

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

От эллипсов Кеплера — к R-тороидам

Б.П. Кондратьев

Дан обзор новых направлений в современной небесной механике. Отправной точкой является кольцо Гаусса, гравитационный потенциал которого получен в аналитическом виде. Вместо оскулирующих кеплеровских элементов вводится набор новых переменных: это векторы Лапласа и Гамильтона, а также вектор орбитального углового момента тела. В линейном приближении получены уравнения эволюции в новых переменных, заменяющие классические уравнения Лагранжа. Метод тестирован на экзосистеме HD 206893. Рассматривается проблема конфайнмента колец вокруг малых небесных тел. Излагаются два новых подхода, основанные на двумерных (R-диск) и трёхмерных (R-тороид) обобщениях прецессирующих колец Гаусса. Методы проверены на решении задач по динамике звёздных колец в Галактике и вековой эволюции орбит в различных системах экзопланет.

Ключевые слова: эллипсы Кеплера, кольцо Гаусса и его потенциал, векторы ориентации орбит, конфайнмент колец вокруг малых небесных тел, прецессия колец Гаусса, модели R-кольца и R-тороида, карликовая планета Хаумеа, двупланетные задачи, циркумбинарные экзосистемы

PACS numbers: 02.30.Em, 95.10.Ce, 96.15.De, 96.30.Wr, **97.82.** – jDOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.2025.09.040024>

Содержание

1. Введение (422).
 2. Закон обратных квадратов и задача двух тел — фундамент небесной механики (423).
 3. Оскулирующие эллипсы Лагранжа и теория возмущений (423).
 4. Интеграл движения Лапласа и его применение (423).
 - 4.1. Два способа постановки двупланетных задач для внесолнечных систем.
 - 4.2. Векторы ориентации орбиты.
 - 4.3. Уравнения вековой эволюции векторов орбитальной ориентации.
 - 4.4. Решение уравнений эволюции.
 - 4.5. Применение метода к двупланетной экзосистеме HD 206893.
 5. Кольцо Гаусса и его потенциал (425).
 - 5.1. Потенциал кольца Гаусса.
 - 5.2. Системы двух колец Гаусса. Взаимная энергия колец.
 6. Проблема конфайнмента колец вокруг малых тел Солнечной системы (428).
 - 6.1. Кольца вокруг малых тел.
 - 6.2. Уравнения эволюции двух колец в коллективных переменных в центральном поле.
 - 6.3. Условие конфайнмента колец.
 - 6.4. Ограничение на массу кольца Хаумеа.
 7. Двумерное обобщение кольца Гаусса — модель R-диска (429).
 - 7.1. Структура R-кольца.
 - 7.2. Потенциал R-кольца.
 - 7.3. Применение модели R-кольца.
 8. 3D обобщение прецессирующего кольца Гаусса (модель R-тороида) (431).
 - 8.1. Фигура R-тороида.
 - 8.2. Распределение плотности и потенциал R-тороида.
 - 8.3. Взаимная энергия R-тороида и внешнего кольца Гаусса. Уравнения вековой эволюции оскулирующих орбит.
 9. Применение модели R-тороида (433).
 - 9.1. Ограничение на применение модели R-тороида.
 - 9.2. Двупланетная задача (звезда + две планеты).
 - 9.3. Отношение периодов узловой и апсидальной прецессий.
 - 9.4. Вековая эволюция экзопланетных систем. Метод трёх R-тороидов.
 10. Заключение (434).
- Список литературы (435).

1. Введение

Наука о движении планет прошла сложный путь от астрологических манипуляций жрецов до остроумного кинематического метода древних астрономов. Гиппарх, Евдокс, Птолемей разработали теорию эпициклов, открыли прецессию оси вращения Земли и вариацию угла долготы в движении Луны. Упомянем ещё факт, связывающий две эпохи: оказывается, точка экванта у Птолемея (из которой движение планеты видно равномерным) есть не что иное, как точка второго (пустого) фокуса в кеплеровском эллипсе.

Теория круговых эпициклов оставалась ядром знаний по астрономии более двадцати веков. Но три закона Кеплера полностью изменили картину движения планет. На смену сложным умозрительным схемам, основанным на комбинациях равномерных движений по кругам, пришла простая и физически ясная кинематика движения планет по эллипсам с Солнцем в одном из

Б.П. Кондратьев

(1) Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Государственный астрономический институт им. П.К. Штернберга, Университетский просп. 13, 119234 Москва, Российская Федерация

(2) Главная (Пулковская) астрономическая обсерватория РАН, Пулковское шоссе 65/1, 196140 г. Санкт-Петербург, Российская Федерация

E-mail: work@boris-kondratyev.ru

Статья поступила 17 августа 2025 г.

фокусов. И хотя переворот в астрономии, совершённый Коперником и его последователями (Бруно, Кеплер, Галилей) ещё не выводил за рамки кинематического подхода, фундамент был заложен: эллипсы Кеплера и сегодня — тест на звание *Homo Sapiens!*

С появлением в трудах Ньютона и Эйлера общего динамического метода, в небесной механике появилось и стало оттачиваться искусство создания моделей на базе дифференциальных уравнений движения. Постепенно в небесной механике формировалось то особое поле мысли, вне которого любое открытие не может быть совершено, ни правильно понято.

Возвращаясь к главной теме, подчеркнём, что небесная механика (более широко — "динамическая астрономия") изучает почти всё, что движется и вращается в Космосе: от пылинок — до комет и астероидов, от ИСЗ, от планет и их спутников — до звёзд и галактик. Развитие небесной механики [1–5] шло через практику разнообразных приложений, и диапазон задач в ней исключительно широкий. Важным стимулом для развития астрономии стало открытие экзопланетных систем у других звёзд. Это расширило кругозор исследователей и позволило по-новому взглянуть на многие задачи динамической астрономии.

2. Закон обратных квадратов и задача двух тел — фундамент небесной механики

Движение двух тел в этой задаче описывается системой дифференциальных уравнений [3]

$$\ddot{\mathbf{r}} + \kappa^2 \frac{\mathbf{r}}{r^3} = 0, \quad \kappa^2 = G(M + m). \quad (2.1)$$

В этой задаче пять независимых первых интегралов движения:

$$\mathbf{V}^2 = \dot{\mathbf{r}}^2 = \frac{2\kappa^2}{r} + h \text{ — интеграл энергии,} \quad (2.2)$$

$$\mathbf{C} = [\mathbf{rV}] \text{ — векторный интеграл площадей,} \quad (2.3)$$

$$\mathbf{L} = [\mathbf{VC}] - \kappa^2 \frac{\mathbf{r}}{r} \text{ — векторный интеграл Лапласа (+ Рунге-Ленца),} \quad (2.4)$$

Есть два дополнительных соотношения

$$[\mathbf{LC}] = 0, \quad \mathbf{L}^2 = \kappa^4 + h\mathbf{C}^2. \quad (2.5)$$

В математическом плане задача двух тел решена, но в астрономическом аспекте широкий простор для творчества остаётся. Задача двух тел [2, 3] — это не только неизменный маяк в безбрежном море возмущённого движения, это и огромный комплекс задач динамической астрономии: здесь прослеживается цепочка идей от кеплеровских орбит — до оскулирующих эллипсов Лагранжа, от колец Гаусса — до моделей, построенных на основе прецессирующих аналогов этих колец.

3. Оскулирующие эллипсы Лагранжа и теория возмущений

К началу XIX века эстафета от эллипсов Кеплера переходит к оскулирующим эллипсам Лагранжа, и на их основе усилиями многих учёных (Лаплас, Делоне, Энке, Ганзен, Хилл, Коуэлл) зарождается теория возмущений

[2, 3, 6]. С помощью пяти уравнений Лагранжа для оскулирующих эллипсов [2, 3] (a — большая полуось, e — эксцентриситет, i — наклон, ω — аргумент перигентра, Ω — долгота восходящего узла, R — функция возмущений)

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{2}{n_0 a} \frac{\partial R}{\partial M_0}, \quad \frac{de}{dt} = \frac{1-e^2}{en_0 a^2} \frac{\partial R}{\partial M_0} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{en_0 a^2} \frac{\partial R}{\partial \omega}, \\ \frac{di}{dt} &= \frac{\cos i}{n_0 a^2 \sqrt{1-e^2} \sin(i)} \frac{\partial R}{\partial \omega} - \frac{1}{n_0 a^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial R}{\partial \Omega}, \\ \frac{d\omega}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{en_0 a^2} \frac{\partial R}{\partial e} - \cos i \frac{\partial \Omega}{dt}, \\ \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{1}{n_0 a^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial R}{\partial i} \end{aligned} \quad (3.1)$$

стало возможным находить ответы на самые сложные вопросы небесной механики, когда законы Кеплера выполняются лишь приближенно. Фактически, теория возмущений — это идея о том, что можно изучать что-то неизвестное, начиная с известной величины. Один из основных её приёмов: в качестве исходной (промежуточной, или опорной) орбиты берут эллипс, а расхождения между реальной и опорной орбитами раскладывают в ряд. Но не всегда эти ряды работают (из-за присутствия членов с малыми знаменателями). В этой ситуации Ганзен остроумно предложил идею: за опорную орбиту брать не эллипс, а более сложную кривую: тогда ряды для отклонений реальной орбиты от принятой опорной не будут содержать неудобные члены.

В теории возмущений широко применяются методы, основанные на усреднении орбит по "быстрым" переменным. Наш обзор рассматривает разные варианты методов усреднения.

4. Интеграл движения Лапласа и его применение

Прежде всего, модуль векторного интеграла (2.4) равен (с точностью до κ^2) эксцентриситету эллипса Кеплера [7]

$$L = \kappa^2 e. \quad (4.1)$$

Направлен вектор Лапласа \mathbf{L} в перигентр орбиты. Аналогично вводится вспомогательный вектор Гамильтона, направленный вдоль малой оси эллипса и имеющий тот же модуль $H = \kappa^2 e$.

Но вектор Лапласа есть интеграл движения только для силы обратных квадратов. На практике же всегда есть дополнительные силы (возмущения). Если возмущающая сила также центральная, вектор Лапласа медленно вращается и происходит апсидальная прецессия орбиты. Пример: эффект ОТО — возмущение по закону обратных кубов приводит к прецессии орбиты Меркурия $43''$ за сто лет [8].

Но в большинстве случаев (например, в двухпланетной задаче) силы возмущения планет на орбитах не являются центральными, и тогда динамика вектора Лапласа становится более сложной.

Опираясь на вектор Лапласа и вектор углового момента, ниже намечен новый путь для изучения экзопланет с произвольной ориентацией орбит относительно картинной плоскости наблюдателя.

4.1. Два способа постановки двухпланетных задач для внесолнечных систем

С открытием планет у других звёзд [9], новые веяния коснулись и двухпланетной задачи. Здесь будем говорить об экзопланетных системах, для которых выполняются условия *малости эксцентриситетов* и *угла взаимного наклона орбит*. Но для экзопланет есть ещё один важный геометрический параметр — угол ориентации орбит относительно картинной плоскости наблюдателя (см, например, [10]). В настоящее время элементы орбит для подавляющего большинства экзопланет находят транзитным методом, когда наблюдатель видит орбиты "почти с ребра". Однако вокруг звёзд могут существовать и орбиты, более раскрытые по отношению к лучу зрения наблюдателя, поэтому при анализе наблюдательных данных приходится считаться с эффектом селекции: в подавляющем большинстве именно орбиты, видимые почти с "ребра" и представлены в базе данных на сервисе NASA Exoplanet Archive [9].

Но с усовершенствованием методов наблюдений будут открыты (и первые примеры уже есть, см. [11]) такие двухпланетные системы, у которых *угол наклона орбит к картинной плоскости не обязательно близок к $\pi/2$, а может быть произвольным*. И тогда неизбежно встаёт вопрос: каким методом изучать вековую эволюцию системы из двух экзопланет с *произвольным углом наклона* относительно картинной плоскости наблюдателя? Заметим, в литературе иногда обсуждаются отдельные примеры двухпланетных систем с большим углом взаимного наклона орбит к картинной плоскости [12], но для таких систем не выполняется дополнительное условие квази-компланарности орбит.

С теоретической точки зрения ставить и изучать двухпланетные задачи для внесолнечных систем можно двумя способами:

1. Либо вначале делать *координатное преобразование элементов орбит* от картинной плоскости к плоскости Лапласа (или любой другой главной плоскости), находить для орбит классическое решение относительно выбранной главной плоскости, а затем для этого решения выполнить обратное преобразование координат к картинной плоскости наблюдателя;

2. Либо выводить *непосредственно* сами уравнения эволюции элементов орбит относительно картинной плоскости, и решать уже их. Второй способ привлекателен тем, что позволяет значительно сократить объём численных расчётов и теоретических выкладок.

Приведём пример постановки задачи для способа 2.

4.2. Векторы ориентации орбиты

Рассмотрим направляющие единичные векторы планетных орбит [2, 3]: первый из них — это вектор \mathbf{P}_j ($j = 1, 2$), который направлен вдоль главной оси эллипса к периче-
нтру

$$\mathbf{P}_j = \begin{pmatrix} P_{jx} \\ P_{jy} \\ P_{jz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega_j \cos \Omega_j - \sin \omega_j \sin \Omega_j \cos i_j \\ \cos \omega_j \sin \Omega_j + \sin \omega_j \cos \Omega_j \cos i_j \\ \sin \omega_j \sin i_j \end{pmatrix}, \quad (4.2)$$

второй вектор

$$\mathbf{Q}_j = \begin{pmatrix} Q_{jx} \\ Q_{jy} \\ Q_{jz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \omega_j \cos \Omega_j - \cos \omega_j \sin \Omega_j \cos i_j \\ -\sin \omega_j \sin \Omega_j + \cos \omega_j \cos \Omega_j \cos i_j \\ \cos \omega_j \sin i_j \end{pmatrix}, \quad (4.3)$$

перпендикулярен вектору \mathbf{P}_j лежит в плоскости эллипса и направлен вдоль его малой оси; третий вектор

$$\mathbf{R}_j = \begin{pmatrix} R_{jx} \\ R_{jy} \\ R_{jz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin i_j \sin \Omega_j \\ -\sin i_j \cos \Omega_j \\ \cos i_j \end{pmatrix}, \quad (4.4)$$

перпендикулярен плоскости орбиты.

На основе единичных векторов (4.2)–(4.4) построим систему из трёх векторов, определяющих ориентацию эллиптической орбиты. Во-первых, это вектор Лапласа $\mathbf{L}_j = e_j \mathbf{P}_j$ модуль которого равен эксцентриситету орбиты. Второй вектор $\mathbf{H}_j = e_j \mathbf{Q}_j$ (вектор Гамильтона) перпендикулярен к \mathbf{L}_j и имеет тот же модуль. Третий вектор $\mathbf{I}_j = [1 - e_j^2]^{1/2} \mathbf{R}_j$ — вектор удельного орбитального момента импульса. Вектор \mathbf{I}_j перпендикулярен векторам \mathbf{L}_j и \mathbf{H}_j а значит, и к плоскости орбиты.

4.3. Уравнения вековой эволюции векторов орбитальной ориентации

Для векторов двух орбит \mathbf{L}_j , \mathbf{H}_j и \mathbf{I}_j , используя уравнения Лагранжа (3.1), в линейном приближении находим дифференциальные уравнения движения [13]:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{L}_1}{dt} &= A_1 \mathbf{H}_1 - B_1 \mathbf{H}_2, & \frac{d\mathbf{H}_1}{dt} &= -(A_1 \mathbf{L}_1 - B_1 \mathbf{L}_2), \\ \frac{d\mathbf{I}_1}{dt} &= A_1 [\mathbf{I}_1 \times \mathbf{I}_2]. \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{L}_2}{dt} &= A_2 \mathbf{H}_2 - B_2 \mathbf{H}_1, & \frac{d\mathbf{H}_2}{dt} &= -(A_2 \mathbf{L}_2 - B_2 \mathbf{L}_1), \\ \frac{d\mathbf{I}_2}{dt} &= A_2 [\mathbf{I}_2 \times \mathbf{I}_1]. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Уравнения (4.5) и (4.6) представляют собой две независимые группы дифференциальных уравнений. Здесь используются следующие обозначения для коэффициентов:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{n_1 m_2}{2M} A, & B_1 &= \frac{n_1 m_2}{2M} B, \\ A_2 &= \frac{n_2 m_1 \alpha}{2M} A, & B_2 &= \frac{n_2 m_1 \alpha}{2M} B, \end{aligned} \quad (4.7)$$

имеющие размерность частот колебаний, где

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{\pi(1+\alpha)} \left[\frac{1+\alpha^2}{(1-\alpha)^2} E\left(\frac{2\sqrt{\alpha}}{1+\alpha}\right) - K\left(\frac{2\sqrt{\alpha}}{1+\alpha}\right) \right], \\ B &= \frac{2}{\pi\alpha(1+\alpha)} \left[\frac{1-\alpha^2+\alpha^4}{(1-\alpha)^2} E\left(\frac{2\sqrt{\alpha}}{1+\alpha}\right) - \right. \\ &\quad \left. - (1+\alpha^2) K\left(\frac{2\sqrt{\alpha}}{1+\alpha}\right) \right], \quad \alpha = \frac{a_2}{a_1}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

4.4. Решение уравнений эволюции

Решения линейных уравнений (4.5) и (4.6) имеют вид [13]

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_1^{(1)}(t) &= D(\mathbf{C}_1^{(1)} \cos(g_1 t) + \mathbf{C}_2^{(1)} \sin(g_1 t)) + \\ &\quad + B_1(\mathbf{C}_3^{(1)} \cos(g_2 t) + \mathbf{C}_4^{(1)} \sin(g_2 t)), \\ \mathbf{L}_2^{(1)}(t) &= B_2(\mathbf{C}_1^{(1)} \cos(g_1 t) + \mathbf{C}_2^{(1)} \sin(g_1 t)) - \\ &\quad - D(\mathbf{C}_3^{(1)} \cos(g_2 t) + \mathbf{C}_4^{(1)} \sin(g_2 t)), \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_1^{(1)}(t) &= D(-\mathbf{C}_1^{(1)} \sin(g_1 t) + \mathbf{C}_2^{(1)} \cos(g_1 t)) + \\ &\quad + B_1(-\mathbf{C}_3^{(1)} \sin(g_2 t) + \mathbf{C}_4^{(1)} \cos(g_2 t)), \\ \mathbf{H}_2^{(1)}(t) &= B_2(-\mathbf{C}_1^{(1)} \sin(g_1 t) + \mathbf{C}_2^{(1)} \cos(g_1 t)) - \\ &\quad - D(-\mathbf{C}_3^{(1)} \sin(g_2 t) + \mathbf{C}_4^{(1)} \cos(g_2 t)), \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_1^{(1)}(t) &= \mathbf{C}_1^0 + A_1(\mathbf{C}_5^{(1)} \cos(gt) + \mathbf{C}_6^{(1)} \sin(gt)), \\ \mathbf{I}_2^{(1)}(t) &= \mathbf{C}_2^0 - A_2(\mathbf{C}_5^{(1)} \cos(gt) + \mathbf{C}_6^{(1)} \sin(gt)). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Решения уравнений эволюции включают в себя коэффициенты

$$\begin{aligned} K^e &= (A_1 - A_2)^2 + 4B_1 B_2, \quad \kappa = \sqrt{K^e}, \quad \sigma = A_1 + A_2, \\ g_1 &= \frac{\sigma - \kappa}{2}, \quad g_2 = \frac{\sigma + \kappa}{2}, \\ D &= \frac{A_2 - A_1 + \kappa}{2} = A_2 - g_1 = -(A_1 - g_2), \\ D^2 + B_1 B_2 &= \frac{\kappa^2 + (A_2 - A_1)\kappa}{2} = \kappa D, \\ \mathbf{C}_1^{(1)} &= \frac{D\mathbf{L}_{10} - B_1\mathbf{L}_{20}}{\kappa D}, \quad \mathbf{C}_2^{(1)} = \frac{D\mathbf{H}_{10} + B_1\mathbf{H}_{20}}{\kappa D}, \\ \mathbf{C}_3^{(1)} &= -\frac{D\mathbf{L}_{20} - B_2\mathbf{L}_{10}}{\kappa D}, \quad \mathbf{C}_4^{(1)} = -\frac{D\mathbf{H}_{20} + B_2\mathbf{H}_{10}}{\kappa D}, \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$g = \sqrt{A_1^2(\mathbf{l}_{10} \cdot \mathbf{l}_{10}) + A_2^2(\mathbf{l}_{20} \cdot \mathbf{l}_{20}) + 2A_1 A_2(\mathbf{l}_{10} \cdot \mathbf{l}_{20})}. \quad (4.13)$$

4.5. Применение метода к двухпланетной экзосистеме HD 206893

Система HD206893 интересна тем, что ориентация орбит в ней существенно (см. в табл. 1, угол наклона i) отличается от ориентации орбит экзопланет, наблюдаемых транзитным методом. Данные из статьи [11] представлены в табл. 1.

Решения для компонент вектора Лапласа и удельного орбитального момента импульса показаны на рис. 1 и 2.

Графики годографа вектора Лапласа см. на рис. 3.

Эволюция орбитальных элементов, рассчитанных на основе решений (4.9)–(4.12), показана на рис. 4.

Периоды колебаний в системе HD 206893 показаны в табл. 2.

5. Кольцо Гаусса и его потенциал

От эллипсов Кеплера берёт начало и другое направление — *кольца Гаусса*. В 1818 г. Гаусс для расчёта вековых возмущений предложил усреднять движение возмущающей массы m по эллипсу орбиты

$$r = \frac{p}{1 + e \cos v}, \quad p = a(1 - e^2), \quad (5.1)$$

где v — угол истинной аномалии. При усреднении образуется материальное эллиптическое кольцо с плотностью тем большей, чем дольше в своём движении на-

Таблица 1. Данные из статьи [11] по внесолнечной системе HD 206893. Масса центральной звезды составляет $M_s = 1,32^{+0,07}_{-0,05} M_\odot$, компонент b — коричневый карлик, компонент c — горячий юпитер. Решения для компонент вектора Лапласа и удельного орбитального момента импульса показаны на рисунках 1 и 2 [13]

Planet	M, M_{Jup}	$a, \text{a.e.}$	e	$i, \text{град}$	$\omega, \text{град}$	$\Omega, \text{град}$
HD206893c	$12,7^{+1,2}_{-1,0}$	$3,53^{+0,08}_{-0,06}$	$0,41^{+0,03}_{-0,03}$	$150,9^{+2,9}_{-3,0}$	46^{+8}_{-8}	$89,1^{+6,9}_{-7,0}$
HD206893b	$28,0^{+2,2}_{-2,1}$	$9,6^{+0,4}_{-0,3}$	$0,14^{+0,05}_{-0,05}$	$146,8^{+3,3}_{-3,9}$	183^{+10}_{-10}	$73,5^{+5,0}_{-3,4}$

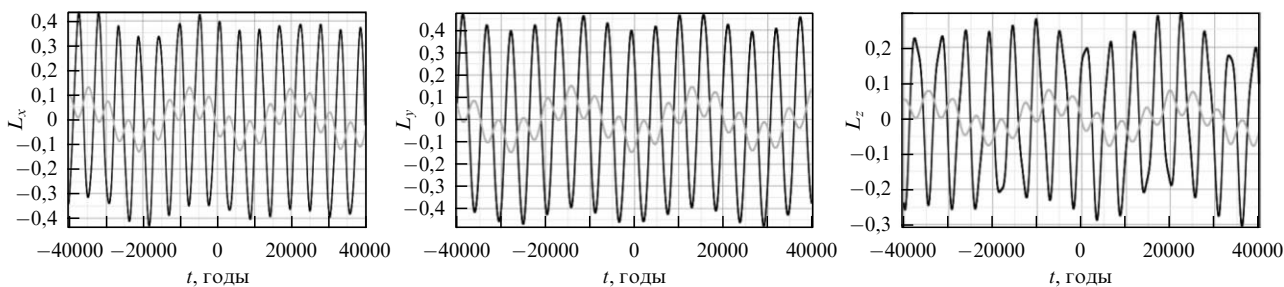


Рис. 1. Колебания компонент векторов Лапласа на интервале 80 тыс. лет для компонент системы HD 206893 (b — серым цветом, c — чёрным цветом).

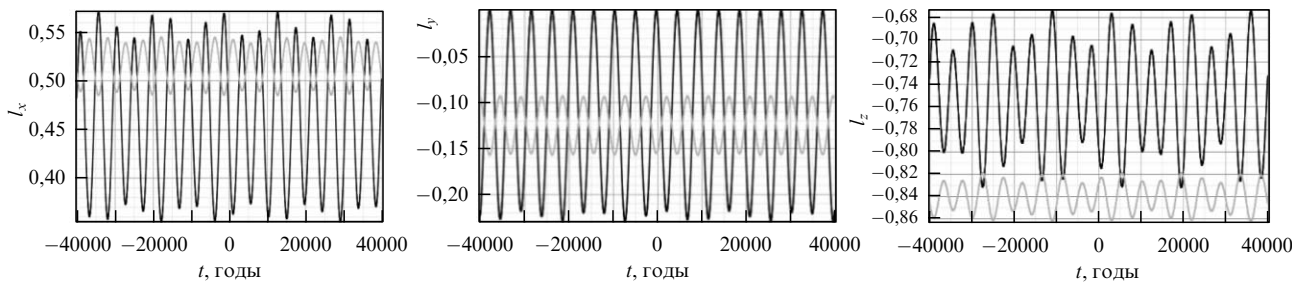


Рис. 2. Колебания компонент удельных орбитальных угловых моментов на интервале 80 тыс. лет для компонент системы HD 206893 (b — серым цветом, c — чёрным цветом).

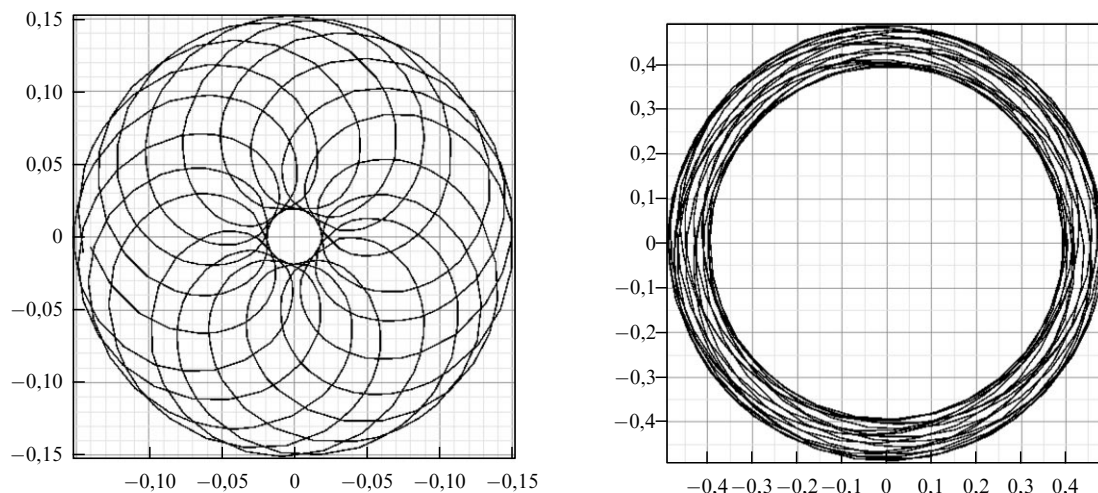


Рис. 3. Годограф векторов Лапласа относительно линии узлов в плоскости, перпендикулярной орбитальному моменту импульса соответствующей орбиты, для компонентов системы HD 206893 (b — слева, c — справа) на интервале 114 тыс. лет.

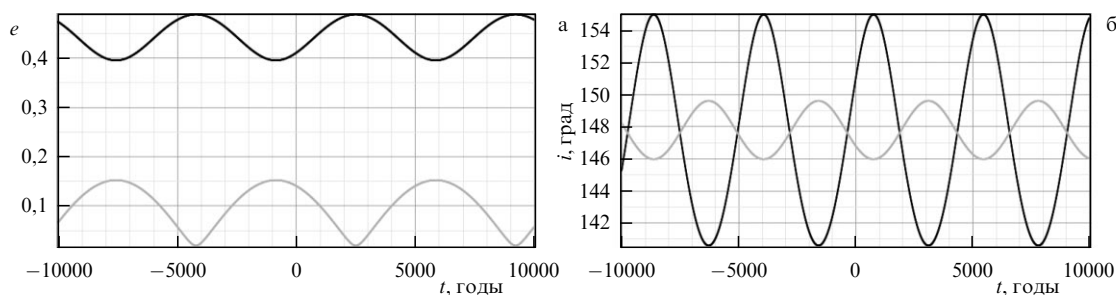


Рис. 4. Эволюция эксцентриситетов (а) и наклонений (б) орбит компонентов в HD 206893.

Таблица 2. Периоды основных частот колебаний в двухпланетной задаче для системы HD 206893

T_{g1} , лет	T_{g2} , лет	T_k , лет	T_σ , лет	T_g , лет
28400	5400	6700	4600	4700

ходится тело на соответствующей дуге (см. рис. 5). Элемент массы на кольце в угловом интервале dv равен

$$dm = m \frac{(1 - e^2)^{3/2}}{2\pi} \frac{dv}{(1 + e \cos v)^2}.$$

В итоге, задача вычисления возмущений в первом порядке сводится к нахождению гравитационного влияния кольца Гаусса на внешнее тело.

5.1. Потенциал кольца Гаусса

Центральное значение имеет знание потенциала кольца Гаусса. В интегральном виде этот потенциал равен

$$\varphi_r(x) = \frac{mG(1 - e^2)^{3/2}}{2\pi} \times \int_0^{2\pi} \frac{dv}{(1 + e \cos v) \sqrt{A_0 + A_1 \cos v + A_2 \sin v + A_3 \cos^2 v + A_4 \sin v \cos v}} \quad (5.2)$$

(коэффициенты A_i зависят от координат пробной точки). В общем виде этот интеграл взять не удаётся, Гаусс потенциал кольца также не нашёл. Однако сейчас этот потенциал в аналитическом виде известен, и получен он с

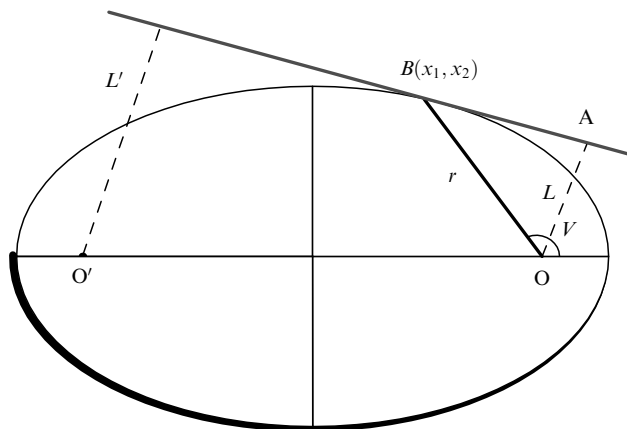


Рис. 5. Вспомогательные геометрические элементы для построения плоского гомеоида с центром гомотетии в фокусе O. Нижняя половина кольца показывает его неоднородность. Обозначения в тексте.

помощью новых методов теории потенциала [14]. Секрет в том, что кольцо Гаусса удаётся представить как обобщённый двумерный гомотетический слой.

Напомним, что классический плоский гомеоид — это оболочка, ограниченная двумя concentрическими подобными эллипсами и центр гомотетии находится в центре эллипса. В обобщённом гомеоиде центр гомотетии находится в фокусе эллипса O (рис. 5).

По свойству обобщённого гомеоида, толщина слоя в точке $B(x_1, x_2)$ должна быть пропорциональна длине отрезка $OA = L$ равного кратчайшему расстоянию из точки фокуса до касательной в точке $B(x_1, x_2)$. Такой слой, как

можно показать, действительно задаётся толщиной

$$d\tau = \frac{dm}{m} = \frac{(1 - e^2)^{3/2}}{2\pi} \frac{dv}{(1 + e \cos v)^2}, \quad (5.3)$$

характеризующей именно кольцо Гаусса. Кроме того, при таком подходе мы приходим к ещё одному выводу: потенциал кольца Гаусса φ_r оказывается связан с потенциалом исходного однородного эллиптического диска φ_d уравнением [14]

$$\begin{aligned} \varphi_r(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2} (\varphi_d(\mathbf{x}) - \mathbf{x}\nabla\varphi_d) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\varphi_d(\mathbf{x}) - x_1 \frac{\partial\varphi_d}{\partial x_1} - x_2 \frac{\partial\varphi_d}{\partial x_2} - x_3 \frac{\partial\varphi_d}{\partial x_3} \right). \end{aligned} \quad (5.4)$$

Потенциал однородного эллиптического диска φ_d получен у нас через потенциал неоднородного эллипсоида φ_{el} с распределением плотности

$$\begin{aligned} r &= \frac{r_0}{\sqrt{1 - m^2}}, \quad m^2 = \frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2}, \quad 0 \leq m \leq 1, \\ \varphi_{el} &= 2\pi G \rho_0 a_1 a_2 a_3 \times \\ &\times \int_{\lambda}^{\infty} \frac{\sqrt{1 - x_1^2/(a_1^2 + u) - x_2^2/(a_2^2 + u) - x_3^2/(a_3^2 + u)}}{\sqrt{(a_1^2 + u)(a_2^2 + u)(a_3^2 + u)}} du. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Это установлено специальным методом софокусного "уминания" массы по гиперболам, когда из неоднородного трёхосного эллипсоида получается однородный эллиптический диск. Фактически, данный неоднородный трёхосный эллипсоид и однородный эллиптический диск оказываются эквигравитирующими (имеющими одинаковые потенциалы) во внешнем пространстве. В итоге, через потенциал эллипсоида (5.5), равный [14]

$$\begin{aligned} \varphi_{el}(\mathbf{x}) = \varphi_d(\mathbf{x}) &= \frac{4G\sigma a_1 a_2}{\sqrt{\lambda - v}} \left\{ \frac{x_1 + ea_1}{a_1^2 + v} \Pi \left[-\frac{a_1^2 + v}{\lambda - v}, k \right] + \right. \\ &+ \frac{x_2^2}{a_2^2 + v} \Pi \left[-\frac{a_2^2 + v}{\lambda - v}, k \right] + \left. \frac{x_3^2}{v} \Pi \left[-\frac{v}{\lambda - v}, k \right] \right\}, \\ k &= \sqrt{\frac{\mu - v}{\lambda - v}} \leq 1, \end{aligned} \quad (5.6)$$

находим и потенциал однородного эллиптического диска. Подставляя выражение (5.6) в правую часть формулы (5.4), в итоге получим потенциал кольца Гаусса в аналитическом виде [15]

$$\begin{aligned} \varphi_{ring}(x_1, x_2, x_3) &= \frac{2Gm}{\pi\sqrt{\lambda - v}} \times \\ &\times \left\{ K(k) + \frac{ea(x_1 + ea)}{a^2 + v} [\Pi(n, k) - K(k)] \right\}, \\ n &= \frac{a^2 + v}{v - \lambda}, \quad k = \sqrt{\frac{\mu - v}{\lambda - v}} \leq 1. \end{aligned} \quad (5.7)$$

где m — масса кольца, a и b — его большая и малая полуоси, и e — эксцентриситет. $K(k)$ и $\Pi(n, k)$ — стандартные полные эллиптические интегралы Лежандра первого и третьего рода. На рисунке 7 показаны эквипотенциалы кольца Гаусса.

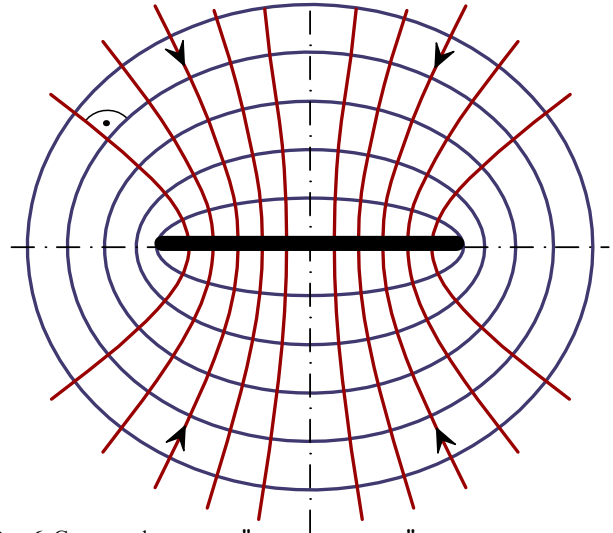


Рис. 6. Схема софокусного "уминания массы" неоднородного эллипсоида по гиперболам, превращающего эллипсоид в однородный эллиптический диск (показан жирным отрезком).

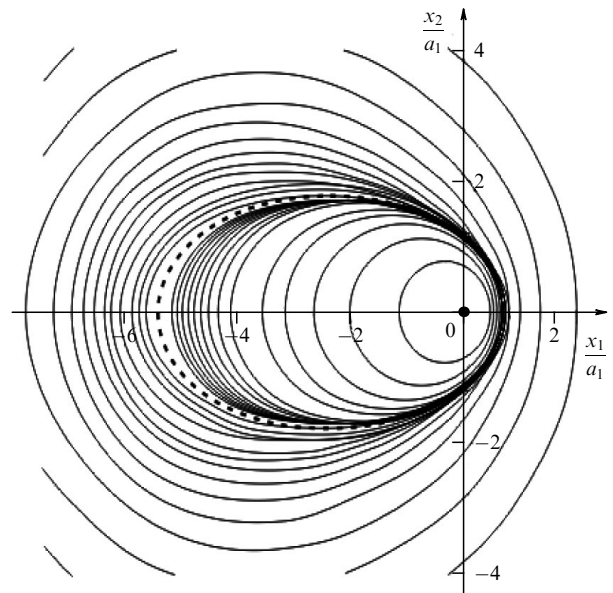


Рис. 7. Внутренние и внешние эквипотенциалы в плоскости кольца Гаусса, показанного жирными штрихами. В точке правого фокуса (центр гомететии, отмеченный жирной точкой) потенциал имеет минимум $\varphi(0, 0, 0) = 2Gm/a$ внутри кольца. На самом кольце потенциал логарифмически расходится. (По статье [15].)

5.2. Системы двух колец Гаусса.

Взаимная энергия колец

С развитием метода усреднений стали изучать системы колец Гаусса. В ГАИШ развит новый подход к изучению долгопериодических и вековых возмущений в некоторых задачах небесной механики [16,17]. В этом подходе мы опираемся не на стандартную возмущающую функцию Лагранжа R , а на взаимную потенциальную энергию колец Гаусса W_{mut}

$$\begin{aligned} W_{mut} &= -\frac{Gm_1 m_2 (1 - e_1^2)^{3/2} (1 - e_2^2)^{3/2}}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{r_{12}} \times \\ &\times \frac{dv_1}{(1 + e_1 \cos v_1)^2} \frac{dv_2}{(1 + e_2 \cos v_2)^2}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Полагая эксцентриситеты колец (e_1, e_2) и угол их взаимного наклона Δi малыми, разложим подынтегральное

выражение в (5.8) по степеням этих малых параметров в тройной ряд Тейлора, ограничив ряд членами до четвёртой степени включительно. После интегрирования, выражение взаимной энергии можно представить в виде [16]

$$W_{\text{mut}} = -\frac{Gm_1m_2}{\pi a_1} \left\{ W_{000} + W_{200}(e_1^2 + e_2^2 - \Delta i^2) + W_{110} e_1 e_2 + W_{400} e_1^4 + W_{310} e_1^3 e_2 + W_{220} e_1^2 e_2^2 + W_{130} e_1 e_2^3 + W_{040} e_2^4 + \Delta i^2 [W_{202} e_1^2 + W_{022} e_2^2 + W_{112} e_1 e_2] + W_{004} \Delta i^4 \right\}. \quad (5.9)$$

Коэффициенты W_{klm} , которые входят в выражение для взаимной энергии колец Гаусса (5.9) получены нами в конечном виде через эллиптические интегралы Лежандра [16].

6. Проблема конфайнмента колец вокруг малых тел Солнечной системы

6.1. Кольца вокруг малых тел

Кольца вокруг небесных тел давно привлекают внимание исследователей. Изложение истории вопроса от Ньютона до 1990 г. см. в книге Фридмана и Горькавого [18], где изучаются кольца вокруг четырёх планет-гигантов в Солнечной системе. Резкий край колец там объясняется механизмом столкновений частиц и резонансами орбит частиц со спутниками-пастухами.

После недавнего открытия колец у малых небесных тел (астероида-кентавра Chariklo [19] и двух объектов пояса Койпера Haumea [20, 21] и Quaoar [22]), интерес к динамике колец ещё более возрос. Эти кольца отличаются от колец планетного типа: они узкие, находятся за пределом Роша центрального тела и не имеют спутников-пастухов. Поэтому для них остро встаёт проблема описания вековой эволюции и создания новых механизмов сохранения формы. Любопытно также, что движение частиц кольца у малых тел часто находится в спириорбитальном резонансе 3:1 с центральным телом. Для решения проблемы конфайнмента основное внимание у нас уделяется механизму самогравитации колец.

Для реализации механизма самогравитации колец применим модель двух колец Гаусса [23]. Проблема конфайнмента сложная и решается в несколько этапов. На первом этапе создаётся модель составного кольца, где узкое 2D кольцо представлено системой из двух близких колечек Гаусса. Необходимым условием стабилизации формы составного кольца является учёт его самогравитации через взаимную энергию граничных колечек W_{mut} . Сама функция W_{mut} в (5.9) представлена рядом с точностью до четвёртой степени малых параметров задачи.

В задаче с кольцами следует учитывать также, что центральный эллипсоид с полуосями $a_1 > a_2 > a_3$ совершает быстрое вращение вокруг малой оси, поэтому для изучения вековых эффектов в движении частиц кольца надо усреднить потенциал эллипсоида по азимутальному углу λ в интервале $(0, 2\pi)$. После усреднения потенциал примет вид [23]

$$\varphi(r, z) \approx \frac{GM}{r} \left[1 + \frac{1}{2} C_{20} \left(\frac{R_0}{r} \right)^2 \left(3 \left(\frac{z}{r} \right)^2 - 1 \right) + \frac{1}{8} \times C_{40} \left(\frac{R_0}{r} \right)^4 \left(35 \left(\frac{z}{r} \right)^4 - 30 \left(\frac{z}{r} \right)^2 + 3 \right) \right], \quad (6.1)$$

где z — высота пробной частицы над плоскостью условного экватора. Зональные коэффициенты C_{20} и C_{40} в потенциале (6.1) равны:

$$C_{20} = \frac{2a_3^2 - a_1^2 - a_2^2}{10R_0^2},$$

$$C_{40} = 3 \frac{3(a_1^4 + a_2^4) + 8a_3^4 + 2a_1^2 a_2^2 - 8(a_1^2 + a_2^2) a_3^2}{280R_0^4}. \quad (6.2)$$

6.2. Уравнения эволюции двух колец

в коллективных переменных в центральном поле

В коллективных переменных [23] получим систему 8 дифференциальных уравнений эволюции колец в центральном (индекс c) поле:

$$\left(\frac{d\Delta\omega}{dt} \right)_c = -\frac{3}{16} C_{20} n \left(\frac{R}{a} \right)^2 \left[20 (\cos^2 i_2 - \cos^2 i_1) - 7 \frac{\Delta a}{a} (5 (\cos^2 i_2 + \cos^2 i_1) - 2) \right], \quad (6.3)$$

$$\left(\frac{d\omega}{dt} \right)_c = -\frac{3}{8} C_{20} n \left(\frac{R}{a} \right)^2 \left[5 (\cos^2 i_2 + \cos^2 i_1) - 2 - \frac{35}{4} \frac{\Delta a}{a} (\cos^2 i_2 - \cos^2 i_1) \right], \quad (6.4)$$

$$\left(\frac{d\Delta e}{dt} \right)_c = -\frac{15}{32} C_{40} n \left(\frac{R}{a} \right)^4 (\sin^2 i_1 \sin 2\omega_1 (7 \cos^2 i_1 - 1) \times e_1 - \sin^2 i_2 \sin 2\omega_2 (7 \cos^2 i_2 - 1) e_2), \quad (6.5)$$

$$\left(\frac{de}{dt} \right)_c = -\frac{15}{64} C_{40} n \left(\frac{R}{a} \right)^4 (\sin^2 i_1 \sin 2\omega_1 (7 \cos^2 i_1 - 1) \times e_1 + \sin^2 i_2 \sin 2\omega_2 (7 \cos^2 i_2 - 1) e_2), \quad (6.6)$$

$$\left(\frac{d\Delta\Omega}{dt} \right)_c = -\frac{3}{8} C_{20} n \left(\frac{R}{a} \right)^2 \left[4 (\cos i_1 - \cos i_2) - 7 \frac{\Delta a}{a} (\cos i_1 + \cos i_2) \right], \quad (6.7)$$

$$\left(\frac{d\Omega}{dt} \right)_c = -\frac{3}{16} C_{20} n \left(\frac{R}{a} \right)^2 \left[4 (\cos i_1 + \cos i_2) - 7 \frac{\Delta a}{a} (\cos i_1 - \cos i_2) \right], \quad (6.8)$$

$$\left(\frac{d\Delta i}{dt} \right)_c = \frac{15}{64} C_{40} n \left(\frac{R}{a} \right)^4 \left[\sin 2i_1 \sin 2\omega_1 (7 \cos^2 i_1 - 1) e_1^2 - \sin 2i_2 \sin 2\omega_2 (7 \cos^2 i_2 - 1) e_2^2 + \frac{11}{4} \frac{\Delta a}{a} \times (\sin 2i_1 \sin 2\omega_1 (7 \cos^2 i_1 - 1) e_1^2 + \sin 2i_2 \sin 2\omega_2 (7 \cos^2 i_2 - 1) e_2^2) \right], \quad (6.9)$$

$$\left(\frac{di}{dt} \right)_c = -\frac{15}{128} C_{40} n \left(\frac{R}{a} \right)^4 \left[\sin 2i_1 \sin 2\omega_1 (7 \cos^2 i_1 - 1) e_1^2 + \sin 2i_2 \sin 2\omega_2 (7 \cos^2 i_2 - 1) e_2^2 + \frac{11}{4} \frac{\Delta a}{a} \times (\sin 2i_1 \sin 2\omega_1 (7 \cos^2 i_1 - 1) e_1^2 - \sin 2i_2 \sin 2\omega_2 (7 \cos^2 i_2 - 1) e_2^2) \right], \quad (6.10)$$

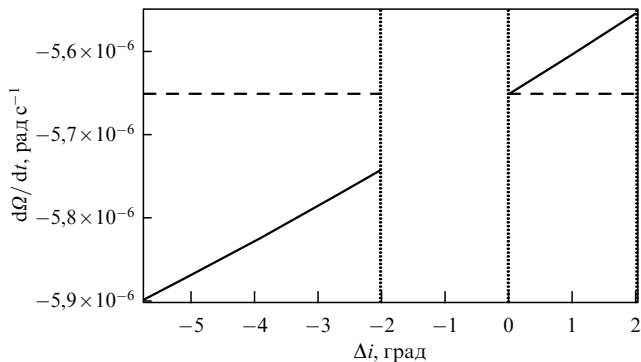


Рис. 8. Прецессия узлов $d\Omega/dt$ кольца Хаумеа в плоскости экватора центрального тела в зависимости от разности углов наклона границ этого кольца Δi . Горизонтальной штриховой линией обозначено значение угловой скорости без учёта самогравитации кольца (что даёт $T_Q = 12,9 \pm 0,7$ сут). С учётом самогравитации кольца результаты расчётов показаны наклонной линией в правом верхнем прямоугольнике. (По работе [23].)

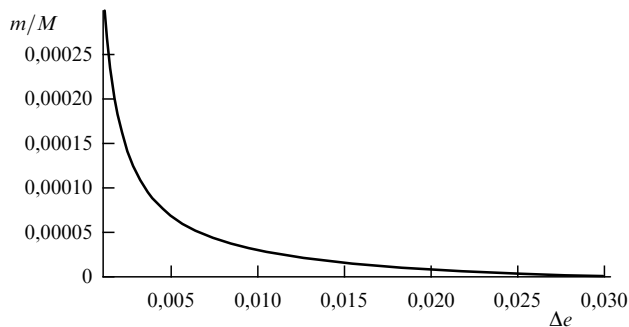


Рис. 9. Отношение массы кольца Хаумеа к массе самой Хаумеа m/M в зависимости от разности эксцентриситетов границ этого кольца Хаумеа Δe , при максимальном среднем арифметическом эксцентриситете этих двух границ Хаумеа $e = e_{max}$. (По статье [23].)

Из этих уравнений была рассчитана, например, прецессия кольца Хаумеа в плоскости её экватора [23]. Результаты вычислений показаны на рис. 8.

Согласно рис. 8, учёт самогравитации уменьшает время нодальной прецессии кольца.

6.3. Условие конфайнмента колец

Для компланарных эллиптических колец, пренебрегая наклоном кольца Хаумеа к экваториальной плоскости, условия конфайнмента имеют вид [23]:

$$\left(\frac{d\Delta e}{dt}\right)_r + \left(\frac{d\Delta e}{dt}\right)_c = 0, \quad \left(\frac{d\Delta \bar{\omega}}{dt}\right)_r + \left(\frac{d\Delta \bar{\omega}}{dt}\right)_c = 0. \quad (6.11)$$

Критерий для компланарных эллиптических колец даёт $\Delta \bar{\omega} = 0$, т.е. линии апсид граничных колечек должны совпадать. Для круговых колец с наклоном критерием конфайнмента является совпадение линий узлов.

6.4. Ограничение на массу кольца Хаумеа

Согласно уравнениям (6.3)–(6.10), приведенная масса кольца должна зависеть от эксцентриситетов граничных колечек (рис. 9).

В итоге находим, что масса кольца Хаумеа должна удовлетворять неравенствам

$$10^{-4} < \frac{m}{M} < 10^{-3}. \quad (6.12)$$

7. Двумерное обобщение кольца Гаусса — модель R-диска

По законам небесной механики, из-за внешних возмущений и эффектов ОТО возникает апсидальная прецессия кольца Гаусса. В итоге, при азимутальном усреднении получается R-диск (рис. 10). Такие R-кольца образуются: (а) или из многих одиночных колец Гаусса, линии апсид которых равномерно распределены по азимутальному углу, (б) или заполняются розеточными прецессирующими вокруг центральной массы орбитами. Полезность модели определяется тем, что такие R-кольца естественным образом могут формироваться в планетных системах и в центральных областях плоских галактик.

7.1. Структура R-кольца

Опираемся на работы [24, 25]. Классический интеграл в задаче двух тел

$$V^2 = GM \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right). \quad (7.1)$$

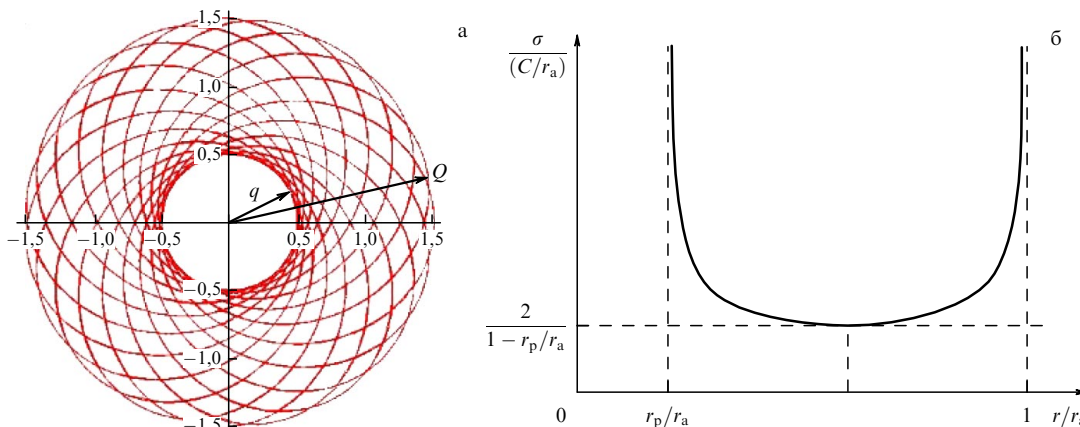


Рис. 10. (а) R-кольцо, заполненное розеточной орбитой; (б) плотность в R-кольце как функция нормированного радиуса точки. (По статье [25].)

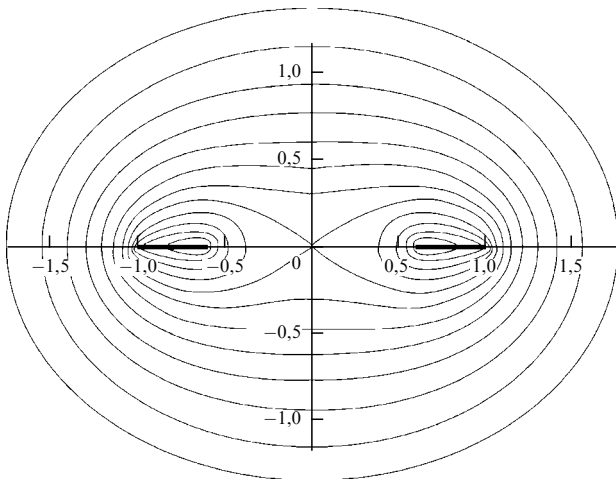


Рис. 11. Эквипотенциалы R-кольца в меридиональной плоскости. Сечение кольца показано жирной линией [14].

Так как движение плоское $V^2 = V_r^2 + V_\theta^2$ азимутальную компоненту исключим через угловой момент частицы $rV_\theta = \sqrt{GMa(1-e^2)}$. Тогда

$$V_r = V_0 \frac{\sqrt{(Q-r)(r-q)}}{r}. \quad (7.2)$$

В узком кольце на расстоянии $(r, r + dr)$ от притягивающего тела тело находится в интервале времени

$$dt = \frac{r dr}{V_0 \sqrt{(Q-r)(r-q)}}. \quad (7.3)$$

Следовательно, вероятность нахождения тела в узком кольце равна

$$d\omega = \frac{2 dt}{T} = \frac{r dr}{\pi a \sqrt{(Q-r)(r-q)}}. \quad (7.4)$$

Масса узкого кольца равна

$$dM = 2\pi r \sigma(r) dr, \quad (7.5)$$

так что распределение плотности в R-кольце будет равно

$$\sigma = \frac{C}{\sqrt{(Q-r)(r-q)}}, \quad C = \frac{M}{\pi^2(Q+q)}. \quad (7.6)$$

Видно, что плотность на внутренней и внешней круговых границах R-кольца имеет особенность.

7.2. Потенциал R-кольца

3D потенциал R-кольца даётся интегралом [14, 24, 25]

$$\varphi(r, x_3) = 4GC \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{R-r}{\sqrt{R^2+x_3^2}} K\left(\sqrt{\frac{4r(R-r)}{R^2+x_3^2}}\right) d\gamma, \quad R = \frac{Q-q}{2} \sin \gamma + \frac{Q+q}{2} + r. \quad (7.7)$$

Результаты расчёта по формуле (7.7) показаны на рис. 11.

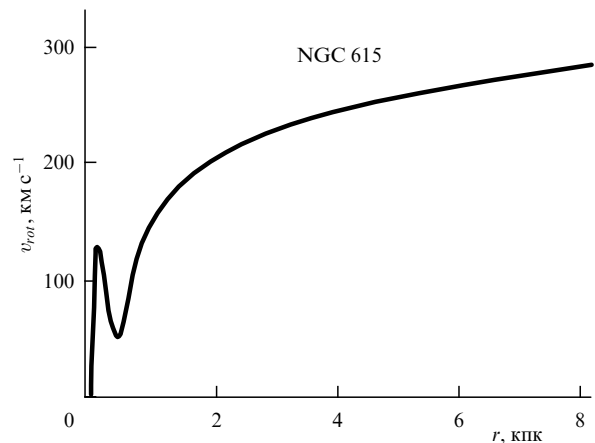


Рис. 12. Кривая вращения галактики NGC 615 как типичный пример профиля вращения у плоских галактик.

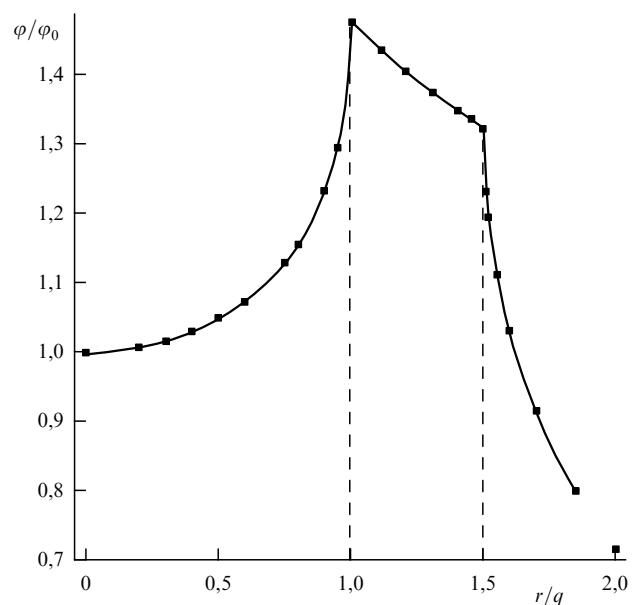


Рис. 13. Потенциал R-диска в главной плоскости. Вертикальными штрихами отмечены вход и выход из диска [25].

7.3. Применение модели R-кольца

7.3.1. Объяснение резких локальных минимумов на кривых вращения. Модель R-кольца применялась для решения нескольких задач. Упомянем здесь две из них. В первой задаче [25] модель позволила объяснить загадку существования у некоторых плоских галактик резких локальных минимумов на кривых вращения (рис. 12).

Расчёты показали, что в полости R-кольца — от центра до внутренней границы — потенциал возрастает (рис. 13), и на этом интервале действует как бы дополнительная сила "отталкивания" от центра. Затем потенциал убывает, и дополнительная сила на частицы направлена уже к центру. Если поместить такое R-кольцо в потенциал сферического (или сфероидального) балджа, то данное свойство гравитационного поля R-кольца может привести к локальному спаду скорости вращения газа вблизи q .

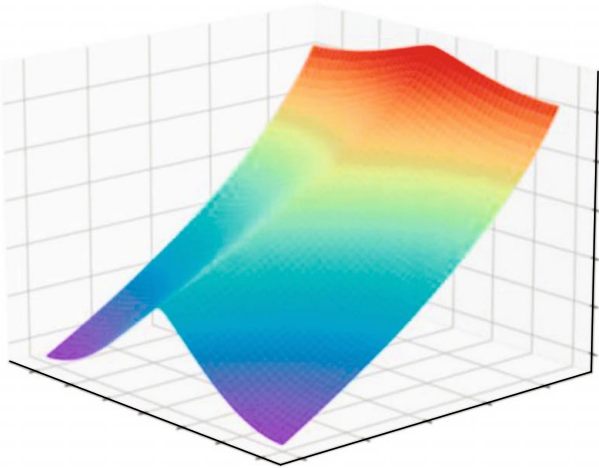


Рис. 14. Трёхмерная зависимость нормированной взаимной гравитационной энергии между R-кольцом и внешним узким круглым кольцом от угла наклона α (в рад) и радиуса r_2 (в угловых секундах). (По статье [26].)

7.3.2. Динамика звёздных дисков в центре Галактики. В другой задаче [26] модель R-кольца применялась для изучения характеристики взаимодействующих звёздных дисков ("clockwise" диск и "anticlockwise" диск) в центральном парсеке Галактики. Для этого была найдена взаимная гравитационная энергия R-кольца и внешнего круглого кольца

$$W_{\text{mut}}(r, \alpha) = -\frac{16GM_1M_2}{\pi^2(Q+q)\sqrt{r_2}} \int_0^{\pi/2} \int_q^Q \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{(Q-r)(r-q)}} \times \frac{1}{m} K\left(\frac{2n^{1/4}}{m}\right) dr d\theta, \quad (7.8)$$

где

$$n = \sin^2 \theta \cos^2 \alpha + \cos^2 \theta, \quad m = \sqrt{\frac{r^2 + r_2^2}{rr_2} + 2\sqrt{n}}. \quad (7.9)$$

Зная W_{mut} , находим момент сил между двумя звёздными кольцами

$$M = \frac{\partial W_{\text{mut}}}{\partial \alpha}. \quad (7.10)$$

Результаты расчёта момента сил между кольцами показан на рис. 15.

Для указанных звёздных колец в центральном парсеке Галактики момент сил равен

$$M = -0,447 \left(\frac{8GM_1M_2}{\pi^2\sqrt{a_1r_2}} \right). \quad (7.11)$$

С учётом (7.11), по полученным ранее формулам находим период нодальной прецессии обоих звёздных дисков [26]

$$T_{\Omega}^{(2)} = T_{\Omega}^{(1)} = \frac{\pi^3\sqrt{GM_{\text{bh}}a_1r_2}\sin\beta_1}{1,788GM_1} \approx 3,53 \times 10^5 \text{ лет}, \quad (7.12)$$

где M_{bh} — масса центральной чёрной дыры.

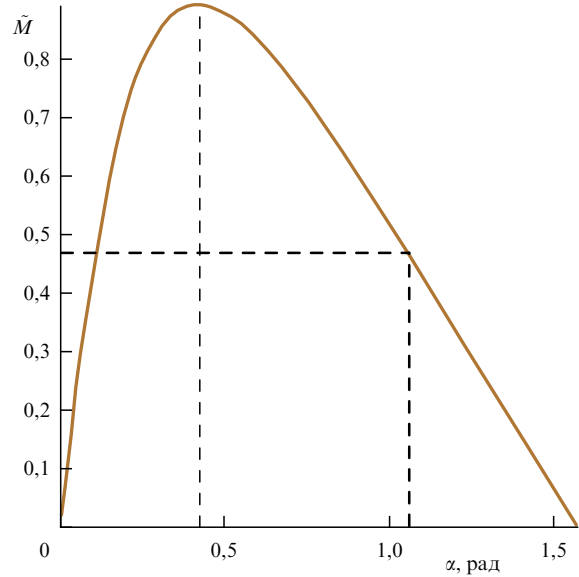


Рис. 15. Зависимость нормированного момента сил $\tilde{M} = M/(-8GM_1M_2/\pi^2\sqrt{a_1r_2})$ между широким R-кольцом и узким кольцом от угла взаимного наклона α . Кривая имеет максимум при $\alpha = 0,433(24,8^\circ)$. Положение реальной системы "диск 1 – диск 2" в Галактике $\alpha \approx 62^\circ$ отмечено жирными штрихами.

8. 3D обобщение прецессирующего кольца Гаусса (модель R-тороида)

8.1. Фигура R-тороида

Кольцо Гаусса и его 2D обобщение (R-кольцо) вошли в арсенал методов современной динамической астрономии. Но на практике встречаются задачи, когда плоскость R-кольца прецессирует вокруг некоторого направления, тогда появляется возможность дополнительного азимутального усреднения орбиты спутника. Метод получения новой фигуры включает в себя тройное усреднение движения материальной точки по "быстрым" переменным: первое усреднение даёт 1D кольцо Гаусса, на следующем этапе делается усреднение вращающегося кольца Гаусса по углу прецессии его линии апсид и получается R-кольцо; наконец, на третьем этапе мы проводим азимутальное усреднение прецессирующего R-кольца, что и даёт в итоге трёхмерный R-тороид [27–29]. Фигура R-тороида показана на рис. 16 и 17.

В сферических координатах (r, θ, φ) фигура R-тороида описывается ограничениями

$$q \leq r \leq Q, \quad -i \leq \theta \leq i. \quad (8.1)$$

8.2. Распределение плотности и потенциал R-тороида

Распределение плотности внутри R-тороида [27, 28] даётся формулой

$$\rho(r, \theta) = \frac{M}{2\pi^3 ar \sqrt{\sin^2 i - \sin^2 \theta} \sqrt{(Q-r)(r-q)}}. \quad (8.2)$$

Согласно (8.2), поверхность R-тороида представляет собой "скорлупу" с аномально высокой плотностью. Действительно, при заданном угле θ плотность (8.2) обращается в бесконечность как на внешних (при $r = Q$) ABC и A'B'C' (см. рис. 17), так и на внутренних (при $r = q$) abc и d'b'c' фронтальных участках поверхности. "Скор-

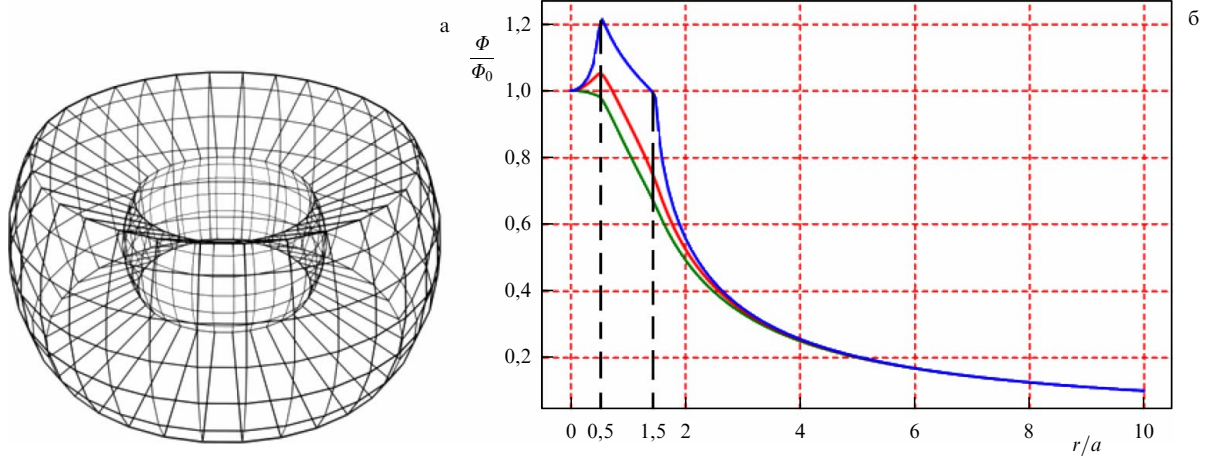


Рис. 16. Фигура R-тороида (а) и зависимость его нормированного потенциала в экваториальной плоскости (б). (По работам [27, 28].)

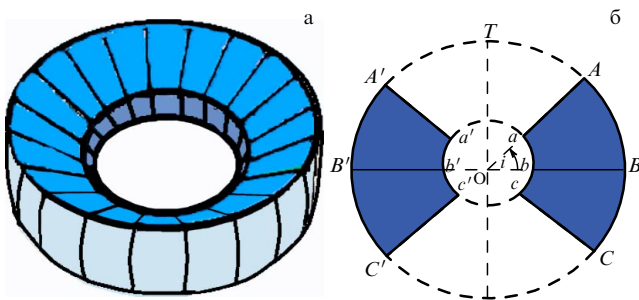


Рис. 17. R-тороид: (а) 3D изображение, (б) меридиональное сечение R-тороида (показано синим цветом). OT — ось симметрии. Внешняя (ABC и $A'B'C'$) и внутренняя (abc и $a'b'c'$) границы справа и слева есть части кругов, которые соединяются прямыми отрезками (aA, cC) и ($a'A', c'C'$). Обозначен угол i наклона плоских боковых сторон.

лупа" появляется не только из-за особенностей распределения плотности в самом R-кольце (см. рис. 10), но также из-за обращения в нуль члена $\sin^2 i - \sin^2 \theta$ в точках на плоских сторонах самого R-тороида.

При законе плотности (8.2), пространственный потенциал R-тороида будет представлен тройным интегралом

$$\Phi(r, \theta, \varphi) = \frac{GM}{2\pi^3 ar} \int_0^{2\pi} \int_{-i}^i \int_q^Q \times \frac{r' \cos \theta' dr' d\theta' d\varphi'}{\sqrt{\sin^2 i - \sin^2 \theta} \sqrt{(Q-r)(r-q)} \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \Psi}}, \quad (8.3)$$

где Ψ — угол между r и r' косинус которого равен

$$\cos \Psi = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \cos \varphi' \cos \theta' \\ \sin \varphi' \cos \theta' \\ \sin \theta' \end{pmatrix} = \cos(\varphi' - \varphi) \cos \theta' \cos \theta + \sin \theta' \sin \theta, \quad (8.4)$$

Потенциал R-тороида в экваториальной плоскости даётся двойным интегралом

$$\Phi(r, \theta) = \frac{GM}{2\pi^3 ar} \int_q^Q \frac{r' dr'}{\sqrt{(Q-r)(r-q)}} \times \int_{-i}^i \frac{\cos \theta' d\theta'}{\sqrt{\sin^2 i - \sin^2 \theta}} \frac{K(2b_1/(b_1 + b_2))}{\sqrt{b_1 + b_2}}, \quad (8.5)$$

где

$$b_1 = r^2 + r'^2, \quad b_2 = 2rr' \cos \theta'. \quad (8.6)$$

Потенциал R-тороида можно представить также в виде рядов [27, 28]. Так, в сферических координатах разложение потенциала по малым величинам обратных расстояний (a/r) с точностью до членов четвёртого порядка имеет вид

$$\Phi(r, \theta) = \frac{GM}{r} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{3}{2} e^2 \right) P_2(\cos i) P_2(\sin \theta) \left(\frac{a}{r} \right)^2 + \frac{3}{8} \left(1 + 5e^2 + \frac{15}{8} e^4 \right) P_4(\cos i) P_4(\sin \theta) \left(\frac{a}{r} \right)^4 \right\}. \quad (8.7)$$

8.3. Взаимная энергия R-тороида и внешнего кольца Гаусса.

Уравнения вековой эволюции оскулирующих орбит

Для приложений модели надо знать выражение взаимной энергии R-тороида и внешнего кольца Гаусса [27, 28].

$$W_{mut} = -\frac{GMM'}{a'} \left\{ 1 + \frac{1}{4(1-e'^2)^{3/2}} \left(1 + \frac{3}{2} e'^2 \right) \times \right. \\ \times \bar{P}_2(\cos i) \bar{P}_2(\cos i') \left(\frac{a}{a'} \right)^2 + \frac{9}{64(1-e'^2)^{7/2}} \times \\ \times \left(1 + 5e'^2 + \frac{15}{8} e'^4 \right) \bar{P}_4(\cos i) \left(\frac{a}{a'} \right)^4 \times \\ \times \left[\left(1 + \frac{1}{2} e'^2 \right) \bar{P}_4(\cos i') + \frac{e'^2}{4} (5 \cos^2 i' - 1) - \right. \\ \left. \left. - \frac{5e'^2 \sin^2 i' \sin^2 i' \sin^2 \omega'}{4} (7 \cos^2 i' - 1) \right] \right\}, \quad (8.8)$$

где $\bar{P}_2(x)$ и $\bar{P}_4(x)$ — полиномы Лежандра второй и четвёртой степени.

С помощью (8.8) в [27, 28] была получена система уравнений вековой эволюции оскулирующих орбит в

гравитационном поле R-тороида:

$$\begin{aligned} \left(\frac{de'}{dt}\right)_p &= \frac{15n'}{16} C_{40}^p \frac{M}{M_*} \left(\frac{a}{a'}\right)^4 \times \\ &\times \frac{\sin^2 i' (7 \cos^2 i' - 1) e' \sin \omega' \cos \omega'}{(1 - e'^2)^3}, \\ \left(\frac{di'}{dt}\right)_p &= -\frac{15n'}{16} C_{40}^p \frac{M}{M_*} \left(\frac{a}{a'}\right)^4 \times \\ &\times \frac{\sin i' \cos i' (7 \cos^2 i' - 1) e'^2 \sin \omega' \cos \omega'}{(1 - e'^2)^4}, \quad (8.9) \\ \left(\frac{d\Omega'}{dt}\right)_p &= \frac{3n'}{2} C_{20}^p \frac{M}{M_*} \left(\frac{a}{a'}\right)^2 \frac{\cos i'}{(1 - e'^2)^2}, \\ \left(\frac{d\omega'}{dt}\right)_p &= -\frac{3n'}{4} C_{20}^p \frac{M}{M_*} \left(\frac{a}{a'}\right)^2 \frac{5 \cos^2 i' - 1}{(1 - e'^2)^2}, \end{aligned}$$

где M_* — масса центральной звезды, M — масса планеты (R-тороида), а коэффициенты зональных гармоник поля R-тороида при нормировочном радиусе $R = a$ равны

$$\begin{aligned} C_{20}^p &= -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{3}{2} e^2\right) \bar{P}_2(\cos i), \\ C_{40}^p &= \frac{3}{8} \left(1 + 5e^2 + \frac{15}{8} e^4\right) \bar{P}_4(\cos i). \quad (8.10) \end{aligned}$$

9. Применение модели R-тороида

В последние годы исследования внесолнечных планетных систем идёт бурными темпами, и постоянный приток новых данных ставит новые сложные задачи. Модели взаимодействующих и прецессирующих колец Гаусса дают новую трактовку сложных задач в теории возмущений и позволяют упрощать расчёты методом возмущающей функции Лагранжа. Среди экзопланет особый интерес вызывает класс горячих юпитеров, имеющих большие массы, тесные орбиты и сравнительно короткие периоды узловой прецессии. Для решения этих задач перспективным является применение модели R-тороида.

9.1. Ограничение на применение модели R-тороида

Следует подчеркнуть, что модель R-тороида предназначена для изучения вековой эволюции внешних орбит, большие полуоси которых *превышают* некоторое критическое (минимальное) значение a_{\min} . При известном периоде узловой прецессии возмущающего тела T_Ω , значение a_{\min} рассчитывается по формуле [27]

$$a_{\min} \approx \left(\frac{\kappa}{2\pi} T_\Omega\right)^{3/2}, \quad \kappa^2 = G(M + m). \quad (9.1)$$

Приведём пример и рассчитаем по формуле (9.1) a_{\min} для планет-гигантов Юпитера и Сатурна. Для этого необходимо знать два периода: период движения планеты вокруг Солнца (он хорошо известен $T_{\text{orb}} \approx 11,862$ лет) и период прецессии узла орбиты Юпитера $T_{J\Omega}$. По данным [30], в линейном приближении соответствующий период нодальной прецессии будет примерно равен $T_{J\Omega} \approx 20370,84$ лет. Это и есть характерное время создания R-тороида для Юпитера, так как на меньших масштабах времени фигура R-тороида для Юпитера не будет пол-

ной. Угол наклона орбиты Юпитера к эклиптике в настоящее время мал и равен $i \approx 1^\circ,30327$. Ширина R-кольца для Юпитера равна $2ea \approx 0,50$ а.е. Отсюда следует, что вековое влияние R-тороида Юпитера можно рассматривать только на те небесные тела, большие полуоси орбит которых удовлетворяют неравенству $a \geq 747$ а.е. Следовательно, для Юпитера $a_{\min} \approx 747$ а.е. Аналогичные расчёты для Сатурна дают $a_{\min} \approx 582$ а.е. Таким образом, модели R-тороидов для Юпитера и Сатурна позволяют рассчитать вековые эффекты не только в движении гипотетической Планеты 9 (с принятыми для неё параметрами $a \approx 400-800$ а.е., но также и в движении седноидов и некоторых экстремальных транснептуновых объектов (eTNO).

Приведём примеры расчёта a_{\min} для некоторых экзопланет.

PTFO 8-8695b

Согласно [32], экзопланета PTFO 8-8695b (горячий юпитер) движется по сильно наклонённой орбите вокруг центральной звезды. Для неё $a = 0,0084$ а.е. и $T_{\text{orb}} \approx 10,76$ ч, поэтому PTFO 8-8695b является одной из самых близко расположенных к звезде экзопланет. Критическое значение большой полуоси орбиты a_{\min} для неё составляет всего $a_{\min} \approx 0,2 \pm 0,7$ а.е. Таким образом, модель R-тороида для планеты PTFO 8-8695b позволяет описывать эволюцию орбит тел, которые очень близко подходят к центральной звезде. Примечательно, что вторая планета в этой системе PTFO 8-8695c находится очень далеко от центральной звезды $a = 662$ а.е. и заведомо попадает в зону гравитационного воздействия R-тороида для PTFO 8-8695b.

Экзопланета Kepler-413b

Рассмотрим пример циркумбинарной планеты Kepler-413b. Согласно [31], она обращается с периодом $T_{\text{orb}} \approx 66,262$ сут вокруг тесной пары звёзд классов K и M с массами $M_1 = 0,820 \pm 0,015 M_\odot$ и $M_2 = 0,542 \pm 0,008 M_\odot$. Звёзды обращаются вокруг центра масс всего за $10,11615 \pm 0,00001$ суток по почти круговым ($e = 0,037 \pm 0,002$) орбитам. Радиус и масса экзопланеты равны $R \approx 0,388 R_J$, $M \approx 0,2110 M_J$. По этим характеристикам, данная экзопланета близка к горячим Сатурнам. Параметры орбиты планеты равны $e = 0,118$, $q \approx 0,3553$ а.е., $i \approx 30^\circ$, а период узловой прецессии равен $T_\Omega \approx 11$ лет [31]. Следовательно, для этой планеты $T_\Omega/T_{\text{orb}} \approx 60,83$. По этим данным можно рассчитать критическое значение большой полуоси орбиты, которое оказывается равным $a_{\min} \approx 5,48$ а.е. Таким образом, для системы Kepler-413 модель R-тороида позволяет описывать эволюцию пробных орбит, расположенных на умеренных (несколько астрономических единиц) расстояниях от центральной звезды.

9.2. Двупланетная задача (звезда + две планеты)

Актуальной для внесолнечных систем является двупланетная задача (звезда + две планеты). В статье [27] были найдены отношения периодов нодальной и апсидальной прецессии для орбит

$$\frac{T_{1\Omega}}{T_{1\omega}} = \frac{m_1 + 2\kappa m_2}{m_1 + \kappa m_2}, \quad \frac{T_{2\Omega}}{T_{2\omega}} = \frac{2m_1 + \kappa m_2}{m_1 + \kappa m_2}, \quad (9.2)$$

(m_1 и m_2 — массы планет). Для проверки заметим, что применение формул (9.2) к системе "Солнце — Юпитер — Сатурн" даёт $T_{J\Omega}/T_{J\omega} \approx 1,181$, что близко к точному расчёту $T_{J\Omega}/T_{J\omega} \approx 1,219$.

9.3. Отношение периодов узловой и апсидальной прецессий

Отношение периодов узловой и апсидальной прецессии орбиты в поле R-тороида равно [27]

$$\frac{T'_\Omega}{T'_\omega} = \left| \frac{\dot{\omega}}{\dot{\Omega}} \right| = \frac{5 \cos^2 i' - 1}{2 \cos i'} \approx 2 \left(1 - \frac{3}{4} i'^2 + O(i'^6) \right). \quad (9.3)$$

Из (9.3) следует, что отношение периодов узловой и апсидальной прецессий кольца Гаусса, находящегося в гравитационном поле R-тороида, слабо зависит от наклона кольца и оказывается чуть меньше двух

$$\frac{T'_\Omega}{T'_\omega} \leq 2. \quad (9.4)$$

В случае рассмотрения возмущений только от центрального тела, в частности, при $i = 0$, уравнение (9.3) даёт $T'_\Omega/T'_\omega = 2$. Этот результат подтверждён при численном моделировании динамики экзопланеты КОИ 120.01 [31].

9.4. Вековая эволюция экзопланетных систем.

Метод трёх R-тороидов

Для изучения эволюции орбит циркумбинарных экзопланет в [29] был развит расширенный метод с применением системы из трёх R-тороидов: здесь для каждого из трёх тел создаётся свой R-тороид, описывающих двойную звезду и экзопланету. Рассматриваются две задачи. В первой ставится цель исследовать прецессию пробных орбит в силовом поле трёх R-тороидов. Во второй задаче методом колец Гаусса изучается вековая эволюция орбит звёзд и экзопланеты самой циркумбинарной системы.

В первой задаче в гравитационном поле трёх R-тороидов исследуются апсидальная и нодальная прецессия пробной орбиты. Чтобы оценить периоды прецессии для циркумбинарной планеты Kepler-413b, нужно рассмотреть суммарный вклад от трёх R-тороидов: двух R-тороидов, соответствующих звёздам и одному R-тороиду для планеты. Необходимые уравнения из (8.9) для каждого из R-тороидов запишутся в виде

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\Omega}{dt} \right)_R &= \dot{\Omega}_R^0 \left(\frac{1 \text{ a.e.}}{a} \right)^{7/2} \frac{\cos i}{(1-e^2)^2}, \\ \left(\frac{d\omega}{dt} \right)_R &= \dot{\omega}_R^0 \left(\frac{1 \text{ a.e.}}{a} \right)^{7/2} \frac{5 \cos^2 i - 1}{4(1-e^2)^2}, \end{aligned} \quad (9.5)$$

где $R = \{1, 2, p\}$ — индекс, обозначающий конкретный R-тороид ($R = 1, 2$ относится к двойной звезде, $R = p$ относится к планете). Коэффициенты частот в (9.5) равны

$$\dot{\Omega}_R^0 = \frac{3}{2} C_{20}^R \frac{m_R}{M_R} \sqrt{\frac{GM_R}{a_R^3}}, \quad \dot{\omega}_R^0 = -2\dot{\Omega}_R^0, \quad (9.6)$$

$$\bar{M}_1 = \frac{M_2^3}{(M_1 + M_2)^2}, \quad \bar{M}_2 = \frac{M_1^3}{(M_1 + M_2)^2}. \quad (9.7)$$

а коэффициенты зональных гармоник R-тороидов

$$\begin{aligned} C_{20}^R &= -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{3}{2} e_R^2 \right) \frac{3 \cos^2 i_R - 1}{2}, \\ C_{40}^R &= \frac{3}{8} \left(1 + 5e_R^2 + \frac{15}{8} e_R^4 \right) \frac{35 \cos^4 i_R - 30 \cos^2 i_R + 3}{8}. \end{aligned} \quad (9.8)$$

В итоге, для частот и периодов пробной планеты имеем выражения

$$\begin{aligned} \dot{\Omega}_{12p}^0 &= \dot{\Omega}_1^0 + \dot{\Omega}_2^0 + \dot{\Omega}_p^0, \quad \dot{\omega}_{12p}^0 = -2\dot{\Omega}_{12p}^0, \\ T_\Omega^{12p} &= \frac{2\pi}{|(\dot{\Omega}/\dot{t})_{12p}^0|}, \quad (T_\omega^{12p})_0 = \frac{1}{2} T_\Omega^{12p}. \end{aligned} \quad (9.9)$$

Для системы Kepler-413 при значении $a = a_{\text{cr}}$ имеем оценку периода апсидальной прецессии $T_\omega^{12p} = (102 \pm 1)10^3$ лет, а для периода прецессии долготы восходящего узла $T_\Omega^{12p} = (203 \pm 3) \times 10^3$ лет.

Исследование вековой эволюции орбит для большой выборки циркумбинарных экзопланет (на основе данных наблюдений из [33]) по изложенной выше методике трёх R-тороидов было проведено в статье [29]. Для каждой системы из выборки мы (а) создали суперпозицию трёх R-тороидов, (б) оценили угловые моменты звёздной пары и планеты относительно плоскости Лапласа, (в) нашли коэффициенты второй и четвёртой зональных гармоник и (д) вывели и решили уравнения для частот обоих типов прецессии на тестовых орбитах. В гравитационном поле R-тороида отношение периодов апсидальной и нодальной прецессии на гауссовом кольце с нулевым наклоном оказалось равным (-2) .

10. Заключение

В работе дан обзор четырёх новых аналитических методов в современной динамической астрономии: метод колец (и систем колец) Гаусса, метод векторов ориентации орбит, а также методы, основанные на двумерных (R-диски) и трёхмерных (R-тороиды) моделях, построенных на основе прецессирующих колец Гаусса.

Изложен метод нахождения в аналитическом виде потенциала кольца Гаусса. Для изучения эволюции орбит вместо оскулирующих кеплеровских элементов разработан метод новых переменных, описывающих форму и ориентацию орбит: вектор Лапласа \mathbf{L} , вектор Гамильтона \mathbf{H} и вектор орбитального углового момента \mathbf{I} тела. Если в обычной задаче двух тел — это векторные интегралы движения, то в задаче с возмущениями вместо них имеем искомые функции от времени. В этих переменных в линейном приближении получены уравнения эволюции указанных векторов ориентации орбит, заменяющие классические уравнения Лагранжа. Данный подход применяется к изучению вековой эволюции экзопланет с произвольной ориентацией орбит относительно картинной плоскости наблюдателя. Метод тестирован на экзосистеме HD 206893.

Рассматривается актуальная проблема удержания формы (конфайнмента) колец вокруг малых тел солнечной системы. Эти кольца отличаются от колец планетного типа: они узкие, находятся за пределом Роша центрального тела и не имеют спутников-пастухов. Поэтому для них остро встает проблема описания вековой эволюции и создания новых механизмов сохранения формы. Любопытно также, что движение частиц в кольцах у малых тел часто находятся в спин-орбитальном резонансе 3:1 с вращением центрального тела. Для решения проблемы конфайнмента основное внимание у нас уделяется механизму самогравитации колец. Для реализации механизма самогравитации колец применяется модель двух колец Гаусса.

На основе прецессирующих колец Гаусса построены две новые модели — R-кольцо и R-тороид. Метод их построения включает в себя двойное и, соответственно, тройное усреднение движения материальной точки по "быстрым" переменным. Детально рассматривается структура этих моделей и их пространственный потенциал. В качестве приложений методов рассматриваются задачи о прецессии звёздных колец в центре Галактики и вековая эволюция орбит в двухпланетных и циркумбинарных системах экзопланет. Для изучения вековой эволюции экзопланетных систем был разработан метод трёх R-тороидов. Известные из литературы методы исследования циркумбинарных систем оказались частными случаями разработанного здесь подхода; наш метод R-тороидов дополнительно учитывает эксцентриситеты и наклоны орбит тел к плоскости Лапласа, а также гравитационное возмущение от третьего тела (планеты).

Список литературы

- Тодхантер И *История математических теорий притяжения и фигуры Земли от Ньютона до Лапласа* (М.: УРСС, 2002); Пер. с англ. яз.: Todhunter I A *History of the Mathematical Theories of Attraction and the Figure of the Earth from the Time of Newton to that of Laplace* (London: Macmillan and Co., 1873)
- Субботин М Ф *Введение в теоретическую астрономию* (М.: Наука, 1968)
- Дубошин Г Н *Небесная механика. Основные задачи и методы* (М.: Наука, 1975)
- Емельянов Н В *Динамика естественных спутников планет на основе наблюдений* (Фрязино: Век 2, 2019); Пер. на англ. яз.: Emelyanov N *The Dynamics of Natural Satellites of the Planets* (Amsterdam: Elsevier, 2020)
- Кондратьев Б П *Астрон. журн.* **100** 630 (2023); Kondratyev V P *Astron. Rep.* **67** 742 (2023)
- Морбиделли А *Современная небесная механика. Аспекты динамики Солнечной системы* (М.–Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., 2014); Пер. с англ. яз.: Morbidelli A *Modern Celestial Mechanics* (London: Taylor and Francis, 2002)
- Голдстейн Г, Пул Ч, Сафко Дж *Классическая механика* (М.–Ижевск: РХД, 2012); Пер. с англ. яз.: Goldstein H, Poole C, Safko J *Classical Mechanics* 3rd ed. (San Francisco, CA: Addison Wesley, 2002)
- Роузвер Н Т *Перигелий Меркурия от Леверье до Эйнштейна* (М.: Мир, 1985); Пер. с англ. яз.: Roseveare N T *Mercury's Perihelion from Le Verrier to Einstein* (Oxford: Clarendon Press, 1982)
- NASA Exoplanet Archive. California Institute of Technology, <https://exoplanetarchive.ipac.caltech.edu>
- Кондратьев Б П, Корноухов В С, Киреева Е Н *Вестн. Московского ун-та Сер. 3. Физика. Астрономия* **80** 2520802 (2025); Kondratyev B P, Kornoukhov V S, Kireeva E N *Moscow Univ. Phys. Bull.* **80** 349 (2025)
- Hinkley S et al. (GRAVITY Collab.) *Astron. Astrophys.* **671** L5 (2023)
- Kondratyev B P, Kornoukhov V S *Moscow Univ. Phys. Bull.* **80** (Suppl. 1) S34 (2025)
- Mastroianni R, Efthymiopoulos Ch, in *Multi-Scale (Time and Mass) Dynamics of Space Objects, 18–22 October, 2021, Romania* (Proc. of the Intern. Astronomical Union, No. 364, Eds A Celletti et al.) (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2022) p. 191, DOI:10.1017/S1743921321001368
- Кондратьев Б П *Теория потенциала. Новые методы и задачи с решениями* (М.: Мир, 2007)
- Кондратьев Б П *Астрон. вестн. Исслед. солнечной системы* **46** 380 (2012); Kondratyev B P *Solar Syst. Res.* **46** 352 (2012)
- Кондратьев Б П *Астрон. вестн. Исслед. солнечной системы* **48** 396 (2014); Kondratyev B P *Solar Syst. Res.* **46** 366 (2014)
- Кондратьев Б П, Корноухов В С *Астрон. журн.* **97** 408 (2020); Kondratyev B P, Kornoukhov V S *Astron. Rep.* **64** 434 (2020)
- Горькавый Н Н, Фридман А М *Физика планетных колец. Небесная механика сплошной среды* (М.: Наука, 1994); Пер. на англ. яз.: Fridman A M, Gorkavyi N N *Physics of Planetary Rings. Celestial Mechanics of Continuous Media* (Berlin: Springer-Verlag, 1999)
- Braga-Ribas F et al. *Nature* **508** 72 (2014)
- Ortiz J L et al. *Nature* **550** 219 (2017)
- Kondratyev B P, Kornoukhov V S *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **478** 3159 (2018)
- Pereira C L et al. *Astron. Astrophys.* **673** L4 (2023)
- Кондратьев Б П, Корноухов В С *Астрон. журн.* **101** 660 (2024); Kondratyev B P, Kornoukhov V S *Astron. Rep.* **68** 688 (2024)
- Kondratyev B P, Trubitsina N G, Mukhametshina E S, in *Order and Chaos in Stellar and Planetary Systems, Proc. of the Conf., 17–24 August, 2003, St. Petersburg, Russia* (ASP Conf. Proc., Vol. 316, Eds G G Byrd et al.) (San Francisco, CA: Astronomical Society of the Pacific, 2004) p. 326
- Kondratyev B P *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **442** 1755 (2014)
- Кондратьев Б П, Ключинский К А *Вестн. Московского ун-та Сер. 3 Физика. Астрономия* **79** 2450881 (2024); Kondratyev B P, Klyuchinsky K A *Moscow Univ. Phys. Bull.* **79** 627 (2024)
- Кондратьев Б П, Корноухов В С *Астрон. журн.* **98** 407 (2021); Kondratyev B P, Kornoukhov V S *Astron. Rep.* **65** 412 (2021)
- Кондратьев Б П, Корноухов В С *Астрон. журн.* **98** 571 (2021); Kondratyev B P, Kornoukhov V S *Astron. Rep.* **65** 588 (2021)
- Кондратьев Б П, Корноухов В С *Астрон. журн.* **99** 1029 (2022); Kondratyev B P, Kornoukhov V S *Astron. Rep.* **66** 1063 (2022)
- Simon J L et al. *Astron. Astrophys.* **282** 663 (1994)
- Welsh W F et al. *Astrophys. J.* **809** 26 (2015)
- Raetz St et al. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **460** 2834 (2016)
- Kostov V B et al. *Astrophys. J.* **784** 14 (2014)

From Kepler's ellipses — to R-toroids

B.P. Kondratyev

⁽¹⁾ *Lomonosov Moscow State University, Shternberg State Astronomical Institute, Universitetskii prosp. 13, 119234 Moscow, Russian Federation*

⁽²⁾ *Central Astronomical Observatory Russian Academy of Sciences at Pulkovo, Pulkovskoe shosse 65/1, 196140 St. Petersburg, Russian Federation*

E-mail: work@boris-kondratyev.ru

An overview of new directions in modern celestial mechanics is given. The starting point is the Gaussian ring, the gravitational potential of which is obtained in analytical form. Instead of osculating Keplerian elements, a set of new variables is introduced: these are the Laplace and Hamilton vectors, as well as the vector of the orbital angular momentum of the body. In the linear approximation, the evolution equations in new variables are obtained, replacing the classical Lagrange equations. The method is tested on the exosystem HD 206893. The problem of confinement of rings around small celestial bodies is considered. Two new approaches based on two-dimensional (R-disk) and three-dimensional (R-toroid) generalizations of precessing Gauss rings are presented. The methods are tested by solving problems on the dynamics of stellar rings in the Galaxy and the secular evolution of orbits in various exoplanet systems.

Keywords: Kepler ellipses, Gaussian ring and its potential, orbital orientation vectors, confinement of rings around small celestial bodies, precession of Gauss rings: R-ring and R-toroid models, dwarf planet Haumea, two-planet problems, circumbinary exosystems

PACS numbers: 02.30.Em, 95.10.Ce, 96.15.De, 96.30.Wr, **97.82.** –j

Bibliography — 33 references

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **196** (4) 422–435 (2026)

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.2025.09.040024>

Received 17 August 2025

Physics – Uspekhi **69** (4) (2026)

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNe.2025.09.040024>