

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

Дислокации солитонных решёток: эксперимент и теория

Е.А. Кузнецов

Обсуждаются результаты недавних экспериментов [1] по наблюдению солитонных решёток и их дислокаций в вертикальных цилиндрических каналах, заполненных несмешивающимися жидкостями с сильно отличающимися вязкостями и различными значениями плотности, когда менее вязкая жидкость с меньшей плотностью заполняет центральную область цилиндра. При инжекции лёгкой жидкости снизу по границе раздела жидкостей генерируются нелинейные кноидальные волны, имеющие вид солитонных решёток. Наблюдаются дислокации решёток двух типов, взаимодействие между которыми оказывается упругим. Данное экспериментальное исследование полностью подтверждает теорию кноидальных волн и их дислокаций для уравнения КДВ, которая была развита 50 лет назад и опубликована в ЖЭТФ [2].

Ключевые слова: бризеры, дислокации, солитон, кноидальная волна, процедура одевания, уравнение КДВ, возврат типа Ферми–Паста–Улама

PACS numbers: 05.45.Yv, 47.10. – g, 47.35. – i

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.2026.03.040111>

Содержание

1. Введение (659).
 - 1.1. История вопроса и эксперимент. 1.2. Экспериментальные данные.
 2. Теория кноидальных волн и их дефектов (661).
 - 2.1. Схема Шабата. 2.2. Кноидальная волна как солитонная решётка. 2.3. Солитон, как дислокация солитонной решётки.
 3. Заключительные замечания (664).
- Список литературы (665).

1. Введение

Мотивацией данной заметки послужила недавняя — 2023 г. — экспериментальная работа [1], в которой наблюдались дислокации, распространяющиеся по периодической кноидальной волне. Авторы называют их движущимися бризерами (по английски — travelling breathers). Эти бризеры достаточно большой амплитуды при своем распространении осциллируют во времени, но в среднем двигаются с постоянной скоростью. После прохождения бризера кноидальная волна восстанавливается, приобретая пространственный сдвиг по отношению к изначальной кноидальной волне, т.е. эти бризеры представляют собой движущиеся дислокации кноидальной волны. В экспериментах обнаружены два типа бризеров — тёмные и яркие, которые движутся быстрее

или медленнее кноидальной волны. Экспериментально показано также, что столкновение бризеров–дислокаций является упругим. Все эти факты подтверждают теоретические предсказания, развитые в работе автора и А.В. Михайлова [2], опубликованной 50 лет назад. В данной статье мы подробно рассмотрим результаты эксперимента [1] и дадим, следуя [2], соответствующие теоретические объяснения экспериментов.

1.1. История вопроса и эксперимент

Основное направление экспериментов [1] — исследование нелинейных волновых структур, которые возникают на границе раздела двух жидкостей с очень разными значениями вязкости в вертикальной высокой колонне с размерами (5 см × 5 см × 180 см). Мы начнём с описания экспериментов, которое в значительной степени изложено в работе [3], предшествующей [1]. Одна жидкость, более тяжёлая, со значительно большей вязкостью, занимает внешнюю вертикальную область, ограниченную стенкой, другая область — внутренняя часть колонны цилиндрической формы — заполнена другой жидкостью с меньшей вязкостью и меньшей плотностью. В экспериментах [1, 3] в качестве тяжёлой, но более вязкой жидкости использовался глицерин, а внутренняя жидкость представляла собой водяной раствор глицерина с плотностью, меньшей чем у внешней жидкости. Отношение вязкостей составляло $\epsilon = 0,04$. Область менее вязкой жидкости, несмешивающейся с внешней, в стационарном состоянии представляла собой цилиндр с радиусом, постоянным вдоль колонны. Очевидно, что если в каком то месте этого цилиндра создать локализованное возмущение большего радиуса, то это возмущение начнёт всплывать благодаря конвективной неустойчивости. Такого рода возмущение в виде солитона будет распространяться вверх вдоль колонны с постоянной скоростью.

Е.А. Кузнецов

⁽¹⁾ Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН, Ленинский просп. 53, 119991 Москва, Российская Федерация

⁽²⁾ Институт теоретической физики им Л.Д. Ландау РАН, ул. Косыгина 2, 119334 Москва, Российская Федерация
E-mail: kuznetso@itp.ac.ru, kuznetsovea@lebedev.ru

Статья поступила 25 марта 2026 г.

Этот факт впервые был установлен численно и аналитически, а также подтвержден экспериментально в работах [4, 5] (см. также [6]). Как было выяснено в этих работах, при локальном изменении радиуса внутреннего цилиндра солитон представлял собой локализованное возмущение, распространяющееся вверх с постоянной скоростью с сохранением своей формы. Отметим, что в 1984 г. Scott и Stevenson [7] предложили использовать эту модель для объяснения движения сгустка магмы, названного солитоном магмы, который распространяется вверх вдоль канала вулкана при его извержении. В канале магма имеет более низкую вязкость нежели стенки канала, что стало главной мотивацией этих авторов.

В экспериментах [1, 3] генерация как линейных, так и нелинейных волн, в том числе солитонов осуществлялась путём впрыскивания лёгкой, менее вязкой жидкости снизу. Нелинейная модель распространения таких волн, получившая название уравнение канала (по английски — conduit equation), была выведена в работах [5, 8]. Это уравнение записывается в безразмерных переменных для площади A внутреннего цилиндра (нормирована на невозмущённое значение), зависящей от вертикальной координаты z и времени t :

$$A_t + (A^2)_z - (A^2(A^{-1}A_t)_z)_z = 0. \quad (1)$$

Вначале это уравнение было выведено для стационарных волн [5], а затем была получена его нестационарная версия (1) в работе [8]. При выводе был использован малый параметр — отношение вязкостей внутренней и внешней жидкостей, условие равенства сил на интерфейсе в предположении малого, порядка единицы, числа Рейнольдса. Последнее означает, что течение внутренней жидкости в каждом сечении можно считать течением Пуазейля за счёт градиента давления в вертикальном направлении, обусловленного силой плавучести (внутренняя жидкость имеет меньшую плотность, чем внешняя). Интересно отметить, что уравнение (1) формально является консервативным, несмотря на наличие вязких сил. Похожая ситуация возникает при описании движения интерфейса между двумя течениями Хеле–Шоу с сильно различными вязкостями. Как известно, такое движение границы описывается так называемым уравнением лапласов-

ского роста, впервые полученным в работах [9, 10]. В рамках этого уравнения было получено знаменитое решение Саффмана–Тейлора [11] в виде пальца, проникающего в более вязкую среду.

Уравнение канала (1) в линейном приближении, когда $A = 1 + \alpha$ ($|\alpha| \ll 1$), описывает волны малой амплитуды с законом дисперсии

$$\omega = \frac{2k}{1+k^2}. \quad (2)$$

В экспериментах [1, 3] для кноидальных волн и бризеров, распространяющихся по ним, характерное значение безразмерного волнового числа k было порядка 0,3–0,4, так что дисперсионная добавка оказалась малой: $k^2 \approx 0,1$. Таким образом, для экспериментов [1, 3] закон дисперсии близок к закону дисперсии для уравнения КДВ: $\omega = 2k(1-k^2)$. В нелинейном режиме, например, для стационарной кноидальной волны это означает, что дисперсия должна уравниваться нелинейностью, поэтому при экспериментальных параметрах [1, 3] в нелинейном режиме волны должны хорошо аппроксимироваться уравнением КДВ:

$$u_t + u_{xxx} + 6uu_x = 0. \quad (3)$$

Это уравнение записано в стандартном виде, и получается из (1) с помощью простых преобразований: переходом в движущуюся систему координат и соответствующего масштабирования (в предположении слабой дисперсии и малой нелинейности). Последнее, как будет показано ниже, позволяет объяснить все экспериментальные результаты статьи [1].

1.2. Экспериментальные данные

Обратимся к результатам экспериментов [1]. На рисунке 1а показаны данные наблюдения в разные моменты времени яркого бризера, распространяющегося по кноидальной волне. Нижняя панель соответствует невозмущённой кноидальной волне. На верхних панелях видно, что бризер двигается быстрее кноидальной волны. На рисунке 1б представлена траектория бризера на плоскости $t-z$: это прерывистая красная линия на фоне прямых синих линий, соответствующих распространению кноидальной волны.

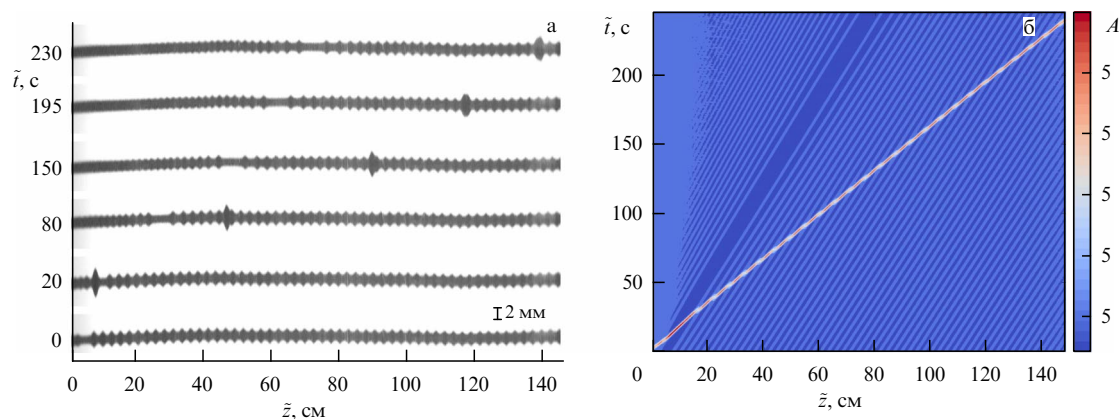


Рис. 1. (а) Движение яркого бризера по кноидальной волне в разные моменты времени. Нижняя панель соответствует невозмущённой кноидальной волне. (б) Траектория яркого бризера на плоскости $t-z$ (прерывистая красная линия) на фоне прямых синих линий, соответствующих распространению кноидальной волны.

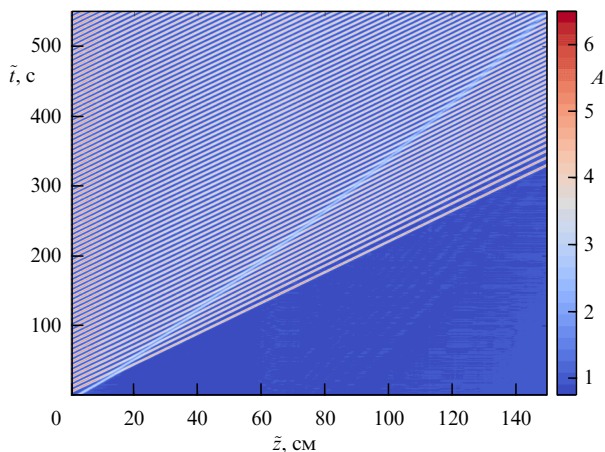


Рис. 2. Траектория тёмного бризера на плоскости $t-z$ (светло-голубая линия) на фоне кноидальной волны.

движению кноидальной волны. Как видно, бризер в среднем двигается с постоянной скоростью, совершая небольшие колебания. На этом рисунке также просматривается небольшой сдвиг кноидальной волны после прохождения бризера.

На рисунке 2 представлена траектория тёмного бризера: его средняя скорость меньше скорости кноидальной волны, бризер испытывает колебания. После своего прохождения он формирует сдвиг кноидальной волны другого знака по сравнению с ярким бризером.

Таким образом, взаимодействие бризеров с кноидальной волной не изменяет её скорости и, что важно, её амплитуды, а приводит к формированию дислокаций. Как будет показано ниже, это есть следствие интегрируемости уравнения КДВ, которое с хорошей точностью описывает поведение ярких и тёмных бризеров в этом эксперименте.

Весьма интересным результатом этих экспериментов стало также исследование взаимодействия бризеров, которое показало, что рассеяние бризеров между собой, как ярких, так и тёмных оказывается упругим: рис. 3а демонстрирует рассеяние ярких бризеров, рис. 3б — рассеяние тёмных бризеров и рис. 3в — рассеяние между ярким бризером и тёмным.

При всех этих рассеяниях (средние) скорости бризеров сохраняют свои величины. Как будет показано в следующем разделе, эти результаты также подтверждают теоретические предсказания, развитые в работе [2].

2. Теория кноидальных волн и их дефектов

В работе [2] при исследовании устойчивости кноидальной волны КДВ нами была впервые применена процедура одевания: схема Шабата [12], которая основана на интегральном уравнении Марченко путём введения алгебры дифференциальных операторов относительно свёртки двух ядер. Позже Захаров и Шабат [13] представили более развитую версию процедуры одевания, основанную на задаче Римана–Гильберта. Сейчас эта схема называется процедурой одевания Захарова–Шабата.

Процедура одевания для систем, интегрируемых с помощью метода обратной задачи рассеяния, позволяет построить новое решение на основе известного решения. В такой формулировке этот метод аналогичен хорошо известному преобразованию Дарбу, но не полностью. Метод одевания оказался более эффективным, чем метод Дарбу. Позволяет изучать нелинейную динамику для решений с нетривиальной асимптотикой на бесконечности, в частности, исследовать задачу Коши для таких граничных условий. В этом смысле схема Шабата оказалась более продуктивной, чем метод Дарбу. В частности, с помощью этой схемы нами была решена задача об устойчивости кноидальной волны КДВ. Мы исследовали не только линейную, но и нелинейную устойчивость. Следует отметить, что метод одевания даёт значительные преимущества для анализа устойчивости произвольного решения для интегрируемых уравнений по сравнению со стандартной процедурой, основанной на прямой линеаризации. В серии работ [17–20] этот подход был применён как к линейным, так и к нелинейным задачам устойчивости кноидальных волн для уравнения Кадамцева–Петвиашвили и нелинейного уравнения Шрёдингера.

2.1. Схема Шабата

Рассмотрим уравнение Марченко для двух ядер $K(x, y)$ и $F(x, y)$

$$K(x, y) + F(x, y) + \int_x^\infty K(x, s)F(s, y) ds = 0 \quad (4)$$

и введём операторы дифференцирования D относительно свёртки двух ядер

$$G * H = \int_{-\infty}^\infty G(x, s)H(s, y) ds:$$

$$D(G * H) = (DG * H) + (G * DH).$$

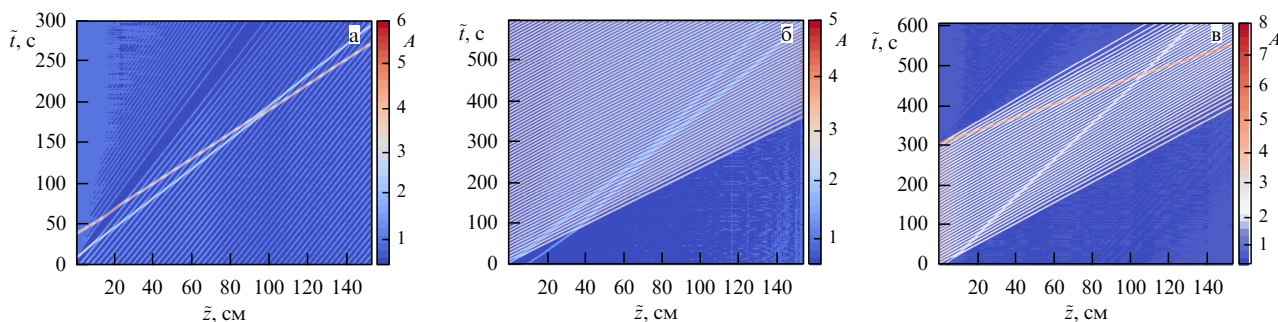


Рис. 3. (а) Рассеяние двух ярких бризеров. (б) Рассеяние двух тёмных бризеров. (в) Рассеяние яркого и тёмного бризеров.

Легко устанавливаются простейшие такие дифференциальные операторы:

$$D_t = \frac{\partial}{\partial t}, \quad D_n = \frac{\partial^n}{\partial x^n} + (-1)^{n+1} \frac{\partial^n}{\partial y^n}, \quad D_f = f(x, t) - f(y, t),$$

которые образуют базис алгебры: коммутатор двух операторов и их линейная комбинация также являются операторами дифференцирования.

Согласно теореме Шабата [12], если ядра K и F подчиняются уравнению Марченко (4), а кроме того $DF = 0$, где D какой-либо оператор из алгебры, то существует оператор \tilde{D} , такой что $\tilde{D}K = 0$. Этот факт проверяется путём действия оператора D на (4) и интегрирования по частям.

Покажем, как теорема работает для уравнения КДВ (3), которое записывается в представлении Лакса:

$$\frac{\partial L}{\partial t} = [L, A], \quad (5)$$

где

$$L(x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + u, \quad A(x) = 4 \frac{\partial^3}{\partial x^3} + 6u \frac{\partial}{\partial x} + 3u_x,$$

а u есть решение уравнения (3).

Пусть F удовлетворяет двум уравнениям

$$\begin{aligned} PF &= (L(x) - L(y))F = 0, \\ QF &= (\partial_t + A(x) + A(y))F = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

которые совместны в силу представления (5) для некоторого решения (3) $u = u_0$. Здесь $L(x)$ означает, что оператор L зависит от x и производных по x , а $L(y)$ соответственно зависит от y и производных по y , и т.д. Легко проверить, что введённые операторы P и Q являются операторами дифференцирования.

Действие P и Q на уравнение Марченко даёт следующие два дифференциальных уравнения для ядра K :

$$\tilde{P}K = 0, \quad \tilde{Q}K = 0. \quad (7)$$

Здесь $\tilde{P} = P + 2(d/dx)K(x, x)$ есть результат одевания. Совместимость этих двух уравнений приводит к тому, что $u(x) = u_0(x) + 2(d/dx)K(x, x)$ удовлетворяет уравнению КДВ, где $2(d/dx)K(x, x) = w$ — возмущение $u_0(x)$, обращающееся в нуль при $x \rightarrow \infty$. Таким образом, этот метод позволяет эффективно исследовать устойчивость любых решений с нетривиальной асимптотикой относительно любых возмущений, в том числе конечных.

Отметим, что как уравнения (6), так и (7) допускают разделение переменных по переменным x и y . В частности, после разделения переменных полученные уравнения совместны в силу представления Лакса (5).

2.2. Кноидальная волна как солитонная решётка

Кноидальная волна представляет собой стационарное периодическое решение уравнения КДВ, движущееся со скоростью v : $u(x - vt) = 2\wp(x + i\omega' - vt) + v/6$ где $\wp(x)$ — эллиптическая двойко-периодическая функция Вейерштрасса с периодами $2\omega, 2i\omega'$. Поскольку уравнение КДВ является галилеево инвариантным, то можно положить $v = 0$. В этом случае частное решение для F может быть

записано в виде

$$F(x, y, t) = C(t)\psi(x)\psi(y), \quad (8)$$

где ψ удовлетворяет уравнению Шрёдингера с потенциалом u :

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} - 2\wp(x + i\omega') \right] \psi = -E\psi. \quad (9)$$

Это уравнение известно как уравнение Ламе (см., например, [14]). Его собственные функции выражаются через функции Вейерштрасса $\sigma(x)$ и $\zeta(x)$:

$$\psi_a(x) = \frac{\sigma(x + i\omega' + a)}{\sigma(x + i\omega')\sigma(a)} \exp[\zeta(a)x + \zeta(i\omega')a], \quad (10)$$

где энергия $E = -\wp(a)$. Функции ψ_a и ψ_{-a} линейно независимы. В этом случае параметр a играет роль спектрального параметра. Из свойств функции Вейерштрасса следует, что E принимает действительные значения в комплексной плоскости параметра a на четырёх отрезках (рис. 4): два отрезка $(\omega, \omega + i\omega')$, $(i\omega', i0)$ соответствуют непрерывному спектру (две разрешённых зоны): $-\wp(\omega) \geq E \geq -\wp(\omega + i\omega')$ и $-\wp(i\omega') \geq E \geq -\wp(i0) = 0$. Два других отрезка $(i\omega', \omega + i\omega')$, $(\omega, 0)$ определяют запрещённые зоны (при этом $E(0) = -\infty!$).

Волновая функция (10), соответствующая непрерывному спектру, имеет блоховский вид с квазимпульсом $p(a) = i\omega^{-1}(\omega\zeta(a) - \zeta(\omega)a)$. При этом $p(a)$ непрерывна при переходе из одной непрерывной зоны в другую.

Согласно определению С.П. Новикова [15] решение в виде функции Вейерштрасса $u = -2\wp(x + i\omega')$ относится к так называемому однозонному потенциалу (см. также [16]).

Как было показано в [2], этот потенциал может быть представлен в виде периодической солитонной решётки:

$$u(x) = 2 \left(\frac{\zeta(i\omega')}{i\omega'} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\kappa^2}{\text{ch}^2 \kappa(x + 2n\omega)} \right), \quad (11)$$

где $\kappa = \pi/(2\omega')$. Каждый член этой суммы представляет собой солитон

$$u_s = \frac{2\kappa^2}{\text{ch}^2 \kappa(x)},$$

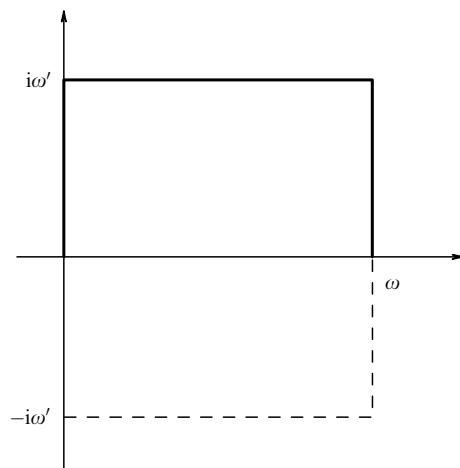


Рис. 4. Положения зон в комплексной плоскости a .

который как решение получается в пределе большого периода $\omega \rightarrow \infty$. Этот солитонный потенциал, как известно, относится к безотражательным. При этом u_s имеет только одно связанное состояние с $E_s = -\kappa^2$. С точки зрения квантовой механики качественно становится ясным, почему потенциал (11) является однозонным. Если взять два солитона u_s , отстоящих друг от друга на большом расстоянии, то уровень E_s расщепится на два. В случае периодической решётки солитонов при этих энергиях возникнет разрешённая зона вблизи $E_s = -\kappa^2$. Возникает вопрос, а почему при больших энергиях, $E \rightarrow +\infty$, отсутствуют запрещённые зоны. Причина связана с безотражательным характером односолитонного потенциала u_s . Если бы при больших энергиях потенциал u_s имел бы экспоненциально малый коэффициент отражения, то при этих энергиях возникла бы запрещённая зона. Ввиду отсутствия отражения таких зон нет. Это качественное объяснение, требующее более точного анализа. В связи с этим возникает естественное предположение: не возникнет ли двухзонный потенциал если в (11) вместо u_s взять, например, двухсолитонный потенциал? Очевидно, это справедливо, если вместо $u = -2\wp(x + i\omega')$ рассмотреть $u = -6\wp(x + i\omega')$.

Подстановка (8) в (6) даёт зависимость $C(t)$:

$$C(t) = C(0) \exp[-4\wp'(a)t].$$

Отсюда общее выражение для F будет задаваться следующим образом:

$$F(x, y, t) = \int_c \rho(a, t) \psi_a(x) \psi_a(y) da + \sum_n M_n^2(t) \psi_n(x) \psi_n^*(y), \tag{12}$$

где интегрирование соответствует непрерывному спектру, а дискретная сумма, как обычно, определяет вклад от "солитонов", для которых $\text{Im } p(a_n) > 0$. Последнее обеспечивает обнуление F при $y \rightarrow \infty$. Временное поведение коэффициентов $\rho(a, t)$ и $M_n^2(t)$ определяется временной зависимостью $C(t)$.

Заметим, что представление кноидальной волны в виде солитонной решётки даёт возможность понять многие аспекты взаимодействия решётки с внерешётчным солитоном, распространяющимся по решётке.

2.3. Солитон, как дислокация солитонной решётки

Подстановка (12) в (4) даёт общее решение для ядра $K(x, y)$ в виде

$$K(x, y) = - \int_c \rho(a, t) \phi_a(x) \psi_a(y) da - \sum_n M_n^2(t) \phi_n(x) \psi_n^*(y),$$

где функции $\phi_a(x)$ и $\phi_n(x)$ находятся из треугольного представления,

$$\phi_{a,n}(x) = \psi_{a,n}(x) + \int_x^\infty K(x, y) \psi_{a,n}(y) dy.$$

Оба набора этих функций удовлетворяют уравнению Шрёдингера (9)

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + u(x) \right] \phi = -\wp(a) \phi,$$

где $u = u_0 + w$. Функция $\phi_a(x)$ отвечает непрерывному спектру, $\phi_n(x)$ — дискретному спектру потенциала $u(x)$.

Рассмотрим простейший случай, когда отсутствует вклад от непрерывного спектра, а в дискретной сумме оставим только один член, который соответствует новому односолитонному решению. Возможны два варианта: либо a лежит на отрезке $(\omega, 0)$, т.е. соответствует нижней запрещённой зоне, или на отрезке $(i\omega', \omega + i\omega')$, отвечающей верхней запрещённой зоне. Пространственные размеры получаемых решений очевидно будут различны. В первом случае размер будет меньше размера солитона из решётки $\sim \kappa^{-1}$, а амплитуда будет соответственно больше $2\kappa^2$, что очевидно следует, если рассмотреть предел большого периода $\omega \rightarrow \infty$. Во втором случае, всё будет наоборот. Этот вывод следует непосредственно из решения уравнения Марченко:

$$u(x, t) = u_0(x) + 2 \frac{d^2}{dx^2} \ln \left(1 + M_n^2(t) \int_x^\infty |\psi_n|^2 dy \right).$$

Стоящий здесь интеграл вычисляется явно:

$$\int_x^\infty |\psi_n|^2 dy = |\psi_n|^2 \frac{\sigma(x' + 2\text{Re } a) \sigma(x') |\sigma(a)|^2}{\sigma(2\text{Re } a) \sigma(x' + a) \sigma(x' + a^*)},$$

где $x' = x + i\omega'$.

Анализ этого решения показывает (см. [2]), что $u(x, t) \rightarrow u(x + 2\text{Re } a)$ при $x \rightarrow -\infty$. Иными словами, мы имеем восстановление решётки, которая сдвигается на $2\text{Re } a$ по отношению к решётке на другом конце, при $x \rightarrow \infty$. Таким образом, односолитонное решение представляет собой дислокацию солитонной решётки. Эта дислокация является нестационарным осциллирующим объектом, её средняя скорость равна $V = -2\wp'(a) / \text{Im } p(a)$. Все характеристики этой дислокации задаются спектральным параметром a , за исключением пространственного положения самой дислокации. В зависимости от положения параметра a , лежит ли он в первой или во второй запрещённых зонах, определяется знак скорости V , т.е. дислокация двигается быстрее или медленнее кноидальной волны, что находит в полном соответствии с экспериментом [1]. Быстрые дислокации соответствуют ярким бризерам, а медленные — тёмным бризерам.

На рисунке 5, взятом из статьи [2], представлены решения в виде этих двух типов дислокаций. Для сравнения представлена зависимость кноидальной волны от x .

Взаимодействие кноидальной волны с внерешётчным солитоном, распространяющимся вдоль решётки, приводящее к появлению дислокации, имеет очень про-

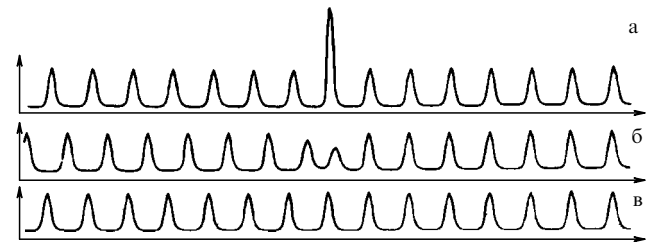


Рис. 5. (а) Солитон в виде дислокации с параметрами из первой запрещённой зоны. (б) Солитон в виде дислокации с параметрами из второй запрещённой зоны. (в) Кноидальная волна.

стое объяснение. Как известно, взаимодействие между солитонами КДВ является упругим и парным, что приводит при рассеянии только к смещению их центров масс [21] (см. также [16]). Следовательно, распространяющийся по решётке солитон после рассеяния на солитоне решётки восстановит после себя этот солитон решётки, который получит только определённый пространственный сдвиг. И так будет с каждым солитоном из решётки, сталкивающимся с внерешёточным солитоном. При этом нужно иметь в виду, что все солитоны решётки одинаковы. Таким образом, солитонная решётка будет восстанавливаться, приобретая пространственный сдвиг. Сам распространяющийся по решётке солитон как дефект решётки чувствует не только ближайший солитон из решётки, но и следующие за ним. В результате солитон как дислокация решётки будет двигаться только в среднем с постоянной скоростью, совершая небольшие осцилляции. Отметим, что такое восстановление солитонной решётки можно рассматривать как аналог явления возврата Ферми–Па́ста–Улама.

Как отмечалось выше существуют два типа дислокаций, первая соответствует спектральному параметру, лежащему в первой запрещённой зоне, а вторая — когда этот параметр принадлежит второй запрещённой зоне. В первом случае амплитуда солитона–дислокации будет больше амплитуды солитона решётки. Следовательно, благодаря свойствам солитонов КДВ дислокация первого типа будет двигаться быстрее кноидальной волны. Во втором случае амплитуда дислокации будет меньше амплитуды солитона решётки. В первом случае мы имеем бризер яркого типа, а во втором — тёмный бризер.

Также возможно получить решение в виде N солитонов–дислокаций, двигающихся по решётке [2]. Рассеяние между дислокациями также как и солитонов КДВ между собой будет упругим, поскольку каждая дислокация определяется своим спектральным параметром a , который не изменяется во времени. Изменяются только центры дислокаций. Именно такое поведение наблюдается при рассеянии ярких и тёмных бризеров между собой в эксперименте [1] (см. рис. 3). Поэтому асимптотически при $t \rightarrow \infty$ мы получаем ту же самую кноидальную волну (сдвинутую из-за взаимодействия). Отметим, что возмущение от непрерывных спектров также не может разрушить кноидальную волну, что приводит лишь к некоторому дополнительному её сдвигу.

Следует отметить, что ответ в виде дислокации на однозонном потенциале был получен после нашей работы [2] И.М. Кричевером [23] на основе редукции метода конечнозонного интегрирования, разработанного С.П. Новиковым [15] для интегрируемых уравнений, в частности для уравнения КДВ.

3. Заключительные замечания

Таким образом, эксперимент [1] полностью подтвердил теоретические предсказания работы [2]: это относится к двум типам бризеров, ярких и тёмных, которые движутся в средней с постоянной скоростью, совершая некоторые осцилляции. Каждый тип бризеров представляет собой дислокацию кноидальной волны как солитонной решётки. При этом яркие бризеры движутся быстрее кноидальной волны, а тёмные — медленнее. Разница между двумя бризерами–дислокациями связана со

спектральной задачей: яркие бризеры определяются спектральным параметром из нижней запрещённой зоны, а тёмные бризеры — спектральным параметром из верхней запрещённой зоны для интегрирующего оператора — оператора Шрёдингера. Поскольку при взаимодействии бризеров–дислокаций их спектральные параметры остаются неизменными, то их рассеяние является упругим, при котором изменяются только их пространственные центры. Можно утверждать, что кноидальная волна, как периодическая решётка солитонов, устойчива относительно любых возмущений, не только малых. То есть можно говорить, что кноидальная волна как солитонная решётка имеет ту же степень универсальности, что и отдельный солитон КДВ. Фактически в этом случае мы имеем аналог возврата Ферми–Па́ста–Улама: при любых локализованных возмущениях солитонная решётка возвращается в своё начальное состояние, испытывая определённый пространственный сдвиг как целое. Аналогичная ситуация возникает при исследовании нелинейной стадии модуляционной неустойчивости кноидальных волн в фокусирующем нелинейном уравнении Шрёдингера (НУШ)

$$i\psi_t + \psi_{xx} + 2|\psi|^2\psi = 0.$$

Простейшее решение в виде кноидальной волны получается, если искать решение НУШ в виде $\psi = \exp(i\lambda^2 t)\psi_0(x)$, предполагая $\psi_0(x)$ действительной функцией. Тогда уравнение для интенсивности $I = \psi_0^2$, после сдвига на величину $\lambda^2/3$ превращается в уравнение для эллиптической функции Вейерштрасса, для которой, как было продемонстрировано выше, справедливо представление в виде солитонной решётки (11). В виду интегрируемости НУШ [22] рассеяние солитонов также, как и в КДВ, является упругим, при котором происходит изменение не только координат центров масс солитонов, но также их фаз. Однако имеется одно важное отличие кноидальной КДВ волны от кноидальной волны в НУШ. Это видно, например, если устремить период решётки к нулю в уравнении КДВ, когда $\wp \rightarrow \text{const}$, то это приводит к постоянной скорости, которая, очевидно, исключается при переходе в соответствующую систему координат. В НУШ такой переход невозможен: соответствующее решение представляет собой конденсат, который модуляционно неустойчив. Оказывается также неустойчивым относительно малых модуляционных возмущений решение в виде кноидальной волны [19]. В нелинейном режиме, тем не менее, происходит возврат к неустойчивому решению в виде кноидальной волны, которая получает дополнительно пространственный сдвиг и сдвиг по фазе. То есть возникает возврат типа Ферми–Па́ста–Улама [20]. Это связано с тем же явлением, что и в КДВ. В НУШ солитон, распространяющийся по кноидальной солитонной решётке, также её восстанавливает, приводя к дополнительному пространственному сдвигу решётки и её повороту по фазе. В этом смысле весьма показательным является решение в виде бризера, распространяющегося по постоянному конденсату. Это решение было впервые построено Tajiri и Watanabe [24], а затем подробно изучено в [25]. Этот бризер движется по конденсату, оставляя после себя конденсат с повернутой фазой. Поскольку конденсат представляет собой сверхплотную солитонную решётку ($\omega \rightarrow 0$), то после прохождения солитона–бризера у конденсата изменяется только фаза.

Благодарности. Автор благодарит участников семинара С.П. Новикова за полезные обсуждения и Dr. Yifeng Mao за присланные экспериментальные данные. Рисунки 1–3, взятые из работы [1], публикуются с разрешения American Physical Society.

Список литературы

1. Мао Y et al. *Phys. Rev. Lett.* **131** 147201 (2023)
2. Кузнецов Е А, Михайлов А В *ЖЭТФ* **67** 1717 (1974); Kuznetsov E A, Mikhailov A V *Sov. Phys. JETP* **40** 855 (1975)
3. Мао Y, Hoefel M A *J. Fluid Mech.* **954** A14 (2023)
4. Scott D R, Stevenson D J, Whitehead J A (Jr.) *Nature* **319** 759 (1986)
5. Olson P, Christensen U J. *Geophys. Res.* **91** 6367 (1986)
6. Helfrich K R, Whitehead J A *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **51** 35 (1990)
7. Scott D R, Stevenson D J *Geophys. Res. Lett.* **11** 1161 (1984)
8. Lowman N K, Hoefel M A *Phys. Rev. E* **88** 023016 (2013)
9. Полубаринова-Кочина П Я *ДАН СССР* **47** 254 (1945)
10. Галин Л А *ДАН СССР* **47** 246 (1945)
11. Saffman P G, Taylor G *Proc. R. Soc. London A* **245** 312 (1958)
12. Шабат А Б *ДАН СССР* **211** 1310 (1973); *Sov. Math. Dokl.* **14** 1266 (1973)
13. Захаров В Е, Шабат А Б *Функц. анализ и его прил.* **8** (3) 43 (1974); Zakharov V E, Shabat A B *Funct. Anal. Appl.* **8** 226 (1974)
14. Whittaker E T, Watson G N *A Course of Modern Analysis Pt. 2*, 4th ed. (Cambridge: Cambridge Univ Press, 1962)
15. Новиков С П *Функц. анализ и его прил.* **8** (3) 54 (1974); Novikov S P *Funct. Anal. Appl.* **8** 236 (1974)
16. Захаров В Е и др. *Теория солитонов: Метод обратной задачи* (М.: Наука, 1980); Пер. на англ. яз.: Novikov S P et al. *Theory of Solitons: The Inverse Scattering Method* (New York: Consultants Bureau, 1984)
17. Кузнецов Е А *ДАН СССР* **236** 575 (1977); Kuznetsov E A *Sov. Phys. Dokl.* **22** 507 (1977)
18. Kuznetsov E A, Spector M D, Fal'kovich G E *Physica D* **10** 379 (1984)
19. Кузнецов Е А, Спектор М Д *ТМФ* **120** 222 (1999); Kuznetsov E A, Spector M D *Theor. Math. Phys.* **120** 997 (1999)
20. Kuznetsov E A *Письма в ЖЭТФ* **105** 108 (2017); *JETP Lett.* **105** 125 (2017)
21. Gardner C S et al. *Phys. Rev. Lett.* **19** 1095 (1967)
22. Захаров В Е, Шабат А Б *ЖЭТФ* **61** 569 (1971); Zakharov V E, Shabat A B *Sov. Phys. JETP* **34** 62 (1972)
23. Кричевер И М *Функц. анализ и его прил.* **9** (2) 77 (1975); Krivever I M *Funct. Anal. Appl.* **9** 161 (1975)
24. Tajiri M, Watanabe Y *Phys. Rev. E* **57** 3510 (1998)
25. Zakharov V E, Gelash A A *Phys. Rev. Lett.* **111** 054101 (2013)

Dislocations of soliton lattices: experiment and theory

E.A. Kuznetsov

⁽¹⁾ *Lebedev Physical Institute, Russian Academy of Sciences, Leninskii prosp. 53, 119991 Moscow, Russian Federation*

⁽²⁾ *Landau Institute for Theoretical Physics, Russian Academy of Sciences, ul. Kosygina 2, 119334 Moscow, Russian Federation*

E-mail: kuznetso@itp.ac.ru, kuznetsoeva@lebedev.ru

The results of recent experiments [1] on observing soliton lattices and their dislocations in vertical cylindrical channels filled with immiscible fluids with strongly different viscosities and but slightly different densities are discussed. The less viscous, lower-density fluid fills the central region of the cylinder. Injecting a light fluid from below generates nonlinear cnoidal waves at the interface between the fluids, which have the appearance of soliton lattices. Two types of lattice dislocations are observed, the interaction between which is elastic. This experimental study fully confirms the theory of cnoidal waves and their dislocations for the KDV equation, which was developed 50 years ago and published in *JETP* [2].

Keywords: breathers, dislocations, soliton, cnoidal wave, dressing procedure, KDV equation, Fermi–Pasta–Ulam recurrence

PACS numbers: 05.45.Yv, **47.10. –g**, **47.35. –i**

Bibliography — 25 references

Received 25 March 2026

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **196** (6) 659–665 (2026)

Physics – Uspekhi **69** (6) (2026)

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.2026.03.040111>

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNe.2026.03.040111>