu\nu} + \hat{\mathcal{T}}_{\mu\nu})\,, \qquad (136)$$

$$G_{\mu\nu}(h_{\lambda\rho}) = \Sigma_{\mu\nu}(h^-_{\lambda\rho}) - \frac{8\pi G}{c^4}\mathcal{T}_{\mu\nu}\,. \qquad (137)$$

Дивергенция уравнений поля (136) тождественно равна нулю, но $h^-_{\mu\nu}$ не имеет калибровочной свободы. Из (137) следуют четыре уравнения

$$\partial_\mu\Sigma^{\mu\nu}(h^-_{\lambda\rho}) = 0\,, \qquad (138)$$

которые вместе с шестью независимыми условиями, следующими из (136), определяют задачу Коши для $h^-_{\mu\nu}$. После решения уравнения на $h^-_{\mu\nu}$ его значение подставляется в (137), давая приближение слабого поля в ОТО для $h_{\mu\nu}$ с дополнительным источником

$$-\frac{c^4}{8\pi G}\,\Sigma_{\mu\nu}(h^-_{\lambda\rho})\,, \qquad (139)$$

играющим роль фантомной ("тёмной") материи для $h_{\mu\nu}$.

БИМОНД оперирует двумя метриками: одна — для описания гравитации в слабом поле, а другая — в сильном. Ускорения $a_0$ и связанные с ними величины описывают переход между этими режимами. В сильных гравитационных полях (ускорения больше $a_0$) ГВ распространяются, подчиняясь обычным законам ОТО [27]. В слабых гравитационных полях (ускорения меньше $a_0$) характеристики ГВ — частота и амплитуда — могут меняться, влияя на способы их детектирования и интерпретации.

Любые ГВ в пределах Солнечной системы можно описать как комбинации волн $h_{\mu\nu}$ и $\hat{h}_{\mu\nu}$, каждая из которых имеет две моды поляризации, как в ОТО. Других мод БИМОНД не предсказывает. Изучение ГВ в контексте БИМОНД может помочь проверить предсказания теории и выявить отклонения от стандартной модели гравитации. Например, ГВ от слияния компактных объектов в галактиках с низкой поверхностной яркостью могут нести информацию о МОНД-режиме гравитации. Распространение на фоне $\hat{g}_{\mu\nu}$ может приводить к различию в скоростях гравитона и фотона: ГВ может реагировать как на фон $g_{\mu\nu}$, так и на фон $\hat{g}_{\mu\nu}$, тогда как на фотоны влияет только $g_{\mu\nu}$.

## 5. Квантовые теории гравитации

### 5.1. Петлевая квантовая гравитация

Петлевая квантовая гравитация (ПКГ) [41 – 44] — это квантовая теория гравитации на дифференцируемом многообразии, имеющая в качестве предела ОТО. Наблюдаемые геометрические величины (такие как площади и объёмы) приобретают дискретные спектры [45 –

48], причём масштаб этой дискретности является планковским. ПКГ позволяет избежать начальной сингулярности, приводя, вместо неё, к отскоку масштабного фактора [49–52].

Вид гравитационных волн в ПКГ [53] определяется тем, что дискретность пространства–времени в полуклассическом режиме[3] приводит к квантовым поправкам в эффективном волновом уравнении. Отклонения от ОТО выражаются в модификации дисперсионного соотношения $\omega(k)$.

Рассматривается кубическая пространственная решётка. Индекс $v$ пробегает все вершины решётки, координаты которых задаются как $z = n\epsilon$ при $n = 0, \pm 1, \ldots, \pm N/2$, где $\epsilon$ — параметр дискретизации (длина грани решётки). Рассматривается полуклассическое состояние $\Psi$, представляющее собой тензорное произведение состояний на каждом ребре решётки. Квантовая динамика аппроксимируется ожидаемым средним гамильтониана $\hat{H} = \sum_v \hat{C}(v)$ на полуклассических состояниях $\Psi$. Рассматривается эффективный гамильтониан, строящийся как ожидаемое значение оператора гамильтоновой связи $\hat{C}$, просуммированного по всем вершинам $v$ пространственной решётки, на полном когерентном состоянии $\Psi$, описывающем дискретизированную геометрию, соответствующую гравитационным волнам на фоне метрики Минковского.

$$H_{\text{eff}} = H_{\text{eff}}(h_i, p_i) = \left\langle \Psi, \sum_v \hat{C}(v)\Psi \right\rangle , \tag{140}$$

где $h_+ = h_1$ и $h_\times = h_2$ соответствуют компонентам метрических возмущений в ТТ-калибровке, а $p_+ = p_1$ и $p_\times = p_2$ соответствующие канонически сопряжённые импульсы, т.е. $\{h_i(z), p_j(z')\} = \kappa\delta^i_j\delta(z-z')/L^2$. Здесь $L$ — линейный размер рассматриваемой области, связанный с размером решётки $\epsilon$ и числом узлов $N$ как $N = L/\epsilon$. Далее значение любой переменной $f$, сдвинутое на $m$ узлов относительно узла $z$, будет обозначаться как $f^{\pm m} := f(z \pm m\epsilon)$ — это обозначение не связано с поляризациями ГВ.

Соответствующие уравнения Гамильтона имеют вид:

$$\dot{f} = \{f, H_{\text{eff}}\}$$

и получаются применением скобки Пуассона к любой наблюдаемой $f = f(h_i, p_i)$, сводясь к системе

$$\dot{p}_i = (-)^{i+1}\frac{\beta}{2}\frac{p^+_{i+1} - p^-_{i+1}}{\epsilon} + \frac{1+\beta^2}{2\beta\epsilon} \times \\ \times \left(\epsilon\mathbb{B}_i + (-)^i\,\frac{p^{+2}_{i+1} + 2(p^+_{i+1} - p^-_{i+1}) - p^{-2}_{i+1}}{4}\right), \tag{141}$$

$$\mathbb{B}_i = -\frac{\beta}{2}\left(\frac{p_i^{+2} - 2p_i + p_i^{-2}}{\epsilon^2} - (-)^i\,\frac{\mathbb{B}^+_{i+1} - \mathbb{B}^-_{i+1}}{\epsilon}\right) + \\ + \frac{1+\beta^2}{8\beta}\left(\Delta_i - (-)^i\,\frac{\mathbb{B}^{+2}_{i+1} + 2(\mathbb{B}^+_{i+1} - \mathbb{B}^-_{i+1}) - \mathbb{B}^{-2}_{i+1}}{\epsilon}\right), \tag{142}$$

где

$$\mathbb{B}_i = \frac{B_i^{+2} + B_i^{-2}}{\epsilon^2\beta}$$

— дискретная вспомогательная величина, в которую входят усреднённые значения $B_i^{+2}$ и $B_i^{-2}$ метрических возмущений $h_i$ по параметру дискретизации $\epsilon$, а также параметр Иммирци $\beta > 0$, являющийся фундаментальной константой теории. Здесь $\Delta_i$ является другой дискретной величиной типа $\mathbb{B}_i$, аналогично построенной из канонических импульсов $p_i$ (см. формулу (21) в [53]).

Разрешая уравнения (141), (142) относительно $\mathbb{B}_i$ и дифференцируя результат по времени, возможно записать конечно-разностное уравнение для $\ddot{p}_i$, определяющее динамику системы.

$$\ddot{p}_i = \frac{\beta^2}{8\epsilon^2}\left(sp_i^{+3} - 2p_i^{+2} - sp_i^+ + 4p_i - sp_i^- - 2p_i^{-2} + sp_i^{-3}\right). \tag{143}$$

Исходя из периодических граничных условий на торе и дискретной трансляционной инвариантности решётки, удобно искать решение в виде анзаца плоской волны. Для этого выполним дискретное преобразование Фурье, представляя поле в узлах решётки в виде интеграла по плоским волнам в первой зоне Бриллюэна:

$$p(z) = \frac{\epsilon}{2\pi}\int_{\text{B}} \mathrm{d}k \exp{(\mathrm{i}kz)}\, u(k)\,.$$

Подстановка этого анзаца в уравнение динамики (143) приводит к волновому уравнению для коэффициентов Фурье $u(k)$:

$$\ddot{u}(k) = -\omega^2(k)u(k)\,. \tag{144}$$

Отсюда получается модифицированное дисперсионное соотношение:

$$\omega^2(k) = \frac{\sin^2(k\epsilon)}{\epsilon^2}\left((1+\beta^2)\cos(k\epsilon) - \beta^2\right),$$

которое в непрерывном пределе $\epsilon \to 0$ сводится к классическому соотношению ОТО $\omega^2(k) = k^2$. Таким образом, модификация возникает из-за дискретной структуры пространства–времени на планковских масштабах. Можно ожидать, что при тонкой дискретизации изменения, вызванные изменением в $\omega(k)$, будут сравнительно малы и их будет трудно обнаружить. И наоборот, для гравитационных волн со значительным импульсом $k$ может наблюдаться заметное отклонение от классических предсказаний. В отличие от ОТО, где ГВ распространяются со скоростью света, ПКГ предсказывает следующую скорость для ГВ:

$$v_k = \left.\frac{\mathrm{d}|\omega(k)|}{\mathrm{d}k}\right|_{k=0} = 1 - \frac{5+3\beta^2}{4}\,k^2\epsilon^2 + \mathcal{O}(k^4\epsilon^4)\,, \tag{145}$$

откуда следует, что гравитоны с короткими длинами волн распространяются медленнее света. Новых мод не возникает, т.е., число поляризаций останется равным 2, как и в ОТО.

[3] Под полуклассическим режимом понимается приближение, в котором квантовое состояние системы (когерентное состояние ПКГ) имеет резкий пик в значении соответствующей классической переменной. В этом режиме ожидаемые значения основных операторов воспроизводят классические величины с точностью до малых квантовых поправок.

### 5.2. Гравитационные волны в теории струн

В теории струн фундаментальные взаимодействия рассматриваются не как взаимодействия точечных частиц, а как взаимодействия одномерных протяжённых объектов — квантовых струн, распространяющихся на искривлённом фоне. В рамках этих теорий все элементарные частицы и их взаимодействия возникают из колебаний струн на масштабах порядка планковской длины. Непротиворечивые квантовые теории струн возможны лишь в пространствах размерности больше четырёх, и одна из центральных проблем состоит в описании редукции от этих высших размерностей к низкоэнергетической физике в четырёх измерениях. Несмотря на отсутствие прямых экспериментальных подтверждений, развитие струнных теорий продолжается, поскольку они предоставляют мощный математический аппарат для изучения гравитации и квантовых полей.

Гравитационно-волновые решения в теориях струн следуют из точных решений уравнений движения струны [54, 55] во всех порядках разложения по обратному натяжению. При этом классический фон не получает дополнительных поправок от мировой поверхности. Среди таких решений особую роль играют так называемые Hpp-волны [56–58] — плоско-фронтальные pp-волны в присутствии однородного потока поля 5-формы Рамона–Рамона. Они примечательны тем, что соответствующая теория струн на таком фоне точно решаема. Кроме того, такие конфигурации появляются в "пределе Пенроуза" струнного фона $\mathrm{AdS}^5 \times S^5$ [59–61] и связаны с четырёхмерными калибровочными теориями с суперсимметрией $\mathcal{N} = 4$ [62, 63].

В настоящем разделе мы ограничимся рассмотрением явных решений для гравитационных волн на AdS-фоне в рамках теории типа IIB. Теория IIB — это десятимерная суперструнная теория с двумя майорана-вейлевскими суперзарядами одной киральности. Теория делится на два сектора. Сектор NS–NS (Нуво–Шварц–Нуво–Шварц) содержит метрику $g_{\mu\nu}$, дилатон $\phi$ и 2-форму Калба–Рамона $B_2$. Сектор R–R (Рамон–Рамон) содержит дифференциальные формы чётных степеней: 0-форму $C_0$ (аксион), 2-форму $C_2$ и 4-форму $C_4$. Напряжённости, соответствующие этим потенциалам, имеют степени 1, 3 и 5. Мы рассматриваем эффективный низкоэнергетический предел этой теории — десятимерную супергравитацию типа IIB — на фоне $\mathrm{AdS}_3 \times S^3 \times \mathbb{R}^4$ [112].

Метрика параметризуется сиклосовским пространством–временем (англ. Siklos spacetime) [64] — это точное решение уравнений Эйнштейна с отрицательной космологической константой, описывающее плоскую ГВ, распространяющуюся в пространстве анти-де Ситтера. Сиклосовские решения конформно эквивалентны pp-волнам и являются единственными нетривиальными пространствами Эйнштейна, конформными к невырожденным pp-волнам. Метрика в нашем случае имеет вид:

$$\mathrm{d}s^2 = q\left[+\frac{\mathrm{d}u^2}{u^2}+\frac{1}{u^2}\left(2\,\mathrm{d}x^+\,\mathrm{d}x^- + H(u,x^+)\,\mathrm{d}x^{+2}\right)+\mathrm{d}\Omega_3^2\right]+ + \sum_{i=1}^{4} \mathrm{d}x^{i\,2}\,. \tag{146}$$

Здесь $x^+$, $x^-$ и $u$ — координаты Пуанкаре для $\mathrm{AdS}_3$: $x^\pm$ — координаты светового конуса, а $u$ — пространственно-подобная "радиальная" координата, при $u \to 0$ соответствующая конформной границе $\mathrm{AdS}_3$. При $H = 0$ метрика внутри квадратных скобок воспроизводит $\mathrm{AdS}_3 \times S^3$. Элемент $\mathrm{d}\Omega_3^2$ — метрика 3-сферы, параметризованной углами $\theta, \phi, \psi$. Последнее слагаемое $\sum_{i=1}^4$ — плоский (декартов) вклад от четырёх дополнительных измерений $\mathbb{R}^4$, не участвующих в динамике волны, но необходимых для соответствия критической размерности $d = 10$ теории IIB. Наконец, константа $q > 0$ задаёт радиус кривизны пространств $\mathrm{AdS}_3$ и $S^3$.

Функция $H(u, x^+)$ характеризует профиль гравитационной волны. Зависимость $H$ от $u$ помимо $x^+$ означает, что поляризация гравитационных волн локализована только в части $\mathrm{AdS}_3$, и при $H = 0$ метрика (146) сводится к чистому фону $\mathrm{AdS}_3 \times S^3 \times \mathbb{R}^4$. Для рассматриваемого гравитационно-волнового решения единственными ненулевыми полями являются метрика (146) и напряжённость поля R–R 3-формы $F^{(3)}$, обеспечивающая кривизну фона. Все остальные поля, включая дилатон (скалярное поле — первая мода возбуждения струны), можно принять равными нулю при $H = 0$. В ином случае, как будет показано далее, необходимо будет дополнительно включить ненулевые компоненты поля 3-формы NS–NS.

Ненулевые компоненты тензора Риччи ($R_{\mu\nu}$) вдоль направлений $x^\pm$ и $u$ в уравнении (146) имеют вид:

$$R_{++} = -\frac{H_{,uu}}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{h_{,u}}{u} - \frac{2H}{u^2}\,,$$
$$R_{+-} = -\frac{2}{u^2}\,, \qquad R_{uu} = -\frac{2}{u^2}\,. \tag{147}$$

Вдоль направлений сферы $S^3$ ненулевые компоненты тензора Риччи равны:

$$R_{\theta\theta} = 2, \quad R_{\phi\phi} = 2\cos^2\theta, \quad R_{\psi\psi} = 2\sin^2\theta\,. \tag{148}$$

Компоненты (148) отражают кривизну $S^3$ и не зависят от профиля волны $H$. Компоненты $R_{++}$ в (147) содержит всю информацию о волне.

Уравнения поля теории IIB на фоне метрики (146) удовлетворяются, если функции $H(u, x^+)$ и дополнительные компоненты поля NS–NS, задаваемые функциями $A_a(x^a, x^+)$ и $B_{ab}(x^a, x^+)$ на $S^3$, удовлетворяют следующей системе. Из уравнения поля для метрической компоненты $g_{++}$:

$$-\frac{H_{,uu}}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{H_{,u}}{u} = \frac{q^2}{u^4}\left(\frac{1}{2}\,A_aA^a + \frac{1}{4}\,B_{ab}B^{ab}\right), \tag{149}$$

где индексы у $A_a$ и $B_{ab}$ поднимаются и опускаются с помощью метрики $S^3$. Примечательно сходство (149) с анти де-Ситтеровскими гравитационными волнами в четырёхмерной гравитации [64] при нулевых $A_a$ и $B_{ab}$. Далее, уравнения на 3-формы подразумевают условия:

$$\nabla^a A_a = 0\,, \qquad A_a + \frac{1}{2}\,\nabla^b B_{ab} = 0\,, \tag{150}$$

где $\nabla^a$ — ковариантная производная, определяемая через метрику на $S^3$. Используя тождество Бьянки для поля $H^{(3)}$, получим, что:

$$\partial_a A_b - \partial_b A_a = -2B_{ab}\,. \tag{151}$$

Как следствие, $B_{ab}$ является напряжённостью потенциала $A_a$. Таким образом, общая структура ГВ в теории струн типа IIB на $\mathrm{AdS}_3 \times S^3 \times R^4$ фоне задаётся тройкой функций $H$, $A_a$ и $B_{ab}$, удовлетворяющих системе (149)–(151) [112].

Первое решение получается при $A_a = B_{ab} = 0$, т.е., поле NS–NS оказывается тривиальным. Уравнение (149) с нулевой правой частью принимает вид

$$-\frac{1}{2}H_{,uu}+\frac{1}{2u}H_{,u}=0 \tag{152}$$

общее решение которого (т.е. общий профиль волны) есть:

$$H(u,x^+)=f(x^+)u^2+g(x^+)\,, \tag{153}$$

причём $f$ и $g$ являются произвольными функциями только $x^+$. В этом случае ГВ описывается только метрикой, а 3-форма R–R лишь компенсирует кривизну фона $\mathrm{AdS}_3\times S^3$. Данное решение прямо аналогично гравитационным волнам в ОТО: волна несёт две поляризации, закодированных в профиле $H$, при том, что никаких дополнительных полей, выходящих за рамки чистой гравитации, не требуется.

Второе решение получается предельным переходом из известного решения для браны $D1-D5$ на фоне pp-волн [65]. В этом случае поле NS–NS нетривиально, а профиль волны оказывается независимым от $x^+$. Непосредственной подстановкой с учётом метрики $S^3$ проверяется, что соответствующие функции

$$A_\theta=0\,,\quad A_\phi=2\mu\cos^2\theta\,,\quad A_\psi=2\mu\sin^2\theta\,, \tag{154}$$

$$B_{\theta\phi}=\mu\sin 2\theta\,,\quad B_{\theta\psi}=\mu\sin 2\theta\,. \tag{155}$$

удовлетворяют условиям (149)–(151). Здесь гравитационную волну характеризует параметр $\mu$. Подстановкой (154), (155) в уравнение (149) находится профиль волны

$$H=-\frac{\mu^2q^2}{u^2}\,. \tag{156}$$

При $\mu=0$ функции $A_a$ и $B_{ab}$ обращаются в нуль, $H\to 0$ и метрика (146) сводится к чистому $R_3\times S^3$.

Таким образом, теория IIB допускает минимум два различных класса гравитационно-волновых решений. Первое, (153), полностью эквивалентно решениям ОТО: волна определяется только метрикой, дополнительные поля не задействованы. Второе, (153), (154) является специфическим струнным решением. Это решение требует одновременного включения NS–NS поля наряду с возмущением метрики.

Оба решения существуют в десятимерном пространстве–времени и не являются непосредственно наблюдаемыми: они не описывают гравитационные волны в четырёхмерной вселенной, регистрируемые детекторами типа LIGO. Тем не менее, они доказывают, что теория струн в принципе допускает гравитационно-волновые решения, и устанавливают их структуру — в частности, связь возмущения метрики с тензорными полями теории струн. Эта структура определяет, какие степени свободы появятся после компактификации дополнительных измерений до четырёх. Переход от точных десятимерных решений к наблюдательным предсказаниям требует, в частности, выбора схемы компактификации полей модулей.

Парадигма струнных компактификаций обсуждается в работе [114], рассматривающей возможные наблюдаемые следствия струнных поправок в ОТО с дополнительными компактными измерениями. Рассматривается $D$-мерное пространство–время $M=\mathbb{R}^4\times\mathcal{M}_{\mathrm{int}}$, где $\mathcal{M}_{\mathrm{int}}$ — компактное $(D-4)$-мерное Риччи-плоское многообразие, называемое *внутренним пространством*. Помимо двух стандартных тензорных мод гравитационной волны возникает скалярная мода дыхания, а также векторные моды, отвечающие безмассовым калибровочным полям (гравифотонам), возникающим при компактификации. Число последних равно первому числу Бетти многообразия $\mathcal{M}_{\mathrm{int}}$. Дополнительные скалярные моды соответствуют полям модулей, описывающим сохраняющие объём деформации внутреннего пространства. Стандартные детекторы не чувствительны к этому каналу напрямую — модули не вызывают геодезического отклонения в некомпактных направлениях.

### 5.3. Теория Хоржавы–Лифшица

Модель Хоржавы–Лифшица [66, 67] (ХЛ) — это пример перенормируемой теории гравитации [68, 69]. При низких энергиях теория определяется двумя константами связи: $\beta$ и $\alpha$, а в пределе $\beta=1$ и $\alpha=0$ уравнения поля переходят в уравнения ОТО.

Теория ХЛ является теорией с нарушенной лоренц-инвариантностью. В действие ОТО включается дополнительное скалярное поле, называемое *хрононом*. Направление его изменения в пространстве–времени определяет специально выделенное направление времени. Поверхности постоянных значений хронона — это поверхности постоянного времени, поэтому теорию называют хронометрической. Следствием этого является существование выделенных систем отсчёта — явление, отсутствующее в ОТО. Именно хронон, расслаивая пространство–время на гиперповерхности, обеспечивает нарушение лоренц-инвариантности в UV-режиме, благодаря чему теория становится перенормируемой по числу степеней. Рассмотрим классические проявления теории.

**5.3.1. (3+1)-представление теории Хоржавы–Лифшица.** В $(3+1)$-разложении теории ХЛ четырёхмерное пространство–время расслаивается на трёхмерные пространственно-подобные гиперповерхности $\Sigma_t$, параметризованные временем $t$. На этих слоях задаётся трёхмерная метрика $g_{ij}$ (определитель которой обозначим $g$), функция хода $N$ (определяет разность собственного времени между соседними гиперповерхностями) и вектор сдвига $N^i$ (не является обобщённой переменной, входя как лагранжев множитель). Функция хода $N$, в отличие от ОТО, входит в потенциал, а не является лагранжевым множителем, что является следствием нарушения симметрии относительно группы диффеоморфизмов $\mathrm{Diff}(M)$ до группы диффеоморфизмов, сохраняющих слои $\mathrm{FDiff}(M)$. Обобщёнными координатами в гамильтоновом формализме служат компоненты метрики $g_{ij}$ и функция хода $N$, а сопряжёнными импульсами — $\pi^{ij}$ и $P_N$ соответственно.

Общее действие теории ХЛ в $(3+1)$-представлении есть

$$S=\frac{2}{\kappa^2}\int \mathrm{d}t\,\mathrm{d}^3x\,N\sqrt{g}\left(K_{ij}K^{ij}-\lambda K^2+\mathcal{V}(g_{ij},N)\right)\,, \tag{157}$$

где вторая квадратичная форма (или же тензор внешней кривизны) определен по формуле

$$K_{ij}=\frac{1}{2N}\left(\dot g_{ij}-\nabla_iN_j-\nabla_jN_i\right)\,, \tag{158}$$

и имеет след $K$. Часть действия, содержащая квадраты величин $K_{ij}$, называется кинетическим членом: $K_{ij}K^{ij} - \lambda K^2$. Значение $\lambda = 1/3$ безразмерной константы связи $\lambda$ называется *конформно-кинетической точкой*: при нём кинетический член приобретает дополнительную конформную симметрию (что, впрочем, не относится к полному действию), физические степени свободы в точности совпадают с поперечно-бесследовыми тензорными модами ОТО, и дополнительных скалярных мод не возникает [119].

Гамильтониан $(3+1)$-представления теории ХЛ в конформно-кинетической точке [68, 69, 116–118] имеет вид:

$$H\int_{\Sigma_t} \mathrm{d}^3x\left[+N\sqrt{g}\left(\frac{\pi^{ij}\pi_{ij}}{g} - \mathcal{V}(g_{ij}, N)\right) - - N_j H^j - \sigma P_N - \mu\pi\right] + \beta E_{\mathrm{ADM}}\,, \qquad (159)$$

где $(N_j, \sigma, \mu)$ — множители Лагранжа, $(H^j, P_N, \pi)$ — первичные связи:

$$\pi \equiv g_{ij}\pi^{ij} = 0, \qquad P_N = 0, \qquad H^j \equiv 2\nabla_i \pi^{ij} = 0\,.$$

Связи $\pi = 0$ и $P_N = 0$ являются связями второго рода и возникают из-за того, что $N$ не является лагранжевым множителем. Связь $H^j = 0$ — первого рода, аналогичная ОТО [116]. Потенциал

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}^{(1)} + \mathcal{V}^{(2)} + \mathcal{V}^{(3)}$$

— наиболее общая скалярная величина, построенная на основе трёхмерной пространственно-подобной метрики и функции хода $N$. Потенциал не зависит от сопряжённых импульсов $\pi^{ij}$ и функций $N_i \equiv g_{ij}N^j$. Три слагаемых потенциала отвечают членам второго, четвёртого и шестого порядка по пространственным производным соответственно; члены высшего порядка обеспечивают улучшение ультрафиолетового поведения. Величина

$$E_{\mathrm{ADM}} \equiv \oint_{\partial\Sigma_t} (\partial_j g_{ij} - \partial_i g_{jj})\,\mathrm{d}S^i$$

— это энергия Арновитта–Дезера–Мизнера [117, 118], определённая для асимптотически плоских пространственно-временных многообразий, описывающих изолированные (островные) гравитирующие системы.

Динамические уравнения поля, следующие из гамильтонова формализма [70], представляют собой систему:

$$\dot{g}_{ij} = \frac{2N}{\sqrt{g}}\,\pi_{ij} + 2\nabla_{(i}N_{j)} - \mu g_{ij}\,, \qquad (160)$$

$$\dot{\pi}^{ij} = \frac{N}{2}\frac{g^{ij}}{\sqrt{g}}\,\pi^{kl}\pi_{kl} - \frac{2N}{\sqrt{g}}\,\pi^{ik}\pi^j_k + N\sqrt{g}\beta\left(\frac{R}{2}\,g^{ij} - R^{ij}\right) - \alpha N\sqrt{g}\left(a^i a^j - \frac{1}{2}\,g^{ij}a_k a^k\right) - \nabla_k\left[2\pi^{k(i}N^{j)} - \pi^{ij}N^k\right] + \beta\sqrt{g}\left[\nabla^{(i}\nabla^{j)}N - g^{ij}\nabla^2 N\right] + \mu\pi^{ij} + \{\pi^{ij}, \mathcal{U}\}_{\mathrm{PB}}\,, \qquad (161)$$

где $a_i \equiv \partial_i N/N$ — трёхмерный вектор, связанный с неоднородностью функции хода, а индекс PB обозначает скобку Пуассона для различения со стандартным антикоммутатором. По сравнению с канонической системой ОТО уравнения (160), (161) содержат дополнительные члены: слагаемое $-\mu g_{ij}$ в (160), обусловленное связью $\pi = 0$, и слагаемое $\{\pi^{ij}, \mathcal{U}\}_{\mathrm{PB}}$ в (161). Эти слагаемые порождают члены с пространственными производными порядка выше второго. Тогда

$$\mathcal{U} \equiv -\int_{\Sigma_t} \mathrm{d}^3x\, N\sqrt{g}\left(\mathcal{V}^{(2)} + \mathcal{V}^{(3)}\right) \qquad (162)$$

— часть гамильтониана, отвечающая высшим по производным слагаемым потенциала. Члены с $\mathcal{V}^{(2)}$ и $\mathcal{V}^{(3)}$ порождают производные четвёртого и шестого порядков. Переменные $N^i$, $\sigma$, $\mu$ не являются динамическими и определяются из связей. В это же время функция $N$, в отличие от ОТО, является динамической переменной и входит в потенциал.

Для оценки гамильтониана рассмотрим лагранжиан, вычисляемый на поверхности связей [71]:

$$L = \int \mathrm{d}t\,\mathrm{d}^3x(\pi^{ij}\dot{g}_{ij} - \mathcal{H}) - E_{\mathrm{ADM}}\,, \qquad (163)$$

где

$$\mathcal{H} \equiv -2\alpha\sqrt{g}\,\nabla_i\nabla^i N + \mathrm{t.d.}$$

— плотность гамильтониана, представляющая собой сумму ковариантного лапласиана $\Delta = \nabla_i\nabla^i$ функции хода и полной дивергенции. Последняя не вносит вклад в лагранжиан в силу условий асимптотической плоскостности. Налагается координатное условие

$$g_i = x^i + \left(\frac{1}{4\Delta}\right)g^{\mathrm{T}}_{,i}, \qquad \Delta \equiv \delta^{ij}\partial_i\partial_j\,, \qquad (164)$$

где $g_i$ — продольная часть метрики, а $\Delta$ — лапласиан плоского трёхмерного пространства. Обратный оператор $1/\Delta$ — оператор Грина лапласиана, действующий на функции, убывающие на бесконечности: $(\Delta\varphi = \rho) \Rightarrow (\varphi = (1/\Delta)\rho)$. Следуя [71], величина

$$\mathcal{H} = -\beta\Delta g^{\mathrm{T}} - 2\alpha\sqrt{g}\,\nabla_i(g^{ij}\partial_j N) \qquad (165)$$

— плотность гамильтониана.

**5.3.2. Определение волновой зоны.** Волновая зона — область пространства–времени, удалённая от источника гравитационных волн на расстояние, значительно превышающее длину излучаемой волны (на расстоянии $r$, много большем длины волны $\lambda$, т.е. $kr \gg 1$), в которой физические степени свободы распространяются как свободное излучение [70]. Другими словами, в ведущем порядке решение удовлетворяет волновому уравнению и описывает сферические волны, уходящие на бесконечность без взаимодействия с источником. В нелинейных теориях существование волновой зоны нетривиально, поскольку режим свободного распространения может нарушаться из-за самодействия полей. Прямое обнаружение ГВ коллаборацией LIGO-Virgo обуславливает актуальность задачи о существовании волновой зоны.

В самом общем случае чисто пространственный тензор $S_{ij}$ может быть разложен на три составляющие части

$S_{ij}^{\mathrm{TT}}$, $S_{ij}^{\mathrm{T}}$ и $S_{ij}^{L}$, называемые соответственно "поперечно-бесследовой", "поперечной" и "продольной" частями. Поперечно-бесследовая часть определяется условиями поперечности ($S_{ij,j}^{\mathrm{TT}} = 0$) и бесследовости ($S_{ii}^{\mathrm{TT}} = 0$) и содержит физические (наблюдаемые) степени свободы гравитационного поля. То есть, физические степени свободы гравитационного поля определяются TT-компонентами метрики $g_{ij}^{\mathrm{TT}}$ и сопряжённого импульса $\pi^{ij\,\mathrm{TT}}$.

В ОТО волновая зона характеризуется тем, что фоновая кривизна не влияет на распространение TT-мод, ведущих себя как гравитационные волны в вакууме. Это значит, что физические степени свободы имеют асимптотики:

$$g_{ij}^{\mathrm{TT}} \sim \pi^{ij\mathrm{TT}} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{r}\right),$$

тогда как поперечная часть содержит колебательный и статический вклады:

$$g_{ij}^{\mathrm{T}}\big|_{\mathrm{osc}} \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad g_{ij}^{\mathrm{T}}\big|_{\mathrm{st}} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{r}\right), \quad \pi^{ijL} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right).$$

Остальные части $g_{ij}$ и $\pi_{ij}$, а также переменные $(N, N^i)$ зависят от калибровки и, следовательно, не влияют на распространение канонических мод [72]. Подчеркнём ещё раз, что переменные $(N, N^i)$ являются не каноническими, а вспомогательными полями, определяемыми из уравнений связей.

В $(3+1)$ теории ХЛ в кинетической конформной точке существует волновая зона, аналогичная ОТО [70]. То есть, TT-моды

$$\left(g_{ij}^{\mathrm{TT}}, \pi^{ij\mathrm{TT}}\right) \sim f(\theta, \phi)\, \frac{\exp\left(\mathrm{i}(kr - \omega(k)t)\right)}{r}, \quad f(\theta, \phi) = \mathcal{O}(1),$$

распространяются без влияния статических частей так же, как и в линеаризованной теории. Отличие от ОТО заключается в дисперсионном соотношении и в скорости ГВ в УФ/ИК-областях. Рассмотрим эти отличия.

**5.3.3. Динамические уравнения в волновой зоне.** Уравнения канонических поперечно-бесследовых мод описывают свободно распространяющиеся поля [70]. Компоненты уравнения (160) в калибровке $g_{ij,j} = 0$ принимают вид:

$$\dot{g}_{ij}^{\mathrm{TT}} - 2\pi_{ij}^{\mathrm{TT}} + (\mu g_{ij})^{\mathrm{TT}} \lesssim \frac{B}{r^2} + k^2\, \frac{\hat{A}\exp(\mathrm{i}kr)}{r^2}, \tag{166}$$

$$-2N_{(i,j)} + (\mu g_{ij})^{L} \lesssim \frac{B}{r^2} + k^2\, \frac{\hat{A}\exp(\mathrm{i}kr)}{r^2}, \tag{167}$$

$$\dot{g}_{ij}^{\mathrm{T}} + (\mu g_{ij})^{\mathrm{T}} \lesssim \frac{B}{r^2} + k^2\, \frac{\hat{A}\exp(\mathrm{i}kr)}{r^2}, \tag{168}$$

где $B = B(t, \theta, \phi)$ — статический вклад, $\hat{A} = \hat{A}(t, \theta, \phi)$ — амплитуда волновой части; обе функции и все их производные ограничены. Знак $\lesssim$ означает убывание не медленнее, чем соответствующая правая часть. Множитель $\mu g_{ij}$ раскладывается как:

$$\mu g_{ij} = (\mu g_{ij})^{\mathrm{TT}} + (\mu g_{ij})^{\mathrm{T}} + (\mu g_{ij})^{L},$$
$$(\mu g_{ij})^{\mathrm{T}} = \mu\delta_{ij} - \frac{1}{\Delta}\mu_{,ij} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right),$$
$$(\mu g_{ij})^{L} = \frac{1}{\Delta}\mu_{,ij} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad (\mu g_{ij})^{\mathrm{TT}} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right).$$

Из уравнения (168) следует, что $\mu \lesssim B/r^2 + k^2\hat{A} \times \exp(\mathrm{i}kr)/r^2$, и потому:

$$\dot{g}_{ij}^{\mathrm{TT}} - 2\pi_{ij}^{\mathrm{TT}} \lesssim \frac{B}{r^2} + k^2\, \frac{\hat{A}\exp(\mathrm{i}kr)}{r^2}, \tag{169}$$

$$N_{(i,j)} \lesssim \frac{B}{r^2} + k^2\, \frac{\hat{A}\exp(\mathrm{i}kr)}{r^2}. \tag{170}$$

Подсчёт вкладов в (161) даёт

$$\dot{\pi}_{ij}^{\mathrm{TT}} = \frac{1}{2}\left(\beta\Delta + \beta_1\Delta^2 - \beta_3\Delta^3\right) g_{ij}^{\mathrm{TT}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right). \tag{171}$$

Уравнения (169) и (171) показывают, что в волновой зоне TT-часть полей до порядка $\mathcal{O}(1/r^2)$ удовлетворяет системе дифференциальных уравнений шестого порядка по пространственным производным:

$$\ddot{g}_{ij}^{\mathrm{TT}} - \left(\beta\Delta + \beta_1\Delta^2 - \beta_3\Delta^3\right) g_{ij}^{\mathrm{TT}} = 0, \tag{172}$$

$$\ddot{\pi}_{ij}^{\mathrm{TT}} - \left(\beta\Delta + \beta_1\Delta^2 - \beta_3\Delta^3\right) \pi_{ij}^{\mathrm{TT}} = 0. \tag{173}$$

Члены с лапласианами высокого порядка возникают из вкладов потенциалов $\mathcal{V}^{(2)}$ и $\mathcal{V}^{(3)}$; именно они ответственны за перенормируемость теории в УФ-режиме.

Решение уравнения (172) строится через сферические функции Ханкеля $h_l^{(1)}(kr)$ и $h_l^{(2)}(kr)$. Поскольку $-\Delta u = k^2 u$, функция

$$u(r, k) = \sum_{l,m}\left[A_{lm}^{(1)}\, h_l^{(1)}(kr) + A_{lm}^{(2)}\, h_l^{(2)}(kr)\right] Y_{lm}(\theta, \phi)$$

удовлетворяет уравнению (172), если выполнено дисперсионное соотношение:

$$\omega^2 = \beta k^2 - \beta_1 k^4 - \beta_3 k^6. \tag{174}$$

В волновой зоне асимптотика функций Ханкеля имеет вид:

$$h_l^{(1)}(kr) \approx (-\mathrm{i})^{l+1}\, \frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{r}, \quad h_l^{(2)}(kr) \approx (\mathrm{i})^{l+1}\, \frac{\exp(-\mathrm{i}kr)}{r}, \tag{175}$$

и решение принимает вид расходящейся волны:

$$\Psi = \frac{\exp(-\mathrm{i}\omega t + \mathrm{i}kr)}{r} \sum_{l,m} A_{lm}^{(1)} (-\mathrm{i})^{l+1}\, Y_{lm}(\theta, \phi), \tag{176}$$

где $k$ определяется из (174). Таким образом, фазовая скорость, следующая из (174):

$$v_{\mathrm{ph}}^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = \beta - \beta_1 k^2 - \beta_3 k^4, \tag{177}$$

зависит от волнового числа, т.е. теория предсказывает дисперсию гравитационных волн. В ИК-пределе $k \to 0$ соотношение (174) воспроизводит бездисперсное волновое уравнение ОТО с точностью до значения фазовой скорости $v_{\mathrm{ph}} \to \sqrt{\beta}$. Низкоэнергетический предел уравнения (174) при $k_{\max} \ll K_{\mathrm{UV}}$ есть

$$\ddot{g}_{ij}^{\mathrm{TT}} - \beta\Delta g_{ij}^{\mathrm{TT}} = 0,$$

что совпадает с соответствующим уравнением в ОТО при $\beta = 1$.

Характер УФ-поправок определяется знаками $\beta_1$ и $\beta_3$. Для того чтобы правая часть (174) была положительна при всех $k^2 > 0$ — т.е., чтобы теория была свободна от неустойчивостей (духов, тахионов) — необходимо [66]:

$$\alpha \neq 2\beta\,, \quad \beta > 0\,, \quad \beta_3 < 0\,, \quad \beta_1 < 2\sqrt{\beta|\beta_3|}\,. \tag{178}$$

Три последних условия гарантируют положительность $\omega^2$. При выполнении (178) каждому заданному $\omega^2$ соответствует единственное значение $k^2$, удовлетворяющее (174).

Знак $\beta_3$ зафиксирован условием (178). Таким образом, вклад $-\beta_3 k^4 > 0$ в $v_{\mathrm{ph}}^2$ является положительным и монотонно возрастающим по $k$. При $k \to \infty$ этот член доминирует и фазовая скорость неограниченно возрастает. Таким образом, теория прямо предсказывает сверхсветовое распространение ГВ в УФ-режиме. Знак $\beta_1$ же условиями (178) не фиксируется. При $\beta_1 > 0$ слагаемое $-\beta_1 k^2 < 0$ уменьшает $v_{\mathrm{ph}}^2$, создавая возможность досветового режима распространения ГВ. При $\beta_1 \leqslant 0$ оба высокоэнергетических слагаемых положительны и $v_{\mathrm{ph}}^2 \geqslant \beta$ монотонно возрастает по $k$. Таким образом, в теории возможно как досветовое, так и сверхсветовое распространение ГВ.

Модифицированное дисперсионное соотношение является следствием нарушения лоренц-инвариантности в теории ХЛ. Данные наблюдений события GW170817 фиксируют отклонение скорости ГВ от скорости света в пределах $-3\times10^{-15} \leqslant (v_{\mathrm{GW}} - c)/c \leqslant 7\times10^{-16}$, что при $\beta = 1$ выполняется автоматически в ИК-пределе теории.

В настоящее время обсуждаются решения, предсказывающие дополнительные поляризации в теории ХЛ, например, решение с дополнительной смешанной скалярной модой, являющейся смесью дыхательной и продольной поляризаций [115]. Вопрос остаётся открытым.

## 6. Многомерные теории

### 6.1. *D*-мерная общая теория относительности

В данном разделе рассматривается распространение ГВ в пустом $D$-мерном пространстве–времени в рамках ОТО. Обозначение скалярных величин не меняется. Тензорные величины несут индексы $M, N = 0, 1, \ldots, D$. Константы приобретают индекс $D$. Действие ОТО в размерности $D \geqslant 4$ с космологической постоянной $\Lambda_D$ имеет вид [92]:

$$S = -\frac{1}{2\kappa_D}\int \mathrm{d}^D x\sqrt{|\hat{g}|}\,(R - 2\Lambda_D)\,, \tag{179}$$

где $\hat{g}_{MN}$ — $D$-мерная метрика, $R_{MN}$ и $R$ — тензор Риччи и скалярная кривизна $D$-мерного пространства–времени, а $\kappa_D$ — константа связи ($D$-мерная постоянная Эйнштейна). Уравнения Эйнштейна имеют вид:

$$R_{MN} - \frac{\hat{g}_{MN}}{2}(R - 2\Lambda_D) = 0. \tag{180}$$

Метрика $\hat{g}_{MN}$ раскладывается на фон $g_{MN}$ и бесконечно малое возмущение $h_{MN}$:

$$\hat{g}_{MN} = g_{MN} + h_{MN}\,. \tag{181}$$

Рассматривается калибровочное преобразование

$$h_{MN} \mapsto h_{MN} + \delta h_{MN}\,, \tag{182}$$

где $\delta h_{MN} = 2\nabla^{(0)}_{(M}\xi_{N)}$. Здесь $\nabla^{(0)}_M$ — ковариантная производная по фоновой метрике $g_{MN}$ (с помощью неё же поднимаются и опускаются индексы), а $\xi^M$ — произвольный достаточно гладкий $D$-вектор с бесконечно малыми (порядка $h_{MN}$) компонентами. Линеаризованные уравнения движения, полученные из (180), инвариантны относительно преобразований (182) на любом фоне, удовлетворяющем уравнениям движения для фона, что следует из инвариантности ОТО относительно диффеоморфизмов. В частности, это справедливо для Риччи-плоского фона ($R^{(0)}_{MN} = 0$, $\Lambda_D = 0$), который используется при дальнейшем анализе четырёхмерных мод.

Для *упрощения* линеаризованных уравнений (180) фиксируется линеаризованное условие де Дондера (гармоническое условие) [92]:

$$\nabla^{(0)}_P g^{PQ} h_{QN} - \frac{1}{2}\nabla^{(0)}_N h_D = 0\,, \tag{183}$$

где $h_D = h_{QP}g^{PQ}$ — след метрического возмущения. После фиксации калибровки (183) линеаризованное уравнение (180) принимает вид

$$-\frac{1}{2}\Box^{(0)}_D\, h_{MN} + R^{(0)S}{}_{MNP}\, g^{PQ}\, h_{QS} = 0\,, \tag{184}$$

где $\Box^{(0)}_D \equiv g^{PQ}\nabla^{(0)}_P\nabla^{(0)}_Q$ — оператор Даламбера по фоновой метрике $g_{MN}$, а $R^{(0)S}{}_{MNP}$ — фоновый многомерный тензор Римана. Отметим, что данное уравнение является обобщением уравнения Лихнеровча на Риччи-плоском фоне [120].

Многомерное пространство–время размерности $D$ делится на 4 классических и $N$ дополнительных пространственных измерений. Рассматривается [92] наиболее общая максимально симметричная метрика [93, 94], раскладывающаяся в деформированную сумму метрик на стандартном пространстве–времени с координатами $x^\mu$, где $\mu, \nu = 0, \ldots, 3$ и на внутреннем пространстве[4] с координатами $y^m$, а также $m, n = 0, \ldots, N$, где $N = D - 4$.

$$\mathrm{d}s^2 = \exp\big(2A(y)\big)\tilde{g}_{\mu\nu}(x)\;\mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x^\nu + g_{mn}(y)\;\mathrm{d}y^m\,\mathrm{d}y^n\,. \tag{185}$$

Здесь $\exp\left(2A(y)\right)$ — коэффициент деформации (масштабный фактор), а $g_{\mu\nu} = \exp\left(2A(y)\right)\tilde{g}_{\mu\nu}$ далее. Возмущение $h_{MN}$ может иметь смешанные индексы трёх типов: $h_{\mu\nu}$, $h_{\mu m}$ и $h_{mn}$. Последние два типа фигурируют в [92] как "векторы" и "скаляры" соответственно. Подстановка этого разбиения в (184) позволяет получить уравнения на каждый из типов компонент:

$$\begin{aligned}\mu\nu:\ &\exp(-2A)\tilde{\Box}_4\, h_{\mu\nu} + \Delta_{\mathcal{M}} h_{\mu\nu} - h_{\mu\nu}\Delta_{\mathcal{M}}\ln\exp(2A) - \\ &- 2\tilde{R}^{\pi}_{\mu\nu\sigma}\, g^{\sigma\rho} h_{\rho\pi} - \frac{1}{2}\exp(-2A) g^{pq}\partial_p\exp(2A)\partial_q\exp(2A)\times \\ &\times\left(\tilde{g}_{\nu\mu}\, h_4 + 2h_{\nu\mu}\exp(-2A)\right) + 2\exp(-2A)\tilde{\nabla}_{(\mu}h_{\nu)m}\, g^{mn}\partial_n\times \\ &\times\ \exp(2A) - \tilde{g}_{\mu\nu}h_{mn}\, g^{mr}g^{np}(\nabla_r\partial_p\exp(2A) - \\ &- \exp(-2A)\partial_r\exp(2A)\partial_p\exp(2A)) = 0\,,\end{aligned} \tag{186}$$

далее:

$$\begin{aligned}\mu n:\ &\exp(-2A)\tilde{\Box}_4\, h_{\mu n} + \Delta_{\mathcal{M}} h_{\mu n} + \exp(-2A) g^{pq}\nabla_p\, h_{\mu n}\partial_q\times \\ &\times\exp(2A + \exp(-2A)\, h_{\mu m}\, g^{mp}\nabla_n\partial_p\exp(2A) - \\ &- 2\exp(-4A) h_{\mu m}\, g^{mp}\partial_p\exp(2A)\partial_n\exp(2A) - \\ &- \exp(-4A)\, h_{\mu n}\, g^{pq}\partial_p\exp(2A)\partial_q\exp(2A) - \\ &- \frac{1}{2}\, h_{\mu n}\Delta_{\mathcal{M}}\ln\exp(2A) - \exp(-4A)\tilde{g}^{\pi\rho}\tilde{\nabla}_\pi\, h_{\mu\rho}\partial_n\exp(2A) + \\ &+ \exp(-2A) g^{pq}\partial_\mu h_{np}\partial_q\exp(2A) = 0\,,\end{aligned} \tag{187}$$

[4] На текущий момент топология внутреннего пространства не фиксируется как компактная.

наконец,

$$mn : \exp(-2A)\tilde{\Box}_4 h_{mn} + \Delta_{\mathcal{M}} h_{mn} + 2\exp(-2A)\, g^{pq}\partial_p \times \\ \times \exp(2A)\nabla_q h_{mn} - 2\exp(-4A)\, g^{pq}\partial_p \exp(2A)\, h_{q(m}\partial_{n)} \times \\ \times \exp(2A) - 2R^s_{mnp} g^{pq} h_{qs} - 2\exp(-4A)\tilde{g}^{\pi\rho}\tilde{\nabla}_\pi h_{\rho(m}\partial_{n)} \times \\ \times \exp(2A) - h_4\nabla_n(\exp(-2A)\partial_m \exp(2A)) = 0 . \qquad (188)$$

В приведённых уравнениях операторы $\tilde{\Box}_4$ и $\Delta_{\mathcal{M}}$ обозначают четырёхмерный волновой оператор и $N$-мерный лапласиан на дополнительном пространстве, а величины $h_4 = h_{\mu\nu} g^{\nu\mu}$, $\tilde{h}_4 = h_{\mu\nu}\tilde{g}^{\nu\mu}$ и $h_N = h_{mn} g^{nm}$ — соответствующие следы.

Отметим, что $D$-мерная ОТО не допускает затухания амплитуды четырёхмерной гравитационной волны. Такое затухание потребовало бы наличия диссипативного члена вида $\tilde{\nabla}_\mu h_{\pi\rho}$ в уравнении (186). Однако такой член отсутствует: можно показать, что в силу линеаризации, сохранения инвариантности относительно диффеоморфизмов и выбранной формы фоновой метрики (185) подобный член в уравнении (186) появиться не может [92]. В частности, этот результат отличает $D$-мерную ОТО от теорий гравитации (таких как, например, модель Двали – Габададзе – Поррати), в которых эффект "утечки" гравитации в дополнительные измерения действительно приводит к затуханию ГВ [92].

**6.1.1. Теория Калуцы – Клейна.** Модель Калуцы – Клейна — $D$-мерная ОТО, в которой $N = D - 4$ дополнительных пространственных измерений компактифицированы, т.е. имеют конечный размер, малый по сравнению с наблюдаемыми масштабами. Для случая дополнительного пространства $\mathcal{M}$, являющегося компактным и не имеющим границы, лапласиан $\Delta_{\mathcal{M}}$, фигурирующий в уравнениях (186) – (188), имеет дискретный спектр, причём первое собственное значение нулевое:

$$\Delta_{\mathcal{M}}\omega_{\mathbf{k}} = -m^2_{\mathbf{k}}\omega_{\mathbf{k}} , \qquad m_0 = 0 , \qquad (189)$$

где $\omega_{\mathbf{k}}$ — ортонормированный базис собственных функций лапласиана на внутреннем пространстве, имеющих собственные значения $m^2_{\mathbf{k}}$. Таким образом, возмущения четырёхмерной части метрики раскладываются в "башню мод" Калуцы – Клейна:

$$h_{\mu\nu}(x, y) = \sum_{\mathbf{k}} h^{\mathbf{k}}_{\mu\nu}(x)\ \omega_{\mathbf{k}}(y) . \qquad (190)$$

Напомним, что используется Риччи-плоский фон $R^{(0)}_{MN} = 0$. Разложения для $h_{\mu\nu}$, $h_{\mu m}$ и $h_{mn}$ подставляются в линеаризованные уравнения (186) – (188). При рассмотрении возмущения четырёхмерных компонент на плоском фоне и при постоянном масштабном факторе $A(y) = A = \mathrm{const}$, система диагонализуется: каждая мода удовлетворяет уравнению Клейна – Гордона:

$$\tilde{\Box}_4 h^{\mathbf{k}}_{\mu\nu} - m^2_{\mathbf{k}} h^{\mathbf{k}}_{\mu\nu} = 0 . \qquad (191)$$

Следовательно, величины $m_{\mathbf{k}}$ допускают интерпретацию в терминах масс соответствующих КК-мод.

Нулевая мода $h^0_{\mu\nu}$ удовлетворяет уравнению свободного безмассового гравитона $\tilde{\Box}_4 h^0_{\mu\nu} = 0$, однако условие де Дондера принимает нестандартный вид:

$$g^{\pi\rho}\nabla_\pi h^0_{\rho\nu} - \frac{1}{2}\nabla_\nu h^0_4 = \frac{1}{2}\nabla_\nu h^0_N , \qquad (192)$$

где в правой части стоит (ненулевой) след по индексам дополнительного пространства $h^0_N$. Заметим, что $h^0_N$ не меняется при калибровочных преобразованиях, значит, убрать $h^0_N$ из условия (192) калибровочным преобразованием невозможно. Тем не менее, нулевая мода $h^0_{\mu\nu}$ по-прежнему несёт *две* степени свободы в силу эквивалентности остаточной калибровочной свободы ОТО.

Подставляя разложения $h^0_{\mu\nu}$ и $h^0_N$ по плоским волнам с изотропным волновым вектором в условие (192) и фиксируя остаточную калибровочную свободу обнулением компонент $h_{0\nu}$, получаем матрицу поляризаций [92]:

$$h^0_{ab}(t, x^3) = \begin{pmatrix} h^+ - \dfrac{1}{2} f_N & h^\times \\ h^\times & -h^+ - \dfrac{1}{2} f_N \end{pmatrix}_{ab} \cos\left(\omega\left(t - \frac{x^3}{c}\right)\right) \equiv \\ \equiv h^\times_{ab} + h^+_{ab} + h^\circ_{ab} . \qquad (193)$$

Заметим, что помимо стандартных мод $h^+$ и $h^\times$, матрица поляризаций содержит и скалярное дыхание $h^\circ$, отвечающее следу $h^0_N$, который, в свою очередь, представляет собой независимое скалярное поле.

Уравнения для высших мод также обладают остаточной калибровочной свободой; фиксируя её, можно наложить условия поперечности и бесследовости (ТТ-калибровку) на высшие КК-моды $h^{\mathbf{k}}_{\mu\nu}(x)$, $\mathbf{k} \neq 0$ [99]:

$$\eta^{\kappa\lambda}\partial_\kappa h^{\mathbf{k}}_{\lambda\mu} = 0 , \qquad \eta^{\mu\nu} h^{\mathbf{k}}_{\mu\nu} = 0 .$$

В этом случае $h^{\mathbf{k}}_{\mu\nu}$ удовлетворяют уравнению Паули – Фирца для массивного поля спина 2 и массы $m_{\mathbf{k}}$:

$$(\eta^{\kappa\lambda}\partial_\kappa\partial_\lambda - m^2_{\mathbf{k}}) h^{\mathbf{k}}_{\mu\nu} = 0 . \qquad (194)$$

Заметим, что массивный гравитон в четырёх измерениях имеет пять независимых поляризаций (хотя матрица поляризаций содержит шесть ненулевых компонент, одна из них выражается через остальные по условию бесследовости), что справедливо и для гравитонов Калуцы – Клейна, удовлетворяющих уравнению (194). Кроме этого, в силу массивности модифицируется дисперсионное соотношение:

$$\omega^2_{\mathbf{k}} = m^2_{\mathbf{k}} + \mathbf{p}^2_{\mathbf{k}} . \qquad (195)$$

Таким образом, при анализе возмущения $h_{MN}$ метрики в $D$ измерениях в четырёхмерных волновых уравнениях обнаруживаются три типа отличий от стандартного четырёхмерного случая. Первый — это связи между различными компонентами: вектора $h_{\mu n}$ и скаляры $h_{mn}$ входят в уравнения, описывающие четырёхмерные ГВ. Второй обусловлен зависимостью дополнительного пространства от координат $y^m$, из-за чего вместо одиночной четырёхмерной волны получается "башня" связанных друг с другом мод Калуцы – Клейна $h^{\mathbf{k}}_{\mu\nu}(x^\pi)$. Одна из этих мод безмассовая, остальные — массивные, и могут соответствовать гравитонам Калуцы – Клейна [95, 96]. Третий эффект обусловлен наличием конформного фактора, т.е. нетривиальностью фоновой геометрии. В общем случае члены, зависящие от конформного фактора $A(y)$ и его производных, демонстрируют смешивание сложного характера между $h_{\mu\nu}$ и скалярными компонентами.

Можно выделить следующие общие (и потенциально не зависящие от конкретной модели) признаки, свидетельствующие о наличии дополнительных измерений [92, 99]:

1. *Дыхательная* мода поляризации: из-за дополнительных скаляров присутствует безмассовое скалярное дыхание, помимо обычных "+"- и "×"-поляризаций ГВ. Она характеризуется однородной деформацией двух поперечных направлений. Следует отметить, что аналогичные дыхательные моды возникают и в других теориях гравитации — в частности, в скалярно-тензорных, поэтому при их обнаружении возникает задача идентификации теории.

2. *Высокочастотные* сигналы: в дополнение к модифицированной безмассовой волне, присутствуют дополнительные четырёхмерные сигналы, являющиеся высшими модами разложения Калуцы – Клейна $h_{\mu\nu}^{k\neq 0}$. Они образуют башню массивных мод и удовлетворяют дисперсионному соотношению массивного поля (195), характеризуясь дискретным набором высоких частот, фиксируемых дискретными массами Калуцы – Клейна ($m_{\mathbf{k}}$). Каждая массивная мода имеет все шесть теоретически возможных мод поляризации (хотя только пять из них являются независимыми).

Типичный масштаб частот КК-сигналов определяется соотношением $\nu \approx c/r_N$, где $r_N$ — характерный размер дополнительного измерения. Текущие экспериментальные ограничения дают $r_N \lesssim 10^{-4}$ м, что соответствует нижней оценке $\nu \gtrsim 10^{12}$ Гц. В моделях струнных компактификаций ($N = 6$, $r_N \sim 10^{-13}$ м) характерные частоты достигают $\nu \sim 10^{21}$ Гц [92]. Оба значения на много порядков превышают верхнюю границу чувствительности LIGO ($\sim 10^3 - 10^4$ Гц), поэтому *прямое* обнаружение КК-мод текущими наземными детекторами маловероятно. В то же время первичные ГВ высоких энергий, испытавшие космологическое красное смещение, оказываются потенциально наблюдаемыми при помощи космических интерферометров.

Также заметим, что возможно и рассмотрение ГВ на искривлённом фоне Минковского[5] с дополнительными измерениями при непостоянном масштабном факторе [99], мотивированном струнными конфигурациями. В этом случае собственные функции оператора в уравнении на КК-спектр определяются уже не стандартным лапласианом на $\mathcal{M}$, а его модификацией, зависящей от фактора искривления. Численная оценка для случая тороидальной топологии компактных измерений с факторами искривления струнными решениями вроде $p$-бран показывает, что при физически разумных параметрах (отношение радиуса тора к фундаментальной длине $L/l_s \gtrsim 10$) смещение спектра КК-мод относительно стандартного невелико: масса первой КК-моды уменьшается не более чем вдвое. Хотя этот эффект всё ещё слишком слаб для достижения диапазона частот современных наземных ГВ-детекторов, смещение спектра делает первичные ГВ высоких энергий, подвергшиеся космологическому красному смещению, потенциально наблюдаемыми при помощи космических интерферометров.

[5] Подразумевается метрика $\mathrm{d}s^2 = \exp\left(2A(y)\right)\eta_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x^\nu + \hat{g}_{pq}(y)\,\mathrm{d}y^p\,\mathrm{d}y^q$, четырёхмерная часть которой конформно-плоская, а в остальных измерениях она произвольна.

# 7. Теории с неримановой геометрией

В теориях, рассматриваемых в этой главе, используется формализм дифференциальных форм, включая базис корепероов[6], т.е., набора матрично-значных дифференциальных 1-форм $e^{(a)} = e_\mu^{(a)}\,\mathrm{d}x^\mu \in \Omega^1(M, \mathrm{Lie}(T_4))$ со значениями в алгебре Ли группы сдвигов $T_4$. Кореперы являются базисными сечениями ко-касательного расслоения $T^*M$ над пространством – временем $M$. Греческие индексы $\mu = 0, \ldots, 3$ — пространственно-временные, латинские индексы $a, b = 0, 1, \ldots n$ — матричные (индексы в алгебре Ли). Коэффициенты $e_\mu^{(a)}$ связаны с тетрадами $e_a = e_a^\mu \partial_\mu$ через символ Кронекера по формуле $e^a e_b = \delta_b^a$. Для интегрирования по многообразию $M$ используется форма объёма

$$\mathrm{d\,vol} = \frac{1}{d!}\,\varepsilon_{abcd}\,e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d\,, \tag{196}$$

где $\varepsilon_{abcd} = \sqrt{-g}\epsilon_{abcd}$ — тензор Леви – Чивиты, связанный с соответствующим символом через определитель метрического тензора. Подробное изложение формализма с применениями дано в [116].

Вводится линейная связность $\Gamma_a^{\,b} = \Gamma_{a\mu}^{\,b}\,\mathrm{d}x^\mu$, $\Gamma_a^{\,b} \in \Omega^1(M, gl_4(\mathbb{R}))$, преобразующаяся как калибровочное поле относительно локальных линейных преобразований репера. Общая схема построения теорий с не-римановой геометрией заключается рассмотрении "достаточно большой" калибровочной группы и введении калибровочных потенциалов, отвечающих прямым или полупрямым слагаемым в ней. Наиболее общей теорией такого типа, имеющей изученные решения в виде ГВ, является метрическая аффинная гравитация (МАГ). Её калибровочными потенциалами являются метрика, корепер и линейная связность. Она включает в себя большинство классических телепараллельных теорий в качестве частных случаев [101].

## 7.1. Метрическая аффинная гравитация

Метрическая аффинная гравитация представляет собой калибровочную теорию для вещественной аффинной группы $\mathrm{Aff} = T_4 \rtimes GL(4, \mathbb{R})$ [100], являющейся полупрямым произведением группы трансляций $T_4$ и матричной группы $GL(4, \mathbb{R})$. Калибровочными потенциалами теории являются метрика $g_{ab}$[7], корепер $e^a = e_\mu^a\,\mathrm{d}x^\mu$ и линейная связность $\Gamma_a^{\,b} = \Gamma_{\mu a}^{\,b}\,\mathrm{d}x^\mu$. Соответствующими напряжённостями калибровочных полей являются неметричность $Q_{ab}$, кручение $T^a$ и кривизна $R^{ab}$:

$$Q_{ab} = -Dg_{ab}\,, \tag{197}$$

$$T^a = De^a\,, \tag{198}$$

$$R_a^{\,b} = \mathrm{d}\Gamma_a^{\,b} - \Gamma_a^{\,\mu} \wedge \Gamma_\mu^{\,b}\,. \tag{199}$$

С каждым из калибровочных потенциалов связан нётеровский ток: для метрики — симметрический ток энергии – импульса $\sigma^{ab}$, для корепера — канонический ток энергии – импульса $\Sigma_a$, для линейной связности — гиперимпульс $\Delta_b^a$ [100]. Эти токи играют роль источников в уравнениях движения. Рассматривается условие инвариантности действия относительно преобразований из

[6] Также котетрад.

[7] Обычно, но не обязательно, $g_{ab} = \eta_{ab}$, т.е., метрика Минковского.

Aff. Исходя из него, в любой точке пространства–времени можно выбрать такой корепер $e^a$, чтобы обнулить компоненты $\Gamma_a^{\ b} = 0$. Таким образом, наиболее общий калибровочно-инвариантный лагранжиан МАГ может зависеть от $\Gamma_a^{\ b}$ только непрямым способом [100] (т.е. через внешнюю ковариантную производную $D$, неметричность $Q_{ab}$, кручение $T^a$ или кривизну $R_a^{\ b}$).

$$\mathcal{L}_{\rm mag} = \mathcal{L}_{\rm mag}(g_{ab}, e^a, Q_{ab}, T^a, R_a^{\ b}), \tag{200}$$

Уравнения движения МАГ выводятся варьированием по кореперу и линейной связности. Они записываются через обобщённые скорости, заданные по формулам

$$M_{ab} = -2\,\frac{\partial\mathcal{L}_{\rm mag}}{\partial Q_{ab}}, \tag{201а}$$

$$H_a = -\frac{\partial\mathcal{L}_{\rm mag}}{\partial T^a}, \quad H^a_{\ b} = -\frac{\partial\mathcal{L}_{\rm mag}}{\partial R_a^{\ b}} \tag{201б}$$

как

$$\frac{\delta\mathcal{L}_{\rm mag}}{\delta e^a} = -DH_a + E_a = \Sigma_a, \tag{202}$$

$$\frac{\delta\mathcal{L}_{\rm mag}}{\delta\Gamma_a^{\ b}} = -DH^a_{\ b} + E^a_{\ b} = \Delta^a_{\ b}. \tag{203}$$

Здесь $E_a$, $E^a_b$ — канонические калибровочные токи энергии–импульса и гиперимпульса соответственно [26]. Следует заметить, что уравнение МАГ для неметричности (так называемое "нулевое уравнение МАГ") тривиально выполнено в силу тождеств Нётер [100].

Модель, которую мы рассматриваем далее, называется полной квадратичной моделью МАГ. Считается, что гравитация на околопланковских масштабах должна описываться квадратичными слагаемыми в лагранжиане. Наиболее общий и полный квадратичный лагранжиан, не имеющий прямой зависимости от линейной связности $\Gamma$ и зависящий от остальных напряжённостей и потенциалов есть

$$\begin{aligned} V = \frac{1}{2\kappa c}\Bigg[&a_0\,\eta_{ab}\wedge R^{ab} - T^a\wedge\sum_{I=1}^{3} a_I \star\big({}^{(I)}T_a\big) - \\ &- Q_{ab}\wedge\sum_{I=1}^{4} b_I\star\big({}^{(I)}Q^{ab}\big) - \\ &- 2b_5\big({}^{(3)}Q_{ac}\wedge e^a\big)\wedge *\big({}^{(4)}Q^{bc}\wedge e_b\big) - \\ &- 2e^a\wedge\star T^b\wedge\sum_{I=1}^{3} c_I\,{}^{(I+1)}Q_{ab}\Bigg] - \frac{1}{2\rho}R_{ab}\wedge\star\Bigg[\sum_{I=1}^{6} w_I\,{}^{(I)}W^{ab} + \\ &+ \sum_{I=1}^{5} z_I\,{}^{(I)}Z^{ab} + v_1 e^a\wedge\big(e_c\,\lrcorner\,{}^{(5)}W^c{}_b\big) + \\ &+ v_2 e^c\wedge\big(e_a\,\lrcorner\,{}^{(2)}Z_{cb}\big) + \sum_{I=3}^{5} v_I e^a\wedge\big(e_c\,\lrcorner\,{}^{(I)}Z^c{}_b\big)\Bigg], \end{aligned}$$

где $\star$ — оператор дуальности (звезда) Ходжа, а $\lrcorner$ — оператор внутреннего произведения (свёртки) вектора и дифференциальной формы. Лагранжиан строится как калибровочно-инвариантная линейная комбинация 4-форм от кривизны $R$, кручения $T$, неметричности $Q$, котетрады $e$ а также антисимметричной $W_{ab} = R_{[ab]}$ и симметричной $Z_{ab} = R_{(ab)}$ части кривизны. Помимо этого, вводится масштабный параметр $l_\rho^2 = \kappa c/\rho$, где $\kappa$ — гравитационная постоянная Эйнштейна, а $\rho$ — константа связи, имеющая размерность, обратную действию $[\rho] = [1/\hbar]$. Таким образом, $[l_\rho^2] = [L^2]$ имеет размерность площади и определяет характерный порог включения пост-римановых эффектов (т.е. влияния квадратичных членов в лагранжиане).

Для описания плоских волн вводится анзац калибровочных потенциалов $(g_{ab}, e^a, \Gamma_a^{\ b})$, причём фон $g_{ab} = \eta_{ab} = \mathrm{diag}\,(-,+,+,+)$ выбирается плоским. Строится корепер: локальные координаты делятся на две группы $x^\mu = (x^i, x^I)$, где $i = 0, 3$ — продольные координаты, $I = 1, 2$ — поперечные, причём координаты первой группы обозначаются как $x^i = (x^0 = \sigma, x^3 = \rho)$. В этих координатах:

$$e^0 = \frac{1}{2}(U-1)\,\mathrm{d}\sigma - \frac{1}{2}\,\mathrm{d}\rho, \tag{204}$$

$$e^3 = \frac{1}{2}(U+1)\,\mathrm{d}\sigma - \frac{1}{2}\,\mathrm{d}\rho, \tag{205}$$

$$e^I = \mathrm{d}x^I, \tag{206}$$

где $U = U(\sigma, x^I)$. Вычислим интервал $\mathrm{d}s^2 = \eta_{ab}e^a e^b$:

$$(e^0)^2 = \frac{(U-1)^2}{4}\,\mathrm{d}\sigma^2 + \frac{1}{4}\,\mathrm{d}\rho^2 - \frac{U-1}{2}\,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}\rho,$$
$$(e^3)^2 = \frac{(U+1)^2}{4}\,\mathrm{d}\sigma^2 + \frac{1}{4}\,\mathrm{d}\rho^2 - \frac{U+1}{2}\,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}\rho.$$

Тогда

$$\begin{aligned} -(e^0)^2 + (e^3)^2 &= \frac{(U+1)^2 - (U-1)^2}{4}\,\mathrm{d}\sigma^2 + \\ &+ \left(\frac{U-1}{2} - \frac{U+1}{2}\right)\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}\rho = U\,\mathrm{d}\sigma^2 - \mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}\rho. \end{aligned}$$

Учитывая (206), получаем метрику плоской волны:

$$\mathrm{d}s^2 = -\,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}\rho + U\,\mathrm{d}\sigma^2 + \delta_{IJ}\,\mathrm{d}x^I\,\mathrm{d}x^J, \tag{207}$$

Осталось построить линейную связность. Для этого, аналогично электромагнетизму, вводится волновая 1-форма $k = \mathrm{d}\sigma$ с тетрадными и котетрадными компонентами $k_a = (1, 0, 0, -1)$ и $k^a = (-1, 0, 0, -1)$, векторные величины $V^a = V^a(\sigma, X^I)$ и $W^a = W^a(\sigma, X^I)$, ортогональные $k_a$:

$$k_a V^a = 0, \quad k_a W^a = 0, \tag{208}$$

а также 1-форма $u = u_a(\sigma, x^I)e^a$, ортогональная $k^a$:

$$k\wedge\star u = 0, \quad k^a u_a = 0. \tag{209}$$

В таком случае 1-форма линейной связности записывается как:

$$\Gamma_a^{\ b} = -k\big(k_a V^b + k^b W_a\big) + k_a k^b u. \tag{210}$$

Анзац калибровочных потенциалов для получения решения в виде гравитационных волн состоит из корепера $e^a = (e^0, e^I, e^3)$ и связности $\Gamma_a^{\ b}$. Для обеспечения ортогональности введённых величин $U, V$ и $W$ ковектору $k^a$

рассматриваются только проекции следующего вида:

$$W^a = \begin{cases} W^i = 0, \\ W^I = W^I(\sigma, x^J), \end{cases} \tag{211}$$

аналогично для $V = V^I(\sigma, x^J)$, $u_I = u_I(\sigma, x^J)$ и $U = U(\sigma, X^J)$.

Таким образом, анзац потенциалов состоит из семи функций, определяющих профиль волны. Их явный вид находится из уравнений поля, запись которых в компонентах приведена ниже. В уравнениях используются следующие величины:

$$\underline{W}_I = \delta_{IJ} W^J, \quad \underline{V}_I = \delta_{IJ} V^J, \quad \underline{u}^A = \delta^{IJ} u_J, \tag{212}$$

а также дифференциальный оператор $\underline{\partial}^I = \delta^{IJ}\partial_J$ и двумерный тензор Леви–Чивиты $\varepsilon_{IJ}$.

Первое уравнение итоговой системы является уравнением для продольной $(ij)$ компоненты симметричной части (203) и имеет вид:

$$\begin{aligned} &\frac{2c_1 - a_1}{2}\,\partial_I U + \left[\frac{a_0 + 2a_1}{2} - 3c_1 - \frac{4b_1 - 4b_2}{3}\right]\underline{W}_I + \\ &+ \left[\frac{a_0}{2} - c_1 - \frac{4b_1 - 4b_2}{3}\right]\underline{V}_I + \\ &+ \left[4c_1 - a_1 - \frac{4b_1 + 8b_2}{3}\right]u_I + \frac{l_\rho^2}{4}\,\varepsilon_{IJ}\underline{\partial}^J \times \\ &\times \Big[(z_1 - z_2 + 2v_2)\varepsilon^{KL}\partial_K \underline{W}_L + (z_1 - z_2)\varepsilon^{KL}\partial_K \underline{V}_L + \\ &+ 2(z_1 + z_2 - v_2)\varepsilon^{KL}\partial_K u_L\Big] = 0\,. \end{aligned} \tag{213}$$

Второе уравнение, следующее оттуда же:

$$\partial_\sigma\left[(z_4 - z_1 + 3v_4)\partial_I W^I + (z_4 - z_1 + v_4)\partial_I V^I - 4z_1\partial_I \underline{u}^I\right] = 0. \tag{214}$$

Третье выводится из поперечно-продольной $[Ij]$ компоненты антисимметричной части (203):

$$\begin{aligned} &\frac{a_0 + a_1}{2}\,\partial_I U + \frac{2c_1 - a_0 - 2a_1}{2}\,\underline{W}_I + \frac{a_0 + 2c_1}{2}\,\underline{V}_I + \\ &+ (a_1 - 2c_1)u_I - \frac{l_\rho^2}{4}\Big[2w_1\Delta\underline{W}_I - 2w_1\Delta\underline{V}_I + \\ &+ (2w_4 + v_4)\partial_I\partial_J W^J + (-2w_4 + v_4)\partial_I\partial_J V^J\Big] - \\ &- \frac{l_\rho^2}{4}\,\varepsilon_{IJ}\underline{\partial}^J\Big[(-2w_2 + v_2)\varepsilon^{KL}\partial_K \underline{W}_L + \\ &+ (2w_2 + v_2)\varepsilon^{KL}\partial_K \underline{V}_L - 2v_2\varepsilon^{KL}\partial_K u_L\Big] = 0\,. \end{aligned} \tag{215}$$

Четвёртое соответствует поперечно-продольной $(Ij)$ компоненте симметричной части (203):

$$\begin{aligned} &\frac{a_1 - 2c_1}{2}\,\partial_I U + \left[\frac{a_0}{2} - a_1 + 3c_1 - \frac{8b_1 + 4b_2}{3}\right]\underline{W}_I + \\ &+ \left[\frac{a_0}{2} + c_1 - \frac{8b_1 + 4b_2}{3}\right]\underline{V}_I + \Big[a_0 + a_1 - 4c_1 - \\ &- \frac{8b_1 - 8b_2}{3}\Big]u_A - \frac{l_\rho^2}{4}\Big[2z_1\Delta\underline{W}_I + 2z_1\Delta_I\underline{V}_I + \\ &+ (z_1 + z_4 + 3v_4)\partial_I\partial_J W^J + \\ &+ (z_1 + z_4 + v_4)\partial_I\partial_J V^J\Big] - \frac{l_\rho^2}{4}\,\varepsilon_{IJ}\underline{\partial}^J\Big[(-z_1 - z_2 + \\ &+ 2v_3)\varepsilon^{KL}\partial_K \underline{W}_L - (z_1 + z_2)\varepsilon^{KL}\partial_K \underline{V}_L - \\ &- 2(z_1 - z_2 + v_2)\varepsilon^{KL}\partial_K u_L\Big] = 0\,. \end{aligned} \tag{216}$$

Наконец, система дополняется полевым уравнением МАГ (202) в явном виде:

$$\begin{aligned} &-\frac{a_1}{2}\Delta U + \left[\frac{a_0}{2} - c_1 + a_1\right]\partial_I W^I - \\ &- \left[\frac{a_0}{2} + c_1\right]\partial_I V^I - \left[a_1 - 2c_1\right]\partial_I \underline{u}^A = 0\,. \end{aligned} \tag{217}$$

Решение ОТО в виде плоских волн является и решением МАГ, так как *риманова геометрия*, лежащая в основе ОТО, характеризуется отсутствием кручения и неметричности. Это достигается выбором $u = 0, W^I = -V^I = 1/2\delta^{IJ}\partial_J U$ и $\Theta = 0$. При такой подстановке в (213)–(217), уравнения сводятся к

$$\frac{a_0}{2}\Delta U = 0\,, \tag{218а}$$

$$v_4\partial_\sigma\,\Delta U = 0\,, \tag{218б}$$

$$-2(w_1 + w_4)\,\frac{l_\rho^2}{4}\,\partial_A\Delta U = 0\,, \tag{218в}$$

$$v_4\,\frac{l_\rho^2}{4}\,\partial_A\Delta U = 0\,. \tag{218г}$$

Уравнения (218а–г) выполняются при условии, что функция $U$, описывающая профиль волны, удовлетворяет уравнению Лапласа в поперечном пространстве:

$$\Delta U \equiv \delta^{IJ}\partial_I\partial_J U = 0\,. \tag{219}$$

Это уравнение не содержит производных по $\sigma$. Следовательно, во-первых, дисперсия отсутствует и, во-вторых, ГВ распространяются со скоростью света. Общее решение (219) раскладывается по двум независимым гармоническим функциям:

$$\begin{aligned} &U = h_+(\sigma, x^1, x^2) + h_\times(\sigma, x^1, x^2), \\ &\Delta h_+ = \Delta h_\times = 0\,, \end{aligned} \tag{220}$$

где $h_+$ и $h_\times$ — стандартные тензорные поляризации ОТО ($+$ и $\times$).

Отметим, что система (213)–(217) является общим результатом. Рассмотрим конкретные её реализации. В самом общем случае ГВ в МАГ могут иметь до шести возможных поляризаций, причём одна мода представляет собой безмассовый гравитон, аналогичный ОТО, а остальные — массивные моды кручения и неметричности [102].

### 7.2. Метрическая аффинная гравитация: случай общей телепараллельности

*Общая телепараллельная геометрия* является частным случаем метрической аффинной геометрии, определяемой нулевой кривизной пространства–времени: $R_a^b = 0$ при выборе $\underline{\mathrm{d}}W^a = 0$ и $\underline{\mathrm{d}}V^a = 0$, где $\underline{\mathrm{d}} = \mathrm{d}x^I\partial_I$ — трансверсальный дифференциал. При такой подстановке уравнение (214) оказывается тождеством, а оставшиеся уравнения системы переписываются в виде

$$(a_0 - 4b_1)\,\Phi_I = 0\,, \tag{221}$$

$$3(a_0 + 2c_1)\Theta_I + 2(a_0 + 2b_2)\Psi_A = 0\,, \tag{222}$$

$$2(a_0 + a_1)\,\Theta_I + (a_0 + 2c_1)\,\Psi_A = 0\,, \tag{223}$$

где функции $\Theta, \Phi, \Psi$, описывающие профиль волны, определены как

$$\Theta_I = \frac{1}{2}\,\partial_I U - \underline{W}_I + u_I\,, \tag{224}$$

$$\Phi_I = \underline{W}_I + \underline{V}_I + u_I\,, \tag{225}$$

$$\Psi_I = \underline{W}_I + \underline{V}_I - 2u_I\,. \tag{226}$$

Уравнение (217) сводится к

$$a_1 \Delta U + (a_1 - 2c_1)\Delta \mathcal{U} = 0\,, \tag{227}$$

где $\mathcal{U}$ — потенциал, такой, что $u_I = 1/2\partial_I \mathcal{U}$. Система (221)–(223) переписывается в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} 0 & (a_0 - 4b_1) & 0 \\ 2(a_0 + a_1) & 0 & (a_0 + 2c_1) \\ 3(a_0 + 2c_1) & 0 & 2(a_0 + 2b_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Theta_I \\ \Phi_I \\ \Psi_I \end{pmatrix} = 0\,, \tag{228}$$

и имеет нетривиальные решения при условии равенства нулю определителя:

$$(a_0 - 4b_1)\left[3(a_0 + 2c_1)^2 - 4(a_0 + a_1)(a_0 + 2b_2)\right] = 0\,. \tag{229}$$

Это условие определяет класс моделей МАГ, допускающих решение в виде гравитационных волн, совместимое с телепараллельной теорией и, соответственно, ОТО.

Заметим, что если определитель системы не равен нулю (т.е. условия на константы связи не выполнены), то единственным допустимым решением будет плоское пространство Минковского, соответствующее нулевым $Q$, $T$ и $R$. Таким образом, ограничение (229) на константы связи обеспечивает существование нетривиальных решений.

### 7.3. Метрическая аффинная гравитация: геометрия Вайтценбока

*Геометрия Вайтценбока* (классический телепараллелизм) соответствует МАГ с нулевой неметричностью. Это достигается выбором $u = 0$ и $W^a = -V^a$ в уравнениях метрической аффинной теории, причём для функций $\Phi_I$ и $\Psi_I$, определённых в (224)–(226), выполнено условие $\Phi_I = \Psi_I = 0$. Приведённые условия упрощают уравнения до

$$\frac{a_1}{2}\,\Delta U = 0\,. \tag{230}$$

и накладывают следующее ограничение на константы связи:

$$a_0 + a_1 = 0\,, \qquad c_1 + \frac{a_0}{2} = 0\,. \tag{231}$$

Таким образом, уравнение (230) аналогично (218a) для ГВ в ОТО. Следовательно, структура гравитационных волн телепараллельной теории при нулевой неметричности идентична структуре гравитационных волн в ОТО.

### 7.4. Метрическая аффинная гравитация: симметричный телепараллеизм

*Симметричная телепараллельная геометрия* отвечает нулевым кривизне $R_a^b = 0$ и кручению $T^a = 0$ при нетривиальной неметричности $Q_{ab}$. Для этого выбирается:

$$W^a = W^a(\sigma),\ V^a = V^a(\sigma),\ \partial_I(U + \mathcal{U}) = 2\underline{W}_I\,. \tag{232}$$

В результате, система (228) и уравнение (217) сводятся к

$$(a_0 - 4b_1)\,\Phi_I = 0\,, \tag{233}$$

$$(a_0 + 2b_2)\,\Psi_I = 0\,, \tag{234}$$

$$(a_0 + 2c_1)\,\Psi_I = 0\,, \tag{235}$$

$$-c_1 \Delta U = 0\,, \tag{236}$$

откуда следует ограничение на константы связи:

$$a_0 - 4b_1 = 0,\ a_0 + 2b_2 = 0,\ 2c_1 + a_0 = 0\,. \tag{237}$$

Аналогично случаю классической телепараллельной геометрии, при выполнении ограничения (237), волновое уравнение тождественно (218a), т.е., ОТО.

### 7.5. Метрическая аффинная гравитация: наиболее общий случай

Рассматривается наиболее общий анзац для поперечных векторных величин. Вводятся шесть скалярных потенциалов: три чётных $W, V, U$ и три нечётных $\bar{W}, \bar{V}, \bar{U}$, через которые выражаются компоненты $W^I$, $V^I$ и $u_I$:

$$W^I = \frac{1}{2}\left(\delta^{IJ}\partial_J W + \varepsilon^{IJ}\partial_J \bar{W}\right), \tag{238}$$

$$V^I = \frac{1}{2}\left(\delta^{IJ}\partial_J V + \varepsilon^{IJ}\partial_J \bar{V}\right), \tag{239}$$

$$u_I = \frac{1}{2}\left(\partial_I U + \varepsilon_{IJ}\delta^{JK}\partial_K \bar{U}\right). \tag{240}$$

Шесть введённых потенциалов являются аналогами классических *потенциалов* Герца в электродинамике. Чётные потенциалы $W, V, U$ связаны с чётными гравитационными модами, нечётные $\bar{W}, \bar{V}, \bar{U}$ — с нечётными.

Для удобства вводятся новые потенциалы:

$$\begin{aligned} &X_0 = W - V\,, \quad X_2 = W + V + U\,, \\ &X_1 = U - W + U\,, \quad X_3 = W + V - 2U\,, \end{aligned} \tag{241}$$

и, аналогично, для нечётного сектора:

$$\bar{X}_1 = -\bar{W} + \bar{U}\,,\ \ \bar{X}_2 = \bar{W} + \bar{V} + \bar{U}\,,\ \ \bar{X}_3 = \bar{W} + \bar{V} - 2\bar{U}. \tag{242}$$

Обратные соотношения имеют вид:

$$\begin{aligned} &W = \frac{X_0}{2} + \frac{X_2}{3} + \frac{X_3}{6}\,, \quad V = -\frac{X_0}{2} + \frac{X_2}{3} + \frac{X_3}{6}\,, \\ &U = \frac{X_2}{3} - \frac{X_3}{3}\,, \end{aligned} \tag{243}$$

а функция профиля метрики выражается как $U = X_0/2 + X_1 + X_3/2$.

При подстановке (238)–(240) в систему (213)–(217) происходит полное разделение чётного и нечётного секторов, что является следствием отсутствия нечётных членов в лагранжиане (200).

Рассмотрим **чётный сектор**. Уравнения для потенциалов $X_0, X_1, X_2, X_3$ образуют систему второго порядка:

$$(2c_1-a_1)X_1+\frac{a_0-4b_1}{3}\,X_2+\left(-\frac{a_0}{2}-c_1+\frac{2(a_0+2b_2)}{3}\right)X_3=0, \tag{244а}$$

$$(a_0+a_1)X_1+\left(\frac{a_0}{2}+c_1\right)X_3-\frac{l_\rho^2}{4}\big[2(w_1+w_4)\,\Delta X_0+ + \frac{2v_4}{3}\,\Delta X_2+\frac{v_4}{3}\Delta X_3\big]=0\,, \tag{244б}$$

$$(a_1-2c_1)X_1+\frac{2(a_0-4b_1)}{3}X_2+\left(\frac{a_0}{2}+c_1-\frac{2(a_0+2b_2)}{3}\right)X_3- -\frac{l_\rho^2}{4}\big[v_4\Delta X_0+\frac{2\Lambda_0}{3}\Delta X_2+\frac{\Lambda_0}{3}\Delta X_3\big]=0\,, \tag{244в}$$

$$\frac{a_0}{2}\Delta X_0-a_1\Delta X_1-c_1\Delta X_3=0\,, \tag{244г}$$

где $\Lambda_0=3z_1+z_4+2v_4$. Дополнительное уравнение фиксирует зависимость от продольной координаты:

$$\partial_\sigma\left[v_4\Delta X_0+\frac{2(z_4-3z_1+2v_4)}{3}\,\Delta X_2+\frac{z_4+3z_1+2v_4}{3}\,\Delta X_3\right]=0. \tag{245}$$

Ищется волновое решение:

$$X_n=X_n^{(0)}(\sigma)\,\exp\left(\mathrm{i}q_Ix^I\right),\quad n=0,1,2,3\,. \tag{246}$$

После подстановки (246) система (244а – г) сводится к алгебраической задаче на амплитуды $X_n^{(0)}$ в матричном виде:

$$\mathcal{M}(Q^2)\begin{pmatrix}X_0^{(0)}\\X_1^{(0)}\\X_2^{(0)}\\X_3^{(0)}\end{pmatrix}=0\,, \tag{247}$$

где $Q^2=l_\rho^2/4\,q_Iq_J\delta^{IJ}$ не имеет отношения к скаляру неметричности (будет введён позже). Матрица $\mathcal{M}$ имеет размер $4\times4$, однако условие $\det\mathcal{M}=0$ сводится к квадратному уравнению относительно $Q^2$, определяющему массы двух массивных мод.

Система (244а – г) допускает выделенное частное решение при $X_2=X_3=0$, т.е. при $U=0$ и $W=-V$. Оставшиеся уравнения для $X_0$ и $X_1$ при $v_4\neq0$, $a_1\neq2c_1$ дают $\Delta X_0=0$ и $X_1=0$, откуда

$$\Delta U=0\,,\quad W=-V=U\,,\quad U=0\,. \tag{248}$$

Это решение идентично ОТО и описывает безмассовый гравитон.

Перейдем к **нечётному сектору**. В этом случае переменная $\bar X_2$ оказывается независимой от пары $\bar X_1, \bar X_3$. Уравнение для $\bar X_2$:

$$(a_0-4b_1)\bar X_2-l_\rho^2z_1\Delta\bar X_2=0\,, \tag{249}$$

а для пары $\bar X_1, \bar X_3$ — связанная система. После подстановки $\bar X_J=\bar X_J^{(0)}(\sigma)\,\exp\left(\mathrm{i}\bar q_Ix^I\right)$ алгебраическая задача для нечётных амплитуд записывается как:

$$\mathcal{M}(\bar Q^2)\begin{pmatrix}\bar X_1^{(0)}\\\bar X_2^{(0)}\\\bar X_3^{(0)}\end{pmatrix}=0\,. \tag{250}$$

Матрица

$$\mathcal{M}\,(\bar Q^2)= =\begin{pmatrix}0 & a_0-4b_1+4z_1\bar Q^2 & 0\\ a_0+2c_1-2\bar Q^2\Lambda_2 & 0 & \dfrac{2(a_0+2b_2)}{3}-\bar Q^2(\Lambda_2+\Lambda_3)\\ a_0+a_1-\bar Q^2\Lambda_1 & 0 & \dfrac{a_0}{2}+c_1-\bar Q^2\Lambda_2\end{pmatrix}, \tag{251}$$

где $\bar Q^2=l_\rho^2/4\,\bar q_I\bar q_J\delta^{IJ}$, а константы

$$\Lambda_1=4(w_1+w_2),\quad \Lambda_2=2(w_1+w_2)+v_2,\quad \Lambda_3=\frac{z_1+3z_2}{3}. \tag{252}$$

Нетривиальные решения существуют при выполнении двух условий:

$$a_0-4b_1+4z_1\bar Q^2=0,\qquad A\bar Q^4+B\bar Q^2+C=0\,, \tag{253}$$

где комбинации констант связи определяются как

$$A=2\Lambda_2^2+\Lambda_1(\Lambda_2+\Lambda_3)\,, \tag{254}$$

$$B=-4\left(\frac{a_0}{2}+c_1\right)\Lambda_2+(a_0+a_1)(\Lambda_2+\Lambda_3)-\frac{2(a_0+2b_2)}{3}\Lambda_1\,, \tag{255}$$

$$C=2\left(\frac{a_0}{2}+c_1\right)^2-\frac{2(a_0+2b_2)(a_0+a_1)}{3}\,. \tag{256}$$

То есть, нечётный сектор содержит три распространяющиеся нечётные моды, определяемые соотношениями (253).

Таким образом, в наиболее общем случае гравитационные волны в МАГ описываются суперпозицией шести мод: одной безмассовой (гравитон ОТО, (248)), двух массивных чётных мод (квадратное уравнение для $Q^2$ из матрицы (247)) и трёх массивных нечётных мод (253). Появление нечётных мод в рамках чётного лагранжиана объясняется тем, что нечётные потенциалы $\bar W, \bar V, \bar U$ входят в анзац (238) – (240) через нечётный тензор Леви – Чивиты $\varepsilon_{IJ}$, а не через нечётные члены лагранжиана [102]. Полный распад на чётный и нечётный секторы перестаёт выполняться в моделях МАГ с нечётными константами связи, что является отдельной, не до конца рассмотренной задачей [101].

### 7.6. $f(T)$-гравитация

В модифицированных телепараллельных теориях гравитационные волны впервые изучались в рамках $f(T)$-гравитации [104, 105]. Показано отсутствие дополнительных мод в первом порядке, и форма гравитационно-волнового сигнала соответствует ОТО. $f(T)$-гравитация эффективно сводится к телепараллельному эквиваленту ОТО на возмущённом уровне и, следовательно, ГВ имеют те же две обычные поляризации ОТО. В поисках дополнительных отличий от ОТО рассмотрим эту ситуацию подробнее.

Лагранжиан $f(T)$ гравитации представляет собой функцию от скаляра кручения, где коэффициенты $T^a_{\mu\nu}$ формы кручения (см. (198)):

$$T^a = T^a_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu$$

записываются через коэффициенты $e^a_\mu$ и $\omega^b_{a\mu}$ тетрад $e^a = e^a_\mu\,\mathrm{d}x^\mu$ и лоренцевой связности $\omega^a_b = \omega^a_{b\mu}\,\mathrm{d}x^\mu$ как

$$T^a_{\mu\nu} = \partial_\mu e^a_\nu - \partial_\nu e^a_\mu + \omega^a_{b\mu}e^b_\nu - \omega^a_{b\nu}e^b_\mu\,. \tag{257}$$

Вводим *тензор суперпотенциала*, имеющий две пространственные и одну тетрадную компоненты:

$$S^{\mu\nu}_a = \frac{1}{2}\left(K^{\mu\nu}_a + e^\mu_a T^{\alpha\nu}_\alpha - e^\nu_a T^{\alpha\mu}_\alpha\right), \tag{258}$$

где $K$ — *тензор конторсии*

$$K_{\mu\nu\rho} = \frac{1}{2}(T_{\mu\nu\rho} + T_{\rho\nu\mu} - T_{\nu\rho\nu}) \tag{259}$$

координатные индексы поднимаются метрикой и последний индекс свёрнут с тетрадой:

$$K^{\mu\nu}_\rho = g^{\mu\alpha}g^{\nu\eta}e^\rho_a K_{\alpha\beta\rho}\,.$$

Введение этих двух тензоров позволяет определить скаляр кручения $T$ как свёртку суперпотенциала и тензора кручения:

$$T = S^{\mu\nu}_a T^a_{\mu\nu}\,. \tag{260}$$

Лагранжиан $f(T)$-модификации телепараллельной гравитации имеет вид

$$S = \frac{1}{16\pi G}\int \mathrm{d}^4x e f(T) + \int \mathrm{d}^4x e\mathcal{L}_m\,, \tag{261}$$

где $\mathcal{L}_m$ — лагранжева плотность материи, а $e = \det(e^a_\mu) = \sqrt{-g}$ — определитель метрического тензора.

Уравнения поля в тетрадном виде задаются выражениями [107]:

$$e^{-1}f_\mathrm{T}\,\partial_\nu(eS^{\mu\nu}_a) + f_\mathrm{TT}\,S^{\mu\nu}_a\,\partial_\nu T - f_\mathrm{T}T^b_{\nu a}S^{\nu\mu}_b + \frac{1}{4}f(T)e^a_\mu = 0\,, \tag{262}$$

где

$$f_\mathrm{T} = \frac{\partial f(T)}{\partial T}\,,\qquad f_\mathrm{TT} = \frac{\partial^2 f(T)}{\partial T^2}\,,$$

а $\mathcal{L}_m = 0$ для упрощения вычислений. Тетрада раскладывается в ряд по возмущениям:

$$e^a_\mu = \gamma^{(0)a}_\mu + \gamma^{(1)a}_\mu + \mathcal{O}\left(\gamma^{(2)a}_\mu\right), \tag{263}$$

где $|\gamma^{(i)a}_\mu| \ll 1$ при $i > 0$, причём каждый последующий порядок намного меньше предыдущего, т.е. $|\gamma^{(2)a}_\mu| \ll |\gamma^{(1)a}_\mu|$). Возмущение в нулевом порядке записывается через лоренцеву метрику $\eta_{ab}$ (см. замечание 7 в разделе 7.1):

$$\eta_{\mu\nu} = \eta_{ab}\gamma^{(0)a}_\mu\gamma^{(0)b}_\nu\,. \tag{264}$$

После преобразований и учёта граничных условий уравнения поля (262) примут вид [107]

$$\partial_\nu S^{(1)\mu\nu}_a = 0\,. \tag{265}$$

Это уравнение (как и уравнения Эйнштейна) не имеет общего решения, однако можно наложить калибровочные условия ОТО на возмущённую метрику $h^{(1)}_{\mu\nu}$. Заметим, что при подстановке разложения $e^a_\mu = \gamma^{(0)a}_\mu + \gamma^{(1)a}_\mu$ в метрический тензор $g_{\mu\nu} = \eta_{ab}e^a_\mu e^b_\mu$, возмущение метрики в первом порядке имеет вид

$$h^{(1)}_{\mu\nu} = \eta_{ab}(\gamma^{(0)a}_\mu\gamma^{(1)b}_\nu + \gamma^{(1)a}_\mu\gamma^{(0)b}_\nu)\,. \tag{266}$$

Наложим условие отсутствия следа:

$$h^{(1)\mu}_\mu = 2\eta^{\mu\nu}\eta_{ab}\gamma^{(0)a}_\mu\gamma^{(1)b}_\nu = 0\,, \tag{267}$$

и калибровку Лоренца:

$$0 = \partial^\mu h^{(1)}_{\mu\nu} = \partial_b\gamma^{(0)b}_\nu + \\ + \eta_{ab}\left[\gamma^{(1)b}_\nu\partial^\mu\gamma^{(0)b}_\nu + \gamma^{(1)a}_\mu\partial^\mu\gamma^{(0)a}_\mu + \gamma^{(1)a}_\mu\partial^\mu\gamma^{(0)b}_\nu\right]. \tag{268}$$

Учитывая соотношение $\gamma^{(0)d}_\nu = \eta^{cd}\eta_{\mu\nu}\gamma^{(0)\mu}$ и рассматривая упрощённый случай $\gamma^{(0)a}_\mu = \delta^a_\mu$, уравнение (265) можно выразить через $\gamma^{(1)a}_\mu$ как:

$$A^\mu_d = \eta^{\mu\alpha}\eta_{df}\Box\gamma^{(1)f}_\alpha + \delta^\mu_a\delta^\rho_d\Box\gamma^{(1)a}_\rho = 0\,, \tag{269}$$

что приводит к следующей системе уравнений [107]:

$$A^0_0\colon \Box\gamma^{(1)0}_0 = 0\,, \tag{270}$$

$$A^0_i = -A^i_0\colon \Box(\gamma^{(1)0}_i - \gamma^{(1)i}_0) = 0\,, \tag{271}$$

$$A^i_j(i \neq j)\colon \Box(\gamma^{(1)j}_i + \gamma^{(1)i}_j) = 0\,, \tag{272}$$

$$A^i_m(i = m)\colon \Box\gamma^{(1)i}_i = 0\,. \tag{273}$$

Здесь $i, j = 1, 2, 3$. Далее накладывается условие поперечной калибровки: $h^{(1)}_{0\mu} = 0$, что, в компонентах, означает $\gamma^{(1)0}_0 = 0$ и $\gamma^{(1)i}_0 = \gamma^{(1)0}_i$. Комбинируя вышеперечисленные условия, получаем

1. След равен нулю:

$$\gamma^{(1)i}_i = 0\,, \tag{274}$$

2. Лоренцева калибровка:

$$\partial_j\,(\gamma^{(1)j}_i - \gamma^{(1)i}_j) = 0\,, \tag{275}$$

3. Условия на $A^i_j(i \neq j)$ и $A^i_m(i = m)$:

$$\Box(\gamma^{(1)j}_i + \gamma^{(1)i}_j) = 0\,,\quad \Box\gamma^{(1)i}_i = 0\,. \tag{276}$$

Без ограничения общности принимаем, что гравитационная волна распространяется в направлении $z$. Тогда из волновых уравнений следует, что

$$\gamma^{(1)i}_i = A^i_i\exp\left(\mathrm{i}k_\mu x^\mu\right), \tag{277}$$

где $i = 1, 2, 3$ — фиксированный индекс, не подразумевающий суммирования, и

$$\gamma^{(1)j}_i + \gamma^{(1)i}_j = B^j_i\exp\left(\mathrm{i}p_\mu x^\mu\right), \tag{278}$$

где $i, j = 1\ldots3$, а $k_\mu$ и $p_\mu$ — волновые векторы, причём $k_\mu k^\mu = p_\mu p^\mu = 0$. Коэффициенты $A^i_i$ и $B^j_i$ таковы, что $A^1_1 = -A^2_2$, $A^3_3 = 0$, $B^3_1 = B^3_2 = 0$. Тогда возмущённая метрика примет вид:

$$h_{\mu\nu}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\gamma_1^{(1)1} & B_1^2 \exp(\mathrm{i}p_\mu x^\mu) & 0 \\ 0 & B_1^2 \exp(\mathrm{i}p_\mu x^\mu) & -2\gamma_1^{(1)1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (279)$$

В решении (279) легко заметить стандартные $+$ и $\times$ поляризации ГВ ОТО. Чтобы их получить, определим $h_+ \equiv 2\gamma_1^{(1)1}$ и $h_\times \equiv B_1^2 \exp(\mathrm{i}p_\mu x^\mu)$. Следовательно, возмущённая тетрада имеет две физические степени свободы ($h_+$ и $h_\times$). С помощью явных решений подтверждается, что на уровне возмущений первого порядка в $f(T)$-гравитации нет новых поляризационных мод.

Возмущения более высоких порядков рассматриваются как возмущения плоского фона (пространства Минковского) [107]. Для метрического тензора это означает, что:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}^{(1)} + h_{\mu\nu}^{(2)} + h_{\mu\nu}^{(3)} + \mathcal{O}(h_{\mu\nu}^{(4)}) . \quad (280)$$

Поскольку фундаментальной переменной в телепараллельной формулировке является тетрада, указанное выше возмущение метрики можно связать с возмущением тетрады:

$$e_\mu^{\ a} = \delta_\mu^{\ a} + \gamma_\mu^{(1)a} + \gamma_\mu^{(2)a} + \gamma_\mu^{(3)a} + \mathcal{O}(\gamma_\mu^{(4)a}) . \quad (281)$$

Уравнения поля (262) можно для удобства переписать в классическом виде:

$$-f_{\mathrm{T}} G_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\, g_{\mu\nu}(f_{\mathrm{T}} T - f) + 2S^{\alpha}_{\mu\nu}\,\partial_\alpha f_{\mathrm{T}} = 0 . \quad (282)$$

Подставляя возмущённые тетраду и метрику (рассматривается нетривиальный случай $f_{\mathrm{T}}(0) \neq 0$) и раскладывая функцию $f(T)$ в ряд Тейлора, получим возмущённые уравнения в виде следующей системы:

$$\eta_{\mu\nu} f(0) = 0 , \quad (283)$$

$$G_{\mu\nu}^{(1)} = 0 , \quad (284)$$

$$G_{\mu\nu}^{(2)} = 0 , \quad (285)$$

$$G_{\mu\nu}^{(3)} = 2\,\frac{f_{\mathrm{TT}}(0)}{f_{\mathrm{T}}(0)}\, S_{\nu\mu}^{(1)\alpha}\partial_\alpha T^{(2)} , \quad (286)$$

Первое уравнение (в нулевом порядке) подразумевает отсутствие космологической постоянной, поскольку рассматривается возмущение метрики Минковского. Уравнения первого и второго порядков совпадают со стандартными возмущёнными уравнениями ОТО в вакууме. Однако в уравнении третьего порядка (286) обнаруживается отклонение от вида возмущений ОТО, обусловленное наличием члена $f_{\mathrm{TT}}$. Таким образом, в рамках $f(T)$-теории уравнения возмущений дают отличия от ОТО только в порядках выше второго. Причина этого состоит в том, что скаляр кручения квадратичен по тензору кручения, поэтому, в пределе ОТО (при $f_{\mathrm{TT}}(0) = 0$) вновь воспроизводится стандартный результат ОТО.

Тем не менее, эффекты $f(T)$-гравитации можно искать по изменению дисперсионного соотношения [111], принимающего форму

$$\left|\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}\right| = \frac{1}{a}\left[1 - \frac{9a^2}{4k^2}\, H^2(1-\beta_{\mathrm{T}})^2\right]^{-1/2} , \quad (287)$$

где $H \equiv \dot{a}/a$ — параметр Хаббла.

### 7.7. $f(T, B)$-гравитация

Недавно было показано [106, 107], что новые поляризационные моды появятся, если расширить $f(T)$-гравитацию путём введения скалярных полей или членов кручения с высшими производными в случае $f(T, B)$ и $f(T, T_{\mathrm{G}})$ теорий [109, 110]. Здесь $B = R + T$ — граничный член, а $T_{\mathrm{G}}$ — телепараллельный эквивалент члена Гаусса–Бонне.

Действие $f(T, B)$-гравитации расширяет (261)

$$S = \frac{1}{16\pi G}\int \mathrm{d}^4 x e f(T, B) + \int \mathrm{d}^4 x e \mathcal{L}_m . \quad (288)$$

В этом случае уравнения поля в локальном виде можно представить как [107]:

$$\begin{aligned} &- f_{\mathrm{T}}\, G_{\mu\nu} + \big(g_{\mu\nu}\Box - \nabla_\mu\nabla_\nu\big) f_{\mathrm{B}} + \frac{1}{2} g_{\mu\nu}\big(f_{\mathrm{B}} B + f_{\mathrm{T}} T - f\big) + \\ &+ 2S^{\alpha}_{\nu\mu}\,\partial_\alpha\big(f_{\mathrm{T}} + f_{\mathrm{B}}\big) = 8\pi G \Theta_{\mu\nu} , \end{aligned} \quad (289)$$

где $G_{\mu\nu}$— тензор Эйнштейна, $\Theta_a^{\ \mu} = \delta\mathcal{L}_m/\delta e_\mu^{\ a}$ — тензор энергии–импульса (в локальных координатах), а $S_a^{\ \mu\nu}$ — тензор суперпотенциала (258). Рассмотрим линейное возмущение потенциалов на плоском фоне [107], тогда:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}^{(1)} + \mathcal{O}\big(h_{\mu\nu}^{(2)}\big) , \quad \big|h_{\mu\nu}^{(i)}\big| \ll 1 . \quad (290)$$

$$e_\mu^{\ a} = \delta_\mu^{\ a} + \gamma_\mu^{(1)a} + \mathcal{O}\big(\gamma_\mu^{(2)a}\big) . \quad (291)$$

При этом скаляр кручения $T$, будучи квадратичным по тензору $T^a_{\mu\nu}$, станет равным нулю, поэтому (в силу того, что $R = -T + B$) в первом порядке возмущений

$$R^{(1)} = B^{(1)} . \quad (292)$$

Так как мы работаем в калибровке с нулевой спин-связностью (т.е. в геометрии Вайтценбока), тензор кручения (257) при подстановке разложения тетрады (263) в первом порядке запишется как

$$T_{\mu\nu}^{(1)a} = \partial_\mu\gamma_\nu^{(1)a} - \partial_\nu\gamma_\mu^{(1)a} . \quad (293)$$

Переместим индексы:

$$T_{\rho\mu\nu}^{(1)} = \eta_{\rho a} T_{\mu\nu}^{(1)a}(\partial_\mu\gamma_\nu^{(1)a} - \partial_\nu\gamma_\mu^{(1)a}) . \quad (294)$$

Сверачиваем индексы $\rho$ и $\nu$ при помощи полной метрики $g^{\nu\rho}$, которая в первом порядке эквивалентна метрике Минковского $g^{\nu\rho} \approx \eta^{\nu\rho} + \mathcal{O}(\gamma^2)$. Таким образом,

$$T_{\mu\nu}^{(1)\nu} = \eta^{\nu\rho} T_{\rho\mu\nu}^{(1)} + \mathcal{O}(\gamma^2) . \quad (295)$$

Следовательно,

$$T_{\mu\nu}^{(1)a\nu} = \eta^{\nu\rho}\eta_{\rho a}(\partial_\mu\gamma_\nu^{(1)a} - \partial_\nu\gamma_\mu^{(1)a}) , \quad (296)$$

где $\eta^{\nu\rho}\eta_{\rho a} = \delta_a^{\ \nu}$ — смешанный символ Кронекера. Скалярная кривизна в случае связности Вейтценбока:

$R = -T - 2\nabla^{\mu} T^{\nu}_{\mu\nu}$, а граничный член отождествляется с

$$B = -2\nabla^{\mu} T^{\nu}_{\mu\nu}\,. \tag{297}$$

В первом порядке на фоне пространства – времени Минковского ковариантная производная линеаризуется и заменяется частной, поэтому

$$\left(\nabla^{\mu} T^{\nu}_{\mu\nu}\right)^{(1)} = \partial^{\mu} T^{(1)\nu}_{\mu\nu}\,. \tag{298}$$

Подстановка (296) в формулу связи граничного члена и кручения (297) даёт

$$B^{(1)} = -2\partial^{\mu} T^{(1)\nu}_{\mu\nu} = -2\eta^{\mu\rho}\partial_{\rho} T^{(1)\nu}_{\mu\nu} =$$

$$= -2\eta^{\mu\rho}\partial_{\rho}\left[\delta^{\nu}_{a}\left(\partial_{\mu}\gamma^{(1)a}_{\nu} - \partial_{\nu}\gamma^{(1)a}_{\mu}\right)\right].$$

Таким образом:

$$R^{(1)} = B^{(1)} = 2\delta^{\rho}_{b}\left(\eta^{\mu\nu}\partial_{\nu}\partial_{\rho}\gamma^{(1)b}_{\mu} - \Box\gamma^{(1)b}_{\rho}\right). \tag{299}$$

Разложение слагаемого $f(T,B)$ в ряд Тейлора приводит к следующему уравнению в первом порядке:

$$\eta_{\mu\nu} f(0,0) = 0\,, \tag{300}$$

$$-f_{\mathrm{T}}(0,0) G^{(1)}_{\mu\nu} + f_{\mathrm{BB}}(0,0)(\eta_{\mu\nu}\Box - \partial_{\mu}\partial_{\nu}) R^{(1)} = 0\,. \tag{301}$$

После взятия следа:

$$f_{\mathrm{T}}(0,0) R^{(1)} + 3 f_{\mathrm{BB}}(0,0)\Box R^{(1)} = 0\,, \tag{302}$$

в котором, приведя его к виду

$$(\Box - m^2) R^{(1)} = 0\,, \tag{303}$$

можно выделить эффективную массу

$$m^2 \equiv -\frac{f_{\mathrm{T}}(0,0)}{3 f_{\mathrm{BB}}(0,0)}\,. \tag{304}$$

В пределе $|m^2| \to \infty$ возмущённая теория $f(T,B)$ в линейном порядке сводится к возмущённой ОТО.

В лоренцевой калибровке для тензора $\bar{h}^{(1)}_{\mu\nu}$, задаваемого соотношением

$$h^{(1)}_{\mu\nu} = \bar{h}^{(1)}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\bar{h}^{(1)}\eta_{\mu\nu} + \frac{f_{\mathrm{BB}}(0,0)}{f_{\mathrm{T}}(0,0)}\,\eta_{\mu\nu} R^{(1)}\,, \tag{305}$$

где $f_{\mathrm{BB}}/f_{\mathrm{T}} = -1/(3m^2)$, при условии бесследовости $\bar{h}^{(1)}_{\mu\nu}$, волновое уравнение сводится к

$$\Box\,\bar{h}^{(1)}_{\mu\nu} = 0\,, \tag{306}$$

и имеет хорошо известное волновое решение, зависящее от волнового 4-вектора $k_{\rho}$ и амплитуды $A_{\mu\nu}$:

$$\bar{h}^{(1)}_{\mu\nu} = A_{\mu\nu}\exp\left(\mathrm{i}k_{\rho}x^{\rho}\right). \tag{307}$$

Другим решением волнового уравнения (303) является зависящая от амплитуды $F$ и волнового 4-вектора $p_{\mu}$ экспонента для кривизны:

$$R^{(1)} = F\exp\left(\mathrm{i}p_{\mu}x^{\mu}\right). \tag{308}$$

Мода $R^{(1)}$ представляет собой массивную скалярную моду, распространяющуюся с досветовой скоростью, поскольку волновой вектор $p_{\mu}$ удовлетворяет условию $p_{\mu}p^{\mu} = -m^2$, поэтому $E^2 = |p|^2 + m^2$, т.е., снова появилась зависимость групповой скорости от частоты.

Таким образом, полное решение представляет собой сумму:

$$h^{(1)}_{\mu\nu} = A_{\mu\nu}\exp\left(\mathrm{i}k_{\rho}x^{\rho}\right) - \frac{1}{3m^2}\,\eta_{\mu\nu} F\exp\left(\mathrm{i}p_{\rho}x^{\rho}\right). \tag{309}$$

Подставляя полученное решение (308) уравнения (303) для скалярной кривизны $R^{(1)}$ в линеаризованное полевое уравнение (301) и пользуясь определением эффективной массы (304), можно выразить скалярную кривизну как

$$R^{(1)}_{\mu\nu} = \left(\frac{1}{6}\,\eta_{\mu\nu} - \frac{1}{3m^2}\,p_{\mu}p_{\nu}\right) R^{(1)}\,. \tag{310}$$

Из анализа уравнения геодезической $\ddot{x}^i = -R^{i}_{0j0}x^j$, где

$$R_{i0j0} = \frac{1}{2}k_0^2\bar{h}^{(1)}_{ij} - \frac{1}{6m^2}\left(\eta_{ij}p_0^2 R^{(1)} + p_i p_j R^{(1)}\right), \tag{311}$$

выводятся отклонения от ОТО:

$$\ddot{x} = \left[\frac{1}{2}\,k_0^2\bar{h}^{(1)}_{+} + \frac{1}{6m^2}\,p_0^2 R^{(1)}\right]x + \frac{1}{2}\,k_0^2\bar{h}^{(1)}_{\times}y\,, \tag{312}$$

$$\ddot{y} = \left[-\frac{1}{2}\,k_0^2\bar{h}^{(1)}_{+} + \frac{1}{6m^2}\,p_0^2 R^{(1)}\right]y + \frac{1}{2}\,k_0^2\bar{h}^{(1)}_{\times}x\,, \tag{313}$$

$$\ddot{z} = \frac{1}{6m^2}\,(p_0^2 - p_3^2) R^{(1)} z = -\frac{1}{6}\,R^{(1)} z\,. \tag{314}$$

Здесь $\hat{h}^{(1)}_{+}$ и $\hat{h}^{(1)}_{\times}$ — стандартные $+$ и $\times$ поляризации. Заметим, что предельный переход к ОТО соответствует пределу $f_{\mathrm{BB}} \to 0$ (т.е., это переход к линейной теории с граничным членом $B$). По определению, эффективная масса (304) стремится к бесконечности, значит, классический предел достигается при $|m^2| \to \infty$. Таким образом, в пределе ОТО дополнительные поляризации оказываются бесконечно массивными и, как следствие, перестают распространяться.

Главный результат заключается в том, что гравитационные волны в $f(T,B)$-гравитации, помимо ожидаемых двух поляризаций, обладают дополнительными модами: продольной и скалярным дыханием [107]. Сама по себе обсуждаемая теория представляет интерес, так как современные теории космологической инфляции основываются на действиях с членами второго порядка по кривизне для лучшего воспроизведения параметра отношения тензорных к скалярным возмущениям [108].

### 7.8. $f(T,B)$-гравитация при наличии космологической постоянной и $f(T,T_{\mathrm{G}})$-гравитация

В $f(T,B)$-гравитации можно рассматривать возмущения не только на фоне метрики Минковского, но и в присутствии космологической постоянной $\Lambda$ [107]. Слагаемое $f(0,0)$ в разложении для $f(T,B)$ в ряд Тейлора отождествляется с $2\Lambda$, поскольку в уравнениях движения оно ведёт себя аналогичным образом. TEGR [8] с космологиче-

[8] TEGR— телепараллельный эквивалент ОТО, т.е. случай общей телепараллельной геометрии.

ской постоянной ($f(T,B) = T + 2\Lambda$) соответствует стандартной формулировке ОТО ($R = 4\Lambda$ при взятии следа). Уравнения движения остаются эквивалентными (301), значит, на фоне космологической постоянной новые моды сохраняются [107].

Другой интересной теорией является $f(T, T_{\mathrm{G}})$-гравитация, где $T_{\mathrm{G}}$ — телепараллельный эквивалент инварианта Гаусса–Бонне $\mathcal{G}_{\mathrm{GB}}$. В первом порядке теории возмущений свойства гравитационных волн аналогичны $f(T)$-гравитации, значит, и ОТО. Член Гаусса–Бонне — инвариант второго порядка по кривизне, поэтому дополнительные поляризации появятся в более высоких порядках теории возмущений [107].

### 7.9. $f(Q)$-гравитация

Действие $f(Q)$-теории (обобщающей симметричный телепараллелизм) имеет вид [85, 86]:

$$S = \int_{\Omega} \mathrm{d}^4 x \left[ \frac{1}{2\kappa^2} \sqrt{-g} f(Q) + \sqrt{-g}\, \mathcal{L}_m(g) \right], \tag{315}$$

где $\kappa^2 = 8\pi G/c^4$. Для обеспечения условий симметричного телепараллелизма полагают $R_a^b = 0$, $T^a = 0$, в действии присутствуют лагранжевы множители [90]. Величина $Q$ — это скаляр неметричности, определяемый через следы $Q_\alpha \equiv Q^{\mu}_{\alpha\mu}$ и $\tilde{Q}^\alpha \equiv Q^{\mu\alpha}_{\mu}$ как

$$Q \equiv \frac{1}{4} Q_{\alpha\beta\gamma} Q^{\alpha\beta\gamma} - \frac{1}{2} Q_{\alpha\beta\gamma} Q^{\gamma\beta\alpha} - \frac{1}{4} Q_\alpha Q^\alpha + \frac{1}{2} Q_\alpha \tilde{Q}^\alpha . \tag{316}$$

Уравнения движения получаются из вариации по метрике $g_{\mu\nu}$, имея вид [87–90]

$$\frac{2}{\sqrt{-g}} \nabla_\alpha \left( \sqrt{-g} f_Q P^\alpha_{\mu\nu} \right) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} f + f_Q \big( P_{\mu\alpha\beta}\, Q_\nu^{\ \alpha\beta} - 2 Q_{\alpha\beta\mu} P^{\alpha\beta}{}_\nu \big) = \kappa^2 T_{\mu\nu} , \tag{317}$$

где $f_Q = \partial f/\partial Q$. Здесь суперпотенциал неметричности обозначен символом $P$ [90]:

$$P^\alpha_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \frac{\partial Q}{\partial Q_\alpha^{\mu\nu}} .$$

Уравнение для метрики можно переписать:

$$\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \left[ Q f_Q - f \right] + f_Q G_{\mu\nu} + 2 P^\alpha{}_{\mu\nu} \nabla_\alpha f_Q = T_{\mu\nu} . \tag{318}$$

Далее, уравнение для связности сводится к условию [90]:

$$\nabla_\mu \nabla_\nu \left( \sqrt{-g} f_Q P^{\mu\nu}_\alpha \right) = 0 . \tag{319}$$

Для изучения гравитационных волн рассматривается возмущение метрики на плоском фоне пространства Минковского:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} , \qquad |h_{\mu\nu}| \ll 1 . \tag{320}$$

При анализе ГВ используется калибровка с нулевой связностью, т.е. симметричная телепараллельная геометрия. В ней (319) выполнено тривиально. Разложение функции $f(Q)$ в ряд Тейлора вблизи $Q = 0$ и подстановка возмущения в уравнение (318) в нулевом порядке даёт

$$\eta_{\mu\nu} f(0) = 0 . \tag{321}$$

Происходит обнуление космологической постоянной на плоском фоне, т.е., $f(0) = 0$. При условии $f_Q(0) \neq 0$ получаем, что [90, 91, 113]:

$$f_Q(0) G^{(1)}_{\mu\nu} = 0 . \tag{322}$$

Тогда уравнение (322) полностью эквивалентно линеаризованным уравнениям ОТО в вакууме. Следовательно, поляризации и скорость ГВ в $f(Q)$-гравитации в линейном порядке полностью совпадают с таковыми в ОТО: две тензорные поляризации $+$ и $\times$, распространяющиеся со скоростью света.

Таким образом, отличия от ОТО проявятся либо в более высоких порядках теории возмущений, либо в нелинейном режиме, либо при добавлении дополнительных полей. Например, аналогично случаю $f(T,B)$-гравитации (с аналогичной методикой вычислений), добавление граничного члена $f(Q,B)$ внесёт дополнительную массивную моду скалярного дыхания, распространяющуюся с досветовой скоростью [113]. Заметим, что в обсуждаемой работе продольной моды не возникает, что отличает случай $f(Q,B)$ от $f(T,B)$.

## 8. Заключение

Благодаря результатам гравитационно-волновой астрономии в настоящее время в наиболее реалистичных теориях гравитации закон распространения гравитационных волн, по крайней мере, в ведущем порядке, соответствует ОТО, где эти волны поперечны, имея две поляризации: "+" и "×". Уже на уровне теории Бранса–Дикке добавляется 3 мода — "скалярное дыхание", которое, при наличии потенциала, становится массивным. При дальнейшем расширении теории число поляризаций возрастет. Именно по этой причине так важен экспериментальный поиск числа поляризаций гравитационных волн.

В расширенных теориях существующие результаты наблюдения ГВ часто трактуются как частный случай их распространения в плоском четырёхмерном пространстве–времени Минковского. Поэтому при увеличении экспериментальной точности новые характеристики гравитационных волн — дополнительные моды поляризации, высокочастотные сигналы — могут быть зарегистрированы, и обсуждаемые теоретические предсказания помогут выбрать теорию, которая реализуется в нашей Вселенной.

**Благодарности.** Работа И.И. Чеха по написанию первоначальных версий разделов 4, 5 и 7 была поддержана грантом Российского научного фонда № 23-42-00055 в рамках изучения возможной квантовой природы первичных гравитационных волн. Первая часть работы С.О. Алексеева по написанию остальных глав была поддержана грантом Российского научного фонда № 23-22-00073 в рамках изучения расширений общей теории относительности и поиска лучшего соответствия с наблюдательным данным астрофизики. В ходе дальнейшей работы С.О.Алексеевым, С.К. Кузьминым, Е.А. Плужниковым и Р.А.Стамовым в неразрывном соавторстве текст был существенно расширен и дополнен.

## Список литературы


1. Алексеев С О, Памятных Е А, Урсулов А В, Третьякова Д А, Латош Б Н *Общая теория относительности: Введение. Современное развитие и приложения* (М.: URSS, 2022)
2. Rowan S, Hough J, in *Proc. of the 1998 European School of High-Energy Physics, St. Andrews, Scotland, 23 Aug.–5 Sep. 1998* (CERN School of Physics, 37, Eds M Ellis, J March-Russell) (Geneva: CERN, 1999) pp. 301–311
3. Hulse R A *Rev. Mod. Phys.* **66** 699 (1994)
4. Taylor J H (Jr.) *Rev. Mod. Phys.* **66** 711 (1994)
5. Hoak D, LIGO Scientific Collab. *Nuovo Cimento C* **40** 119 (2017) DOI:10.1393/ncc/i2017-17119-1
6. Accadia T et al. *Class. Quantum Grav.* **28** 114002 (2011)
7. Dooley K L, LIGO Scientific Collab. *J. Phys. Conf. Ser.* **610** 012015 (2015)
8. Tatsumi D, TAMA Collab. *J. Phys. Conf. Ser.* **120** 032011 (2008)
9. Abbott B P et al. (LIGO Scientific Collab. and Virgo Collab.) *Phys. Rev. Lett.* **116** 241102 (2016)
10. Abbott B P et al. *Astrophys. J. Lett.* **848** L13 (2017)
11. Soares-Santos M et al. *Astrophys. J. Lett.* **848** L16 (2017)
12. Coulter D A et al. *Science* **358** 1556 (2017)
13. Valenti S et al. *Astrophys. J. Lett.* **848** L24 (2017)
14. Arcavi I et al. *Nature* **551** 64 (2017)
15. Tanvir N R et al. *Astrophys. J. Lett.* **848** L27 (2017)
16. Lipunov V M et al. *Astrophys. J. Lett.* **850** L1 (2017)
17. Evans P A et al. *Science* **358** 1565 (2017); arXiv:1710.05437v1
18. Margutti R et al. *Astrophys. J. Lett.* **848** L20 (2017); arXiv:1710.05431v1
19. Алексеев С О и др. *Многоканальная астрономия* (Под ред. А М Черепащука) (М.: ДМК Пресс, 2022)
20. Alexeyev S, Prokopov V *Universe* **8** (5) 283 (2022)
21. Amaro-Seoane P et al. *Living Rev. Relativ.* **26** 2 (2023)
22. Luo J et al. *Class. Quantum Grav.* **33** 035010 (2016)
23. Hu W-R, Wu Y-L *Natl. Sci. Rev.* **4** 685 (2017)
24. Sofue Y, Rubin V *Annu. Rev. Astron. Astrophys.* **39** 137 (2001)
25. Yadav M et al. *Eur. Phys. J. C* **85** 1013 (2025)
26. Baker J G et al., arXiv:0708.4202
27. Milgrom M *Phys. Rev. D* **89** 024027 (2014)
28. Milgrom M *Phys. Rev. D* **82** 043523 (2010)
29. Brans C, Dicke R H *Phys. Rev.* **124** 925 (1961)
30. Brans C H *Phys. Rev.* **125** 2194 (1962)
31. Alsing J et al. *Phys. Rev. D* **85** 064041 (2012)
32. Horndeski G W *Int. J. Theor. Phys.* **10** 363 (1974)
33. Kobayashi T, Yamaguchi M, Yokoyama J *Prog. Theor. Phys.* **126** 511 (2011)
34. Hou S, Gong Y, Liu Y *Eur. Phys. J. C* **78** 378 (2018)
35. Dyadina P I, Avdeev N A, Alexeyev S O *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **483** 947 (2019)
36. de Rham C, Gabadadze G, Tolley A J *Phys. Rev. Lett.* **106** 231101 (2011)
37. Mohseni M *Phys. Rev. D* **84** 064026 (2011)
38. Zhang H, Huang Y *J. High Energ. Phys.* **2021** 56 (2021); arXiv:2109.01391v2
39. Cai R-G et al. *Phys. Rev. D* **91** 024032 (2015)
40. Fierz M, Pauli W E *Proc. R. Soc. London A* **173** 211 (1939)
41. Gambini R, Pullin J *Loops, Knots, Gauge Theories and Quantum Gravity* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2000)
42. Rovelli C *Quantum Gravity* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2004)
43. Ashtekar A, Lewandowski J *Class. Quantum Grav.* **21** R53 (2004)
44. Thiemann T *Modern Canonical Quantum General Relativity* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2008)
45. Ashtekar A *Phys. Rev. Lett.* **57** 2244 (1986)
46. Rovelli C, Smolin L *Nucl. Phys. B* **442** 593 (1995)
47. Ashtekar A, Lewandowski J *Class. Quantum Grav.* **14** A55 (1997)
48. Ashtekar A, Lewandowski J *Adv. Theor. Math. Phys.* **1** 388 (1998)
49. Bojowald M *Living Rev. Relativ.* **11** 4 (2008)
50. Ashtekar A, Pawlowski T, Singh P *Phys. Rev. Lett.* **96** 141301 (2006)
51. Ashtekar A, Pawlowski T, Singh P *Phys. Rev. D* **74** 084003 (2006)
52. Assanioussi M et al. *Phys. Rev. Lett.* **121** 081303 (2018)
53. Dapor A, Liegener K *Eur. Phys. J. C* **80** 741 (2020)
54. Horowitz G T, Steif A R *Phys. Rev. D* **42** 1950 (1990)
55. Tseytlin A A *Class. Quantum Grav.* **12** 2365 (1995)
56. Blau M et al. *J. High Energy Phys.* **2002** (01) 047 (2002)
57. Metsaev R R *Nucl. Phys. B* **625** 70 (2002)
58. Metsaev R R, Tseytlin A A *Phys. Rev. D* **65** 126004 (2002)
59. Penrose R, in *Differential Geometry and Relativity* (Ser. Mathematical Physics and Applied Mathematics, Vol. 3, Eds M Cahen, M Flato) (Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1976) p. 271, DOI:10.1007/978-94-010-1508-0_23
60. Güven R *Phys. Lett. B* **482** 255 (2000)
61. Blau M, Figueroa-O'Farrill J, Papadopoulos G *Class. Quantum Grav.* **19** 4753 (2002)
62. Berenstein D, Maldacena J, Nastase H *J. High Energy Phys.* **2002** (04) 013 (2002)
63. Sadri D, Sheikh-Jabbari M M *Rev. Mod. Phys.* **76** 853 (2004)
64. Podolský J *Class. Quantum Grav.* **15** 719 (1998)
65. Biswas A, Kumar A, Panigrahi K L *Phys. Rev. D* **66** 126002 (2002)
66. Hořava P *Phys. Rev. D* **79** 084008 (2009)
67. Blas D, Pujolàs O, Sibiryakov S *Phys. Rev. Lett.* **104** 181302 (2010)
68. Charmousis C et al. *J. High Energy Phys.* **2009** (08) 070 (2009)
69. Pospelov M, Shang Y *Phys. Rev. D* **85** 105001 (2012)
70. Mestra-Páez J, Peña J M, Restuccia A *Phys. Rev. D* **104** 124073 (2021)
71. Mestra-Páez J, Peña J M, Restuccia A *Eur. Phys. J. C* **81** 923 (2021)
72. Arnowitt R, Deser S, Misner C W *Phys. Rev.* **121** 1556 (1961)
73. Ramos O, Barausse E *Phys. Rev. D* **99** 024034 (2019)
74. Gümrükçüoğlu A E, Saravani M, Sotiriou T P *Phys. Rev. D* **97** 024032 (2018)
75. Abbott B P et al. *Astrophys. J.* **848** L13 (2017)
76. Abbott B P et al. (LIGO Scientific Collab. and Virgo Collab.) *Phys. Rev. Lett.* **123** 011102 (2019)
77. Bellorín J, Restuccia A *Phys. Rev. D* **94** 064041 (2016)
78. De Felice A, Tsujikawa S *Living Rev. Relativ.* **13** 3 (2010)
79. Kalita S, Mukhopadhyay B *Astrophys. J.* **909** 65 (2021)
80. Liang D et al. *Phys. Rev. D* **95** 104034 (2017)
81. Prasia P, Kuriakose V C *Int. J. Mod. Phys. D* **23** 1450037 (2014)
82. Burrage C, Sakstein J *Living Rev. Relativ.* **21** 1 (2018)
83. Gong Y, Hou S *Universe* **4** (8) 85 (2018)
84. Yang L, Lee C-C, Geng C-Q *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **2011** (08) 029 (2011)
85. Jiménez J B et al. *Phys. Rev. D* **101** 103507 (2020)
86. Zhao D *Eur. Phys. J. C* **82** 303 (2022)
87. Dialektopoulos K F, Koivisto T S, Capozziell S *Eur. Phys. J. C* **79** 606 (2019)
88. Capozziello S et al. *Eur. Phys. J. C* **81** 1141 (2021)
89. Vignolo S *Class. Quantum Grav.* **39** 015009 (2022)
90. Capozziello S, Capriolo M, arXiv:2405.16163
91. Hohmann M et al. *Phys. Rev. D* **99** 024009 (2019)
92. Andriot D, Gómez G L *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **2017** (06) 048 (2017); arXiv:1704.07392
93. van Nieuwenhuizen P, in *General Relativity and Gravitation. Invited Papers and Discussion Reports of the 10th Intern. Conf. on General Relativity and Gravitation, Padua, July 3–8, 1983* (Fundamental Theories of Physics, Vol. 9, Eds B Bertotti, F Felice, A Pascolini) (Dordrecht: D. Reidel Publ. Co., 1984) p. 471, DOI:10.1007/978-94-009-6469-3_29
94. Van Nieuwenhuizen P, in *Relativity, Groups and Topology: Proc., 40th Summer School of Theoretical Physics, Session 40, Les Houches, France, June 27 – August 4, 1983* Vol. 2 (Eds B S DeWitt, R Stora) (Amsterdam: North-Holland, 1984) p. 823
95. Giddings S B, Zhang H *Phys. Rev. D* **93** 115002 (2016)
96. Agashe K et al. *Phys. Rev. D* **76** 036006 (2007)
97. Bachas C, Estes J *J. High Energy Phys.* **2011** (06) 05 (2011)
98. Csáki C et al. *Nucl. Phys. B* **581** 309 (2000)
99. Andriot D, Tsimpis D *J. High Energy Phys.* **2020** 100 (2020); arXiv:1911.01444
100. Hehl F W et al. *Phys. Rep.* **258** 1 (1995)
101. Jiménez-Cano A, Obukhov Yu N *Phys. Rev. D* **103** 024018 (2021)
102. Hohmann M, Pfeifer C *Phys. Lett. B* **834** 137437 (2022)
103. Rao H, Liu C, Geng C-Q *Phys. Lett. B* **850** 138497 (2024)
104. Bamba K et al. *Phys. Lett. B* **727** 194 (2013)
105. Cai Y-F et al. *Phys. Rev. D* **97** 103513 (2018)
106. Abedi H, Capozziello S *Eur. Phys. J. C* **78** 474 (2018)

107. Farrugia G et al. *Phys. Rev. D* **97** 124064 (2018)
108. Pozdeeva E O et al. *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **2025** 081 (2025)
109. Bahamonde S, Böhmer C G, Wright M *Phys. Rev. D* **92** 104042 (2015)
110. Kofinas G, Saridakis E N *Phys. Rev. D* **90** 084044 (2014)
111. Cai Y-F et al., arXiv:1801.05827
112. Kumar A *Phys. Lett. B* **594** 368 (2004)
113. Soudi I et al. *Phys. Rev. D* **100** 044008 (2019)
114. Ferko C, Satishchandran G, Sethi S *Phys. Rev. D* **105** 024072 (2022)
115. Gong Y et al. *Phys. Rev. D* **98** 104017 (2018)
116. Misner C W, Thorne K S, Wheeler J A *Gravitation* Vol. 1 (San Francisco, CA: W.H. Freeman, 1973)
117. Arnowitt R, Deser S, Misner C W "Dynamical structure and definition of energy in general relativity" *Phys. Rev.* **116** 1322 (1959)
118. Arnowitt R, Deser S, Misner C W "The dynamics of general relativity", in *Gravitation: An Introduction to Current Research* (Ed. L Witten) (New York: John Wiley and Sons, 1962) p. 227
119. Bellorín J, Restuccia A, Sotomayor A *Phys. Rev. D* **87** 084020 (2013)
120. Lichnerowicz A "Propagateurs et commutateurs en relativité générale" *Publ. Math. IHES* **10** 5 (1961) DOI:10.1007/BF02684612

## Gravitational waves in extended gravity theories

**S.O. Alexeyev** [1,2,a], **S.K. Kuzmin** [2,b], **E.A. Pluzhnikov** [3,c], **R.A. Stamov** [1,2,d], **I.I. Chekh** [2,e]

[1] *Lomonosov Moscow State University, Shtemberg State Astronomical Institute, Universitetskii prosp. 13, 119234 Moscow, Russian Federation*

[2] *Lomonosov Moscow State University, Faculty of Physics, Leninskie gory 1, str. 2, 119991 Moscow, Russian Federation*

[3] *Lomonosov Moscow State University, Faculty of Cosmic Research, Leninskie Gory 1/52, 119991 Moscow, Russian Federation*

*E-mail*: [a] *alexeyev@sai.msu.ru,* [b] *sergey.kuzmin.jr@gmail.com,* [c] *pluzhnikov.egor@student.msu.ru,* [d] *stamov_roma@mail.ru,* [e] *ilya@spacecyborg.ru*

Any theory proposed to explain dark matter, dark energy, the evolution of the early Universe, and other unsolved problems must correctly reproduce existing observational and experimental data, including the properties of gravitational waves. Therefore, we discuss the main properties of gravitational waves such as the propagation velocity, characteristic amplitudes, polarizations, and other features predicted by extended theories of gravity: scalar-tensor gravity, including the Brans–Dicke models; Horndeski theories; $f(R)$-gravity; theories with a massive graviton; modified Newtonian dynamics; quantum theories of gravity, including loop quantum gravity and string theory IIB; Horava–Lifshitz theory; higher-dimensional theories, including the general case of $D$-dimensional spacetime and Kaluza–Klein theory; and non-Riemannian geometry, including both the general case of metric affine gravity and various versions of teleparallel gravity ($f(T)$ and $f(Q)$), as well as the extended cases $f(T, B)$ and $f(T, T_G)$. With increasing experimental accuracy, the discussed characteristics of gravitational waves will be discovered, helping in the selection of gravity theories.

**Keywords:** gravitational waves, general relativity, Brans–Dicke theory, scalar-tensor gravity, Horndeski theory, teleparallel gravity, metric affine gravity, gravitational-wave astronomy

PACS numbers: **04.30.–w, 04.50.–h, 04.60.–m**

Bibliography — 120 references

*Received 14 October 2025, revised 28 April 2026*

*Uspekhi Fizicheskikh Nauk* **196** (7) 677–706 (2026)

*Physics – Uspekhi* **69** (7) (2026)

DOI: https://doi.org/10.3367/UFNr.2026.05.040140

DOI: https://doi.org/10.3367/UFNe.2026.05.040140